

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Фізичний факультет  
Кафедра фізики низьких температур

«Допущено до захисту»  
в.о. зав. кафедри фізики  
низьких температур  
проф. Шкловський В.О. \_\_\_\_\_  
«13» червня 2025 р.

Оцінка «\_\_\_\_\_»  
Голова ЕК,  
д-р фіз.-мат. наук, с.н.с.  
Сорокін О. В. \_\_\_\_\_  
«19» червня 2025 р.

ЛИХОЛЬОТ Олеся Михайлівна

**Синхронізоване випромінювання пачки з двох контактів  
Джозефсона з резистивним та індуктивним зв'язком**

Дипломна робота на здобуття  
освітнього ступеня «Бакалавр» за  
спеціальністю 104 – «Фізика та  
астрономія»  
освітня програма – «Фізика»

Науковий керівник:  
канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри  
фізики низьких температур  
ГРИБ Олександр

Рецензент:  
канд. фіз.-мат. наук,  
старший дослідник  
зав. від. мікроконт. спектроск.  
фіз.-тех. інституту низ. темп.  
ТЕРЕХОВ Андрій

Харків 2025

## АНОТАЦІЯ

### Анотація

Лихольот О. М. «Синхронізоване випромінювання пачки з двох контактів Джозефсона з резистивним та індуктивним зв'язком». – Рукопис. Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня «Бакалавр» за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія» – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2024. – С.33 , Рис. 10.

Потужність випромінювання і залежності напруги від струму для пачки з двох довгих контактів Джозефсона розраховані для умови різних температур на кінцях пачки. Довгі контакти в пачці з'єднані між собою за допомогою індуктивного і резистивного зв'язку. Знайдена сильна синфазна синхронізація осциляцій напруги на сходинках Фіске і сходинках нульового поля. Показано, що наявність електричного опору в зв'язку між контактами приводить до зникнення синфазної синхронізації. Знайдено, що сходинки вольт-амперної характеристики довгого контакту з різницею температур на кінцях зумовлені взаємодією джозефсонівської генерації контакту як з модами геометричних резонансів, так і з рухом джозефсонівських вихорів.

Ключові слова: контакти Джозефсона, джозефсонівські вихори, синхронізація, сходинки Фіске.

## **Abstract**

Lykholot O. M. «Synchronized emission from the stack of two Josephson junctions with resistive and inductive coupling.» – Manuscript.

Qualifying work for educational and qualification level – «Master», direction of training 104 – “physics and astronomy”. – Kharkiv National V. N. Karazin University, 2025, – P. 33, Fig. 10.

Power of emission and voltage-current dependences for a stack of two long Josephson junctions are calculated for the condition of different temperatures at the ends of the stack. The long junctions in the stack are interconnected by inductive and resistive coupling. Strong in-phase synchronization of voltage oscillations on the Fiske steps and zero-field steps is found. It is shown that the presence of electrical resistance in the connection between the junctions leads to the disappearance of in-phase synchronization. It is found that the steps of the current-voltage characteristic of a long junction with a temperature difference at the ends appears due to the interaction of the Josephson generation of the junction with both geometric resonance modes and the motion of Josephson vortices.

Keywords: Josephson junctions, Josephson vortices, synchronization, Fiske steps

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	5
<b>1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ</b> .....	7
1.1 Ефекти Джозефсона.....	7
1.2 Умови когерентної емісії.....	8
1.3 Когерентна мода в системі з двох контактів.....	10
1.4 Високотемпературні надпровідники як природні системи контактів.....	12
1.5 Постановка задачі.....	14
<b>2 ОПИС МОДЕЛІ ДВОХ КОНТАКТІВ З РЕЗИСТИВНИМ ТА ІНДУКТИВНИМ ЗВ'ЯЗКОМ</b> .....	15
2.1 Високочастотна модель пачки контактів .....	15
2.2 Розрахунок залежності $V(I)$ та потужності випромінювання.....	17
<b>3 РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ТА ОБГОВОРЕННЯ</b> .....	18
3.1 Температурні залежності параметрів контакту.....	18
3.2 Електричні властивості одного контакту при неоднорідному розподілі температури.....	20
3.3 Коливання напруги на сходинках.....	22
3.4 Когерентне випромінювання в системі двох контактів.....	25
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	29
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> .....	30

## ВСТУП

Високотемпературні надпровідники  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  (скорочено BSCCO) та  $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_3\text{O}_{10}$  (ТВССО) є природними пачками контактів Джозефсона (так звані «внутрішні контакти»), в яких надпровідні шари близько 0,3 нм товщиною чергуються з шарами товщиною 1,2 нм, які мають діелектричні властивості [1-2]. Тому при протіканні струму в напрямі, перпендикулярному шарам, ці надпровідники, подібно контактам Джозефсона, випромінюють електромагнітні хвилі [3, 4]. Однак, це випромінювання малопотужне і не когерентне. Згідно теорії синхронізації контактів, потужність когерентного випромінювання пропорційне квадрату числа контактів [5, 6]. Тому однією з задач створення джерел випромінювання є створення умов для когерентного випромінювання систем багатьох контактів [4]. Когерентне випромінювання від високотемпературних надпровідників було зареєстровано в 2007 році і надійно підтверджено експериментально [3, 7-17]. Однак, причини появи такого випромінювання досі не з'ясовані. Тому актуальною задачею є дослідження умов синфазної синхронізації систем з багатьма контактами.

В дослідках по вивченню природи синфазного випромінювання від високотемпературних надпровідників неодноразово було помічено, що потужна емісія внутрішніх контактів супроводжується сильним нерівномірним розігрівом надпровідника [9, 13-17]. Тому представляє інтерес дослідити емісію контактів при такому розігріві. Крім того, були розроблені моделі для теоретичних досліджень названого ефекту емісії [18-27]. Основною з них є модель електромагнітного зв'язку між контактами в пачці [18-27]. В такій моделі взаємодія між контактами у пачці здійснюється за рахунок магнітних потоків, які виникають навколо надпровідних шарів при нерівномірному розподілі критичних струмів або під впливом зовнішнього магнітного поля [25-27]. Така модель добре описує електромагнітні властивості пачок контактів, які зроблено з низькотемпературних надпровідників, де ширина діелектричного бар'єру в сотні і тисячі разів

менша, ніж товщина шарів надпровідника [25]. В високотемпературних надпровідниках реалізується зворотна ситуація: товщина діелектричного бар'єру між надпровідними шарами в чотири-п'ять разів більша, ніж товщина надпровідного шару [1, 2].

В даній роботі чисельними методами досліджена синфазна синхронізація в пачці, яка складається з двох довгих контактів Джозефсона, причому температура одного кінця пачки більше, ніж другого, і, як наслідок цього, існує нерівномірний розподіл критичних струмів. Розроблена модель, в якій взаємодія між контактами реалізується при існуванні спільного струму між контактами. Спільними елементами, за рахунок яких відбувається взаємодія, є індуктивність шару та електричний опір, який виникає в шарі при протіканні високочастотного струму.

Метою досліджень є встановлення умов появи синфазної синхронізації в пачці з двох контактів з резистивним та індуктивним зв'язком та з різними температурами кінців.

Об'єкт досліджень – електричні властивості систем контактів Джозефсона.

Предмет дослідження – когерентне випромінювання від пачок контактів Джозефсона.

Метод дослідження – чисельне моделювання пачок довгих контактів, чисельне рішення диференціальних рівнянь.

Робочою гіпотезою є припущення, що нерівномірний розподіл температур породжує нерівномірний розподіл критичних струмів вздовж контактів і, як наслідок, появу джозефсонівських вихорів і сходинок на залежності напруги на пачці від струму, на яких можлива синфазна синхронізація осциляцій напруги в контактах.

В першому розділі роботи докладно розглянута теорія синхронізації. В другому розділі наводиться опис розробленої моделі. В третьому розділі наводяться результати розрахунків і обговорення результатів.

Особистий внесок автора - проведення розрахунків та обробка результатів. Робота виконана на кафедрі фізики низьких температур фізичного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

## 1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

### 1.1 Ефекти Джозефсона.

Якщо в коло з джерелом постійного струму під'єднати систему з двох надпровідників, розділених тонким прошарком діелектрику, то можна спостерігати декілька цікавих ефектів. У випадку товщини шару діелектрика, не меншою за 3 нм при вимірюванні напруги на бар'єрі завдяки підключеному в коло вольтметру, помічаємо тунелювання поодиноких електронів. Якщо ширину прошарку взяти менше 3 нм, то виникає тунелювання куперівських пар в напрямку струму. Якщо в початковому стані (без прикладеної напруги) куперівські пари по обидва боки бар'єру знаходилися на енергетичних рівнях основного стану, то після прикладення напруги ці рівні розійдуться на величину  $qV$ , де  $q = 2e$  – заряд куперівської пари. Таким чином виникає двохрівнева система. У разі протікання струму у відповідному напрямку цієї системою виникає тунелювання куперівських пар з верхнього на нижній рівень, причому енергія  $qV$  виділятиметься у вигляді фотону. При цьому, якщо струм є меншим від певного критичного значення, то на контакті не виникає напруги. Цей ефект описується першим співвідношенням Джозефсона [6]:

$$I = I_c \sin \varphi, \quad (1.1)$$

де  $I_c$  – критичний струм,  $I$  – струм, який тече через контакт,  $\varphi$  – різниця фаз хвильових функцій куперівських пар на берегах бар'єру.

Після збільшення струму до критичного на контакті виникає напруга, що змушує фазу змінюватися з часом. Це означає, що під дією напруги надструм (тобто, струм куперівських пар) буде коливатися між берегами контакту на надзвичайно високій частоті. Отже, контакт починає випромінювати. Це явище описується другим співвідношенням Джозефсона:

$$\bar{V} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1.2)$$

де  $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$  - квант магнітного потоку,  $\bar{V}$  – усереднена напруга на бар'єрі. Також, при виникненні напруги, через контакт, окрім тунелювання надпровідного струму, починає протікати одноелектронний струм. Для опису суми цих струмів використовується резистивна модель контакту [6]:

$$I_b = I_c \sin \varphi + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \frac{d\varphi}{dt}, \quad (1.3)$$

де  $R$  – електричний опір контакту,  $I_b$  – повний струм через контакт (так званий струм зміщення). Тонкий ізоляційний бар'єр також має свою ємність  $C$ . Вплив ємності враховується у резистивно-ємнісній моделі контакту:

$$I_b = I_c \sin \varphi + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \frac{d\varphi}{dt} + C \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1.4)$$

У подальшому розгляді будемо використовувати нормалізовані одиниці. Для цього в рівнянні для резистивної моделі контакту (1.3) необхідно замінити час  $t$  на величину  $\tau = \frac{2\pi I_c R}{\Phi_0} t$ , звідки  $t = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c R} \tau$ , та поділити праву та ліву частини рівняння на  $I_c$ . У результаті отримаємо таке рівняння для резистивної моделі контакту:

$$i_b = \frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi, \quad (1.5)$$

де  $i_b = \frac{I_b}{I_c}$ .

Аналогічно, напруга на контакті нормалізується шляхом ділення на характеристичну напругу  $V_c = I_c R$ :

$$v = \frac{V}{V_c}. \quad (1.6)$$

Розглянемо дію зовнішньої системи на контакт. Напруга на контакті розкладається у ряд Фур'є:

$$v(\tau) = \bar{v} + \sum_{k>0} \varepsilon_k \sin k\theta, \quad (1.7)$$

де  $v(\tau)$  – змінна частина напруги,  $\bar{v}$  – повністю усереднена напруга,  $\theta = \bar{v}\tau$ ,

$\varepsilon_k = \frac{2\bar{v}}{(\bar{i} + \bar{v})^k}$  – коефіцієнт ряду Фур'є.

## 1.2 Умови когерентної емісії двох контактів

Тепер можемо перейти до розгляду загальної теорії синхронізації для двох контактів Джозефсона. Рівняння збереження струму в рамках резистивної моделі для двох контактів виглядають так [5]:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} + \sin\varphi_1 = \bar{i}_1 - i_c(\tau), \quad (1.8)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} + \sin\varphi_2 = \bar{i}_2 - i_c(\tau), \quad (1.9)$$

де номери 1, 2 - номери контактів,  $i_c(\tau)$  – струм, який тече через навантаження, однаковий для обох контактів. При включенні струму в системі більшого, за критичний, на кожному з контактів з'являється електричний опір. Напряга на цих контактах коливається з часом згідно з другим співвідношенням Джозефсона (1.2). Таким чином, через контакт 1 завдяки дії другого ефекту Джозефсона іде високочастотний струм, і цей струм йде через навантаження і далі у контакт 2, так що через контакт 2 іде високочастотний, який складається зі струмом зміщення. Контакт 2 діє так само на контакт 1. Існують умови, при яких цей струм синхронізує осциляції напруги на обох контактах. Вираз для струму, що протікає через навантаження, можна записати так:

$$i_c(\tau) = i \cdot [v_1(\tau) + v_2(\tau)], \quad (1.10)$$

або в комплексній формі:

$$i_c(\tau) = \text{Re}\{\varepsilon_1 \cdot [y \cdot e^{i\theta_1} + y \cdot e^{i\theta_2}]\}, \quad (1.11)$$

де  $y$  – адмітанс навантаження. В рамках методу амплітуд, які повільно змінюються [5, 6], з рівнянь (1.6)-(1.11) можна отримати рівняння, які описують зміну в часі складових частин напруги  $\hat{v}_{1,2}$ , що повільно змінюються з часом (так звані укорочені рівняння):

$$\dot{\theta}_{1,2} = \hat{v}_{1,2} = \overline{v^A} + \frac{a_f}{2} [(1 + \cos \chi) \cdot \text{Re} \left\{ \frac{1}{z} \right\} \pm \text{Im} \left\{ \frac{1}{z} \cdot \sin \chi \right\}], \quad (1.12)$$

де  $\chi = \theta_1 - \theta_2$ ,  $a_f = \frac{r^A d \cdot \varepsilon_1}{i}$ ,  $z$  – імпеданс навантаження.

Введемо додаткове позначення  $\xi = v_1^A - v_2^A$  та віднімемо  $\hat{v}_2$  від  $\hat{v}_1$ . У результаті отримаємо такий вираз:

$$\dot{\chi} = \xi + a \sin \chi, \quad (1.13)$$

де  $a = a_f \cdot \text{Im}(y) = \frac{2}{i+v} \text{Im}(y)$ ,  $\chi = \theta_1 - \theta_2$ . Розв'язки цього рівняння отримаємо в наступному вигляді:

$$\begin{cases} \chi = 0, \text{ якщо } \text{Im}(y) < 0, \text{ що відповідає синфазній синхронізації;} \\ \chi = \pi, \text{ якщо } \text{Im}(y) > 0, \text{ що відповідає протифазній синхронізації} \end{cases} \quad (1.14)$$

Рівняння (1.13) при  $\xi = 0$  має такий самий вигляд, як і рівняння для першого ефекту Джозефсона. Це означає, що струм, який іде на контакти від навантаження, діє на систему так само, як зовнішній струм. Так само цей струм приводить до появи сходинки на вольт-амперній характеристиці. Потужність випромінювання  $P$  для системи з двох контактів, нормалізована на потужність одного контакту  $P_0$ , можна записати так:

$$\frac{P}{P_0} = 2[\cos \theta_1 + \cos \theta_2]^2 = 2[1 + \cos \chi], \quad (1.15)$$

Цей вираз дорівнює чотирьом у випадку синфазної синхронізації та нулю у випадку протифазної синхронізації. Якщо узагальнити теорію на довільне число контактів, то в результаті отримаємо, що потужність синхронізованого випромінювання пропорційна квадрату числа контактів [5, 6].

### 1.3. Когерентна мода в системі з двох контактів.

Перейдемо до електродинаміки надпровідних шаруватих структур (пачок контактів Джозефсона). Всі високотемпературні надпровідники мають структуру шарів з властивостями діелектрика та з надпровідними властивостями, які чергуються один з одним. Таку систему можна представити, як пачку контактів Джозефсона, причому на 1 мікроні може бути до 667 таких контактів. Для опису електродинаміки одного контакту можна записати рівняння синус – Гордона [26, 27]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = \frac{1}{\lambda_j^2} \left[ \sin \varphi - \frac{I_b}{I_c} \right], \quad (1.16)$$

де  $\bar{c}$  – швидкість світла в контакті,  $\lambda_j = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 j_c d}}$  – джозефсонівська глибина проникнення магнітного поля в контакт,  $\beta = \frac{1}{RC}$  – параметр затухання. Сила

взаємодії контактів залежить від ширини надпровідного шару між ними. Якщо шар широкий, то контакти слабо взаємодіють між собою, якщо вузький – навпаки. Введемо параметр взаємодії:

$$q_m = \frac{\lambda_{Lm}}{\sinh \frac{t_m}{\lambda_{Lm}}}, \quad (1.17)$$

де  $\lambda_{Lm}$  – лондонівська глибина проникнення магнітного поля в надпровідник,  $t_m$  – товщина надпровідного шару,  $m$  – номер контакту.

Електричні властивості пачки з двох контактів з надпровідними шарами однакової товщини описуються за допомогою двох рівнянь синус-Гордона [26]:

$$\begin{pmatrix} \frac{\Phi_0}{2\pi} & \frac{\partial^2 \varphi_{1,0}}{\partial x^2} \\ \frac{\Phi_0}{2\pi} & \frac{\partial^2 \varphi_{2,1}}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' & q \\ q & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c\Phi_0}{2\pi} \frac{d^2 \varphi_{1,0}}{dt^2} + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \frac{d\varphi_{1,0}}{dt} & + I_{c1,0} \sin \varphi_{1,0} - I_b \\ \frac{c\Phi_0}{2\pi} \frac{d^2 \varphi_{2,1}}{dt^2} + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \frac{d\varphi_{2,1}}{dt} & + I_{c2,1} \sin \varphi_{2,1} - I_b \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

де  $d' = d + 2\lambda_L \cot \frac{t}{\lambda_L}$  – сума лондонівських глибин проникнення магнітного поля в надпровідник та товщин шару діелектрика  $d$ . Рішення даної системи рівнянь виглядає наступним чином:

$$\varphi_{m,m+1}(x, t) = A_{m,m-1} e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.19)$$

Константа  $A$  в даному рівнянні може приймати два значення для  $\varphi_{m,m+1}$ :  $A_{1,0} = A_{2,1}$  та  $A_{1,0} = -A_{2,1}$ . В першому випадку рівняння (1.19) буде синфазним, тобто збуджені хвилі будуть абсолютно однаковими в обох контактах. Другий випадок відповідає протифазному рішенню рівняння. Тобто, в системі з двох контактів, які взаємодіють індуктивно, є дві нормальні моди: синфазна та протифазна. Ці моди мають різні швидкості розповсюдження. Аналогом розповсюдження таких хвиль є взаємодія двох однакових LC-контурів з індуктивним параметром взаємодії  $L_f$ . Резонансна крива в такому випадку має «двогорбий» вигляд. Відповідно, резонансні частоти розщеплюються. Більша частота відповідає синфазній моді, а менша – протифазній. Це означає, що циркулюючі струми в цих контурах течуть в одному напрямку в синфазній моді і в протилежних напрямках – в протифазній. Так само розповсюджуються

збудження у системі двох контактів Джозефсона. Резонансні частоти  $\omega_1$  та  $\omega_2$  для синфазної та протифазної моди, відповідно, можна записати так:

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{L_f}{L}}}, \quad (1.20)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{L_f}{L}}}. \quad (1.21)$$

Коли джозефсонівське випромінювання взаємодіє з резонансними модами, на залежності струму через контакт від напруги виникають так звані сходинки Фіске. Вони породжені резонансною взаємодією між осциляціями напруги на контактах і стоячими хвилями геометричних резонансів, які виникають в контакті при співпадінні довжини контакту з цілим числом довжин електромагнітних хвиль, які розповсюджуються в контактах. Напруга, яка відповідає резонансній моді, дорівнює [26, 27]:

$$V_p = \frac{\Phi_0 \bar{c} p}{2D}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

Швидкості розповсюдження електромагнітних хвиль  $\bar{c}_+$  для синфазної моди та  $\bar{c}_-$  для протифазної моди різні:

$$\bar{c}_{\pm} = \frac{c'}{\sqrt{1 \pm \frac{q}{d}}}. \quad (1.23)$$

Оскільки існують дві швидкості розповсюдження хвиль  $\bar{c}_+$ , то сходинки Фіске також розщеплюються:

$$V_{p\pm} = \frac{\Phi_0}{2D} \frac{c'}{\sqrt{1 \pm \frac{q}{d}}} p. \quad (1.24)$$

Таким чином, на залежності струму від напруги для пачки з  $N$  контактів, які взаємодіють один з одним, виникають  $2N$  сходинок Фіске.

#### **1.4 Високотемпературні надпровідники як природні системи контактів**

Високотемпературні надпровідники були відкриті співробітниками швейцарської лабораторії IBM Й. Г. Беднорцем та К. О. Мюллером. Велика частина високотемпературних надпровідників (ВТНП) має шарувату

структуру і в них спостерігається внутрішній ефект Джозефсона. Типова ширина надпровідних шарів  $\text{CuO}$  сягає приблизно 3 ангстрем, а відстань між цими шарами – 12 ангстрем. Така структура називається надпровідною надграткою. Період дорівнює сумі надпровідного та діелектричного шарів, тобто, 15 ангстрем [1, 2]. Ця структура повинна мати властивості пачки контактів Джозефсона. Відмінність внутрішніх контактів від контактів, зроблених з низькотемпературних надпровідників, полягає в тому, що надпровідні шари є значно вужчими, ніж діелектричні. Таким чином, у високотемпературних надпровідниках існують надпровідні площини  $ab$  та ефект Джозефсона у напрямку  $c$ . Отже, внутрішній ефект Джозефсона пов'язаний з досить різкою анізотропією шаруватої структури надпровідників. Типовими ВТНП, які мають внутрішній ефект Джозефсона, є  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  (скорочено BSCCO) та  $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_3\text{O}_{10}$  (TBCCO). Внутрішній ефект Джозефсона був знайдений у 1992 р. у BSCCO [1].

Внутрішні контакти Джозефсона мають багато властивостей, що характерні для контактів Джозефсона, зроблених з низькотемпературних надпровідників, а саме: залежність критичного струму від температури, фраунгоферівську залежність критичного струму від магнітного поля, сходинки Шапіро [2]. Зареєстровано також джозефсонівське випромінювання на вольт-амперній характеристиці [2].

Однією з найбільш вражаючих особливостей на вольт-амперній характеристиках ВТНП є їх багатогілкова структура [1]. Для отримання такої структури в експерименті застосовується багаторазове підвищення і зменшення критичного струму. Відстань між гілками на вольт-амперній характеристиці є постійною величиною для даного матеріалу і становить від 12 до 20 мВ. Згідно виразу Амбегаокара-Баратова, характеристична напруга одного внутрішнього контакту  $\bar{V}_c = I_c R$  пов'язана з енергетичною щільністю  $\Delta$  співвідношенням:

$$\bar{V}_c = \frac{\pi}{2e} \Delta \tanh\left(\frac{\Delta}{2k_B T}\right) \quad (1.25)$$

Значення  $\bar{V}_c = 18$  мВ відповідає енергетичній щільності  $\Delta = 1,76 \cdot 10^{-21}$  Дж при  $T = 0$  К. Для порівняння, в низькотемпературних надпровідниках величина енергетичної щільності приблизно дорівнює  $4,8 \cdot 10^{-22}$  Дж. Таким чином, величина енергетичної щільності в ВТНП значно перевищує таку для низькотемпературних надпровідників. А це значить, що характеристична частота випромінювання контакту  $f_c = \bar{V}_c / \Phi_0$  дуже велика. Це значить, що ВТНП – джерела терагерцевого випромінювання. Когерентне субтерагерцеве випромінювання від високотемпературних надпровідників було отримано в 2007 році. Як відомо, потужність когерентного випромінювання пропорційна квадрату кількості контактів. В 1 мм BSCCO є 667 внутрішніх контактів, так що при когерентному випромінюванні повинна підвищитися в 443 тисячі разів [3]. Потужність випромінювання одного контакту приблизно дорівнює  $10^{-12} \div 10^{-11}$  Вт, так що при когерентному випромінюванні слід очікувати  $P \sim 10^{-6}$  Вт.

### 1.5. Постановка задачі.

Оскільки метою роботи є створення моделі та аналіз динаміки двох контактів з індуктивним та резистивним зв'язком при неоднорідному розподілі температур вздовж контакту, для досягнення цієї мети треба вирішити такі задачі:

- вирішити систему диференціальних рівнянь динаміки довгих контактів, які зчеплені один з одним за допомогою індуктивності та електричного опору;
- розглянути дію неоднорідного розподілу температур на контакти;
- знайти синфазну та протифазну моди електромагнітних коливань для цієї системи при неоднорідному розподілі температур;
- знайти залежності напруги на контакті від струму, сходинки Фіске та потужність випромінювання на сходинках.

Рішення цих задач описано в наступних розділах роботи. Диференціальні рівняння моделі вирішувались методом Рунге-Кутта. Усереднення напруги по

часу сягало о 20 тисяч періодів. Було також візуалізовано коливання напруги на сходинокх Фіске.

## 2. ОПИС МОДЕЛІ ДВОХ КОНТАКТІВ З РЕЗИСТИВНИМ ТА ІНДУКТИВНИМ ЗВ'ЯЗКОМ

### 2.1 Високочастотна модель пачки контактів

Для моделювання системи контактів дотримуємося наступних правил [21-24]:

- 1) Контакти моделюються в рамках резистивно-ємнісній моделі.
- 2) Кожен контакт умовно розділяється на  $n$  комірок «елементарних» контактів.
- 3) Кожен «елементарний» контакт має свої значення критичного струму та опору.
- 4) Петлі між «елементарними» контактами мають індуктивність  $L$ .
- б) Елементарна комірка між двома контактами в одному довгому контакті є двохконтактним інтерферометром, у якому при  $I_{ci} \neq I_{ci+1}$  протікає циркулюючий струм згідно правилам Кірхгофа.

Розглянемо один стовпчик комірок. Рівняння збереження струму для кожного контакту:

$$\frac{c\Phi_0}{2\pi} \frac{d^2\varphi_{ij}}{dt^2} + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \frac{d\varphi_{ij}}{dt} + I_{cij} \sin \varphi_{ij} = I_b - I_{si,j-1,j} + I_{si,j,j+1}, \quad (2.1)$$

де  $i$  – номер рядка комірки,  $j$  – номер стовпця,  $i = 1, 2; j = 1 \dots n$ . Таким чином,  $\varphi_{ij}$  залежить від струмів як в елементарній комірці зліва від  $ij$ -ого контакту, так і в елементарній комірці справа. Завдяки такій взаємодії контактів збудження фази може мігрувати вздовж довгого контакту.

У верхній та нижній комірках вихрові струми  $I_s$  протікають у протилежних напрямках. Ця взаємодія призводить до того, що струми елементарних контактів визначаються уже не струмами через окремі контакти, а струмами в усій системі. Виникнуть, як у системі зв'язаних маятників, нормальні коливання, частоти яких визначені частотами всієї системи. Таким

чином, у шаруватій системі утворюються колективні коливання, тобто нормальні моди.

Окрім впливу сусідніх комірок на кожен контакт також діє струм від нижньої комірки.

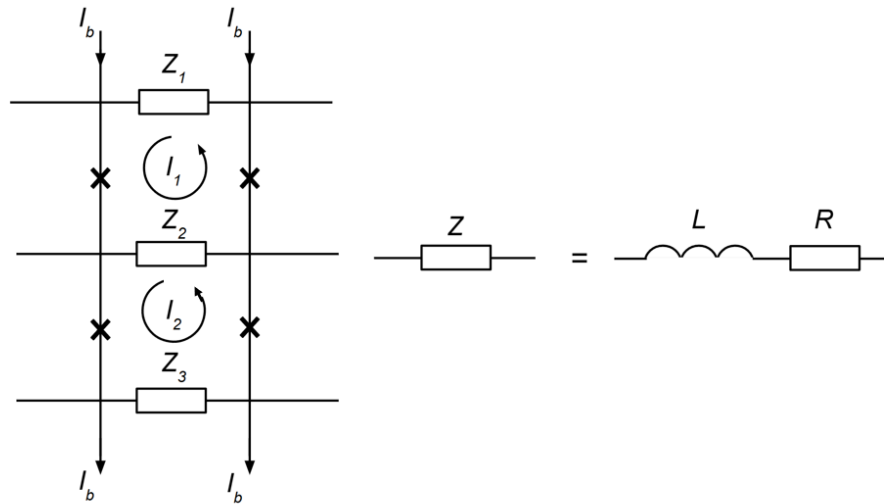


Рисунок 2.1 – високочастотна схема двох комірок одного стовпчика системи з двох контактів. «Елементарні» контакти показані хрестиками.

На високочастотній схемі на рисунку 2.1 указані  $I_1, I_2$  – контурні струми,  $Z_1, Z_2$  – імпеданси, що складаються з індуктивності та опору. Якщо кожен струм переносить заряд  $q_i$ , то за визначенням струму  $I_i = \frac{dq_i}{dt}$ . Рівняння для контурних струмів  $I_1, I_2$  виглядають так:

$$\frac{dI_1}{dt}(L_1 + L_2) + I_1(R_1 + R_2) - L_2 \frac{dI_2}{dt} - I_2 R_2 = \frac{\Phi_0}{2\pi} \left( \frac{d\varphi_{11}}{dt} - \frac{d\varphi_{12}}{dt} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{dI_2}{dt}(L_3 + L_2) + I_2(R_3 + R_2) - L_2 \frac{dI_1}{dt} - I_1 R_2 = \frac{\Phi_0}{2\pi} \left( \frac{d\varphi_{21}}{dt} - \frac{d\varphi_{22}}{dt} \right) \quad (2.3)$$

Нехай  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  і  $L_1 = L_2 = L_3 = L$ ;  $I_1 = \frac{dq_1}{dt}$ ,  $I_2 = \frac{dq_2}{dt}$ . Тоді, вирішивши систему диференціальних рівнянь, подібну рівнянням (2.2) та (2.3), маємо такі рівняння для величин  $q_s = q_1 + q_2$  та  $q_d = q_1 - q_2$ :

$$L \frac{d^2 q_s}{dt^2} + R \frac{dq_s}{dt} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \left( \frac{d\varphi_{11}}{dt} - \frac{d\varphi_{12}}{dt} + \frac{d\varphi_{21}}{dt} - \frac{d\varphi_{22}}{dt} \right), \quad (2.4)$$

$$3L \frac{d^2 q_d}{dt^2} + 3R \frac{dq_d}{dt} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \left( \frac{d\varphi_{11}}{dt} - \frac{d\varphi_{12}}{dt} - \frac{d\varphi_{21}}{dt} + \frac{d\varphi_{22}}{dt} \right). \quad (2.5)$$

Рівняння (2.4), (2.5) вирішувались чисельно методом Рунге-Кутта разом з рівняннями динаміки контактів. Знаходили величини  $q_s$  та  $q_d$  та їх похідні  $\frac{dq_s}{dt}$  та  $\frac{dq_d}{dt}$ . Контурні струми тоді дорівнюють:

$$I_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{dq_s}{dt} + \frac{dq_d}{dt} \right), \quad (2.6)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{dq_s}{dt} - \frac{dq_d}{dt} \right). \quad (2.7)$$

Струми  $I_1$  та  $I_2$  і є тими самими високочастотними струмами, які протікають через «елементарні» контакти в кожній комірці і входять в рівняння (2.1), причому для контакту з номером  $j$  маємо  $I_{i=1,j} = I_1$ ,  $I_{i=2,j} = I_2$ , де  $I_1$  та  $I_2$  – рівняння (2.6) та (2.7), записані для контактів в обох рядах з номером  $j$ .

## 2.2 Розрахунок залежності $V(I)$ та потужності випромінювання.

Таким чином, для моделювання динаміки контактів у системі чисельними методами вирішувались рівняння (2.1), (2.6), (2.7). Граничні умови задачі були аналогічні граничним умовам для довгій лінії з розімкнутими кінцями, тобто, струми на кінцях обох контактів дорівнювали нулю.

Усереднена наруга на пачці контактів знаходилась згідно виразу:

$$V' = \frac{\Phi_0}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \overline{\frac{d\varphi_{ij}}{dt}}, \quad (2.8)$$

де риска над виразом означає усереднення по проміжку часу, який значно перевищує період осциляцій напруги. Потужність випромінювання від кінців контакту в вакуум ( $R' \approx 377$  Ом) знаходилась так [5]:

$$P_j = \frac{1}{R'} \left[ \frac{\Phi_0}{2\pi} \left( \left( \frac{d\varphi_{1,j}}{dt} - \bar{V}_{1,j} \right) + \left( \frac{d\varphi_{2,j}}{dt} - \bar{V}_{2,j} \right) \right) \right]^2, \quad j=1, n, \quad (2.9)$$

$$\bar{V}_{i,j} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \overline{\frac{d\varphi_{ij}}{dt}}. \quad (2.10)$$

З використанням виразів (2.8) – (2.10) були розраховані залежності напруги від струму для кожного «елементарного» контакту в системі. В роботі наведені результати для потужності випромінювання від правого кінця системи ( $j=n$ ).

### 3 РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ТА ОБГОВОРЕННЯ

#### 3.1 Температурні залежності параметрів контакту.

Одною з особливостей високотемпературних надпровідників є досить малий коефіцієнт теплопровідності (3-5 Вт/(м·К) [12]. Тому навіть на невеликій відстані порядку  $(8-10) \cdot 10^{-5}$  м можливі значні перепади температур. Про це свідчать виміри температури, які були проведені вздовж пачок внутрішніх контактів під час експериментів по отриманню когерентного випромінювання [13-17]. В даній роботі задано найпростіший розподіл температур вздовж пачки з двох контактів. Будемо вважати, що один кінець пачки має більшу температуру, ніж інший кінець, так що встановлюється лінійний розподіл температур вздовж пачки, причому обидва контакти мають однакову температуру при даній координаті. Розподіл температур вздовж пачки показаний на рисунку 3.1 (а). Визначимо залежність критичного струму  $I_c(x)$  від нормалізованої температури  $\frac{T}{T_c}$ :

$$I_c(x) = I_c(x = 0) \left[ 1 - \frac{T}{T_c} \right], \quad (3.1)$$

де  $T_c$  – критична температура надпровідника. Розподіл критичних струмів вздовж пачки показаний на рисунку 3.1 (б). Тоді густина критичного струму дорівнює:

$$J_c(x) = \frac{I_c(x)}{\xi_0 W}, \quad (3.2)$$

де  $\xi_0$  – довжина сегменту пачки контактів,  $W$  – ширина пачки. Джозефсонівська глибина проникнення  $\lambda_J$  визначається так:

$$\lambda_J(x) = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 J_c(x) \cdot d}}, \quad (3.3)$$

де  $d = 2\lambda_L(T)\text{cth}\left(\frac{y}{\lambda_L(T)}\right) + t_1$ ,  $y$  – товщина надпровідного шару,  $t_1$  – товщина діелектричного бар'єру контакту,  $\mu_0$  – магнітна стала,  $\lambda_L(T)$  – лондонівська глибина проникнення:

$$\lambda_L(T) = \sqrt{\frac{\lambda_L(T=0)}{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}} \quad (3.4)$$

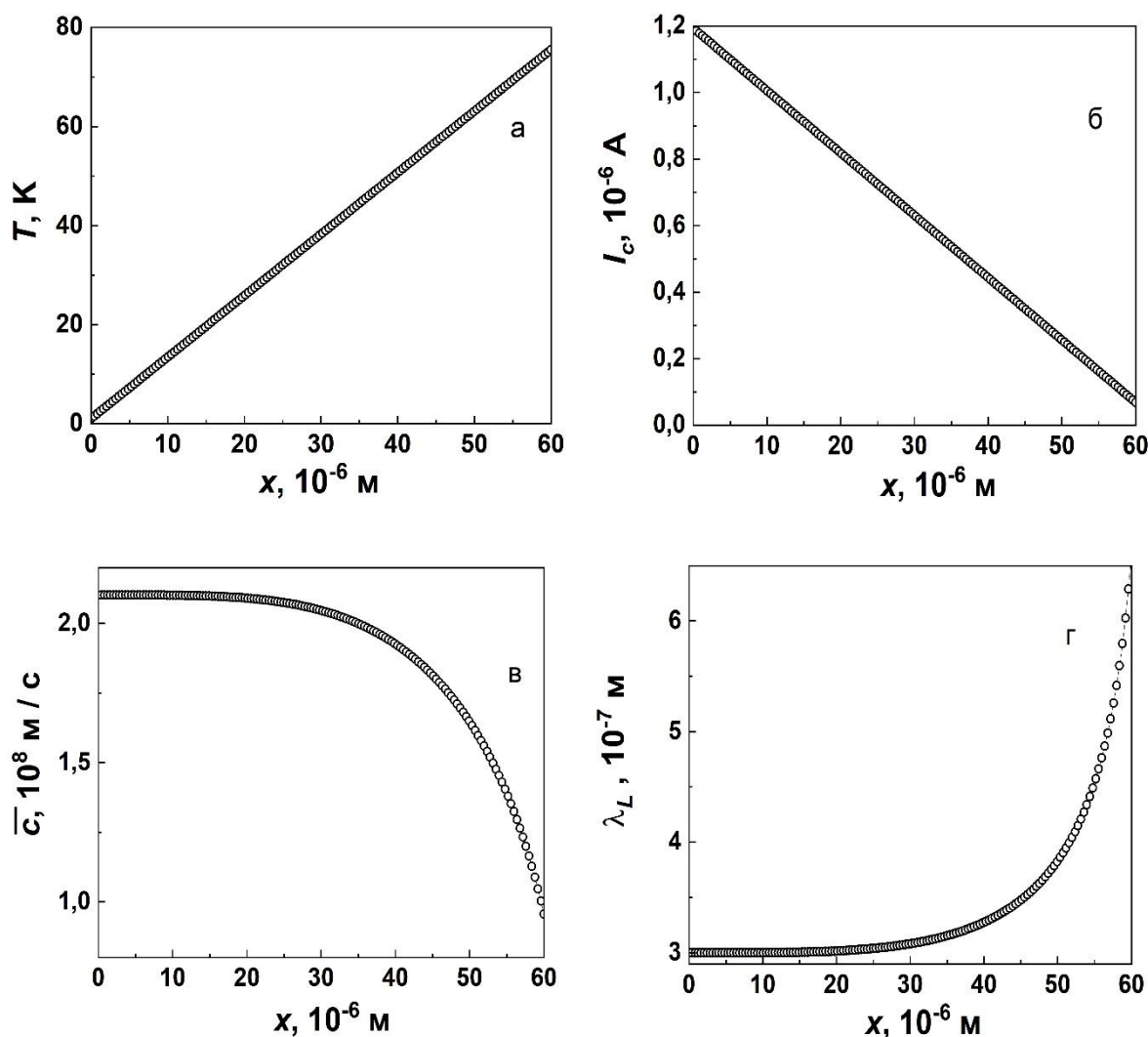


Рисунок 3.1 – розподіли температури (а), критичних струмів (б), швидкості розповсюдження світла в контакті (в) і лондонівської глибини проникнення магнітного поля (г) вздовж пачки контактів.

Швидкість світла в контакті визначається так:

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 c' d}} \quad (3.5)$$

де  $C'$  - ємність контакту на одиницю площини.

Розподіли  $I_c(x)$ ,  $\bar{c}(x)$  та  $\lambda_L(x)$  вздовж системи показані на рисунку 3.1 (б) – (г) для розподілу температури, визначеного на рисунку 3.1 (а).

### 3.2 Електричні властивості одного контакту при неоднорідному розподілі температури.

Надалі будемо також використовувати нормалізацію струмів на критичний струм першого сегменту з лівої сторони довгого контакту  $I_{c0}$ , тобто, критичний струм «найхолоднішого» сегменту. Нагадаємо, що температура сегментів з однаковими номерами однакова. Напруга на контакту нормалізована на характеристичну напругу цього сегменту, так що  $V = \frac{V'}{nV_{c0}}$ , де  $V' = \sum_{i=1}^n V_i$  – сума напруги на всіх сегментах довгого контакту. Потужність на кінцях контакту нормалізована на потужність цього сегменту  $P_c = I_{c0}V_{c0}$ . Залежність усередненої напруги на контакту від струму показана на рисунку 3.2 (а). На цій залежності є дві сходинки нульового поля – при напругах  $V_1 = 0,3$  та  $V_2 = 0,6$ . Значення нормалізованої напруги  $V_1$  точно відповідає першій сходинці Фіске при даних параметрах контакту:

$$V_1 = \frac{\Phi_0 \bar{c}}{V_c 2D} n, \quad (3.6)$$

де  $n = 1$ , а швидкість  $\bar{c} = 2,10 \cdot 10^8$  м/с дорівнює значенню швидкості світла при температурі «холодного» кінця контакту. Таким чином,  $V_2$ - друга сходинка Фіске. На рисунку 3.2 (б) показана залежність потужності від усередненої напруги. На цьому рисунку видна також третя сходинка Фіске при  $V_3 = 0,9$ . Ця сходинка не видна на залежності  $V(I)$  тому, що потужність на ній дуже мала. Виникає питання про походження магнітного поля, в якому виникають розглянуті вище сходинки Фіске. Згідно умовам задачі, зовнішнє магнітне поле не прикладено до системи. Однак, в петлі між двома сегментами контакту, які знаходяться поряд, виникає циркулюючий високочастотний

струм, пов'язаний з нерівністю критичних струмів сегментів, зумовлених нерівністю температури сегментів. Саме завдяки цьому циркулюючому струму в петлі виникає магнітне поле, яке діє на контакти і зумовлює появу сходинок Фіске на залежності  $V(I)$ .

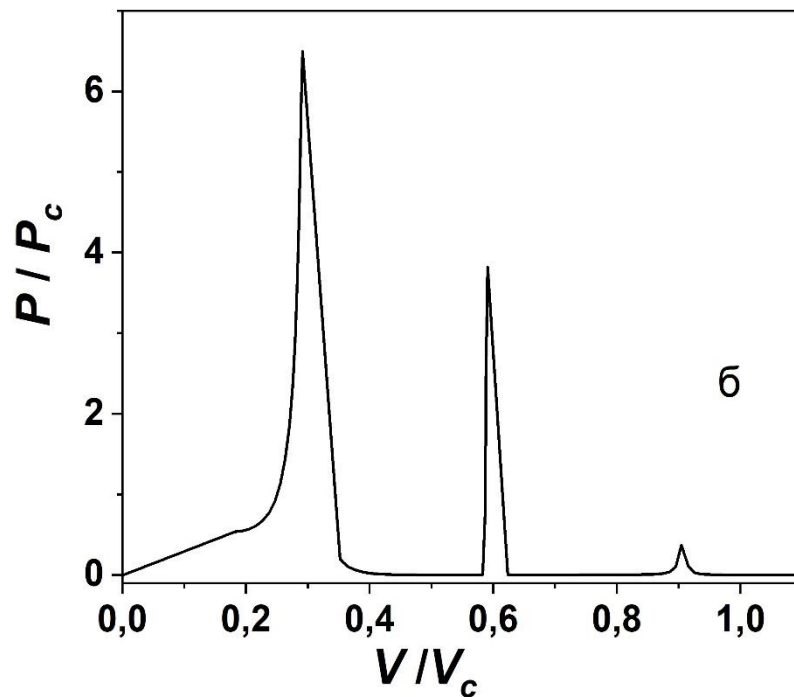
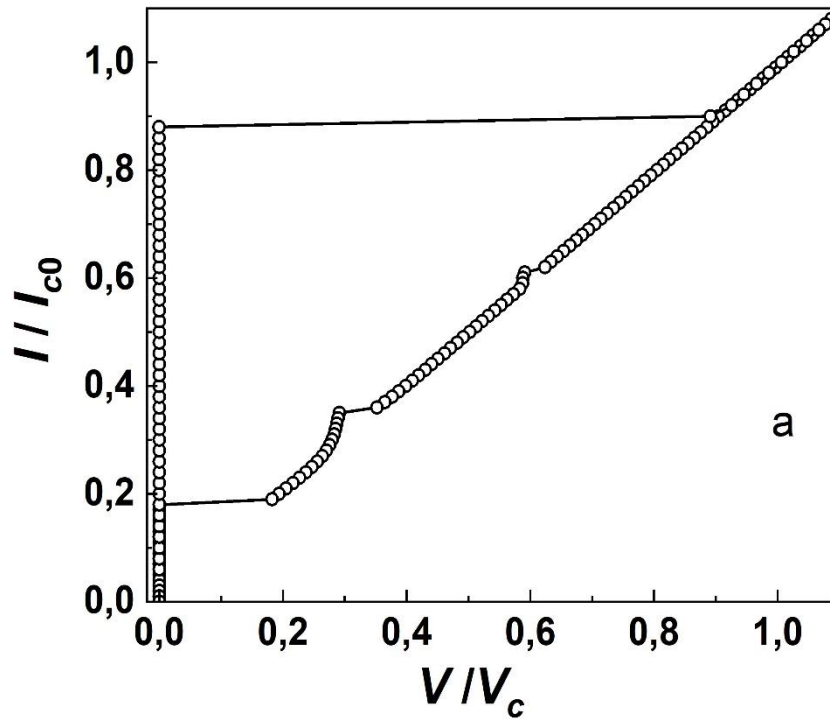


Рисунок 3.2 – залежність усередненої напруги на одному довгому контакту від струму (а) та залежність потужності на правому кінці контакту від напруги (б).

Розглянемо зміни потужності на кінцях одного контакту при зміні електричного опору  $R_1$ . Відомо, що в резистивному кільці з індуктивністю  $L$  та електричним опором  $R_1$  коливання струму затухають за час порядку  $\frac{L}{R_1}$ . Це значить, що низькочастотні коливання з періодом більше, ніж  $\frac{L}{R_1}$ , не можуть розповсюджуватись по всій довжині контакту. На рисунку 3.3 показані потужності випромінювання при значенні  $R_1 = 0$  Ом (крива 1),  $R_1 = 10^{-4}$  Ом (крива 2),  $R_1 = 10^{-3}$  Ом (крива 3). Видно, що при збільшенні величини опору

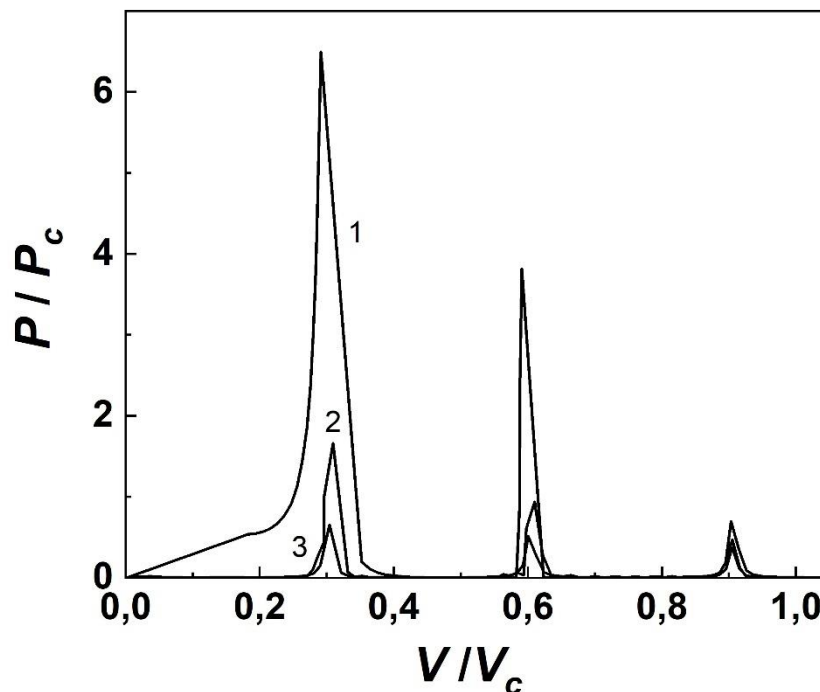


Рисунок 3.3 – залежність потужності на правому кінці контакту від напруги для значень  $R_1 = 0$  Ом (крива 1),  $R_1 = 10^{-4}$  Ом (крива 2),  $R_1 = 10^{-3}$  Ом (крива 3).

$R_1$  потужність випромінювання зменшується. При  $R_1 = 10^{-1}$  Ом максимуми випромінювання і сходинок Фіске на залежності  $V(I)$  зникають зовсім.

### 3.3 Коливання напруги на сходах.

Для з'ясування характеру коливань напруги на сходинках при розрахунках залежності  $V(I)$  була застосована наступна процедура. В гістерезисній частині залежності  $V(I)$  струм зміщення зменшувався до початку сходинки, а потім напрям струму мінявся, і струм підвищувався до

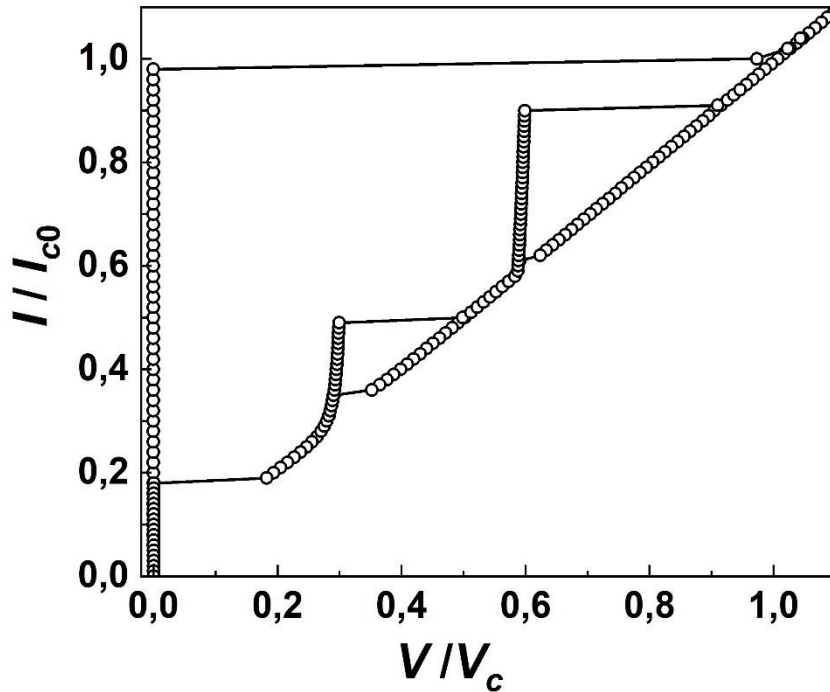


Рисунок 3.4 – залежність  $V(I)$ , отримана за допомогою процедури зміни напрямку струму поблизу сходинок.

величини, яка дорівнювала висоті сходинки. За допомогою такої процедури була отримана залежність  $V(I)$ , показана на рисунку 3.4. Розподіли напруги вздовж контакту були отримані на сходинках. На рисунку 3.5 (а), (б) показані розподіли напруги в різні моменти часу. Розподіли напруги на рисунку 3.5 (а) при  $\frac{I}{I_{c0}} = 0,35$  (підніжжя першої сходинки) схожі на коливання на першій гармоніці, коли тільки половина довжини хвилі розміщується на довжині контакту. Однак, ці коливання не мають єдиної спільної точки перетину. Розподіли на рисунку 3.5 (б) (біля верхівки першої сходинки) більше схожі на рух широкого вихору, ніж на гармонічні коливання. Можна зробити висновок, що на першій сходинці коливання напруги є сумішшю гармонічних коливань

і рухом джозефсонівських вихорів. Така поведінка напруги можлива, коли сходинка утворюється в результаті дії кількох різних механізмів коливань (як коливань, зумовлених геометричними резонансами, так і коливань, зумовлених рухом джозефсонівських вихорів). Крім того, в результаті

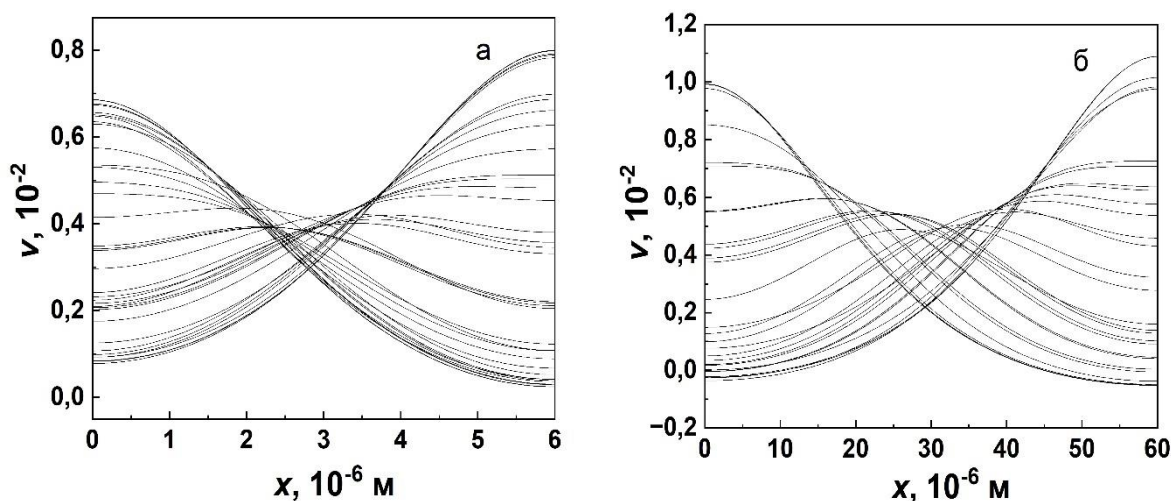


Рисунок 3.5 – розподіли напруги  $V(I)$ , отримані в різні моменти часу, при струмах зміщення  $\frac{I}{I_{co}} = 0,35$  (а) та  $\frac{I}{I_{co}} = 0,45$  (б).

нерівномірного розподілу критичних струмів, замість дискретного спектру частот, характерного для контакту з одним критичним струмом, утворюється майже неперервний спектр частот.

Перехід від гармонічних коливань при напругах біля підніжжя сходинки до руху джозефсонівських вихорів при напругах на верхівках сходинки стає ще виразніший при розгляді коливань напруги на другій сходинці. Цей перехід показаний на рисунку 3.6 (а)-(г). На підніжжі сходинки існують чисто гармонічні коливання напруги з довжиною хвилі, яка дорівнює подвійній довжині контакту (рисунок 3.6 (а)). Однак, при зростанні струму зміщення, поряд з гармонічними коливаннями в контакті з'являються широкі джозефсонівські вихори (рисунок 3.6 (б)). При подальшому збільшенні струму зміщення, ширина джозефсонівських вихорів зменшується, а гармонічні коливання зникають (рисунок 3.6 (в)). Близько верхівки сходинки, тільки рух

джозефсонівських вихорів визначає характер коливань в контакті (рисунок 3.6 (Г)).

Зауважимо, що розглянутий перехід між гармонічними коливаннями і рухом джозефсоновських вихорів пов'язаний з тим, що друга сходинка Фіске співпадає з першою сходинкою нульового поля, тому при напругах на цій

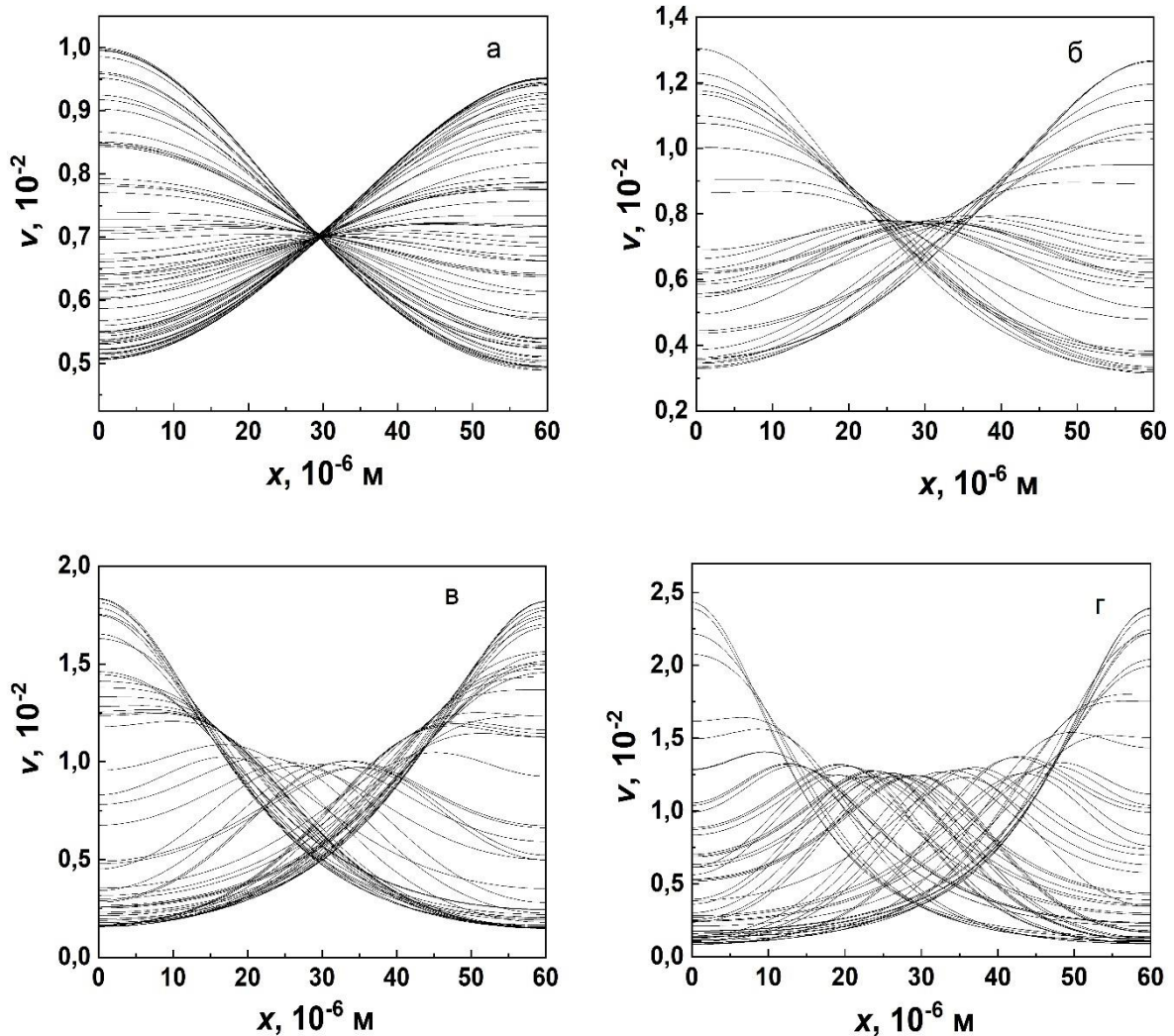


Рисунок 3.6 – розподіли напруги  $V(I)$ , отримані в різні моменти часу, при струмах зміщення  $\frac{I}{I_{c0}} = 0,60$  (а),  $\frac{I}{I_{c0}} = 0,65$  (б),  $\frac{I}{I_{c0}} = 0,78$  (в),  $\frac{I}{I_{c0}} = 0,90$  (Г).

другій сходинці можливі як коливання, зумовлені змішуванням генерації Джозефсона з геометричними резонансними модами, так і з рухом джозефсонівських вихорів.

### 3.4 Когерентне випромінювання в системі двох контактів.

Залежність  $V(I)$  для двох контактів показана на рисунку 3.7. На цій залежності є тільки одна сходинка при напрузі  $V = 0,414$ . Згідно теорії синхронізації контактів у пачці [26], напруга, яка відповідає розщепленій

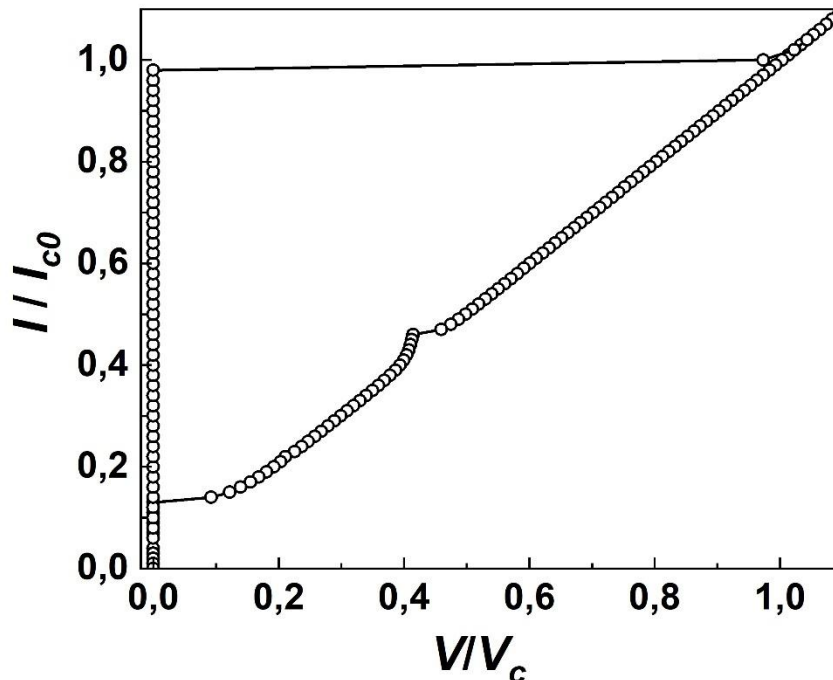


Рисунок 3.7 – залежність  $V(I)$  для двох контактів з індуктивним і резистивним зв'язком.

сходинці при напрузі, що відповідає синфазній синхронізації контактів, дорівнює:

$$V_p = \frac{\Phi_0}{2D} \frac{\bar{c}}{\sqrt{1-\alpha}} p, \quad (3.7)$$

де  $p$  – ціле число,  $\alpha$  – коефіцієнт зв'язку. Значення  $\alpha$  для даної моделі дорівнює 0,5. Значення  $\frac{V_p}{V_c}$  дорівнює 0,426, що близько до значення 0,414, при якому спостерігається сходинка на залежності  $V(I)$ . Таким чином, можна зробити висновок, що сходинка на залежності  $V(I)$  – це частина розщепленої сходинки, яка спостерігається в одному контакті при  $\frac{V_{p=1}}{V_c} = 0,30$ , причому саме та частина,

яка відповідає синфазній синхронізації контактів. На рисунку 3.9 показана залежність нормалізованої потужності випромінювання від напруги для одного контакту при  $R_1 = 0$  (крива 1) та для системи з двох контактів при  $R_1 = 0$  (крива 2). Видно, що максимум, який відповідає випромінюванню системі з двох контактів, значно вищий, ніж максимум для одного контакту. Згідно

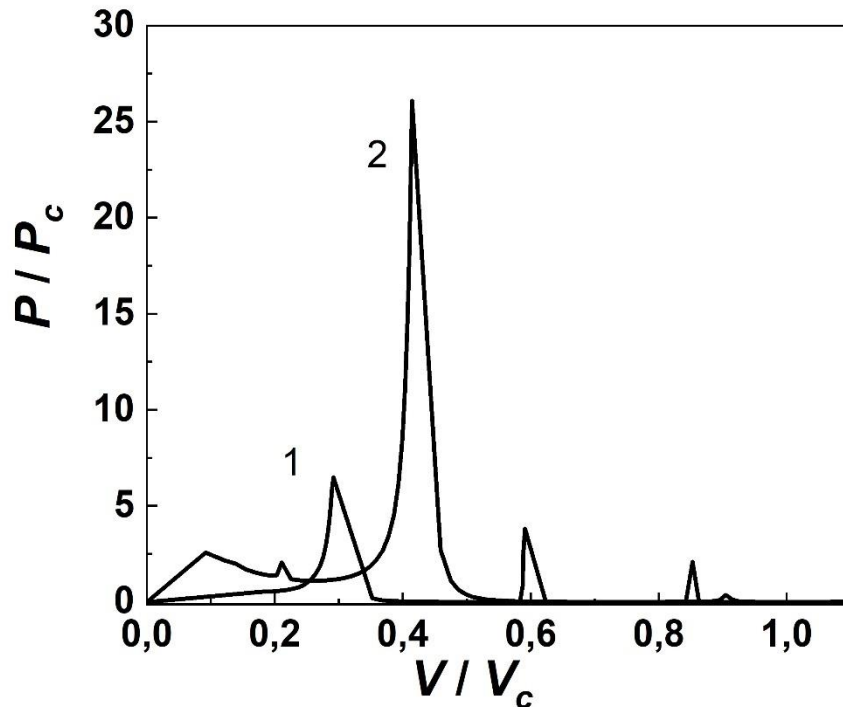


Рисунок 3.8 – залежність  $\frac{P}{P_c} \left( \frac{V}{V_c} \right)$  для одного контакту при  $R_1 = 0$  Ом (крива 1) та для системи з двох контактів при  $R_1 = 0$  Ом (крива 2).

теорії синхронізації, потужність випромінювання при синфазній синхронізації пропорційна квадрату числа контактів. Відповідно, потужність випромінювання системи з двох контактів повинна перевищувати потужність випромінювання одного контакту в чотири рази. Відношення висоти максимумів потужності, розраховане з рисунку 3.8, дорівнює  $26,0/6,50=4,00$ . Таке відношення максимумів указує на повну синфазну синхронізацію контактів.

Досліджено також випромінювання для двох взаємодіючих контактів при наявності електричного опору  $R_1$ . На рисунку 3.9 показані залежності

потужності випромінювання від напруги для одного контакту при  $R_1 = 10^{-5}$  Ом та для двох контактів з індуктивним та резистивним зв'язком при  $R_1 = 10^{-5}$  Ом. Згідно теорії синхронізації [5], якщо контакти не синхронізовані, потужність випромінювання збільшується пропорційно числу контактів. З рисунку 3.9 відношення висот максимумів дорівнює  $12,921/6,187 = 2,08$ . Це

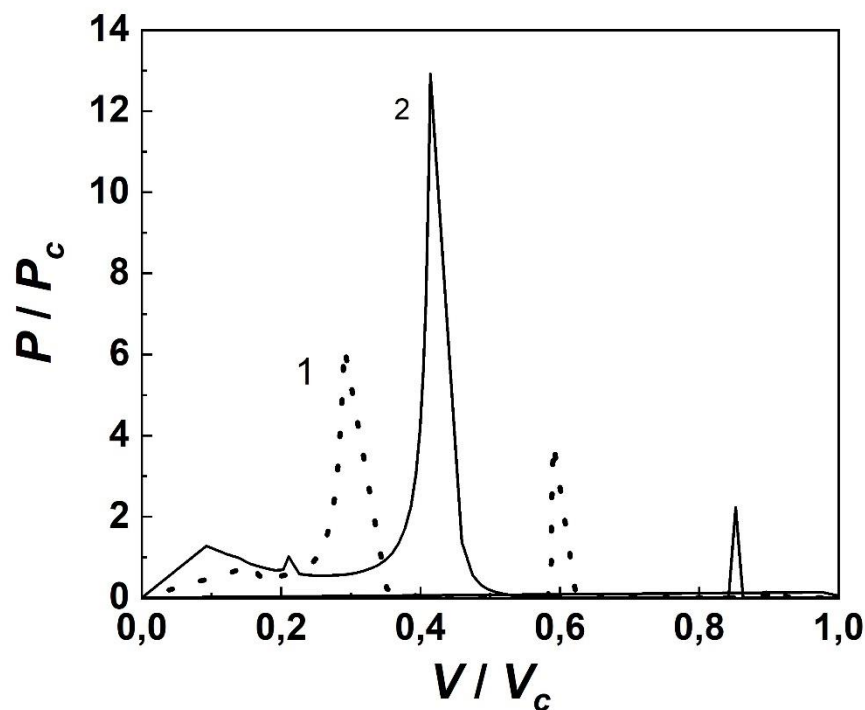


Рисунок 3.9 – залежність  $\frac{P}{P_c} \left( \frac{V}{V_c} \right)$  для одного контакту при  $R_1 = 10^{-5}$  Ом (крива 1) та для системи з двох контактів при  $R_1 = 10^{-5}$  Ом (крива 2).

значить, що контакти в пачці не синхронізовані. Таким чином, можна зробити висновок, що при наявності електричного опору в зв'язку між контактами синфазна синхронізація не відбувається.

В даній роботі розроблена модель динаміки контактів Джозефсона в пачці з двох контактів, на кінцях якої підтримується різна температура. Було показано, що на залежності  $V(I)$  одного контакту виникають як сходинки Фіске, так і сходинки нульового поля. Про це свідчить характер коливань напруги на сходинках, а саме, наявність як резонансних мод коливань в контакті при напругах, які знаходяться біля підніжжя сходинок, так і

джозефсонівських вихорів при напругах, які знаходяться біля верхівок сходинок. Було показано, що існує сильна синфазна синхронізація в пачці, на кінцях якої підтримується різна температура. Ми показали також, що наявність електричного опору в зв'язку між контактами приводить до зникнення синфазної синхронізації.

### **ВИСНОВКИ**

1. Чисельними методами доведено, що в пачці з двох взаємодіючих контактів Джозефсона з різницею температур на кінцях існує сильна синфазна синхронізація.
2. Показано, що у пачці з двох контактів з різницею температур на кінцях синфазна синхронізація зникає при наявності електричного опору в системі зв'язку контактів.
3. Знайдено, що сходинок вольт-амперної характеристики довгого контакту з різницею температур на кінцях зумовлені взаємодією джозефсонівської генерації контакту як з модами геометричних резонансів, так і з рухом джозефсонівських вихорів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Kleiner R. Intrinsic Josephson effect in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  single crystals / R. Kleiner, F Steinmeyer, G. Kunkel, and P. Müller // *Phys. Rev. Lett.*- 1992.- V. 68, № 15.- P. 2394-2397.
2. Kleiner R. / Intrinsic Josephson effects in high- $T_c$  superconductors / R. Kleiner and P. Müller // *Phys. Rev.B.*- 1994.- V.49, № 2.- P. 1327-1341.
3. Ozyuzer L. Emission of coherent THz radiation from superconductors / L. Ozyuzer, L A. E. Koshelev, C. Kurter, N. Gopalsami, Q. Li, M. Tachiki, K. Kadowaki, T. Yamamoto, H. Minami, H. Yamaguchi, T. Tachiki, K. E. Gray, W.-K. Kwok, U. Welp // *Science.*- 2007.- V.318, P.-1291-1293.
4. Tonouchi M. Cutting-edge terahertz technology / Masayoshi Tonouchi // *Nature Photonics.*- 2007.- V. 1.- P. 97-105.
5. Jain A. K. Mutual Phase locking in Josephson junction arrays / A. K. Jain, K. K. Likharev, J. E. Lukens, J. E. Sauvageau // *Physics Reports.*-1984.-V. 109, №6.- P. 309-426.
6. Likharev K. K. Dynamics of Josephson junctions and circuits / K. K. Likharev // Philadelphia: Gordon and Breach. - 1991. - 750 P.
7. Tsujimoto Manabu. Geometrical Resonance Conditions for THz Radiation from the Intrinsic Josephson Junctions in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  / Manabu Tsujimoto, Kazuhiro Yamaki, Kota Deguchi, Takashi Yamamoto, Takanari Kashiwagi, Hidetoshi Minami, Masashi Tachiki, Kazuo Kadowaki, and Richard A. Klemm // *Phys. Rev. Lett.*-2010.- V.105.- P. 037005-1-4.
8. Gray K. E. Emission of terahertz waves from stacks of intrinsic Josephson junctions / K.E. Gray, L. Ozyuzer, A.E. Koshelev, C. Kurter, K. Kadowaki, T. Yamamoto, H. Minami, H. Yamaguchi, M. Tachiki, W.-K. Kwok, and U. Welp

- // IEEE Transactions on Applied Superconductivity.-2009.- V. 19, №. 3.- P. 886-90.
9. Kurter C. Thermal management in large Bi2212 mesas used for terahertz sources / Cihan Kurter, Kenneth Grey, John F. Zasadzinski, Alexei E. Koshelev, Qing'an Li, T. Yamamoto, Kazuo Kadowaki, Wai-Kwong Kwok, M. Tachiki, and Ulrich Welp // IEEE Transactions on Applied Superconductivity.- 2009.- V. 19, №3.- P. 428-431.
  10. Tsujimoto Manabu. Cavity mode identification for coherent terahertz emission from a nearly square stack of intrinsic Josephson junctions / Manabu Tsujimoto, Itsuhiro Kakeya, Takanari Kashiwagi, Hidetoshi Minami, and Kazuo Kadowaki // Optics Express.- 2016.- V. 24, № 5.- P. 4591-4599.
  11. Tsujimoto Manabu. Broadly tunable subterahertz emission from internal branches of the current - voltage characteristics of superconducting  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  single crystals / Manabu Tsujimoto, Takashi Yamamoto, Kaveh Delfanazari, Ryo Nakayama, Takeo Kitamura, Masashi Sawamura, Takanari Kashiwagi, Hidetoshi Minami, Masashi Tachiki, Kazuo Kadowaki, and Richard A. Klemm // Phys. Rev. Lett.- 2012.- V. 108, № 10.- P. 107006-1-4.
  12. Kadowaki Kazuo. Evidence for a dual-source mechanism of terahertz radiation from rectangular mesas of single crystalline  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  intrinsic Josephson junctions / Kazuo Kadowaki, Manabu Tsujimoto, Kazuhiro Yamaki, Takashi Yamamoto, Takanari Kashiwagi, Hidetoshi Minami, Masashi Tachiki, Richard A. Klemm // Journal of the Physical Society of Japan.- 2010.- V.79, №2.- P. 023703-1-4.
  13. Gross B. Hot-spot formation in stacks of intrinsic Josephson junctions in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  / B. Gross, S. Guénon, J. Yuan, M. Y. Li, J. Li, A. Ishii, R. G. Mints, T. Hatano, P. H. Wu, D. Koelle, H. B. Wang, and R. Kleiner // Phys. Rev.- 2012.- B86.- 094524 (2012).
  14. Gross B. Modeling the linewidth dependence of coherent THz emission from intrinsic Josephson junction stacks in the hot-spot regime / B. Gross, J. Yuan, D. Y. An, M. Y. Li, N. Kinev, X. J. Zhou, M. Ji, Y. Huang, T. Hatano, R. G. Mints,

- V. P. Koshelets, P. H. Wu, H. B. Wang, D. Koelle, and R. Kleiner // Phys. Rev. B.- 2013.- V.88.- P. 014524.
15. Guénon S. Interaction of hot spots and terahertz waves in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  intrinsic Josephson junction stacks of various geometry / S. Guénon, M. Grünzweig, B. Gross, J. Yuan, Z. G. Jiang, Y. Y. Zhong, M. Y. Li, A. Iishi, P. H. Wu, T. Hatano, R. G. Mints, E. Goldobin, D. Koelle, H. B. Wang, and R. Kleiner // Phys. Rev.- 2010.- V. B82.- P. 214506(1)-214506(10).
  16. Wang H. B. Hot spots and waves in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  intrinsic Josephson junction stacks: a study by low temperature scanning laser microscopy / H. B. Wang, S. Guénon, J. Yuan, A. Iishi, S. Arisawa, T. Hatano, T. Yamashita, D. Koelle, and R. Kleiner // Phys. Rev. Lett.- 2009.- V. 102 P. 017006-1-4.
  17. Wang H. B. Coherent Terahertz Emission of Intrinsic Josephson Junction Stacks in the Hot Spot Regime / H. B. Wang, S. Guénon, B. Gross, J. Yuan, Z. G. Jiang, Y. Y. Zhong, M. Grünzweig, A. Iishi, P. H. Wu, T. Hatano, D. Koelle, and R. Kleiner // Phys. Rev. Lett.- 2010.- V. 105, № .- P. 057002-1-4.
  18. Koshelev A. E. Resonant electromagnetic emission from intrinsic Josephson-junction stacks with laterally modulated Josephson critical current / A. E. Koshelev, L. N. Bulaevskii // Phys. Rev. B.- 2008.- V. 77, № 1.- P. 014530-1-15.
  19. Rudau F. Thermal and electromagnetic properties of  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  intrinsic Josephson junction stacks studied via one-dimensional coupled sine-Gordon equations / F. Rudau, M. Tsujimoto, B. Gross, T. E. Judd, R. Wieland, E. Goldobin, N. Kinev, J. Yuan, Y. Huang, M. Ji, X. J. Zhou, D. Y. An, A. Ishii, R. G. Mints, P. H. Wu, T. Hatano, H. B. Wang, V. P. Koshelets, D. Koelle, and R. Kleiner // Phys. Rev. B.-2015.- V. 91, № 10.- P. 104513-1-17.
  20. Rudau F. Three-Dimensional Simulations of the Electrothermal and Terahertz Emission Properties of  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  Intrinsic Josephson Junction Stacks / F. Rudau, R. Wieland, J. Langer, X. J. Zhou, M. Ji, N. Kinev, L. Y. Hao, Y. Huang, J. Li, P. H. Wu, T. Hatano, V. P. Koshelets, H. B. Wang, D. Koelle, and R. Kleiner // Physical Review Applied.- 2016.- V. 5, № 4.- 044017-1-8.

21. Grib A. N. Phase locking in a stack of two Josephson junctions with a sidewall shunt / A. N. Grib, J. Scherbel, P. Seidel // *Physics Letters. A.*- 2000.- V. 266.- P. 76-82.
22. Grib A. N. Synchronization of overdamped Josephson junctions shunted by a superconducting resonator / A. N. Grib, J. Scherbel, P. Seidel // *Phys. Rev.*- 2002.- V. 65.- P. 094508-1-10.
23. Grib Alexander. Wide-band phase locking of Josephson junctions in a resonator / Alexander Grib and Paul Seidel // *Physica Status Solidi (Rapid Research Letters).*- 2009.- V. 3.- P. 302-304.
24. Grib A. The resonant interaction of intrinsic Josephson junctions with standing waves / A. Grib, M. Mans, M. Büenefeld, J. Scherbel, F. Schmidl, H. Schneidewind, and P. Seidel // *IEEE Trans. Appl. Supercond.*- 2014.- V.24, №4.- P.1800205-1-5.
25. Kleiner R. Dynamic behaviour of Josephson - coupled layered structures / R. Kleiner, P. Müller, H. Kohlstedt, N. F. Pedersen, S. Sakai // *Phys. Rev.B.* 1994.- V.50.- P. 3942-3952.
26. Sakai S. Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices / S. Sakai and P. Bodin, N. F. Pedersen // *J. Appl. Phys.*- 1993.- V.73.- P. 2411-2418.
27. Sakai S. Theory and experiment on electromagnetic-wave-propagation velocities in stacked superconducting tunnel structures / S. Sakai, A. V. Ustinov and H. Kohlstedt, A. Petraglia and N. F. Pedersen // *Phys. Rev. B.*- 1994.- V. 50, № 17.- P. 12905-12914.