
УДК 513.881

Е. А. ПАВЛОВ

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАЦИИ СВЕРТКИ
БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ**

Определение 1. Обозначим через $M((-\infty, \infty) dx)$ пространство всех измеримых, в смысле Лебега, функций, определенных на $(-\infty, \infty)$. Сверткой двух функций $f(t), g(t) \in M((-\infty, \infty); dx)$ будем называть функцию $\gamma(t)$, определяемую равенством

$$\gamma(t) = (f * g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) ds. \quad (1)$$

Из общих теорем об измеримых функциях следует, что если $f(t)$ и $g(t)$ — измеримые функции, то свертка $\gamma(t) = (f * g)(t)$ — измеримая функция (См., например, [5]).

Определение 2. Два функциональных банаховых пространства E_1 и E_2 , состоящих из измеримых, в смысле Лебега, функций, определенных на $(-\infty, \infty)$, будем называть сворачиваемыми,

если для $f \in E_1, g \in E_2$ выполняется соотношение $\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) ds < \infty$ для п. в. $t \in (-\infty, \infty)$ (2).

Определение 3. Пусть E_1 и E_2 — два сворачиваемых функциональных пространства измеримых функций, определенных на $(-\infty, \infty)$. E_3 — некоторое третье функциональное пространство измеримых функций, определенных на $(-\infty, \infty)$ такое, что выполняется соотношение $(f * g)(t) \in E_3$, если $f(t) \in E_1$, $g(t) \in E_2$.

Сверткой пространств E_1 и E_2 относительно пространства E_3 будем называть пространство, обозначаемое $E_1 * E_2$ и являющееся замыканием в E_3 линейной оболочки множества

$$E_1 * E_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{f * g \mid f \in E_1, g \in E_2\}. \quad (3)$$

Замечание. Естественно возникает вопрос, когда пространства E_1 и E_2 сворачиваемы и когда существует свертка пространств E_1 и E_2 относительно третьего пространства? В каких терминах формулировать необходимые и достаточные условия сворачиваемости пространств?

Определение 4. Банахово функциональное пространство измеримых функций, определенных на $(-\infty, \infty)$ называется симметричным пространством (см. [7]) если:

- 1) из неравенства $|x(t)| \leq |y(t)|$ для почти всех $t \in (-\infty, \infty)$ включения $y(t) \in E$ следует, что $x(t) \in E$ и $\|x(t)\|_E \leq \|y(t)\|_E$;
- 2) из включения $y(t) \in E$ и равноизмеримости $|x(t)|$ и $|y(t)|$ следует, что $\|x(t)\|_E = \|y(t)\|_E$.

Определение 5. Через $\varphi_E(t)$ определяется (см. [7]) функциональная функция симметричного пространства E

$$\varphi_E(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|\chi_e\|_E, \quad (4)$$

где $\text{mes } e = t$, χ_e — характеристическая функция множества e .

Через α_E и β_E обозначаются нижний и верхний индексы Бойда (см. [7])

$$\alpha_E = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log \|\sigma_t\|_E}{\log t}; \quad \beta_E = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|\sigma_t\|_E}{\log t}. \quad (5)$$

где $\|\sigma_t\|_E$ — норма оператора растяжения, действующего непрерывно на каждом симметричном пространстве E , который определяется равенством $\sigma_t x(s) = x(s/t)$

$$x^{**} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds \quad (6)$$

где $x^*(s)$ — перестановка $|x(s)|$ в убывающем порядке (см. [7]).

Приведем некоторые примеры сворачиваемых пространств.

Пример 1. Пусть положительные числа p, q таковы, что $1/p + 1/q = 1$. Тогда пространства L_p и L_q сворачиваемы и существует свертка $L_p^r * L_q$, где число $r > 0$ таково, что $1/r = 1/p + 1/q - 1$.

Доказательство непосредственно следует из неравенства Юнга $f * g \|_{L_r} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$, где $1/r = 1/p + 1/q - 1$.

Через E_1 обозначается двойственное (ассоциированное) к E пространство, которое определяется соотношением

$$E^1 = \left\{ g \in M((-\infty, \infty); dt) \mid \|g\|_{E^1} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|f\|_{E^1} < 1} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) dt < \infty \right\}. \quad (7)$$

Если E — симметричное пространство, то E^1 — также симметричное пространство (см. [7]).

Пример 2. Пространство E и E^1 сворачиваемы, где E — симметричное пространство и существует свертка $E \overset{L_\infty}{\times} E^1$.

Доказательство может быть получено применением обобщенного неравенства Гельдера (см. [7]).

Пример 3. Пусть симметричные пространства E_1 и E_2 таковы, что выполняется соотношение $\alpha_{E_1} + \gamma_{\Phi_{E_2}}(E_3)$ (см. [7]). Тогда 1) E_1 и E_2 сворачиваемы; 2) Существует свертка $E_1 \overset{E_3}{\times} E_2$, где $\|x\|_{E_3} = \|x^{**}(t) \times \Phi_{E_2}(t)\|_{E_1}$.

Доказательство получается непосредственным применением теоремы 6.16 из [7] и определения сворачиваемости E_1 и E_2 и свертки $E_1 \overset{E_3}{\times} E_2$.

Теорема 1. Пусть существует свертка $E_1 \overset{E_3}{\times} E_2$. Тогда справедливо соотношение $\tau\Phi_{E_3}(t) \leq C\Phi_{E_1}(t)\Phi_{E_2}(t)$.

Доказательство. Из определения пространства $E_1 \overset{E_3}{\times} E_2$ получаем, что $f \times g \in E_3$, если $f \in E_1$, а g пробегает все пространство E_2 . Другими словами интегральный оператор свертки T_k с ядром $k = f$ действует из E_2 в E_3 . По теореме С. Банаха (см. [1]) оператор T_k является ограниченным как оператор из E_1 в E_2 , т. е. выполняется неравенство

$$\|f \times g\|_{E_3} \leq C_f \|g\|_{E_2}. \quad (8)$$

По теореме о равномерной ограниченности получаем неравенство (см. [6])

$$\|f \times g\|_{E_3} \leq C \|f\|_{E_1} \|g\|_{E_2}. \quad (9)$$

Положим $f(t) = g(t) = \chi_{[0, \tau]}(t)$. Несложно проверить справедливость неравенства

$$(\chi_{[0, \tau]} \times \chi_{[0, \tau]})(t) \geq \frac{1}{2} \tau \chi_{[\tau/2, 3\tau/2]}(t). \quad (10)$$

Из (9), (10) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2} \tau \chi_{[\tau/2, 3\tau/2]}(t) \right\|_{E_3} &\leq \|\chi_{[0, \tau]} \times \chi_{[0, \tau]}\|_{E_3} \leq \\ &\leq C \|\chi_{[0, \tau]}\|_{E_1} \|\chi_{[0, \tau]}\|_{E_2} = C\Phi_{E_1}(\tau)\Phi_{E_2}(\tau). \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, имеем

$$\tau\Phi_{E_3}(\tau) \leq 2C\Phi_{E_1}(\tau)\Phi_{E_2}(\tau). \quad (12)$$

Теорема доказана.

Очевидны следующие свойства.

Свойство 1. Операция свертки банаховых пространств коммутативна.

Свойство 2. Пусть E_1, E_2, E_3 — функциональные банаховы пространства такие, что существуют свертки пространств: а) $E_1 \overset{F}{\times} E_2$; б) $(E_1 \overset{F}{\times} E_2) \overset{F}{\times} E_3$; в) $E_2 \overset{F}{\times} E_3$; д) $E_1 \overset{F}{\times} (E_2 \overset{F}{\times} E_3)$. Тогда справедливо равенство $(E_1 \overset{F}{\times} E_2) \overset{F}{\times} E_3 = E_1 \overset{F}{\times} (E_2 \overset{F}{\times} E_3)$.

Свойство 3. Если одно из пространств E_1 или E_2 инвариантно относительно сдвига, то $E_1 \overset{E_3}{\times} E_2$ — инвариантно относительно сдвига.

Теорема 2. Пусть E_1, E_2, E_3 — сепарабельные симметричные пространства такие, что существуют свертка $E_1 \overset{E_3}{\times} E_2$. Тогда справедливо равенство $E_1 \overset{E_3}{\times} E_2 = E_3$.

Доказательство. Пусть f — финитная ограниченная функция ω_e — «шапочка» (см., например, [8]). Тогда, как известно (см. [8]), имеют место соотношения: а) $f \overset{L_1}{\times} \omega_e \rightarrow f$; б) $f \overset{L_\infty}{\times} \omega_e \rightarrow f$. Так как ω_e — финитна и ограничена, $\omega_e \in E_3$. Из сепарабельности E_3 следует интерполяционность E_3 между L_1 и L_∞ (см. [7]). Из соотношений а) и б) и интерполяционности E_3 между L_1 и L_∞ получаем соотношение $f \overset{E_3}{\times} \omega_e \rightarrow f$, где f — финитна и ограничена. Пусть теперь f — произвольная функция из E_3 . В силу сепарабельности E_3 существует последовательность финитных ограниченных функций $f_n(t)$ таких, что $f_n(t) \overset{E_3}{\rightarrow} f(t)$ (см. [7]).

Покажем, что $(f_n \times \omega_e) \overset{E_3}{\rightarrow} f$ при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$\|(f_n \times \omega_e) - f\|_{E_3} \leq \|(f_n \times \omega_e) - f_n\|_{E_3} \|f_n - f\|_{E_3}. \quad (13)$$

Понятно, что для достаточно больших n и малых ε каждое из слагаемых в правой части неравенства (13) можно сделать меньше $\delta/2$. Итак, имеем $\|(f_n \times \omega_e) - f\|_{E_3} < \delta$ для достаточно больших n и малых ε .

Следовательно, $f \in E_1 \overset{E_3}{\times} E_2$. Таким образом, $E_3 \subset E_1 \overset{E_3}{\times} E_2$. С другой стороны, из определения свертки $E_1 \overset{E_3}{\times} E_2$ следует включение $E_1 \overset{E_3}{\times} E_2 \subset E_3$. Следовательно, $E_1 \overset{E_3}{\times} E_2 = E_3$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть E — симметричное сепарабельное пространство. Тогда для того, чтобы существовала свертка $E \overset{E}{\times} E$, необходимо и достаточно выполнение соотношения $\Phi_E(t) \geq Ct$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1. **Достаточность.** Пусть выполняется соотношение $\Phi_E(t) \geq ct$. Из обобщенного неравенства Минковского (см. [10]) следует, что $\|f \times g\|_E \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_E$. Далее имеем

$$\|f\|_E \geq \|f\| M_{\Phi_E} = \sup_{0 < t < \infty} \Phi_E(t) x^{**}(t) \geq C \sup_{0 < t < \infty} \int_0^t x^*(s) ds = \|x\|_{L_1}. \quad (14)$$

Итак, имеем

$$\|f \times g\|_E \leq \frac{1}{C} \|f\|_E \|g\|_E. \quad (15)$$

Теорема доказана

Список литературы: 1. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск, 1983. 224 с. 2. *Сахнович Л. А.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке // Успехи мат. наук. 1980. 35, вып. 4(214). С. 69—129. 3. *Рудин У.* Основы математического анализа. М., 1976. 320 с. 4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. М., 1976. 320 с. 5. *Титчмарш Е.* Теория функций. М., 1980. 464 с. 6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972. 496 с. 7. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов, М., 1978. 400 с. 8. *Владимиров В. С.* Обобщение функций в математической физике. М., 1976. 280 с. 9. *Носида К.* Функциональный анализ. М., 1967. 624 с. 10. *Павлов Е. А.* Об операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах // Сиб. мат. журн. 1977. 18, № 1. С. 5—39.

Поступила в редколлегию 06.07.87