ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1949 Том XXI

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА ИРРЕГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Н. С. Ландкоф

(Харьков)

Введение

1. Предметом настоящей статьи являются иррегулярные точки границы F ограниченной области Ω трёхмерного пространства. Так называются те точки F, которые могут служить точками разрыва обобщённого решения задачи Дирихле, построенного Винером (см. [2]). Все прочие точки F называются регулярными.

В дальнейшем нам понадобятся следующие критерии, дающие возможность по геометрической структуре области Ω в окрестности точки P границы F определить характер точки P.

Будем обозначать через $c(P, \rho)$ ёмкость пересечения дополнения $C\Omega$ к области Ω с шаром радиуса ρ вокруг точки P.

I. Интегральный критерий (Келлог — Василеско [1]).

Точка P будет регулярной тогда и только тогда, когда расходится интеграл

$$\int_0 \frac{c(P,\rho)}{\rho^2}\, d\rho.$$

II. Обобщённый критерий Винера.

Пусть последовательность $r_i > 0$ монотонно стремится к нулю и $1 < a < \frac{r_i}{r_{i+1}} < b$. Точка P будет регулярной тогда и только тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c(P, r_i)}{r_i}.$$

III. Достаточный критерий Винера.

Если $r_i > 0$ — любая монотонно убывающая последовательность чисел, стремящаяся к нулю и $c(P, r_i) > kr_i$, где $k > 0$, то точка P регулярна.

IV. Достаточный критерий Келдыша [2].

Если пересечение сферы радиуса ρ вокруг точки P с $C\Omega$ содержит связное множество, диаметр которого больше ρ^k $(k \geqslant 1)$, то точка P регулярна.

2. Основным фактом, касающимся всего множества J иррегулярных точек, является то, что оно имеет ёмкость нуль (лемма Келлога [1]). Однако способы распределения этого множества на границе F области могут быть весьма разнообразны. С помощью „принципа накопления особенностей" можно построить пример, где J будет всюду плотно на F. Легко также построить односвязную область, иррегулярные точки которой образуют линейный континуум.

Пример 1. Рассмотрим ломаную l, состоящую из отрезков

$$s_{2i}: 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad y = \frac{1}{i} - \frac{x}{i(i+1)};$$

$$s_{2i+1}: 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad y = \frac{1}{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

имеющих отрезок $AB: 0 \leqslant x \leqslant 1$ в качестве предельного континуума.

Принимая во внимание, что ёмкость кругового цилиндра конечной высоты стремится к нулю вместе с радиусом, мы сможем построить цилиндры Z_i с осями s_i, радиусы которых столь быстро стремятся к нулю при $i \to \infty$, что $\sum\limits_{\rho} C(Z_i) < \rho^2$, где $C(Z_i)$ обозначает ёмкость цилиндра Z_i, а сумма распространена на все цилиндры Z_i, содержащие точки, находящиеся на расстоянии не больше ρ от отрезка AB. Назовём Z множество, состоящее из всех цилиндров Z_i и предельного отрезка AB. Тогда, обозначая $c(P, \rho)$ ёмкость пересечения Z со сферой радиуса ρ вокруг точки P на AB, будем иметь

$$\int\limits_0^{\rho_0} \frac{c(P, \rho)}{\rho^2} d\rho < \infty.$$

Если теперь погрузить Z в сферу, склеив её поверхность со свободным краем Z_1, то получим односвязную область, для которой каждая точка P на AB будет иррегулярной (критерий I).

В построенном примере обращает на себя внимание то обстоятельство, что каждая точка „иррегулярной линии" не достижима извне построенной области.

Можно, однако, построить такой пример, в котором все точки „иррегулярной линии" будут достижимы извне области.

Пример 2.[1] Рассмотрим в плоскости (x, y) последовательность параллельных отрезков $K_n: 0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и на каждом K_n 2^n точек P_{ni} $(i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$ с абсциссами $x_i = \frac{i}{2^n}$.

Обозначим $l_{i_1 i_2 \ldots i_n \ldots}$ бесконечно звенную ломаную, проходящую через точки P_{ni_n}, $2i_{n-1} \leqslant i_n \leqslant 2i_{n-1} + 1$. Каждая такая ломаная имеет единственную предельную точку на отрезке $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ и, наоборот, каждой точке этого отрезка отвечает одна ломаная, ведущая в эту точку.

[1] Принадлежит М. А. Лаврентьеву.

Пусть Λ есть множество, состоящее из всех указанных ломаных и отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$. Λ имеет нулевую ёмкость, ибо это справедливо для всякой части Λ, лежащей между K_n и K_{n+1}, а Λ есть счётная сумма таких частей и отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$.

Окружим каждое звено каждой ломаной $l_{i_1 i_2 \ldots}$ цилиндром, основания которого лежат в плоскостях, перпендикулярных Oy, а осью служит само звено. При этом легко удовлетворить следующим требованиям:

а) между K_n и K_{n+1} несоседние цилиндры не имеют общих точек, так что трубки, окружающие $l_{i_1 \ldots i_n i_{n+1} \ldots}$ и $l_{i_1 \ldots i_n i'_{n+1} \ldots}$ $(i_{n+1} \neq i'_{n+1})$, ниже K_{n+1} не имеют общих точек;

б) $C_n < \frac{1}{n^2}$, где C_n — ёмкость всех цилиндров, расположенных ниже K_n.

Поступая с полученной фигурой так же, как в примере 1 мы поступали с Z, получим требуемый пример.

3. Рассмотренные примеры показывают, что желая установить, в каких случаях иррегулярные точки не могут образовать континуума, следует ограничиться некоторым более узким классом областей, нежели области, у которых все точки границы достижимы снаружи.

Естественным представляется ограничение такого типа: в с я к а я о т к р ы т а я ж о р д а н о в а д у г а L, л е ж а щ а я н а г р а н и ц е F о б л а с т и, д о с т и ж и м а с н а р у ж и ж о р д а н о в о й п о в е р х н о с т ь ю.

Это следует понимать в том смысле, что в дополнении к рассматриваемой области существует жорданова поверхность S (гомеоморфный образ замкнутого круга), пересечение которой с F (в теоретико-множественном смысле) есть кривая L. При этом можно считать, что L входит в край S, т. е. при гомеоморфизме, переводящем замкнутый круг в S, L является образом некоторой дуги окружности[1].

Односвязные области, удовлетворяющие высказанному условию, будем называть областями класса (Г).

Представляется весьма вероятным следующее

Предположение. Для областей класса (Г) иррегулярные точки не могут образовывать жордановой кривой.

Иными словами, на всякой жордановой дуге L, лежащей на границе F области Ω класса (Г), имеется по крайней мере одна регулярная точка.

Мы покажем справедливость этого предположения для случаев спрямляемой кривой (§ 1), плоской кривой (§ 2) и для некоторого специального класса пространственных кривых (§ 3)[2].

4. Пока же заметим следующее. Если высказанное предположение справедливо, то из него немедленно вытекает следующее, более точное утверждение:

На жордановой кривой L иррегулярные точки образуют множество первой категории.

---

[1] Действительно, если L является образом жордановой дуги L^*, принадлежащей замкнутому кругу K (прообразу S), и L^* не есть дуга окружности, то, продолжив в случае необходимости L^* до жордановой дуги $\overline{L}$ с концами на окружности, рассматриваем область $K_1 \subset K$, в границу которой входит вся дуга $\overline{L}$, и вместо S берём её часть, отвечающую при гомеоморфизме K_1.

[2] Результаты §§ 2 и 3 были сформулированы автором в заметке [3].

Действительно, так как функция

$$I(P) = \int_0^{\rho_0} \frac{c(P, \rho)}{\rho^2} d\rho$$

полунепрерывна снизу (Келлог и Василеско [1]), то множество точек, где $I(P) \leqslant N$, замкнуто и, вследствие нашего предположения, нигде не плотно на L. Рассматривая неограниченно возрастающую последовательность чисел $N_1 < N_2 < \ldots$, мы получим разложение множества иррегулярных точек на счётную сумму нигде не плотных на L множеств.

Это обстоятельство будет существенно использовано в §§ 2 и 3.

§ 1. Спрямляемая кривая

5. Прежде всего сделаем одно общее замечание, которое будет использовано также в дальнейших параграфах.

Вместо того, чтобы рассматривать область Ω класса (Γ) с дугой L на F, мы можем рассматривать просто дополнение CS к некоторой жордановой поверхности S, край которой содержит дугу L.

Действительно, так как S лежит в дополнении к Ω, то, обозначив $c_1(P, \rho)$ ёмкость части S, лежащей внутри или на сфере радиуса ρ вокруг P, будем иметь при всяком ρ $c_1(P, \rho) \leqslant c(P, r)$.

Следовательно, если мы докажем, что для задачи Дирихле в области CS на кривой L имеется по крайней мере одна регулярная точка, то эта же точка будет регулярной для первоначальной области Ω.

6. Итак, пусть S—жорданова поверхность, край которой содержит спрямляемую дугу L. Обозначим через A и B концы дуги L и возьмём в качестве параметра на L длину дуги s, отсчитанную от конца A. Будем считать, что s изменяется от 0 до 1.

Рассмотрим какое-либо гомеоморфное отображение $x + iy = a = f(Q)$, $Q \in S$, S на полукруг $y \geqslant 0$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}$, при котором L переходит в диаметр $0 \leqslant x \leqslant 1$. Отобразим этот полукруг гомеоморфно на себя с помощью функции $p = h(a)$ так, чтобы расстояние между точками $s_1 = h(a_1)$ и $s_2 = h(a_2)$ диаметра было равно длине части L, ограниченной точками P_1 и P_2: $a_1 = f(P_1)$, $a_2 = f(P_2)$. Тогда $p = h[f(Q)] = \varphi(Q)$ будет гомеоморфным отображением S на полукруг, при котором L переходит в диаметр $0 \leqslant s \leqslant 1$, причём точка $B = P(s) \in L$ переходит в точку с абсциссой s.

Допустим теперь, что все точки дуги L иррегулярны.

Окружим внутреннюю точку $P(s) \in L$ сферой $\sigma(P, r)$ радиуса r. Пересечение $\sigma(P, r)$ с L есть замкнутое множество, образ которого на диаметре $0 \leqslant s \leqslant 1$ мы обозначим L_r. Рассмотрим смежный интервал $(\underline{s}, \bar{s})$ этого множества, содержащий точку s. Ему соответствует дуга $\bar{L}$, лежащая целиком (за исключением концов) внутри $\sigma(P, r)$ и проходящая через её центр P. Пересечение $\sigma(P, r)$ с поверхностью S есть также замкнутое множество, образ которого при отображении φ мы обозначим S_r. Очевидно $S_r \supset L_r$ и при достаточно малом r не содержит точек полуокружности $y \geqslant 0$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. (Более того, в силу непрерывности отображения φ при $r \to 0$ все точки S_r равномерно стремятся к точке s на диаметре). Рассматривая только такие r, мы можем утверждать, что S_r содержит континуум K_r, связывающий точку $s_1 \leqslant \underline{s}$ с точкой $s_2 \geqslant \overline{s}$. В противном случае мы могли бы провести в полукруге кривую γ, соединяющую точку s с точкой полуокружности и не имеющую общих точек с S_r. Этой кривой γ на поверхности S отвечала бы кривая Γ, соединяющая центр P сферы $\sigma(P, r)$ с точкой вне её и не пересекающая $\sigma(P, r)$, что абсурдно.

Итак, каждой точке s и каждому достаточно малому числу r можно сопоставить интервал (s_1, s_2) с длиной, стремящейся к нулю при $r \to 0$, содержащий её внутри, концы которого соединены континуумом K_r, лежащим в полукруге. Этому континууму K_r отвечает также континуум M_r на $S \cdot \sigma(P, r)$.

7. В силу нашего предположения об иррегулярности всех точек L и критерия IV Келдыша, каждой точке P на L отвечает последовательность $r_1 > r_2 > \ldots > 0$, $r_n \to 0$ такая, что $S \cdot \sigma(P, r_i)$ не содержит связной части с диаметром бо́льшим или равным r_i^4. Поэтому для этих r_i диаметр M_{r_i} будет меньше r_i^4. Удержав для каждой точки $P(s)$ только эти значения r и соответствующие им интервалы (s_1, s_2), мы получаем покрытие отрезка $0 \leqslant s \leqslant 1$ в смысле Витали. По известной теореме можно из этого покрытия выделить счётную последовательность непересекающихся интервалов $\left(s_1^i, s_2^i\right)$, $i = 1, 2, \ldots$ так, чтобы множество $e = [0, 1] - \sum_{i=1}^{\infty} \left(s_1^i, s_2^i\right)$ имело меру нуль. При этом длины интервалов $\left(s_1^i, s_2^i\right)$ можно взять столь малыми, чтобы соответствующие радиусы r_i были меньше наперёд заданного числа r_0. Воспользовавшись этим, а также тем, что любое множество трёхмерного пространства имеет четырёхмерную меру Хаусдорфа (см. [5]) равную нулю, мы можем, задав $\varepsilon > 0$, считать, что $\sum_{i=1}^{\infty} r_1^4 < \varepsilon$.

Заметим теперь следующее. Концы каждой дуги L, отвечающей в силу обратного отображения φ^{-1} интервалу $\left(s_1^i, s_2^i\right)$, находятся на расстоянии меньшем r_i^4 (ибо это расстояние не больше диаметра M_{r_i}). Соединив концы этих дуг прямолинейными отрезками и заменив ими эти дуги, мы получим „сокращённую" кривую $\breve{L}$. Часть её, состоящая из отрезков, имеет линейную меру меньше ε. Что же касается остальной части, являющейся образом множества e, то в силу абсолютной непрерывности отображающей функции $\varphi^{-1}(s)$ на отрезке $0 \leqslant s \leqslant 1$ она будет иметь линейную меру, равную нулю.

Итак, длина $\breve{L}$ меньше ε. Обратив внимание на то, что дуга $\breve{L}$ имеет те же концы, что и L, и что $\varepsilon > 0$ произвольно, мы тотчас усматриваем противоречие.

Вспомнив ещё замечание из п. 4, мы приходим к такой теореме:

Теорема 1. На всякой спрямляемой кривой L, лежащей на границе F области Ω типа (Γ), иррегулярные точки образуют множество первой категории.

§ 2. Плоская жорданова кривая

8. Согласно п. 5 рассмотрим снова жорданову поверхность S, край которой содержит плоскую дугу L. Вводя координаты в плоскости, где расположена дуга L, мы её запишем уравнениями $\xi=\xi(t)$, $\eta=\eta(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Продолжим L в $(\xi,\ \eta)$-плоскости неограниченно в обе стороны и полученную жорданову кривую L^+ будем снова записывать в виде $\xi=\xi(t)$, $\eta=\eta(t)$, $-\infty<t<\infty$. Эта кривая L^+ разбивает плоскость на две области, которые мы обозначим R_1 и R_2.

В дальнейшем, ради краткости, будем точки L, регулярные для дополнения к поверхности, в край которой входит L, называть просто регулярными точками поверхности.[1]

Лемма 1. На кривой L существует точка, регулярная одновременно для R_1 и для R_2.

Доказательство. Точка L, достижимая из R_1 углом, будет регулярной для R_1. Это следует из того, что ёмкость кругового сектора пропорциональна радиусу, или прямо из критерия IV Келдыша. Множество таких точек плотно на L[2] и, в силу замечания п. 4, множество иррегулярных точек R_1 первой категории на L. То же справедливо для иррегулярных точек R_2. Теперь утверждение леммы следует из того, что жорданова кривая есть множество второй категории в себе.

Целью дальнейшего будет доказательство того, что точка P, регулярная для R_1 и R_2, является также регулярной для любой жордановой поверхности, в край которой входит L.

9. Нам понадобится ещё

Лемма 2. Пусть M — множество положительных чисел r $(0<r\leqslant 1)$, содержащее бесконечную последовательность отрезков $b_i\leqslant r\leqslant a_i$, $i=1, 2, \ldots$ $(b_i<a_i<b_{i-1})$, такую что $\dfrac{a_i}{b_i}>\lambda>1$.

Пусть, далее, **M** — замкнутое множество $(x,\ y)$-плоскости, обладающее тем свойством, что всякая окружность Γ_r радиуса $r\in M$ с центром в точке O (0,0) содержит дугу γ_r, принадлежащую **M**, радианная мера которой равна $\gamma>0$.

Тогда точка O, принадлежащая **M**, будет регулярной для **M**.[3]

Доказательство. Обозначим $\mathbf{M}_1$ подмножество **M**, состоящее из всех дуг γ_r, где $b_i\leqslant r\leqslant a_i\,(i=1, 2\ldots)$. Заменим каждую такую дугу γ_r конгруентной дугой δ_r, заключённой между двумя лучами $y=0$ и $y=\operatorname{tg}\gamma\cdot x$. Множество $\mathbf{M}_2$ этих дуг можно, как легко видеть, получить из $\mathbf{M}_1$ точечным преобразованием, при котором расстояния между двумя любыми точками $\mathbf{M}_1$ не увеличиваются. Поэтому ёмкость любого подмножества $\mathbf{M}_1$ не меньше ёмкости своего образа и достаточно убедиться в том, что точка O регулярна для $\mathbf{M}_2$.

Пусть $c(r)$—ёмкость части $\mathbf{M}_2$ внутри сферы радиуса r с центром в O. Оценим $\dfrac{c(a_i)}{a_i}$. В силу того, что при подобном преобразовании

---

[1] Эта терминология совпадает с принятой Валле — Пуссеном [4].

[2] Доказательство не представляет затруднений.

[3] В смысле Валле — Пуссена, см. предыдущее примечание.

множества его ёмкость умножается на коэфициент подобия, заключаем, что $\frac{c(a_i)}{a_i}$ равно ёмкости части $\frac{1}{a_i}$ M_2 внутри единичной сферы. Так как $\frac{1}{a_i}$ M_2 при любом i содержит площадь, ограниченную лучами $y=0$, $y=\operatorname{tg}\gamma\cdot x$ и окружностями $x^2+y^2=\frac{1}{\lambda^2}$ и $x^2+y^2=1$, то $\frac{c(a_i)}{a_i}>\text{const}>0$ и по достаточному критерию Винера (п. 1, III) точка O будет регулярной для M_2.

10. Рассмотрим, как и в п. 5, гомеоморфное отображение $x+iy=f(Q)$, $Q\in S$ поверхности S на полукруг $K: x^2+y^2\leqslant 1$, $y\geqslant 0$, при котором $f(P)=0$.

Обозначим опять $\sigma(P, r)$ сферу радиуса r вокруг точки P, $S_r=f[\sigma(P, r)\cdot S]$ и будем считать, что r настолько мало, что S_r не содержит точек полуокружности $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$.

Обозначим ещё T_r множество точек K, состоящее из образа части S, лежащей внутри $\sigma(P, r)$, а T_{re} — множество точек K, состоящее из образа части S, лежащей вне $\sigma(P, r)$. Оба эти множества открыты относительно внутренности K.

Рассмотрим ту компоненту T_r^0 множества T_r, граница которой содержит точку O. Внешняя граница T_r^0 есть континуум, содержащий точку O вместе с некоторым интервалом оси x. Если обозначить a_r самую левую точку этого континуума, принадлежащую оси x, а b_r — самую правую точку, то a_r и b_r разобьют этот континуум на два континуума — k_r и k_r', из которых k_r состоит только из внутренних точек K. Пусть A_r и B_r — прообразы a_r и b_r на L, а M_r — прообраз k_r. M_r является континуумом на сфере $\sigma(P, r)$, соединяющим точки A_r и B_r.

11. Построим круговой конус N с вершиной в P и осью $P\zeta$, перпендикулярной плоскости (ξ, η), в которой лежит кривая L. Обозначим $2\gamma_0$ угол осевого сечения этого конуса (величина $\gamma_0<\frac{\pi}{4}$ будет зафиксирована позже).

Рассмотрим множество A_0 тех значений r из интервала $0<r<r_0$ (r_0 достаточно мало), для которых построенный в предыдущем номере континуум M_r пересекает конус N.

Предположим, что A_0 содержит последовательность отрезков (b_i, a_i), $i=1, 2, \ldots$ $(b_i<a_i<b_{i-1})$, для которых $\frac{a_i}{b_i}>\lambda>1$, и докажем, что в этом случае точка P будет регулярной для S.

Назовём круговым проектированием с осью t непрерывное точечное преобразование, состоящее в том, что все точки какого-либо множества E вращаются вокруг прямой t до тех пор, пока не попадут на фиксированную плоскость Π, проходящую через t. Заметим, что при круговом проектировании расстояния между точками не увеличиваются и, поэтому, ёмкость любого замкнутого множества не меньше ёмкости его круговой проекции.

Пусть теперь Σ_r есть часть поверхности S, лежащая внутри или на поверхности сферы $\sigma(P, r)$. Обозначим f_ζ круговое проектирование с осью $P\zeta$. Тогда

$$C[f_\zeta(\Sigma_r)] \leqslant C(\Sigma_r).$$

Но плоское множество $f_\zeta(\Sigma_r)$ удовлетворяет, очевидно, условиям леммы 2 (с $\gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma_0$) и, следовательно, точка P для него регулярна. Тем более она будет регулярна для S.

Для дальнейшего будет важно расширить множество A_0. Причислим, прежде всего, к A_0 ещё те значения r, при которых $\sigma(P, r) \cdot S$ содержит компоненту, переходящую при круговом проектировании f_ζ в дугу размера не меньше γ_0. Если таким образом дополненное множество A_0 содержит указанную выше последовательность отрезков, то доказательство регулярности точки P может быть дословно повторено $\left[\text{только } \gamma \text{ при применении леммы 2 будет равно } \min\left(\gamma_0, \frac{\pi}{2} - \gamma_0\right)\right]$.

Более того, результат остаётся без изменения, если к A_0 причислить также те значения r, при которых $\sigma(P, r) \cdot S$ содержит континуум, не могущий быть стянутым на сфере $\sigma(P, r)$ в точку без пересечения с конусом N (ради краткости будем в таком случае говорить, что континуум окружает конус).

Действительно, кроме кругового проектирования $f_\zeta(\Sigma_r)$ произведём ещё круговое проектирование $f_\xi(\Sigma_r)$ с осью $P\xi$ на плоскость $\xi P\zeta$. Полученное плоское множество повернём вокруг оси $P\zeta$ так, чтобы оно попало на ту же плоскость, где лежит $f_\zeta(\Sigma_r)$. Это конгруентное $f_\xi(\Sigma_r)$ множество обозначим $f'_\xi(\Sigma_r)$. Имеем

$$C(\Sigma_r) \geqslant C[f_\zeta(\Sigma_r)], \quad C(\Sigma_r) \geqslant C[f'_\xi(\Sigma_r)],$$

откуда

$$C(\Sigma_r) \geqslant \frac{1}{2}\left\{C[f_\zeta(\Sigma_r)] + C[f'_\xi(\Sigma_r)]\right\} \geqslant \frac{1}{2} C[f_\zeta(\Sigma_r) + f'_\xi(\Sigma_r)].$$

Теперь достаточно обратить внимание на то, что при сделанных о A_0 предположениях множество $f_\zeta(\Sigma_r) + f'_\xi(\Sigma_r)$ удовлетворяет условиям леммы 2, так что точка P будет регулярной для S.[1]

12. Если сделанное выше предположение о достаточной „массивности" множества A_0 не имеет места, то в дополнении к нему, которое мы обозначим A_1, можно взять последовательность чисел $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$, стремящуюся к нулю, для которой $\frac{r_i}{r_{i+1}} < \text{const}$. Выделяя, если нужно, из неё подпоследовательность, мы можем считать, что

$$1 < a < \frac{r_i}{r_{i+1}} < b.^{2}$$

[1] Заметим, что столь же элементарными геометрическими соображениями можно доказать достаточный критерий IV М. В. Келдыша.

[2] Действительно, если $x_i = \ln \frac{1}{r_i}$, то $x_i \to +\infty$ монотонно и $x_{i+1} - x_i < \beta$. Разбивая ось x на интервалы длины β и выбирая в каждом интервале с нечётным номером по одному x_i, получим последовательность $x_1' < x_2' < x_3' < \ldots$, для которой $\beta \leqslant x'_{i+1} - x_i' < 3\beta$. Тогда $e^{\beta} < \frac{r_i'}{r'_{i+1}} < e^{3\beta}$.

Далее мы можем считать, что для выбранных нами r_i множество $\sigma(P, r_i) \cdot S$ не имеет внутренних относительно σ точек, а также компонент, разбивающих σ более чем на две области.

Действительно, $\sigma(P, r) \cdot S$ только для счётного множества значений r может содержать внутренние относительно σ точки, ибо каждому такому r отвечает окрестность на S, причём двум разным r отвечают непересекающиеся окрестности.

Точно так же счётным будет множество значений r, при которых $\sigma(P, r) \cdot S$ содержит континуум, разбивающий σ и S более чем на две области. Для доказательства этого утверждения можно почти дословно повторить рассуждения М. В. Келдыша ([2], стр. 210 и 213), к которым мы отсылаем читателя.

Итак, для выбранных нами в A_1 значений r_i справедливо следующее:

а) $\sigma(P, r_i) \cdot S$ не имеет внутренних точек и каждая его компонента разбивает σ и S не более чем на две области;

б) $\sigma(P, r_i) \cdot S$ не содержит континуума, окружающего конус N;

в) всякий континуум из $\sigma(P, r_i) \cdot S$ при круговом проектировании f_ζ переходит в дугу размера не более γ_0.

В частности:

в$_1$) компонента $\sigma(P, r_i) \cdot S$, имеющая общие точки с конусом N, не имеет общих точек с коаксиальным конусом N_1, у которого угол осевого сечения равен $4\gamma_0$;

в$_2$) построенный в п. 10 континуум M_{r_i} не имеет общих точек с N.

Рассмотрим, как в п. 10, образ $S_{r_i} = f[\sigma(P, r_i) \cdot S]$ в полукруге K и связную область $T^0_{r_i}$, внешнюю границу которой мы обозначали там через $k_{r_i} + k'_{r_i}$. Остальные компоненты границы $T^0_{r_i}$ мы обозначим

$$l_1^{(i)}, \quad l_2^{(i)}, \ldots \qquad \left(l_k^{(i)} \subset S_{r_i} \right).$$

Нас будут интересовать лишь те $l_k^{(i)}$, которые являются одновременно границей $T_{r_i e}$. Каждое такое $l_k^{(i)}$ является, согласно а), континуумом, разбивающим K на две области.

Рассмотрим сперва наиболее простой случай, когда при всех i, k $f^{-1}\left(l_k^{(i)}\right)$ лежит вне конуса N. В этом случае нетрудно получить оценку снизу для ёмкости Σ_{r_i}, достаточную для выяснения регулярности точки P. Прежде всего, из $f^{-1}\left(T^0_r\right) \subset \Sigma_{r_i}$ следует, что

$$C(\Sigma_{r_i}) \geqslant C\left[f^{-1}\left(T^0_{r_i}\right)\right].$$

Будем теперь часть $f^{-1}\left(T^0_{r_i}\right)$ поверхности S ортогонально проектировать на плоскость (ξ, η). Рассмотрим какой-либо отрезок pq, перпендикулярный плоскости (ξ, η), концы которого p и q лежат на сфере $\sigma(P, r_i)$ и внутри конуса N. В силу б) точки p и q можно соединить на сфере $\sigma(P, r_i)$ кривой, не пересекающей множества $\sigma(P, r_i) \cdot S$. Полученная замкнутая кривая в силу сделанного нами упрощающего предположения не будет зацеплена ни с одним из континуумов $f^{-1}\left(l_k^{(i)}\right)$. Поэтому, если данная кривая окажется зацепленной с $f^{-1}\left(k_{r_i}+k'_{r_i}\right)$, то отрезок pq будет пересекать $f^{-1}\left(T^0_{r_i}\right)$ и соответствующая точка (ξ, η)-плоскости будет входить в проекцию $f^{-1}\left(T^0_{r_i}\right)$.

Континуум $M_{r_i}=f^{-1}\left(k_{r_i}\right)$, учитывая в_2), можно непрерывно деформировать, не пересекая N, либо в дугу, принадлежащую R_1, либо в дугу, принадлежащую R_2. Пусть, например, имеет место первое. Тогда, как легко видеть из предыдущего, отрезок pq, проектирующийся в любую точку R_1, лежащую в круге $\xi^2+\eta^2 \leqslant \sin^2\gamma_0 \cdot r_i^2$, будет пересекать также поверхность $f^{-1}\left(T^0_{r_i}\right)$.

Следовательно, при каждом i проекция $f^{-1}\left(T^0_{r_i}\right)$ на плоскость (ξ, η) содержит либо часть R_1, либо часть R_2, лежащую в упомянутом круге.

Обозначая $c_1(r)$, соответственно $c_2(r)$, ёмкость части R_1, соответственно R_2, в круге $\xi^2+\eta^2 \leqslant r^2$, мы будем иметь

$$C(\Sigma_{r_i}) \geqslant \min\{c_1(\sin^2\gamma_0 \cdot r_i),\ c_2(\sin^2\gamma_0 \cdot r_i)\} = c_0(\sin^2\gamma_0 \cdot r_i).$$

Если, начиная с некоторого r, $c_0(r)=c_1(r)$ или $c_0(r)=c_2(r)$, то в силу критерия II и регулярности точки P для R_1 и R_2 отсюда будет следовать регулярность P для S.

В противном случае, в силу неравенства

$$c_1(r)+c_2(r) > \frac{2}{\pi}r$$ [1]

и легко доказываемой непрерывности $c_1(r)$ и $c_2(r)$, существует бесконечная последовательность чисел $\rho_1 > \rho_2 > \ldots$, стремящихся к нулю, для которой

$$c_0(\rho_i)=c_1(\rho_i)=c_2(\rho_i) > \frac{1}{\pi}\rho_i.$$

Так как $c_0(r)$ монотонно убывает и ряд $\sum\limits_i \frac{c_0(\rho_i)}{\rho_i}$ расходится, то расходится также интеграл $\int\limits_0 \frac{c_0(r)}{r^2}\,dr$.

Но тогда, по критерию II, ряд

$$\sum_i \frac{c_0(\sin^2\gamma_0 \cdot r_i)}{r_i}$$

[1] Это неравенство следует из $C(E_1+E_2) \leqslant C(E_1)+C(E_2)$ и того, что ёмкость кругового диска радиуса r равна $\frac{2}{\pi}r$.

расходится и, значит, расходится ряд $\sum_i \frac{c_0(r_i)}{r_i}$.

Это доказывает регулярность точки P для поверхности S.

13. Рассмотрение общего случая будет основано на следующих соображениях. Часть поверхности S, ограниченная участком L между A_{r_i} и B_{r_i} и континуумом M_{r_i}, может внутри конуса N выходить из сферы $\sigma(P, r_i)$. Это приводит к тому, что при проектировании, которым мы пользовались в п. 12, у нас не будет гарантии в том, что сплошь будет покрываться либо часть R_1, либо часть R_2 в круге

$$\xi^2 + \eta^2 \leqslant \sin^2\gamma_0 \cdot r_i^2.$$

Поэтому, прежде чем проектировать, мы сделаем некоторое преобразование над интересующей нас частью S, которое, грубо говоря, сводится к тому, что части S, лежащие вне $\sigma(P, r_i)$, но внутри $\sigma(P, 2r_i)$, мы заменим частями поверхности самой сферы $\sigma(P, r_i)$, ограниченными той же границей. При этом нам потребуется тщательно установить, какие именно части S мы будем заменять и показать, что при этой замене не слишком увеличится ёмкость модифицированной поверхности. Эту цель преследуют доказываемые ниже две леммы.

14. *Лемма 3.* Пусть σ—сфера с центром в P; G_i $(i = 1, 2, \ldots)$—попарно непересекающиеся незамкнутые связные жордановы поверхности, лежащие внутри σ, весь край которых лежит на σ, причём каждая компонента края разбивает σ на две части. Обозначим v_i трёхмерную область, не содержащую P и ограниченную поверхностью G_i и некоторым открытым сферическим множеством g_i.[1] Если угловая мера g_i меньше $4\pi - m$ $(m > 0)$ и E—любое замкнутое множество, то

$$C\left(E + \overline{\sum_i g_i}\right) < \alpha \cdot C\left(E + \overline{\sum_i G_i}\right),$$

где $\alpha > 0$ зависит только от m.

Доказательство. Всякое подобное преобразование с центром подобия в точке P не изменяет доказываемого соотношения. Поэтому можно считать, что радиус сферы σ равен единице.

Рассмотрим равновесное распределение $\mu(e)$ на $E + \overline{\sum_i g_i}$ положительной массы, равной $C\left(E + \overline{\sum_i g_i}\right)$. Его потенциал, как известно, нигде не превосходит единицы и равен единице во всех регулярных точках $E + \overline{\sum_i g_i}$. Произведём выметание этих масс на множество $E + \overline{\sum_i G_i}$. В результате мы получим новое распределение $\nu(e)$ на $E + \overline{\sum_i G_i}$, потенциал которого всюду не превосходит единицы, ибо при выметании потенциал не увеличивается. Поэтому

$$\nu\left(E + \overline{\sum_i G_i}\right) \leqslant C\left(E + \overline{\sum_i G_i}\right).$$

[1] Граница g_i совпадает с краем G_i.

Оценим снизу общую массу $\nu(E+\overline{\sum_i G_i})$. Она, как известно (Валле—Пуссен [4]), равна

$$\int_{E+\overline{\sum_i g_i}} W(M)\,d\mu(M),$$

где $W(M)$ обозначает равновесный потенциал на $E+\overline{\sum_i G_i}$. Теперь достаточно показать, что на $E+\overline{\sum_i g_i}$, за возможным исключением множества ёмкости нуль, имеем

$$W(M)>\frac{1}{\alpha}.$$

Так как $E+\overline{\sum_i g_i}-\sum_i g_i \subset E+\overline{\sum_i G_i}$, то на этом множестве $W(M)=1$, за возможным исключением множества нулевой ёмкости. Пусть, поэтому, $M \in g_i$. Если w_i есть равновесный потенциал G_i, то, очевидно, $W(M)\geqslant w_i(M)$. Оценивая далее $w_i(M)$, мы можем без потери общности считать, что контуры, ограничивающие g_i, являются достаточно гладкими кривыми, имеющими ёмкость нуль.

Обозначим H_i дополнение к g_i относительно сферы σ. Согласно сделанному допущению mes $H_i>m$.

Построим гармоническую функцию $U_i(M)$, определённую в бесконечной области, ограниченной H_i и G_i (т. е. вне дополнения к v_i относительно единичного шара) по следующим граничным данным: на G_i $U_i=1$, на H_i $U_i=0$. [1]

Очевидно,

$$w_i(M)\geqslant U_i(M).$$

Пусть, далее, $u_i(M)$—гармоническая функция, являющаяся решением внешней задачи Дирихле для области, ограниченной только H_i с граничными значениями, равными нулю при подходе к точкам H_i снаружи сферы, и равными единице при подходе к ним изнутри σ.

Пользуясь принципом расширения области, легко убедиться в том, что $U_i>u_i$ там, где определена функция U_i. Итак, при $M\in g_i$

$$W(M)\geqslant w_i(M)>U_i(M)>u_i(M)$$

и нам осталось оценить снизу $u_i(M)$.

Для этого рассмотрим интеграл Гаусса

$$I(M)=\frac{1}{4\pi}\iint_{H_i}\frac{\cos\varphi}{r_{MQ}^2}\,dS(Q),$$

где φ, как всегда, угол между вектором $\overrightarrow{QM}$ и внутренней нормалью к сфере. Вспоминая геометрическое значение $I(M)$, усматриваем, что

---

[1] Неопределённость U_i на краю G_i не существенна, так как ёмкость этого множества равна нулю.

предельные значения $I(M)$ на $\overset{\mathrm{i}}{H}_i$ изнутри σ меньше единицы. Так как скачок $I(M)$ во внутренних точках H_i равен единице, то по принципу максимума

$$I(M) < u_i(M).$$

Окружим точку M на сфере кружком ω площади, равной $\frac{m}{2}$, и обозначим H_i^- часть H_i вне ω. Очевидно, $\operatorname{mes} H_i^- > \frac{m}{2}$ и

$$I(M) \geqslant \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{H_i^-} \frac{\cos\varphi}{r_{MQ}^2}\, dS(Q) > \frac{1}{16\pi} \iint\limits_{H_i^-} \cos\varphi \cdot dS(Q) > m \text{ const.}$$

Лемма, таким образом, доказана.

15. *Лемма 4.* Пусть снова σ—сфера радиуса r с центром в P, $\mathbf{H}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$—попарно непересекающиеся незамкнутые связные жордановы поверхности, причём край $\mathbf{H}_i$ состоит из одного континуума $\varkappa_i$, лежащего на σ и разбивающего σ на две области, из которых диаметр одной, скажем B_i, меньше $\frac{1}{2}r$. Пусть далее $\mathbf{H}_i$ в окрестности $\varkappa_i$ лежит вне σ и все области B_i принадлежат сферическому кружку δ углового радиуса меньше γ_0 (это число будет более точно определено впоследствии). Обозначим $\varkappa_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ все компоненты пересечения $\mathbf{H}_i$ с σ и допустим, что каждый континуум $\varkappa_i^{(k)}$ не имеет внутренних точек и разбивает σ на две области, из которых одна $g_i^{(k)}$ удовлетворяет условию леммы 3 (причём роль $\mathbf{G}_i$ выполняет часть $\mathbf{H}_i$).

Тогда, если E—любое замкнутое множество, а H_i—часть $\mathbf{H}_i$, лежащая внутри сферы σ_1 радиуса kr $(k = 4\gamma_0 + 1)$, то

$$C\left(E + \sum_i \overline{B}_i\right) < \alpha \cdot C\left(E + \sum_i \overline{H}_i\right),$$

где α зависит лишь от m и γ_0.

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 3, будем считать, что r равно единице. Области $g_i^{(k)}$ при фиксированном i разбиваются на конечные или счётные группы

$$\begin{array}{l} g_i^{(k_{11})},\ g_i^{(k_{12})}, \ldots \\ g_i^{(k_{21})},\ g_i^{(k_{22})}, \ldots \\ g_i^{(k_{31})},\ g_i^{(k_{32})}, \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

по следующему правилу: открытое множество

$$g_{im} = \sum_{s=1}^{\infty} g_i^{(k_{ms})}$$

вместе с некоторой связной частью $\mathbf{G}_{im}$ поверхности $\mathbf{H}_i$, лежащей внутри σ, ограничивает трёхмерную область v_{im}. По предположению можно воспользоваться результатом леммы 3, беря в качестве g_i множества g_{im}, а в качестве E—множество

$$E+\overline{\sum_i H_i - \sum_{i,m} G_{im}}.$$

Это даёт

$$C(E+\overline{\sum_i H_i - \sum_{i,m} G_{im}} + \overline{\sum_{i,m} g_{im}}) < \beta \cdot C(E+\overline{\sum_i H_i}),$$

где $\beta > 0$ зависит лишь от константы m.

Поверхность $\mathbf{H}_i$ после перехода к H_i и замены $\sum_{i,m} G_{im}$ на $\sum_{i,m} g_{im}$ превращается, вообще говоря, в несвязное множество. Обозначим $\mathbf{K}_i$ ту компоненту этого множества, которая содержит x_i. $\mathbf{K}_i$ является жордановой поверхностью, не имеющей точек внутри σ, с краем $x_i+\lambda_i$, где λ_i лежит на сфере σ_i радиуса k.

Из предыдущего имеем

$$C(E+\overline{\sum_i \mathbf{K}_i}) < \beta \cdot C(E+\overline{\sum_i H_i}).$$

Теперь мы покажем, что

$$C(E+\overline{\sum_i B_i}) < \beta_1 \cdot C(E+\overline{\sum_i \mathbf{K}_i}),$$

где β_1 зависит лишь от γ_0. Отсюда, очевидно, будет следовать заключение леммы с константой α, равной $\beta\beta_1$.

Выполним следующее построение. Возьмём сферический кружок δ_1 концентрический δ, но углового радиуса $2\gamma_0$, и спроектируем его из центра P сферы на сферу σ_1. Часть проектирующего конуса вместе с δ_1 и его проекцией на σ_1 ограничивает тело D. Обозначим h_i связную часть $\mathbf{K}_i$, лежащую в D и содержащую x_i, и докажем более сильное неравенство

$$C(E+\overline{\sum_i B_i}) < \beta_1 \cdot C(E+\overline{\sum_i h_i}).$$

Мы можем повторить дословно рассуждения, приведённые в доказательстве леммы 3, с заменой внутренности сферы σ областью D, вплоть до оценки снизу равновесного потенциала $w_i(M)$ поверхности h_i в точке M области B_i.

Для оценки $w_i(M)$ поступим следующим образом. Обозначим B_i' множество на границе D, точки которого можно соединить с B_i ломаной, не пересекающей h_i и лежащей целиком (кроме концов) внутри D. Дополнение к B_i+B_i' относительно границы D обозначим F_i. Так как часть края h_i, принадлежащая сфере σ, состоит только из x_i, лежащего внутри δ, то F_i безусловно содержит часть σ, лежащую внутри δ_1, но вне δ. Следовательно,

$$\text{mes } F_i > A\gamma_0.$$

Теперь мы снова можем повторить соответствующее рассуждение леммы 3 и свести вопрос к оценке снизу в точках B_i гармонической вне F_i функции $u_i(M)$, служащей решением задачи Дирихле для бесконечной области, ограниченной F_i, с граничными значениями, равными единице при подходе к точкам F_i изнутри D и равными нулю при подходе к ним извне.

Интеграл Гаусса

$$I(M) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{F_i} \frac{\cos\varphi}{r^2_{MQ}} dS(Q) \tag{*}$$

попрежнему является минорантой для $u_i(M)$, но не даёт, вследствие перемены знака у $\cos\varphi$, надлежащей оценки для $u_i(M)$. Поэтому нам придётся найти лучшую миноранту для $u_i(M)$.

Для этого положим

$$\theta = \min_{M \in F_i} \frac{1}{4\pi} \int\int\limits_{B_i + B_i'} \frac{\cos\varphi}{r^2_{MQ}} dS(Q).$$

Если обозначить $I^+(M)$ предельное значение интеграла Гаусса (*) в точке $M \in F_i$ при подходе изнутри D, то, очевидно,

$$I^+(M) + \theta \leqslant 1. \tag{**}$$

Введём теперь в рассмотрение равновесный потенциал

$$\Omega(P) = \int\limits_{F_i} \frac{d\nu(M)}{r_{PM}}$$

множества F_i. Напомним, что это — гармоническая вне F_i функция, принимающая на F_i непрерывно значение, равное единице. Тогда функция

$$\breve{I}(P) = I(P) + \theta \cdot \Omega(P)$$

будет также минорантой для $u_i(P)$. Это вытекает из неравенства (**) и того, что скачок $\breve{I}$ в точках F_i равен скачку I, т. е. единице.

Прежде чем оценивать снизу $\breve{I}(M)$ при $M \in B_i$, сделаем следующее замечание.

Если γ_0 достаточно мало, то для трёхмерной области D имеет место неравенство Неймана

$$\frac{1}{4\pi}\left(I_s^\alpha + I_{s_1}^\beta\right) > \lambda > 0,$$

где I_s^α обозначает телесный угол, под которым видна часть α границы D из точки S, лежащей также на этой границе, $I_{s_1}^\beta$ — телесный угол, под которым видна из точки S_1 дополнительная часть границы β, а λ зависит лишь от γ_0.

Действительно, при малых значениях γ_0 область D может быть получена из прямого кругового цилиндра с квадратным осевым сечением (сторона его равна $4\gamma_0$) путём весьма малой в смысле близости первого порядка деформации. Поэтому, если обозначить λ_0 константу Неймана для такого цилиндра, то ясно, что при достаточно малом γ_0 неравенство Неймана будет соблюдаться с константой $\lambda > \frac{1}{2}\lambda_0$.

Так как дальнейшее уменьшение γ_0, во всяком случае, не уменьшает константы λ, то мы можем также потребовать, чтобы

$$2\pi \sin 2\gamma_0 < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0 \text{ фиксируется дальше}).$$

Заметим сразу, что тогда

$$\mathrm{I}_s^\alpha > -2\pi \sin 2\gamma_0 > -\varepsilon.$$

Приступая к оценке $\breve{\mathrm{I}}(M)$ при $M \in B_i$, рассмотрим два случая. Пусть сперва $\mathrm{I}(M) > 0$. Тогда

$$\breve{\mathrm{I}}(M) = \mathrm{I}(M) + \Theta \cdot \Omega(M) > [\mathrm{I}(M) + \Theta] \cdot \Omega(M) > \lambda \cdot \Omega(M) > \lambda \cdot \omega(M),$$

где под $\omega(M)$ понимается равновесный потенциал сферического кольца $\delta_1 - \delta$ между окружностями δ_1 и δ.

Имеем

$$\omega(M) = \int_{\delta_1-\delta} \frac{d\nu(P)}{r_{PM}} > \frac{1}{2\sin\frac{3}{2}\gamma_0} \int_{\delta_1-\delta} d\nu(P) = \frac{C(\delta_1-\delta)}{2\sin\frac{3}{2}\gamma_0}.$$

Но при малых γ_0 $C(\delta_1 - \delta) = O(\gamma_0)$, и поэтому

$$\omega(M) > \chi > 0,$$

где χ — абсолютная константа.

Итак,

$$\breve{\mathrm{I}}(M) > \chi \cdot \lambda$$

и это, как в лемме 3, доказывает желаемое.

Пусть теперь $\mathrm{I}(M) < 0$. В силу неравенства Неймана и указанного выше выбора γ_0 имеем

$$\Theta > \lambda, \quad \mathrm{I}(M) > -\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\breve{\mathrm{I}}(M) > -\varepsilon + \lambda\Omega(M) > -\varepsilon + \lambda\omega(M) > -\varepsilon + \chi\lambda > \frac{1}{2}\chi\lambda,$$

если взять $\varepsilon < \frac{1}{2}\chi\lambda$.

Таким образом, и в этом случае лемма доказана.

16. Вернёмся к доказательству теоремы, намеченному в начале п. 13.

В п. 12 мы обозначили через

$$l_1^{(i)}, \quad l_2^{(i)}, \dots$$

континуумы, разбивающие полукруг K на две области и являющиеся общей границей $T^0_{r_i}$ и $T_{r_i e}$.

Из этой последовательности мы удержим лишь те $l_k^{(i)}$, для которых $f^{-1}\left(l_k^{(i)}\right)$ либо находятся внутри конуса N, либо имеют с ним общие точки. Обозначим их

$$l_1'^{(i)}, \quad l_2'^{(i)}, \dots$$

а остальные континуумы $l_k^{(i)}$ обозначим

$$l_1''^{(i)}, \quad l_2''^{(i)}, \ldots$$

Части K, ограниченные этими континуумами, будем обозначать соответственно $d_k'^{(i)}$ и $d_k''^{(i)}$.

В силу в$_1$) все $l_k'^{(i)}$ будут лежать „внутри" конуса N_1 и ни один из них, в силу б), не окружает конуса N.

Зафиксировав указанным в лемме 4 образом γ_0 и k, будем оценивать снизу ёмкость $C(\Sigma_{kr_i})$. Рассмотрим часть Σ_{kr_i}, которая принадлежит множеству $f^{-1}\left(T_{r_i}^0 + \sum_k d_k'^{(i)}\right)$, и обозначим её Σ'_{kr_i}. Если $\delta_i^{(1)}$ и $\delta_i^{(2)}$ сферические кружки, лежащие внутри конуса N_1, то мы дважды применим лемму 4, беря в качестве E множество $f^{-1}\left(T_{r_i}^0\right)$, в качестве $H_k - f^{-1}\left(d_k'^{(i)}\right)$, а в качестве δ — последовательно $\delta_i^{(1)}$ и $\delta_i^{(2)}$. Нетрудно убедиться в том, что в силу соблюдённых при выборе r_i предосторожностей все условия применимости леммы 4 и леммы 3, на которую она опирается, будут выполнены, причём константы m и α будут зависеть лишь от выбранной величины γ_0.

Таким образом,

$$C(\Sigma_{kr_i}) \geqslant C(\Sigma'_{kr_i}) > \frac{1}{\alpha^2} C\left[f^{-1}\left(T_{r_i}^0\right) + \overline{\sum_k B_k^{(i)}}\right],$$

где $B_k^{(i)}$ — части сферы диаметра меньше $\frac{1}{2} r_i$, ограниченные континуумами $f^{-1}\left(l_k'^{(i)}\right)$.

Теперь проектируем множество $f^{-1}\left(T_{r_i}^0\right) + \overline{\sum_k B_k^{(i)}}$ на плоскость (ξ, η) и замечаем, что рассуждение, которым мы пользовались в п. 12, будет законно, ибо континуумы $f^{-1}\left(l_k''^{(i)}\right)$ лежат вне конуса N_1.

Следовательно,

$$C(\Sigma_{kr_i}) > \frac{1}{\alpha^2} c_0 \left(\sin \frac{\gamma_0}{2} r_i\right)$$

и расходимость ряда

$$\sum_i \frac{c_0\left(\sin \frac{\gamma_0}{2} r_i\right)}{r_i}$$

влечёт за собой расходимость ряда

$$\sum_i \frac{C(\Sigma_{kr_i})}{kr}$$

и, значит, регулярность точки P.

Итак, нами доказана

Теорема 2. На всякой плоской жордановой кривой, лежащей на границе F области Ω типа (Г), иррегулярные точки образуют множество первой категории.

§ 3. Пространственная жорданова кривая типа (А)

17. Метод проекций, употреблённый нами в § 2 для доказательства теоремы 2, может быть применён также для некоторых специальных пространственных кривых.

Назовём для краткости кривой типа (А) пространственную жорданову кривую, удовлетворяющую следующим двум условиям:

1) Каждая точка кривой, за возможным исключением множества точек первой категории, достижима конусом. Это значит, что каждая такая точка является вершиной конуса вращения, не имеющего в окрестности вершины общих точек с кривой.

2) Проекция кривой на любую плоскость, являющаяся непрерывной кривой, имеет не более счётного числа кратных точек[1].

Мы убедимся, что для кривых указанного типа основная теорема остаётся справедливой.

18. Мы можем считать, что рассматриваемая нами кривая L типа (А) не содержит плоских кусков. Пусть **L** — её проекция на какую-либо плоскость. Множество точек L, проектирующихся в кратную точку **L**, замкнуто и нигде не плотно на L, так как L не содержит отрезков. Поэтому множество M всех точек L, лежащих над кратными точками, будет первой категории на L (в силу условия 2).

Проекцию **P** всякой другой точки P на L можно окружить окрестностью V, которая разбивается **L** на две области: R_1 и R_2. По лемме 1 множество **X** точек **L**, иррегулярных относительно хотя бы одной области — R_1 или R_2, будет первой категории на **L**.

Покажем, что прообраз X множества **X** на L будет первой категории на **L**.

Действительно, число дуг L, проектирующихся в часть **L**, лежащую внутри V, конечно. Это следует из того, что L, как жорданова кривая, не может иметь предельного континуума. Поэтому часть XV множества X, расположенная на этих дугах, будет первой категории на L. Беря последовательность окрестностей

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots,$$

стягивающуюся к точке **P**, и обозначая $X_{\mathbf{P}}$ полный прообраз точки **P** (это нигде не плотное множество), убеждаемся в том, что

$$XV_1 + XV_2 + \cdots + X_{\mathbf{P}}$$

есть множество первой категории. Но это множество содержит полный прообраз части **X**, расположенной внутри V. Окончательно наше утверждение следует из того, что множество всех обыкновенных точек **L** может быть заключено в счётную систему окрестностей.

Итак, множество X + M — первой категории на L.

---

[1] Здесь не принимаются во внимание кратные точки, зависящие от параметрического задания этой непрерывной кривой.

Рассмотрим теперь счётное множество направлений

$$l_1, l_2, \ldots,$$

расположенных всюду плотно, и определим множества

$$X_1 + M_1, X_2 + M_2, \ldots,$$

соответствующие проектированию в этих направлениях. Их сумма Ξ будет также первой категории на L. Поэтому на L можно найти точку Q, не входящую в Ξ и достижимую, кроме того, некоторым конусом K. Уменьшая, если нужно, угол конуса, можно считать, что ось его совпадает с одним из направлений l_n.

Теперь можно, как в § 2, доказать, что для любой поверхности, примыкающей к L, точка Q будет регулярной. Для этого возьмём конус k, имеющий ту же ось, что и K, но меньший угол. Рассуждения п. 11 можно будет повторить, рассматривая разность углов в осевом сечении конусов k и K. Все же последующие выводы будут повторяться дословно.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Келлог и Василеско, A contribution to the theory of capacity. Amer. Journ. of Math., vol. 51 (1929).
2. М. В. Келдыш, О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. Успехи математических наук, вып. VIII (1941).
3. Н. Ландкоф, О расположении иррегулярных точек обобщённой задачи Дирихле. Доклады АН СССР, т. 39, № 9 (1943).
4. Ш. Валле—Пуссен, Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet. Actuel. scient. ind., Paris (1937).
5. Г. Ган, Theorie der reellen Funktionen, 1. Band, Berlin (1921).