ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 9. 1969

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ТЕОРЕМЫ Ю. В. ЛИННИКА

*Г. П. Чистяков*

Мы будем пользоваться терминологией, принятой в монографии Ю. В. Линника [1].

Пусть $F(x)$ — закон, а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ такие два закона, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-s)\,dF_2(s) = F_1 * F_2. \tag{1}$$

Тогда $F_1(x)$ и $F_2(x)$ будем называть компонентами закона $F(x)$, а $F(x)$ — композицией законов $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Напомним, что соотношение (1) эквивалентно следующему соотношению:

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t),$$

где $f(t)$, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — характеристические функции соответственно законов $F(x)$, $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

В 1936 г. Крамер [1, стр. 107] доказал следующую теорему.

Все компоненты закона Гаусса являются законами Гаусса. Аналогичную теорему для закона Пуассона в 1937 г. обнаружил Д. А. Райков [1, стр. 119], а в 1957 г. для композиции законов Гаусса и Пуассона — Ю. В. Линник [1, стр. 122].

В 1937 г. П. Леви [2] установил, что теорема Крамера обладает свойством «устойчивости». Чтобы сформулировать результат П. Леви, введем такое обозначение. Пусть $K$ — некоторый класс законов. Назовем расстоянием закона $F$ от класса $K$ величину

$$\rho(F, K) = \inf_{G \in K} L(F, G),$$

где

$$L(F, G) = \inf\{h : F(x-h) - h \leqslant G(x) \leqslant F(x+h) + h\}.$$

Теорема П. Леви состоит в следующем.

Пусть $N$ — класс законов Гаусса, $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность законов, такая, что

$$L(F_j, \Phi) \leqslant \varepsilon_j, \ j = 1, 2, \ldots, \ \Phi \in N,$$

где $\varepsilon_j \downarrow 0$ при $j \uparrow \infty$. Пусть

$$F_j = F_{1j} * F_{2j}.$$

Тогда существует последовательность $\delta_j \downarrow 0$ при $j \uparrow \infty$ такая, что

$$\rho(F_{1j}, N) \leqslant \delta_j, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Эта теорема была позднее обобщена на случай, когда вместо класса $N$ берется более общий класс законов [1], [3].

Теорема П. Леви не дает оценок величин $\delta_j$ через $\varepsilon_j$. Впервые вопросом такой «количественной устойчивости» занялся Н. А. Сапогов [4], [5], [6]. Он получил такой результат о «количественной устойчивости» теоремы Г. Крамера.

Если в теореме П. Леви дополнительно предположить, что усеченные (в определенном смысле) дисперсии компонент ограничены снизу положительной, не зависящей от $j$ постоянной, то

$$\delta_j = 0\left(\ln\frac{1}{\varepsilon_j}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Результат, аналогичный результату Н. А. Сапогова, для класса законов Пуассона («количественная устойчивость» теоремы Д. А. Райкова) был получен О. В. Шалаевским [7]. При этом оказалось, что

$$\delta_j = 0\left(\ln\frac{1}{\varepsilon_j}\right)^{-\omega},$$

где $\omega$ — любое число, меньше $\frac{1}{2}$.

В настоящей работе мы исследуем «количественную устойчивость» теоремы Ю. В. Линника о композиции законов Гаусса и Пуассона и получаем результат, аналогичный результату Н. А. Сапогова.

Будем придерживаться следующих обозначений:

$$\Pi(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\lambda}\sum\limits_{k<x}\frac{\lambda^k}{k!}, & x \geqslant 0 \end{cases} \quad (\lambda \geqslant 0),$$

$$\Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_2}}\int\limits_0^\infty \Pi(s, \nu_3)\, e^{-\frac{(x-s-\nu_1)^2}{4\nu_2}}\, ds,$$

где $\nu_2 > 0$, $\nu_3 \geqslant 0$. Условимся в дальнейшем обозначать положительные абсолютные постоянные независимо от их величины одной и той же буквой $A$.

Теперь сформулируем полученную теорему.

*Пусть $X_1$ и $X_2$ — независимые случайные величины, а $X = X_1 + X_2$. Предположим также, что медиана $m_1$ случайной величины $X_1$ равна 0. Обозначим через $F_j(x)\, j = 1, 2, F(x)$ законы распределения случайных величин $X_j$ $j = 1, 2, X$.*

*Пусть выполняется*

$$\left|F(x) - \Lambda\left(x, 0, \frac{1}{2}, 1\right)\right| < \varepsilon, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < \varepsilon < e^{-e}, \tag{2}$$

*тогда справедливо неравенство*

$$|F_1(x) - \Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)| < A\frac{1}{\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{1}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{300}}} + \frac{1}{\sqrt{\nu_2}}\right),$$

*где*

$$\nu_1 = \int\limits_{-N}^{N} x dF_1(x) - \int\limits_{-N}^{N} x^3 dF_1(x) +$$

$$+ 3\left(\int\limits_{-N}^{N} x dF_1(x)\right)\left(\int\limits_{-N}^{N} x^2 dF_1(x)\right) - 2\left(\int\limits_{-N}^{N} x dF_1(x)\right)^3,$$

$$\nu_2 = \max\left\{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{72}}, \frac{1}{2}\left|\int\limits_{-N}^{N} x^2 dF_1(x) - \left(\int\limits_{-N}^{N} x dF_1(x)\right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int\limits_{-N}^{N} x^3 dF_1(x) + 3\left(\int\limits_{-N}^{N} x dF_1(x)\right)\left(\int\limits_{-N}^{N} x^2 dF_1(x)\right) - 2\left(\int\limits_{-N}^{N} x dF_1(x)\right)^3\right|\right\},$$

$$\nu_3 = \left| \int_{-N}^{N} x^3 dF_1(x) - 3\left(\int_{-N}^{N} x dF_1(x)\right)\left(\int_{-N}^{N} x^2 dF_1(x)\right) + 2\left(\int_{-N}^{N} x dF_1(x)\right)^3 \right|,$$

*причем* $N \ln N = \ln \frac{1}{\varepsilon}$.

В основе доказательства нашей теоремы лежит идея Н. А. Сапогова [4], [5], позволяющая свести общий случай к случаю ограниченных случайных величин. Мы пользуемся также некоторыми результатами работы Н. А. Сапогова [4] и некоторыми приемами работы И. В. Островского [8].

По предположению теоремы медиана $m_1$ случайной величины $X_1$ равна 0, т. е. $P\{X_1 < 0\} \leqslant \frac{1}{2}$, $P\{X_1 \leqslant 0\} \geqslant \frac{1}{2}$. Проводя рассуждение, аналогичное приведенному в работе [4, стр. 207], получаем, что медиана $m_2$ случайной величины $X_2$ удовлетворяет неравенству $|m_2| < A$, где $A$ — абсолютная постоянная.

Введем новые случайные величины $X_1^*$ и $X_2^*$,

$$X_j^* = \begin{cases} X_j^* = X_j, \ |X_j| \leqslant N \\ X_j^* = 0, \ |X_j| > N \end{cases} \quad j = 1, 2, \ N \ln N = \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Случайные величины $X_1^*$ и $X_2^*$ независимы, поскольку независимы по предположению теоремы случайные величины $X_1$ и $X_2$. Соответствующие случайным величинам $X_1^*$, $X_2^*$, $X^* = X_1^* + X_2^*$ законы будем обозначать так: $F_1^*(x)$, $F_2^*(x)$, $F^*(x)$.

Как и в [4, стр. 209] получаем неравенство

$$|F(x) - F^*(x)| \leqslant \int_{|x|>N} dF_1(x) + \int_{|x|>N} dF_2(x). \tag{3}$$

Так как

$$\frac{1}{2} F_2(y) \leqslant P(X_1 \leqslant 0;\ X_2 < y) \leqslant P(X \leqslant y \leqslant)\varepsilon + \Lambda\left(y,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right),$$

то

$$F_2(-N) \leqslant 2\varepsilon + 2\Lambda\left(-N,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right). \tag{4}$$

Далее замечаем, что

$$\frac{1}{2}(1 - F_2(y)) \leqslant P(X_1 \geqslant 0;\ X_2 \geqslant y) \leqslant P(X \geqslant y) <$$
$$< \varepsilon + 1 - \Lambda\left(y,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right),$$

откуда следует

$$1 - F_2(N) < 2\varepsilon + 2\left(1 - \Lambda\left(N,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right). \tag{5}$$

Неравенства (4) и (5) дают нам

$$\int_{|x|>N} dF_2(x) < 4\varepsilon + 2\Lambda\left(-N,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right) + 2\left(1 - \Lambda\left(N,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right). \tag{6}$$

Аналогичные рассуждения позволяют доказать неравенство

$$\int_{|x|>N} dF_1(x) < 4\varepsilon + 2\Lambda\left(-N + m_2,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right) +$$
$$+ 2\left(1 - \Lambda\left(N + m_2,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right). \tag{7}$$

Подставляя оценки (6) и (7) в неравенство (3) и используя (2), получим

$$\left|F^*(x)-\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right|<9\varepsilon+4\Lambda\left(-N+|m_2|,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)+$$
$$+4\left(1-\Lambda\left(N-|m_2|,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right)=\varepsilon_1. \tag{8}$$

Нам понадобится оценка $\varepsilon_1$. Чтобы получить ее, оценим два последних слагаемых правой части неравенства (8).

Из выражений

$$\Lambda\left(x,\ 0,\frac{1}{2},\ 1\right)=\frac{1}{e\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{x-k}e^{-\frac{s^2}{2}}ds,$$
$$1-\Lambda\left(x,\ 0,\frac{1}{2},\ 1\right)=\frac{1}{e\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{x-k}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$$

следует, что

$$\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)<\frac{1}{e\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{s^2}{2}}ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{s^2}{2}}ds\leqslant Ae^{-\frac{x^2}{3}},$$
$$x<0, \tag{9}$$

$$1-\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)<\frac{1}{e\sqrt{2\pi}}\left\{\sum_{k<\frac{1}{2}x}\frac{1}{k!}\int_{\frac{1}{2}x}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{2}}ds+\right.$$
$$\left.+\sum_{k\geqslant\frac{1}{2}x}\frac{\sqrt{2\pi}}{k!}\right\}\leqslant Ae^{-\frac{1}{2}x\ln x},\quad x>0. \tag{10}$$

Используя эти оценки, приходим к неравенству

$$\left|F^*(x)-\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right|<9\varepsilon+Ae^{-\frac{1}{2}N\ln N}<A\sqrt{\varepsilon},$$
$$-\infty<x<\infty. \tag{11}$$

Обозначим характеристические функции случайных величин $X_1^*$, $X_2^*$, $X^*$ через $f_1^*(z)$, $f_2^*(z)$, $f^*(z)$ и приступим к их изучению. Очевидно, что эти функции аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость как целые функции. Продолженные функции условимся обозначать снова через $f_1^*(z)$, $f_2^*(z)$, $f^*(z)$. При любом комплексном $z$

$$\left|f^*(z)-e^{e^{iz}-1-\frac{z^2}{2}}\right|=\left|\int_{-2N}^{2N}e^{izx}dF^*(x)-\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}d\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int_{-2N}^{2N}e^{izx}d\left(F^*(x)-\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right)\right|+\left|\int_{|x|\geqslant 2N}e^{izx}d\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right|.$$

Используя (11), получаем ($z=u+iv$)

$$\left|\int_{-2N}^{2N}e^{izx}d\left(F^*(x)-\Lambda\left(x,\ 0,\frac{1}{2},\ 1\right)\right)\right|=\left|\left\{e^{izx}\left(F^*(x)-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\Lambda\left(x,\ 0,\frac{1}{2},\ 1\right)\right)\right\}_{-2N}^{2N}-\int_{-2N}^{2N}\left(F^*(x)-\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right)ize^{izx}dx\Bigg|\leqslant$$
$$\leqslant A\sqrt{\varepsilon}\,e^{2N|v|}(1+4N|z|).$$

В силу (9), (10) справедливо

$$\left|\int\limits_{|x|\geqslant 2N} e^{izx}d\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right|\leqslant\left|e^{-iz2N}\Lambda\left(-2N,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)-\right.$$

$$-iz\int\limits_{-\infty}^{-2N} e^{izx}\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)dx\Bigg|+\Bigg|e^{iz2N}\left(1-\Lambda\left(2N,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right)-$$

$$-iz\int\limits_{2N}^{\infty} e^{izx}\left(1-\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right)dx\Bigg|\leqslant e^{2N|v|}\Bigg(1-\Lambda\left(2N,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)+$$

$$+\Lambda\left(-2N,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\Bigg)+|z|\int\limits_{2N}^{\infty} e^{|v|x}\Bigg(1-\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)+$$

$$+\Lambda\left(-x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\Bigg)dx\leqslant Ae^{2N|v|-\frac{1}{2}N\ln N}+A|z|\int\limits_{2N}^{\infty} e^{|v|x-\frac{1}{2}x\ln x}dx.$$

Так как при $|v|<\frac{1}{4}\ln N$

$$\int\limits_{2N}^{\infty} e^{|v|x-\frac{1}{2}x\ln x}dx=\int\limits_{2N}^{\infty} e^{|v|x-\frac{1}{4}x\ln x}e^{-\frac{1}{4}x\ln x}dx\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{1}{2}N\ln N}\int\limits_{2N}^{\infty} e^{|v|x-\frac{1}{4}x\ln x}dx\leqslant e^{-\frac{1}{2}N\ln N}\int\limits_{2N}^{\infty} e^{-\frac{\ln 2}{4}x}dx=$$

$$=\frac{4}{\ln 2}e^{-\frac{1}{2}N\ln N-\frac{\ln 2}{2}N};$$

то при $|z|<\frac{1}{16}\ln N$

$$\left|\int\limits_{|x|\geqslant 2N} e^{izx}d\Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right|\leqslant Ae^{-\frac{3}{8}N\ln N}+Ae^{-\frac{1}{2}N\ln N}<2Ae^{-\frac{3}{8}N\ln N}.$$

Таким образом, в круге $|z|\leqslant\frac{1}{16}\ln N$ справедлива оценка

$$\left|f^*(z)-e^{e^{iz}-1-\frac{z^2}{2}}\right|\leqslant A\sqrt{\varepsilon}\,e^{\frac{1}{8}N\ln N}\left(1+\frac{1}{4}N\ln N\right)+$$

$$+Ae^{-\frac{3}{8}N\ln N}<A\varepsilon^{\frac{1}{4}}+A\varepsilon^{\frac{3}{8}}<A\varepsilon^{\frac{1}{4}}. \tag{12}$$

Но в этом же круге при достаточно больших $N$

$$\left|e^{e^{iz}-1-\frac{z^2}{2}}\right|\geqslant e^{-e^{|z|}-1-\frac{|z|^2}{2}}>e^{-2e^{\frac{1}{16}\ln N}-1}>\varepsilon^{\frac{1}{8}}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) заключаем, что

$$\left|f^*(z)-e^{e^{iz}-1-\frac{z^2}{2}}\right|<\frac{1}{2}\left|e^{e^{iz}-1-\frac{z^2}{2}}\right|\quad\left(|z|\leqslant\frac{1}{16}\ln N\right),$$

это влечет за собой

$$\frac{1}{2}\left|e^{e^{iz}-1-\frac{z^2}{2}}\right|<|f^*(z)|<\frac{3}{2}\left|e^{e^{iz}-1-\frac{z^2}{2}}\right|.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие теоретико-функциональные леммы.

***Лемма 1.*** *Пусть $\chi(z)$ — функция, голоморфная в круге $|z|\leqslant R$ и удовлетворяющая условиям*

$$|\chi(z)|\leqslant A\left(|z|e^{\operatorname{Re} z}+|z|^3+1\right),\quad |z|\leqslant R,$$
$$|\chi(u)|\leqslant A,\quad -R\leqslant u\leqslant R.$$

которое в соединении с (17) дает в полукруге $\left\{z : |z| \leqslant \left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{1}{4}},\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$ соотношение $|\chi(z)| < A$.

Аналогично получаем $|\chi(z)| < A$ и в полукруге $\left\{z : |z| \leqslant \left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{1}{4}},\ \operatorname{Im} z < 0\right\}$. Поэтому во всем круге $|z| \leqslant \left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ справедливо $|\chi(z)| < A$, что и требовалось.

*Лемма* 2. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в круге* $|z| \leqslant R$, $R > 2\pi$, *допускает в этом круге оценку*

$$|f(z)| \leqslant A\left(|z| e^{-\operatorname{Im} z} + |z|^3 + 1\right). \tag{18}$$

*Пусть*

$$f(z+2\pi) - f(z) = 0, \quad |z| \leqslant R.$$

*Тогда справедливо равенство*

$$f(z) = c_0 + c_1 e^{iz} + \varphi(z),$$

*где* $c_0$ *и* $c_1$ — *постоянные, удовлетворяющие условию*

$$|c_0| + |c_1| < A, \tag{19}$$

*а* $\varphi(z)$ — *голоморфная в полосе* $|\operatorname{Im}| < \frac{\sqrt{R^2 - 4\pi^2}}{4}$ *функция, допускающая оценку*

$$|\varphi(z)| < A e^{-\frac{R}{4}}, \quad |z| \leqslant \frac{\sqrt{R^2 - 4\pi^2}}{4}. \tag{20}$$

Доказательство. Разложим функцию $f(u)$ в ряд Фурье

$$f(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{iku},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-iku} du. \tag{21}$$

Проведем оценки коэффициентов Фурье $c_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Рассмотрим случай $k < 0$. Замечаем, что

$$\int_{(C)} f(z) \exp\{-ikz\}\, dz = 0, \tag{22}$$

где интегрирование ведется по сторонам прямоугольника с вершинами $(0,\ i\sqrt{R^2 - 4\pi^2},\ 2\pi + i\sqrt{R^2 - 4\pi^2},\ 2\pi)$. Из периодичности $f(z)$ следует, что интегралы по вертикальным сторонам прямоугольника взаимно уничтожаются, поэтому из (22) получаем

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u + ih) \exp\{kh - iku\}\, du, \quad h = \sqrt{R^2 - 4\pi^2}.$$

Используя (18), оценим $c_k$ $(k = -1, -2, \ldots)$. Получим

$$|c_k| < A (h + 2\pi)^3 \exp(kh). \tag{23}$$

Проводя аналогичное рассуждение, но беря прямоугольник с вершинами $(0,\ -i\sqrt{R^2 - 4\pi^2},\ 2\pi - i\sqrt{R^2 - 4\pi^2},\ 2\pi)$, приходим к следующей оценке для $c_k$ $(k = 2, 3, \ldots)$

$$|c_k| < A (h + 2\pi) \exp\{(1 - k) h\}. \tag{24}$$

Введем функцию

$$\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikz} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k e^{ikz}.$$

Из (23) и (24) следует, что при $|z| \leqslant \frac{1}{4} h$ имеет место неравенство

$$|\varphi(z)| < A(h+2\pi)^3 \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{-k(|z|-h)} + A(h+2\pi)e^h \sum_{k=2}^{\infty} e^{-k(h-|z|)} <$$

$$< A(h+2\pi)^3 \frac{e^{-\frac{3}{4}h}}{1-e^{-\frac{3}{4}h}} + A(h+2\pi)e^h \frac{e^{-\frac{3}{2}h}}{1-e^{-\frac{3}{4}h}} < A(h+2\pi)^3 e^{-\frac{1}{2}h},$$

откуда и следует оценка (20). Оценка (19) получается из (18) и (21) непосредственно.

***Лемма 3.*** *Уравнение*

$$g(z+2\pi) - g(z) = \chi(z), \tag{25}$$

*где $\chi(z)$ — функция голоморфная в круге $|z| \leqslant R$ ($R > 10$) и удовлетворяющая условию $|\chi(z)| < A$ ($|z| \leqslant R$), имеет в круге $|z| \leqslant \left(\frac{R}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ решение вида*

$$F(z) = c_1 z + H(z),$$

*где $|c_1| \leqslant A$, а функция $H(z)$ голоморфна в круге $|z| \leqslant \left(\frac{R}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ и допускает оценку $|H(z)| < AR^{-\frac{1}{3}}$.*

Доказательство. В дальнейшем нам понадобятся обобщенные функции Бернулли, введенные А. О. Гельфондом (см. [9, стр. 357]). Эти функции определяются равенством

$$B_n(z, R) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{e^{zt}}{t^{n+1}(e^{2\pi t}-1)} dt,$$

в котором предполагается, что $R > 0$ не является натуральным числом Легко видеть, что

$$B_n(z+2\pi, R) - B_n(z, R) = z^n. \tag{26}$$

Функция $\chi(z)$ допускает разложение

$$\chi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k,$$

и, в силу неравенств Коши, $|a_k| < \frac{Ak!}{R^k}$. Будем искать решение уравнения (25) в виде

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} B_n(z, R_n), \tag{27}$$

$$R_n = \begin{cases} \frac{2n}{R}, & \text{если } \frac{2n}{R} - \left[\frac{2n}{R}\right] > \frac{2}{R},\ \left[\frac{2n}{R}\right] + 1 - \frac{2n}{R} > \frac{2}{R}, \\ \frac{2n+2}{R}, & \text{если } \frac{2n}{R} - \left[\frac{2n}{R}\right] < \frac{2}{R}, \\ \frac{2n-2}{R}, & \text{если } \left[\frac{2n}{R}\right] + 1 - \frac{2n}{R} < \frac{2}{R}. \end{cases}$$

В силу (26) ряд (27) формально удовлетворяет уравнению (25). Покажем, что ряд (27) при данном выборе $R_n$ сходится равномерно при $|z| \leqslant \frac{1}{2} R$, тем самым мы покажем, что $F_0(z)$ — решение уравнения (25). Предварительно заметим, что

$$\max_{|t|=R_n} \left| \frac{1}{e^{2\pi t}-1} \right| < \frac{A}{|\sin \pi R_n|} < A \cdot R.$$

Тогда для $|z| \leqslant R/2$

$$|F_0(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n!} |B_n(z, R_n)| <$$

$$< \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \frac{e^{|z| \cdot R_n}}{R_n^n} \cdot \max_{|t|=R_n} \frac{1}{|e^{2\pi t}-1|} < A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{R^{n-1}} \cdot \frac{e^{|z| \cdot R_n}}{R_n^n} <$$

$$< AR \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \left( \frac{n}{R \cdot R_n} \right)^n e^{\frac{1}{2} R \cdot R_n - n} < A \cdot R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}.$$

Таким образом, $|F_0(z)| < A \cdot R$ в круге $|z| \leqslant \frac{1}{2} R$. Используя формулу Коши, легко устанавливаем, что при $|z| \leqslant \frac{1}{4} R$

$$|F_0'(z)| < A, \quad |F_0''(z)| < \frac{A}{R}. \tag{28}$$

Очевидно, мы имеем

$$F_0(z) = c_0 + c_1 z + H(z),$$

где

$$c_0 = F_0(0), \quad c_1 = F_0'(0), \quad H(z) = \int_0^z (z-\zeta) F_0''(\zeta)\, d\zeta.$$

Из (28) следует, что $|c_1| \leqslant A$ и

$$|H(z)| < A \cdot R^{-\frac{1}{3}}, \quad |z| < \left(\frac{R}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Поэтому функция

$$F(z) = F_0(z) - c_0$$

и является искомым решением уравнения (25).

Теперь вернемся к изучению функций $f_1^*(z)$, $f_2^*(z)$, $f^*(z)$.

В силу (14) функция $f^*(z)$ в круге $|z| \leqslant \frac{1}{16} \ln N = T$ не имеет нулей. Так как $f^*(z) = f_1^*(z) \cdot f_2^*(z)$, то $f_1^*(z)$ и $f_2^*(z)$ также не имеют там нулей. Это влечет за собой аналитичность в круге $|z| \leqslant T$ функций $\ln f_j^*(z)$, $j = 1,2$. Положим

$$g(z) = \ln f_1^*(-iz), \quad U(u, v) = \operatorname{Re} g(z), \quad (z = u + iv).$$

***Лемма 4.*** *При вещественных $u$, $v$, $u^2 + v^2 \leqslant T^2$ выполняется*

$$0 \leqslant U(u, 0) - U(u, v) \leqslant 2e^u \sin^2 \frac{v}{2} + \frac{v^2}{2} + \ln 3.$$

Доказательство. Заметим, что имеет место соотношение

$$\frac{f_1^*(-iu)}{f_1^*(v-iu)} = \frac{f^*(-iu)}{f^*(v-iu)} \cdot \frac{f_2^*(v-iu)}{f_2^*(-iu)},$$

откуда вытекает в силу свойства хребта характеристических функций [1, стр. 61]

$$1 \leqslant \left| \frac{f_1^*(-iu)}{f_1^*(v-iu)} \right| \leqslant \left| \frac{f^*(-iu)}{f^*(v-iu)} \right|.$$

Поскольку функция $f^*(z)$ допускает оценку (14) в круге $|z| \leqslant T$, то в этом круге имеем

$$0 \leqslant \ln|f_1^*(-iu)| - \ln|f_1^*(v-iu)| \leqslant 2e^u \sin^2\frac{v}{2} + \frac{v^2}{2} + \ln 3.$$

Отсюда уже непосредственно получаем утверждение леммы, вспоминая определение функции $U(u, v)$.

***Лемма 5.*** *Функция $g(z)$ допускает в круге $|z| \leqslant T - 3\pi$ следующую оценку:*

$$|g(z)| \leqslant A(|z| e^{\operatorname{Re} z} + |z|^3 + |z|).$$

Доказательство. При доказательстве леммы понадобится следующий факт: существует число $a$, $0 < a < A$, такое, что

$$F_1(a) - F_1(-a) \geqslant \frac{1}{2}, \quad F_2(a) - F_2(-a) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Доказывается этот факт аналогично тому, как это делается в работе [4, стр, 207—208].

Теперь замечаем, что

$$f_1^*(iv) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vs}\, dF_1^*(s) \geqslant \int_{-a}^{a} e^{-vs}\, dF_1(s) \geqslant \frac{1}{2} e^{-a|v|}.$$

В силу (14) для $|z| \leqslant T\left(= \frac{1}{16}\ln N\right)$

$$|f_2^*(z)| \leqslant f_2^*(iv) = \frac{f^*(iv)}{f_1^*(iv)} \leqslant 3e^{e^{-v}-1+\frac{v^2}{2}+a|v|}. \tag{29}$$

Аналогично получаем неравенство

$$|f_1^*(z)| \leqslant 3e^{e^{-v}-1+\frac{v^2}{2}+a|v|}. \tag{30}$$

Из (14) и (29) также следует

$$\frac{1}{2} e^{e^{-v}\cos u - 1 - \frac{u^2-v^2}{2}} < |f^*(z)| = |f_1^*(z)| \cdot |f_2^*(z)| \leqslant$$

$$\leqslant |f_1^*(z)| \cdot 3e^{e^{-v}-1+\frac{v^2}{2}+a|v|}.$$

поэтому

$$|f_1^*(z)| > \frac{1}{6} e^{e^{-v}(\cos u - 1) - \frac{u^2}{2} - a|v|}. \tag{31}$$

Неравенства (30) и (31) дают оценку

$$|\ln|f_1^*(z)|| < 2e^{-v} + \frac{|z|^2}{2} + a|v| + 3,$$

которую можно переписать еще и так:

$$|U(u, v)| < 2e^u + \frac{|z|^2}{2} + a|u| + 3. \tag{32}$$

По формуле Шварца

$$g(z+\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(u+\cos\theta,\ v+\sin\theta)\, \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\, d\theta + i\operatorname{Im} g(z).$$

Если продифференцировать эту формулу по переменной $\zeta$, а затем положить в ней $\zeta=0$, то придем к выражению

$$g'(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} U(u+\cos\theta,\ v+\sin\theta)\,e^{-i\theta}\,d\theta.$$

Тогда, используя оценку (32), получаем неравенство

$$|g'(z)|\leqslant 2\max_{0\leqslant\theta<2\pi}|U(u+\cos\theta,\ v+\sin\theta|<A\,(e^u+|z|^2+|z|+1).$$

Но поскольку

$$g(z)=z\int\limits_0^1 g'(z\cdot t)\,dt,$$

то

$$|g(z)|\leqslant|z|\cdot\max_{0<t<1}|g'(z\cdot t)|,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Продолжим доказательство теоремы.

Введем в рассмотрение функцию

$$2\chi(z)=2g(z)-g(z+2\pi i)-g(z-2\pi i). \tag{33}$$

Из леммы 5 следует, что в круге $|z|\leqslant T-3\pi$ выполняется неравенство

$$|\chi(z)|\leqslant A\,(|z|e^u+|z|^3+|z|+1).$$

При вещественных $u$, $-T\leqslant u\leqslant T$, выполняется

$$\chi(u)=U(u,0)-U(u,2\pi),$$

поэтому по лемме 4 имеем $|\chi(u)|<A$. Теперь видим, что функция $\chi(z)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1 $(R=T-3\pi)$. Значит, при $|z|\leqslant\left(\frac{T-3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}=T_1$ справедливо $|\chi(z)|<A$.

Пусть $F_1(z)$ — решение уравнения

$$F_1(z+2\pi)-F_1(z)=-2\chi(iz), \tag{34}$$

представимое в виде

$$F_1(z)=c_1z+H_1(z), \tag{35}$$

где $|c_1|<A$, а функция $H_1(z)$ голоморфна в круге $|z|<\left(\frac{T_1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ и допускает там оценку

$$|H_1(z)|<A\cdot T_1^{-\frac{1}{3}}. \tag{36}$$

Такое решение существует по лемме 3. Положим

$$g_1(z)=g(z)-g(z-2\pi i)-F_1(-iz).$$

В силу (33) и (34) имеем

$$g_1(z+2\pi i)-g_1(z)=0.$$

Из (35), (36) и леммы 5 следует, что функция $g_1(z)$ в круге $|z|<\left(\frac{T_1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ допускает оценку

$$|g_1(z)|<A\,(|z|e^u+|z|^3+|z|+1).$$

Функция $g_1(iz)$ удовлетворяет условиям леммы 2 с $R=\left(\frac{T_1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=T_2$. По этой лемме при $|z|\leqslant\frac{1}{8}T_2$

$$g_1(z)=\alpha_0+\alpha_1e^z+\varphi_1(z),$$

где $|\alpha_j|<A\ (j=0,1)$ и $|\varphi_1(z)|<A\cdot e^{-\frac{1}{4}T^2}<A\cdot T_1^{-\frac{1}{3}}$.

Отсюда следует, что при $|z|\leqslant\frac{1}{8}T_2$

$$g(z)-g(z-2\pi i)=\alpha_0-ic_1z+\alpha_1e^z+H_1(-iz)+\varphi_1(z).$$

Положив $H_2(z)=H_1(-iz)+\varphi_1(z)$ и переобозначив коэффициенты, имеем

$$g(z)-g(z-2\pi i)=B_0+B_1z+B_2e^z+H_2(z),$$

где $|B_j|<A$ и $|H_2(z)|<A\cdot T_1^{-\frac{1}{3}}$ при $|z|\leqslant\frac{1}{8}T_2$.

Обозначим через

$$g_2(z)=g(z)-\frac{B_0+\pi iB_1}{2\pi i}z-\frac{B_1}{4\pi i}z^2-\frac{B_2}{2\pi i}ze^z-F_2(z),$$

где $F_2(z)=T_1^{-\frac{1}{3}}F_2^1(z)$, а функция $F_2^1(z)$ является аналитической в круге $|z|\leqslant\frac{1}{8}T_2$, удовлетворяет в нем уравнению

$$F_2^1(z)-F_2^1(z-2\pi i)=H_2(z)\cdot T_1^{\frac{1}{3}}$$

и допускает при $|z|<\left(\frac{T_2}{32}\right)^{\frac{1}{3}}$ представление

$$F_2^1(z)=\beta_1z+H_3(z),$$

где $|\beta_1|<A$ и $|H_3(z)|<A\cdot T_2^{-\frac{1}{3}}$. Такая функция существует по лемме 3. Мы имеем тогда

$$F_2(z)=\gamma_1z+H_4(z),\quad |z|<\left(\frac{T_2}{32}\right)^{\frac{1}{3}},$$

с

$$|\gamma_1|<A\cdot T_1^{-\frac{1}{3}},\quad |H_4(z)|<A\cdot T_1^{-\frac{1}{3}}.$$

Отсюда следует, что при $|z|\leqslant\left(\frac{T_2}{32}\right)^{\frac{1}{3}}=T_3$ справедливо

$$|g_2(z)|<A\,(|z|e^u+|z|^3+|z|+1)$$

и

$$g_2(z)-g_2(z-2\pi i)=0.$$

Тогда по лемме 2 при $|z|\leqslant\frac{1}{8}T_3$

$$g_2(z)=\delta_0+\delta_1e^z+\varphi_2(z),$$

где $|\delta_j|<A\ (j=0,\ 1)$ и $|\varphi_2(z)|<Ae^{-\frac{T_3}{4}}$. Значит, при $|z|\leqslant\frac{1}{8}T_3$

$$g(z)=D_0+D_1z+D_2z^2+D_3e^z+D_4ze^z+H_5z, \tag{37}$$

где

$$|D_j| < A \ (j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4),\ |H_5(z)| = |\varphi_2(z) +$$
$$+ H_4(z)| < Ae^{-\frac{T_3}{4}} + AT_1^{-\frac{1}{3}} < AT_1^{-\frac{1}{3}}.$$

Заметим далее, что в силу (32) и (37) справедлива следующая оценка:

$$|U(u,0)| = |\operatorname{Re} D_1 \cdot u + \operatorname{Re} D_2 \cdot u^2 + \operatorname{Re} D_3 \cdot (e^u - 1) +$$
$$+ \operatorname{Re} D_4 e^u u + \operatorname{Re} H_5(u)| < A(e^u + u^2 + |u| + 1).$$

Отсюда, положив $u = \frac{1}{8} T_3$, легко убедиться, что $|\operatorname{Re} D_4| < A \cdot T_3^{-1}$. Из (32) имеем также

$$\left|U\left(u, \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|u \cdot \operatorname{Re} D_1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{Im} D_1 + \left(u^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) \operatorname{Re} D_2 -\right.$$
$$- 2 \operatorname{Im} D_2 \cdot u \cdot \frac{\pi}{2} - \operatorname{Im} D_3 e^u - \operatorname{Re} D_4 \cdot e^u \cdot \frac{\pi}{2} -$$
$$\left.- \operatorname{Im} D_4 \cdot u \cdot e^u + \operatorname{Re} H_5\left(u + i\frac{\pi}{2}\right)\right| < A(e^u + u^2 + |u| + 1),$$

которое влечет за собой оценку $|\operatorname{Im} D_4| < A \cdot T_3^{-1}$. Поэтому в круге $|z| \leqslant \frac{1}{2} \ln \frac{T_3}{8} = T_4$ справедливо $|D_4 z e^z| < A \frac{T_4}{\sqrt{T_3}}$.

Итак, в круге $|z| \leqslant T_4$ выполняется

$$g(z) = D_3(e^z - 1) + D_1 z + D_2 z^2 + H_6(z),$$

где $|H_6(z)| < A \cdot \frac{T_4}{\sqrt{T_3}}$. Это же соотношение перепишем иначе

$$f_1^*(z) = e^{D_3(e^{iz}-1) - D_2 z^2 + iD_1 z + H_6(iz)}.$$

Коэффициенты $D_j$ мы хотим связать с моментами случайной величины $X_1^*$. Для этого замечаем, что $f_1^*(z)$, будучи целой функцией, допускает разложение

$$f_1^*(z) = 1 + ia_1 z - \frac{a_2}{2!} z^2 + \ldots + \frac{i^k a_k}{k!} z^k + \ldots, \tag{38}$$

где $a_k = M\left[(X_1^*)^k\right]$, $k = 1, 2, \ldots$. Мы имеем также $\exp\{H_6(iz)\} = 1 + H_7(z)$, где

$$H_7(z) = \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3 + \ldots,$$

причем $|H_7(z)| < A \cdot \frac{T_4}{\sqrt{T_3}}$. Формула Коши дает нам

$$\lambda_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=T_4} \frac{H_7(z)\,dz}{z^{1+j}},\ j = 1,\ 2,\ 3,$$

откуда

$$|\lambda_j| < A \cdot \frac{T_4^{1-j}}{\sqrt{T_3}} \ (j = 1, 2, 3). \tag{39}$$

Теперь имеем в круге $|z| \leqslant T_4$

$$f_1^*(z) = e^{D_3(e^{iz}-1) - D_2 z^2 + iD_1 z} \cdot (1 + H_7(z)) =$$
$$= \left\{1 + \left[D_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} - D_2 z^2 + iD_1 z\right] + \frac{1}{2!}\left[D_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} -\right.\right.$$

$$\left.\left.-D_2z^2+iD_1z\right]^2+\frac{1}{3!}\left[D_3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!}-D_2z^2+iD_1z\right]^3+\right.$$

$$\left.+\ldots\right\}\cdot(1+\lambda_1z+\lambda_2z^2+\lambda_3z^3+\ldots).$$

Отсюда получаем разложение функции $f_1^*(z)$ в ряд по степеням $z$, сравнивая которое с (38), нетрудно получить

$$D_1=a_1-a_3+3a_1a_2-2a_1^3+i\lambda_1+6\lambda_3i-6\lambda_1\lambda_2i+4\lambda_1^3i,$$

$$D_2=\frac{1}{2}(a_2-a_1^2-a_3+3a_1a_2-2a_1^3)+\lambda_2-\frac{\lambda_1^2}{2}+3\lambda_3i-3\lambda_1\lambda_2i+2\lambda_1^3i,$$

$$D_3=a_3-3a_1a_2+2a_1^3-6\lambda_3i+6\lambda_1\lambda_2i-4\lambda_1^3i.$$

Легко видеть, что оценки (39) дают неравенства

$$|D_j-\mu_j|<A\cdot T_3^{-\frac{1}{2}}\cdot T_4^{1-j}\quad j=1,2,3, \tag{40}$$

где

$$\mu_1=a_1-a_3+3a_1a_2-2a_1^3,\ \mu_2=\frac{1}{2}(a_2-a_1^2-a_3+3a_1a_2-2a_1^3),$$

$$\mu_3=a_3-3a_1a_2+2a_1^3.$$

Используя (40), получаем в круге $|z|\leqslant\frac{1}{2}T_4$ оценку

$$|\ln f_1^*(z)-i\mu_1z+\mu_2z^2-\mu_3(e^{iz}-1)|<A\cdot T_3^{-\frac{1}{4}},$$

но это означает, что в круге $|z|\leqslant\frac{1}{2}T_4$

$$f_1^*(z)=e^{\mu_3(e^{iz}-1)-\mu_2z^2+i\mu_1z}\cdot(1+H_8(z)), \tag{41}$$

где $H_8(0)=0$ и $|H_8(z)|<A\cdot T_3^{-\frac{1}{4}}$.

Из (41) следует, что

$$0\leqslant U(u,0)-U(u,v)=\mu_2v^2+2\mu_3e^u\sin^2\frac{v}{2}+H_9(u+iv),$$

где $|H_9(u+iv)|<A\cdot T_3^{-\frac{1}{4}}$. Если бы $\mu_2<0$, то

$$|\mu_2|v^2\leqslant 2\mu_3e^u\sin^2\frac{v}{2}+H_9(u+iv). \tag{42}$$

Положив в (42) $u=0,\ v=2\left(\left[\frac{1}{20}T_4\right]+1\right)\pi$, получим

$$|\mu_2|<A\cdot T_3^{-\frac{1}{4}}.$$

Аналогично, если бы $\mu_3<0$, то $|\mu_3|<A\cdot e^{-\frac{1}{2}T_4}$.

Используя эти соотношения и равенство (41), нетрудно показать, что в круге $|z|<\frac{1}{5}T_4$ имеет место

$$f_1^*(z)=e^{\nu_3(e^{iz}-1)-\nu_2z^2+i\nu_1z}\cdot(1+H_{10}(z)),$$

где $H_{10}(0)=0$, $|H_{10}(z)|<A\cdot T_3^{-\frac{1}{8}}$;

$$\nu_1=\mu_1,\ \nu_2=\max\left\{|\mu_2|,\ T_3^{-\frac{1}{2}}\right\},\ \nu_3=|\mu_3|.$$

В заключение нам понадобится теорема Эссеена [10, стр. 24].

*Пусть* $A$, $L$, $\lambda$ — *постоянные*, $F(x)$ — *неубывающая функция*, $G(x)$ — *функция ограниченной вариации*, $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ — *их характеристические функции. Если*

1) $F(-\infty) = G(-\infty)$, $F(\infty) = G(\infty)$;

2) $G'(x)$ *существует при всех* $x$ *и* $|G'(x)| < A$;

3) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \left| \frac{\varphi(t) - \psi(t)}{t} \right| dt = \lambda,$

*то каждому числу* $k > 1$ *соответствует число* $c(k)$, *зависящее только от* $k$, *такое, что*

$$|F(x) - G(x)| \leqslant k \frac{\lambda}{2\pi} + c(k) \frac{A}{L}.$$

*При этом* $c(2) \leqslant \frac{24}{\pi}$.

Обозначим через

$$\varphi(t) = f_1^*(t), \quad \psi(t) = \exp\{\nu_3(e^{it} - 1) - \nu_2 t^2 + i\nu_1 t\}.$$

Сразу видно, что первое условие теоремы Эссеена выполнено. Так как $G(x) = \Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$, то $G'(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_2}}$ для всех $-\infty < x < \infty$. Так как при вещественных $-\frac{1}{5}T_4 < t < \frac{1}{5}T_4$ мы имеем

$$\left| \frac{f_1^*(t) - \psi(t)}{t} \right| = \left| \psi(t) \frac{H_{10}(t)}{t} \right| \leqslant \left| \frac{H_{10}(t)}{t} \right| < A T_3^{-\frac{1}{8}} \cdot T_4^{-1},$$

то

$$\int_{-\frac{1}{5}T_4}^{\frac{1}{5}T_4} \left| \frac{f_1^*(t) - \psi(t)}{t} \right| dt \leqslant \int_{-\frac{1}{5}T_4}^{\frac{1}{5}T_4} \left| \frac{H_{10}(t)}{t} \right| dt < A \cdot T_3^{-\frac{1}{8}}.$$

Применяя теорему Эссеена к законам $F_1^*(x)$ и $\Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$, получаем

$$|F_1^*(x) - \Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)| <$$

$$< A T_4^{-1} (T_3^{-\frac{1}{8}} T_4 + \nu_2^{-\frac{1}{2}}), \quad -\infty < x < \infty.$$

Наконец, используя это неравенство и неравенства (7), (9), (10), приходим к нужному результату

$$|F_1(x) - \Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)| \leqslant |F_1(x) - F_1^*(x)| +$$

$$+ |F_1^*(x) - \Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)| < A \frac{1}{\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}} \left( \frac{1}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{300}}} + \frac{1}{\sqrt{\nu_2}} \right).$$

Доказательство теоремы велось при условии $\varepsilon < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0$ достаточно мало, но подбирая постоянную $A$ нужным образом, можно считать, что $\varepsilon < e^{-e}$.

Выражаю глубокую благодарность И. В. Островскому за предложенную тему и руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ю. В. Линник. Разложения вероятностных законов. Изд-во ЛГУ, Л., 1960.
2. P. Lévy. Theorie de laddition des variables aleátoires. Paris, 1937.
3. R. Cuppens. Sur la stabilité des décomposition en arithmétigue des lois de probabilité. C. r. Acad. sci., Paris, 256, 1963, 3560—3561.
4. Н. А. Сапогов. Проблемы устойчивости для теоремы Крамера. ДАН СССР, серия матем., 15, № 3, 1951, 205—218.
5. Н. А. Сапогов. Проблема устойчивости для теоремы Крамера. Вестник ЛГУ, № 11, 1955, 61—64.
6. Н. А. Сапогов. О независимых слагаемых сумм случайных величин, распределенных приближенно нормально. Вестник ЛГУ, № 19, 1959, 78—105.
7. В. О. Шалаевский. Об устойчивости для теоремы Д. А. Райкова. Вестник ЛГУ, № 7, 1959, 41—49.
8. И. В. Островский. О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. УМН, 20 (124), 1965, 166—171.
9. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. «Наука», М., 1967.
10. И. А. Ибрагимов и Ю. В. Линник. Независимые и стационарно связанные величины. «Наука», М., 1965.


---

Примечание.

В последнее время автором получен следующий результат, дополняющий теорему из вышеизложенной работы:

Пусть $F = F_1 * F_2$ и $L(F(x), \Lambda(x, 0, \frac{1}{2}, 1)) < \varepsilon < e^{-e}$,

тогда

$$\inf_{\Lambda \in K_\Lambda} L(F_j, \Lambda) < A \cdot (\ln\ln\ln \frac{1}{\varepsilon})^{-\frac{2}{7}} \quad j = 1,2,$$

где $K_\Lambda$ — класс композиций законов Гаусса и Пуассона.

*Поступила 22 мая 1968 г.*