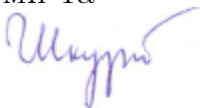


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА

Фізичний факультет
Кафедра астрономії та космічної інформатики

«Допущено до захисту»
В.о. зав. кафедри астрономії та
космічної інформатики
проф. Шкуратов Ю. Г. _____
« 17 » травня 2024 р.



Оцінка « відмінно »

Голова ДЕК Тишковець В.П.

« 24 » травня 2024 р.



Астаф'єва Тетяна Андріївна

Класифікація орбіт у гравітаційному полі тора та центральної маси

Дипломна робота на здобуття
освітнього рівня
«Магістр» за спеціальністю
104 – «фізика та астрономія»
освітньо-наукова програма -
«астрономія»

(підпис студента)

Науковий керівник:
професор кафедри астрономії та
космічної інформатики,
доктор фіз.-мат. наук,
Баннікова Олена Юріївна

(підпис керівника)

Рецензент:

(підпис рецензента)

Харків 2024

Анотація

Астаф'єва Т.А. «Класифікація орбіт у гравітаційному полі тора та центральної маси». – Рукопис.

Випускна робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня «Магістр» за напрямком підготовки 104 – «Фізика та астрономія». – Харків, 2024.

В даній роботі було проведено дослідження динаміки частинки в гравітаційному полі однорідного кругового тора та центральної маси. Отримано вирази для компонент гравітаційної сили тора. Для них було побудовано графіки відносних похибок які показали, що максимальні значення похибок не перевищували 1%. Було також отримано вираз для OSCO та чисельні значення для різних товщин, з'ясовано її роль у формуванні орбіт частинки. Отримано графіки залежності радіуса кільця Лагранжа від відношення мас тора та центральної маси. Також досліджено їх вплив на динаміку частинки. Побудовані траєкторії в екваторіальній та меридіональній площині. Метод: Створена модель, яка містить диференціальні рівняння, що описують динаміку частинки в гравітаційному полі тора і центральної маси. Ключові слова: гравітаційний потенціал тора, кільце Лагранжа, OSCO.

Abstract

Astafieva T. A. "Classification of orbits in the gravitational field of the torus and central mass".–Manuscript.

Final work on obtaining the educational qualification "Master of Science" and the direction of preparation 104 "Physics and Astronomy".– Kharkiv, 2024.

This thesis investigates the dynamics of a test particle in the gravitational field of a homogeneous circular torus and a central mass. Expressions for the gravitational force of the torus were obtained. The relative errors were obtained as the functions of coordinates, showing that the maximum error values did not exceed 1%. An expression for the OSCO (Orbiting Self-Consistent Object) was also derived, along with numerical values for various thicknesses, elucidating its role in shaping particle orbits. Graphs depicting the dependence of the Lagrange ring radius on the ratio of torus mass to central mass were obtained, and their influence on particle dynamics was investigated. Trajectories were plotted in the equatorial and meridional planes.

Method: A model was created containing differential equations that describe a test particle dynamics in the gravitational field of the torus and the central mass.

Keywords: torus gravitational potential, Lagrange ring, OSCO.

Зміст

Скорочення та умовні позначення	6
Вступ	7
Розділ 1. Тороїдальні та кільцеві структури в астрофізиці	9
1.1. Спостереження	9
1.2. Гравітаційний потенціал однородного тора	12
1.2. Наближені вирази для потенціалу тора	15
1.3. Динаміка в околі кільця з центральною масою	18
Розділ 2. Особливості динаміки в гравітаційному полі тора та центральної маси	21
2.1. Компоненти гравітаційної сили з боку тора для всієї області .	21
2.2. Окружність Лагранжа та OSCO орбіта з урахуванням наближеного зовнішнього потенціалу тора	25
2.1. Остання стабільна кругова орбіта (OSCO)	27
Розділ 3. Класифікація траєкторій частинок	30
3.1. Екваторіальна площина	31
3.2. Меридіональна площина.	39
Висновки	41
Список використаних джерел	42
Додаток	46

Скорочення та умовні позначення

АЯГ - активні ядра галактик

ІЧ-область спектру - інфрачервона область спектра

НМЧД - надмасивна чорна діра

РЗНБ - радіоінтерферометри з наддовгою базою

ALMA - Atacama Large Millimeter Array

Sy1 - сейфертівська галактика першого типу

Sy2 - сейфертівська галактика другого типу

VLTI - Very Large Telescope Interferometer

OSCO - The outermost stable circular orbit

Вступ

Тороїдальні структури зустрічаються у багатьох типах астрономічних об'єктах. Наприклад, розглянемо газопилові тори у активних ядрах галактик (АЯГ). Відомо, що АЯГ поділяються на декілька типів : сейфертівські галактики, квазари, блазари та радіогалактики. Їх різноманітність, згідно уніфікованої схеми, полягає у різному розташованні затінюючого тора відносно спостерігача. Тор, у цьому випадку, предсталає собою оптично товсту газопилову структуру яка оточує НМЧД та акреційний диск. Тобто, коли тор видно з ребра (при цьому спостерігається надлишок в ІЧ спектрі) спостерігається сейферовська галактика 2-го типу (Sy2). При спостереженні Sy1 тор орієнтований під досить великим кутом до променя зору (надлишок в оптичній або УФ області спектра). АЯГ , у яких спостерігаються джети напрямлені під кутом >15 до променя зору, називаються квазарами, а якщо кут <15 - блазарами. Уніфікована схема також була поширена і на випадок радіогалактик [26].

Також важливе значення місце займають тори і для дослідження кільцевих галактик, одних із найзагадковіших у Всесвіті. Тільки 1 із 10 000 галактик потрапляє у цю групу. Їх центральна частина складається зі старих зірок, а в торовій блакитній структурі, навколо центральної, відбувається зореутворення. Перша кільцева галактика була відрита у 1950 році А.Хогом [27] і названа в його честь. Унікальність об'єктів типу Хога також полягає у тому, що гравітаційне поле кільця відіграє значну або навіть вирішальну роль в динаміці речовини у цих галактиках. Це пов'язано з тим, що маса кільця приблизно дорівнює масі центральної частини.

Актуальність роботи.

У момент розквіту теорії гравітаційного потенціалу тор був дуже спеціальним випадком, але технологічний прогрес вивів його на новий рівень.

Це пов'язано з появою таких телескопів як РЗНБ, які дозволяють нам спостерігати тороїдні структури. Наприклад, радіоінтерферометр ALMA у міліметровому діапазоні дозволив розрізнити такі газопилові структури у центральних частинах найближчих АЯГ. Також на VLTІ вдалося провести прямі спостереження центральної частини ядра галактики NGC 1068 в ІЧ дапазоні. З цієї причини виник інтерес до дослідження динаміки газопилових хмар у гравітаційному полі тора та НМЧД. До того ж й незвичний вигляд галактик типу Хога може представляти інтерес для розуміння їх спостережувальних особливостей.

Тому дослідження та класифікація орбіт у гравітаційному полі тора з центральною масою є досить актуальною задачею.

Мета: Дослідити динаміку пробної частинки в гравітаційному полі однорідного кругового тора з центральною масою

Під час проведення дослідження було поставлено та виконано такі **завдання:**

1. Дослідити динаміку частинки в гравітаційному полі тора з центральною масою в екваторіальній та меридіональній площині ;
2. Отримати вирази для сили, яка діє на частинку зі сторони тора та центральної маси;
3. Отримати вираз для розрахунку OSCO, дослідити зміни при різних товщинах тора і їх існування взагалі;
4. Перевірити існування кілець Лагранжа для різних товщин тора, отримати числові рішення, дослідити траєкторії в околі кілець Лагранжа.

Об'єкт дослідження: товсті та тонкі тори з центральною масою.

Предмет дослідження: динаміка в гравітаційному полі тора та центральної маси, OSCO, кільця Лагранжа.

Розділ 1. Тороїдальні та кільцеві структури в астрофізиці

Дослідження потенціалу були важливі для розуміння гравітаційного поля Землі та зірок, тому перші досягнення у цій області пов'язані з потенціалом кулі, сферичної оболонки, еліпсоїда, диска, тобто ключових фігур небесної механіки та астрофізики.

Інтерес до дослідження гравітаційного потенціалу тора з'явився у зв'язку з виявленням об'єктів різного типу, складовою яких є тор або кільце, що має істотну масу. Слід зауважити, що в граничному випадку тор вироджується в диск і, отже, є загальним випадком.

1.1. Спостереження

Кільцеві структури зустрічаються у різних типах об'єктів. Найвідоміші з них – це планетарні кільця, як, наприклад, кільця Сатурна, які були вперше спостережені ще Галілеєм. Одну зі своїх робіт Софія Ковалевська присвятила саме кільцям. Маса кілець Сатурна зовсім мала у порівнянні з масою самої планети, тому гравітаційним полем кілець можна знехтувати. Інший приклад - це товсті протопланетні диски. Одне з найвражаючих зображень такого диска (для NGC 1068) було отримане за допомогою найбільшого радіоінтерферометра ALMA, який працює у міліметровому діапазоні [2]. У цьому випадку маса вже більш суттєва, ніж у випадку планетарних кілець.

Формування кільцевих структур може бути наслідком зіткнення галактик, при цьому кільця можуть бути як правильної форми, так і більш витягнуті без наявності центральної маси [3]. Також кільця можуть бути наслідком подальшої зовнішньої акреції, з намотуванням речовини навколо

центральної структури [4]. Інший варіант – це результат обертання бару, який за певних умов може призвести до формування кілець у галактиках [18]. Такий клас галактик називаються кільцевими галактиками. При цьому виділяють галактики з полярними кільцями, коли кільце охоплює галактику в площині, ортогональній площині обертання головної галактики [5, 17]. Для зіркових систем стає зрозумілим, що кільця мають суттєву масу, оскільки складаються з великої кількості газу та зіркової складової.

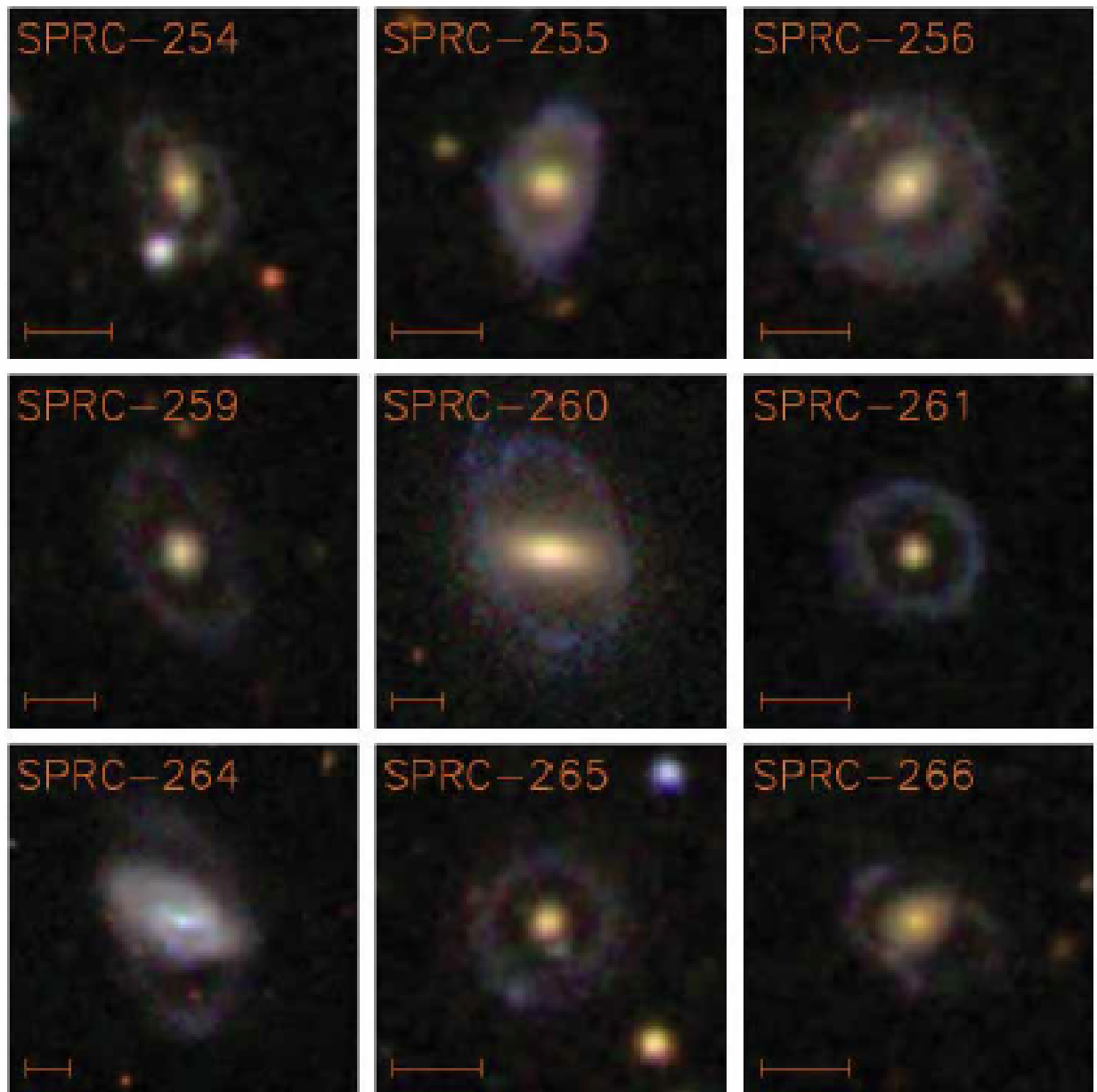


Рис. 1: Оптичні зображення галактик з каталогу Моїсеєв та ін. [9]. Комбінація зображень складена з *i*, *g*, *r* фільтрів відповідно до даних каталогу SDSS DR8. Масштабна смуга відповідає кутовому розміру 10 кут.сек.

За допомогою спостережень було показано, що складовими частинами астрофізичних об'єктів різних типів є тороїдальні та кільцеві об'єкти. Наприклад, кільцеві галактики Zw II 28, AM 0644-741, PGC 54559 (об'єкт Хога рис.2(справа)) тощо.

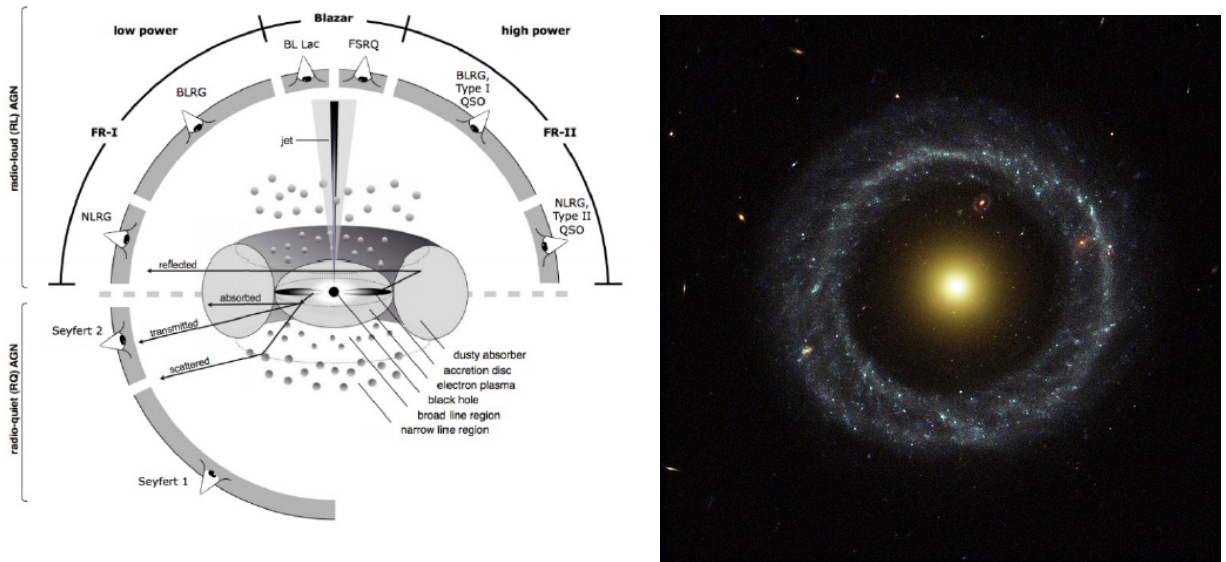


Рис. 2: Зліва : Схема, що зображує уніфіковану модель АЯГ [30]. Різноманіття типів активних ядер пояснюється різною орієнтацією затінюючого газопилового тора відносно спостерігача. Справа: Hubble Heritage WFPC2 colour image of Hoag's Object (Image credit: NASA, ESA, and the Hubble Heritage Team)

Тороїдальні структури, як у кільцевих галактиках, так і навколо АЯГ, є достатньо масивні, щоб впливати на рух матерії. Це впливає з того, що маса центральної частини галактики в об'єкті Хога приблизно рівна масі кільця зореутворення.

Іншим типом об'єктів, які містять тороїдальні структури є активні ядра галактик. У рамках уніфікованої схеми АЯГ(рис. 2 (зліва)) різні типи АЯГ пояснюються різною орієнтацією газопилового тора щодо спостерігача. При цьому тор повинен бути геометрично товстим, щоб пояснити спектри АЯГ, що спостерігаються[25]. Крім того, тор відіграє роль резервуара, який живить акреційний диск і забезпечує потужну світність АЯГ протягом тривалого часу. Прямі спостереження газопилових торів у сейфертовських га-

лактиках були отримані в ГЧ діапазоні за допомогою VLTI/MIDI [20, 24, 10], а також у міліметровому діапазоні з використанням інтерферометра ALMA [2, 11]. Маса пилового тора корелює із масою НМЧД та складає близько $10^5 M_{\odot}$ (у випадку сейфертівських галактик) [28]. При цьому спостереження ALMA дозволяють отримати динаміку речовини в торі, яка відрізняється від динаміки в кеплерівському диску [11]. Тому вивчення гравітаційного потенціалу тора є важливим для розуміння динамічних процесів.

1.2. Гравітаційний потенціал однорідного тора

Уперше дослідження потенціалу тора у своїх останніх роботах здійснив Б.Ріман (середина XIX ст.), де він показав, що гравітаційний потенціал можна представити за допомогою ряду Фур'є [19]. Ця робота не була завершеною і розвиток гравітаційного потенціалу тора було полишено приблизно на століття.

Варто зазначити, що потенціал об'ємної фігури можна знайти кількома способами:

1. прямим інтегруванням за об'ємом;
2. за допомогою теореми Діріхле;
3. використання потенціалів елементарних тіл.

Перший спосіб дозволяє отримати інтегральний вираз, який досить незручний, як у чисельних моделюваннях, так і в аналітичних розрахунках. Використання теореми Діріхле також ускладнюється, оскільки рівняння Пуассона в тороїдальних координатах має складний вигляд і не дозволяє отримати рішення подібного до потенціалу кулі. Вдалим виявляється третій спосіб, а саме знаходження потенціалу тора з елементарних тіл. Такий спосіб був використаний в [15], де в якості початкового гравітуючого елемента було використано диск. У результаті інтегральний вираз для потенціалу

однорідного тора був рівний сумі потенціалів дисків.

Результат, який був отриманий у цій роботі, показав, що зовнішній потенціал тора можна подати у вигляді потенціалу диска рівної маси [15]. Також у роботі вдалося звести потрібне інтегрування (за об'ємом) до одного інтегралу від комбінації повних еліптичних інтегралів всіх трьох типів. З одного боку, це певний математичний успіх, проте вираз виявився дуже громіздким і незручним при його використанні, як у чисельних моделюваннях, так і в аналітичних дослідженнях.

У статті [6] також застосовується третій спосіб. Ідея полягає в складанні потенціалу тора із потенціалів нескінченно тонких кілець. Такий підхід є цілком розумним, оскільки в граничному випадку тор вироджується в нескінченно тонке кільце. При цьому площини складових кілець паралельні до площини тора.

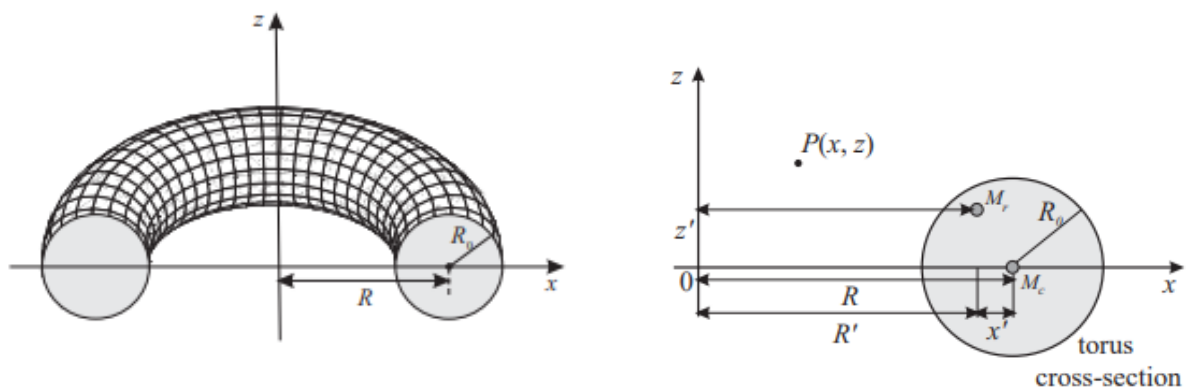


Рис. 3: Ліворуч: схематичне зображення кругового тора. Праворуч: поперечний перетин кругового тора, координата x відповідає координаті r . Рисунок із роботи [6].

Для зручності, використовуємо циліндричну систему координат з координатами, нормованими на великий радіус тора R : $\rho = \frac{r}{R}$, $\zeta = \frac{z}{R}$; а також для складеного кільця (рис.3) : $\eta' = \frac{x'}{R}$, $\zeta' = \frac{z'}{R}$.

Тоді безрозмірний потенціал складеного нескінченно тонкого кільця з

координатами (ρ, ζ) має вигляд:

$$\phi_r(\rho, \zeta; \eta', \zeta') = \sqrt{\frac{(1 + \eta')m_r}{\rho}} K(m), \quad (1)$$

а гравітаційний потенціал тора має наступний вираз [6] :

$$\varphi_{tor}(\rho, \zeta) = \frac{GM_{mc}}{\pi^2 R r_0^2} \cdot \int_{-r_0}^{r_0} \int_{-\sqrt{r_0^2 - \eta'^2}}^{\sqrt{r_0^2 - \eta'^2}} \phi_r(\rho, \zeta; \eta', \zeta') d\eta' d\zeta', \quad (2)$$

де $K(m)$ - повний еліптичний інтеграл першого роду

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \beta}} \quad (3)$$

з параметром

$$m_r = \frac{4\rho(1 + \eta')}{(1 + \eta' + \rho)^2 + (\zeta - \zeta')^2}. \quad (4)$$

Вираз (2) справедливий для внутрішньої і зовнішньої області тора. Під зовнішньою областю мається на увазі область, в якій немає розподілу густини, а під внутрішньою - область з присутнім розподілом густини. Тобто центральний отвір тора також представляє собою зовнішню область. Це визначення пов'язане з теоремою Діріхле: внутрішній потенціал тора задовольняє рівнянню Пуассона, а зовнішній потенціал — рівнянню Лапласа. Таким чином, потенціал тора вдалося звести до подвійного інтегралу від спеціальної функції. (2), однак він громіздкий і складний для використання в чисельному модулюванні. Тому важливо знайти наближені вирази для потенціалу тора, які ми розглянемо у наступних підрозділах.

1.2 Наближені вирази для потенціалу тора

Як було зазначено вище, під зовнішньою областю тора мається на увазі область поза об'ємом тора, тобто координати точки, в якій шукається потенціал, задовольняє нерівність $(\rho - 1)^2 + \zeta^2 \geq r_0^2$. У цьому підрозділі я наведу основні результати з роботи [6], які будуть використані надалі. Розкладанням в ряд підінтегральної функції (2), тобто функції (1) в ряд Макларена за степенями η' , ζ' в околі точки $\eta' = 0$, $\zeta' = 0$ та обмежуючись членами 2-го порядку було отримано наближений вираз для потенціалу тора (S-наближення):

$$\varphi_{tor}(\rho, \zeta; r_0) \approx \frac{GM}{\pi R} \phi_c \cdot \left(1 - \frac{r_0^2}{16} + \frac{r_0^2}{16} \cdot S(\rho, \zeta)\right). \quad (5)$$

Зауважимо, що ненульовими в цьому випадку виявляються лише парні члени ряду через симетрію меж інтеграла (2). Спільний множник в (5) являє собою безрозмірний потенціал нескінченно тонкого кільця, розташованого в центрі перетину тора:

$$\phi_c = \sqrt{\frac{m}{\rho}} K(m), \quad (6)$$

де параметр еліптичного інтегралу

$$m = \frac{4\rho}{(1 + \rho)^2 + \zeta^2} \quad (7)$$

Цей вираз відповідає (1) для $\eta' = \zeta' = 0$. S-функція, яка залежить від координат в (5) має вигляд:

$$S(\rho, \zeta) = \frac{\rho^2 + \zeta^2 - 1}{(\rho - 1)^2 + \zeta^2} \cdot \frac{E(m)}{K(m)} \quad (8)$$

тут $E(m)$ – повний еліптичний інтеграл 2-го роду:

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \sqrt{1 - m \sin^2 \beta}. \quad (9)$$

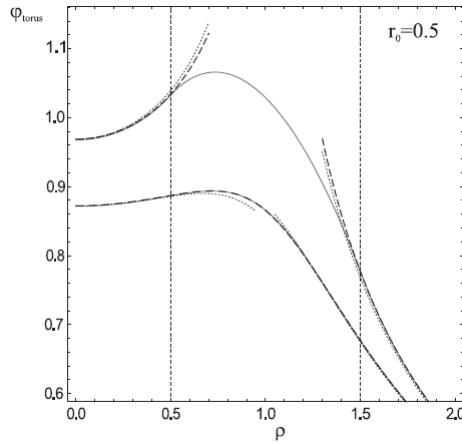


Рис. 4: Залежність потенціалу тора з $r_0 = 0.5$ від ρ для $\zeta = 0$ (верхні криві) і $\zeta = 0.5$ (нижні криві). Суцільні лінії відповідають потенціалу, отриманому шляхом чисельного інтегрування по точній формулі (2). S-наближення потенціалу показано пунктирною лінією. Рисунок взятий з роботи [8].

Як бачимо з рис.4, S-наближення має досить хорошу точність аж до поверхні тора (верхні криві). Відмінності між потенціалом отриманим інтегральним виразом (2) і S-наближенням (5) досягають максимума біля поверхні, але навіть для дуже товстого тора ($r_0 = 0.9$) не перевищують 1.5%. У наступному розділі ми будемо використовувати S-наближення для дослідження динаміки частинки в системі, що складається з центральної точкової маси та тора.

Зауважимо, що у роботі [29] був досліджений потенціал оболонки тора, що значно простіше за потенціал об'ємного тора. Також у цій роботі, використовуючи метод, запропонований у [6], було отримано наближений вираз для потенціалу тора, який з точністю до позначень збігається з (5).

Для розгляду потенціалу у внутрішній частині тора зручно перенести початок системи координат у центр перетину тора. При цьому нова координата η виражається через ρ : $\eta = \rho - 1$.

Вираз для внутрішнього потенціалу тора має вид:

$$\varphi_{tor}^{inner}(\eta, \zeta; r_0) \approx \frac{GM}{2\pi R} \left[c + a_1 \frac{\eta}{r_0} + a_2 \left(\frac{\eta}{r_0} \right)^2 + b_2 \left(\frac{\zeta}{r_0} \right)^2 \right] \quad (10)$$

$b_2 = -1 + 4k^2(3 + 2 \ln k)$, $c = 1 + 2k^2 - 2 \ln k + 8k^2 \ln k$, $a_1 = 8k(1 + \ln k)$,
 $a_2 = -1 - 4k^2(11 + 10 \ln k)$, $k \equiv \frac{r_0}{8}$. Цей вираз було отримано шляхом
розкладання в ряд потенціала складового кільця, але в даному випадку за
малим параметром $1 - m$.

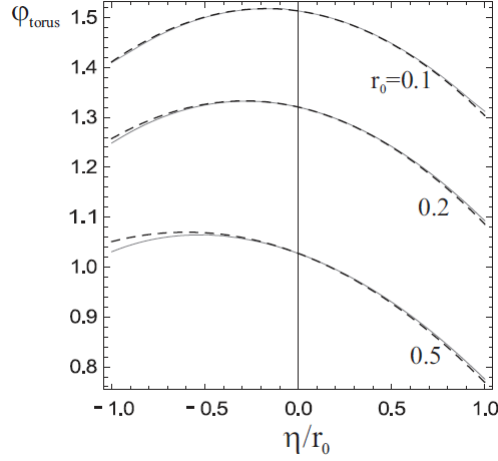


Рис. 5: Залежність внутрішнього потенціалу від нормованих координат $\frac{\eta}{r_0}$ при $\zeta = 0$ для різних значень геометричного параметра: $r_0 = 0.1, 0.2, 0.5$. Суцільні криві представляють залежність потенціалу від відстані до центра перетину тора, які отримані чисельним інтегруванням за формулою (2). Пунктирні лінії — криві потенціалу тора, які отримані по наближеному виразу для внутрішнього потенціалу (10). Рисунок взятий з роботи [8]

Як бачимо з рис. 5 криві потенціалу отримані по інтегральному виразу (2) добре узгоджуються з (10) аж до $r_0 = 0.5$ (максимум відхилення поблизу поверхні тора становить 2%). Зазначимо, що у максимальному положенні потенціалу $\eta = \eta_{max}$, $\zeta = 0$ сили врівноважуються і результуюча дорівнює нулю (точка невагомості). При цьому вираз для координати точки невагомості в випадку однорідного кругового тора має вигляд:

$$\eta_{max} = -\frac{a_1 r_0}{2a_2} \quad (11)$$

і не сходиться з центром перерізу тора.

Для вивчення динаміки і отримання траєкторій частинки в полі товстого тора необхідно отримати такий наближений вираз, який буде працювати у всіх областях. Для цього ми використовуємо метод, який представляє собою наслідок теореми Діріхле про потенціал тора, а саме, що зовнішній і внутрішній потенціал і його похідні (компоненти сили) повинні бути рівні на границі об'ємного тіла. Для того, щоб зшити два рішення для зовнішнього та внутрішнього потенціалу, ми використовуємо S-наближення, а внутрішній потенціал тора, у відповідності з отриманим попереднім розкладанням, представляємо у вигляді степеневого ряду з невідомими коефіцієнтами ряду. А саме, безрозмірний внутрішній потенціал у цьому випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} \phi(\eta, \zeta; r_0) = & \frac{1}{2\pi} \left(c(r_0) + \sum_{i=1} a_i(r_0) \left(\frac{\eta}{r_0} \right)^i \right. \\ & + \sum_{i=1} \sum_{j=1} t_{ij}(r_0) \left(\frac{\eta}{r_0} \right)^i \left(\frac{\zeta}{r_0} \right)^j \\ & \left. + \sum_{j=1} b_j(r_0) \left(\frac{\zeta}{r_0} \right)^j \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$c(r_0), a_i(r_0), b_j(r_0), t_{ij}(r_0)$ - невідомі коефіцієнти. Ці коефіцієнти можна одержати шляхом мінімізації. В додатку у таблиці представлені значення значущих коефіцієнтів ряду для тора з різним геометричним параметром.

На рис.6 ми бачимо, що значення отримані за допомогою точного виразу (2) збігаються досить добре з наближеним. Вирази (5),(10),(12) ми будемо використовувати надалі для дослідження динаміки частинки в такому типі гравітаційного поля.

1.3. Динаміка в околі кільця з центральною масою

Перед дослідженням динаміки тора цікавим буде розглянути динаміку кільця. Вивчення динаміки кільця була захоплюючою задачею досить давно,

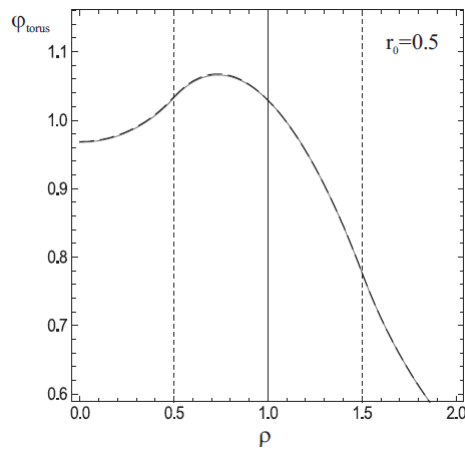


Рис. 6: Залежність потенціалу тора від ρ для $r_0 = 0.5 (\zeta = 0)$. У всій області: крива потенціалу, отримана чисельно за точним виразом (2), показана суцільною кривою; пунктирна крива показує спільне зшивання S-наближення у зовнішній області (5) з внутрішнім потенціалом, представленим у вигляді степеневого ряду (12). Рисунок взятий з роботи [8]

наприклад, хоча б з точки зору дослідження нашої Сонячної системи. Так у 1859 році Максвелл написав знамениту книгу про динаміку кілець Сатурна показавши, що суцільне кільце було б нестабільним.

Слід мати на увазі, що досліджувати орбіти можна у двох різних площинах тора: полярній (XZ) та екваторіальній (XY).

Проводилися дослідження динаміки у гравітаційному полі кільця, але без центральної маси [12]. У цій роботі було отримано близько 10 різних сімейств орбіт у полярній площині, а також перетин Пуанкаре (він дозволяє розрізняти квазіперіодичні рухи (коли точки утворюють безперервні концентричні лінії, звані островами) і нестійкі хаотичні рухи).

У роботах [14],[8] було зроблено дослідження вже з центральною масою.

Автори [14] провели детальне аналітичне дослідження в екваторіальній площині і виявили, що всі сингулярності з'являються внаслідок зіткнень. Вони отримали наступні графіки поведінки ефективного потенціалу ззовні і всередині кільця рис.(7).

Мінімум ефективного потенціалу дає нам круговий розв'язок, який є

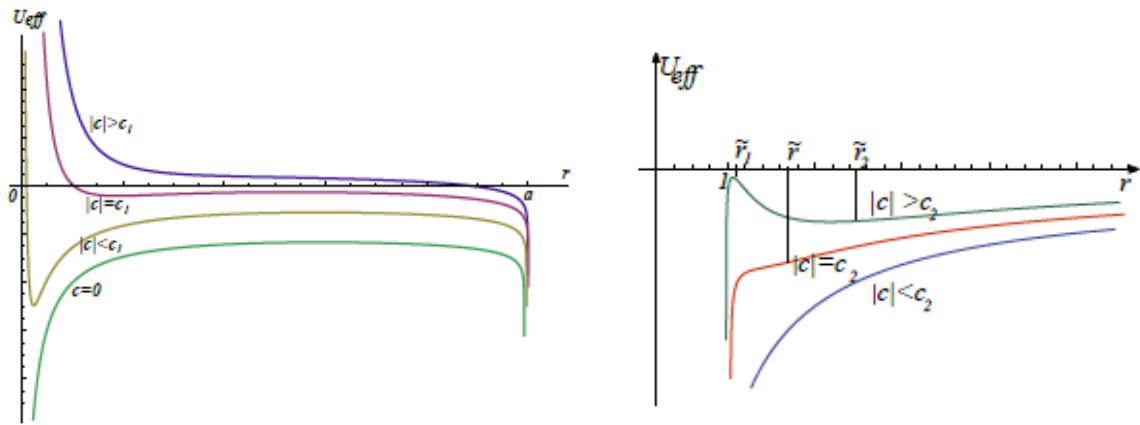


Рис. 7: Можливі графіки для значень ефективного потенціалу в залежності від c -кутового моменту імпульсу: всередині кільця (зліва), ззовні кільця (справа). Рисунок з роботи [14]

стабільним, тоді як максимальна точка дає нам круговий розв'язок, який є нестійким. Це було продемонстровано у роботі [8], де було отримано різні орбіти в екваторіальній площині (рис.8). У роботі [8] також було отримано різні типи орбіт і для меридіональної площини (рис.9).

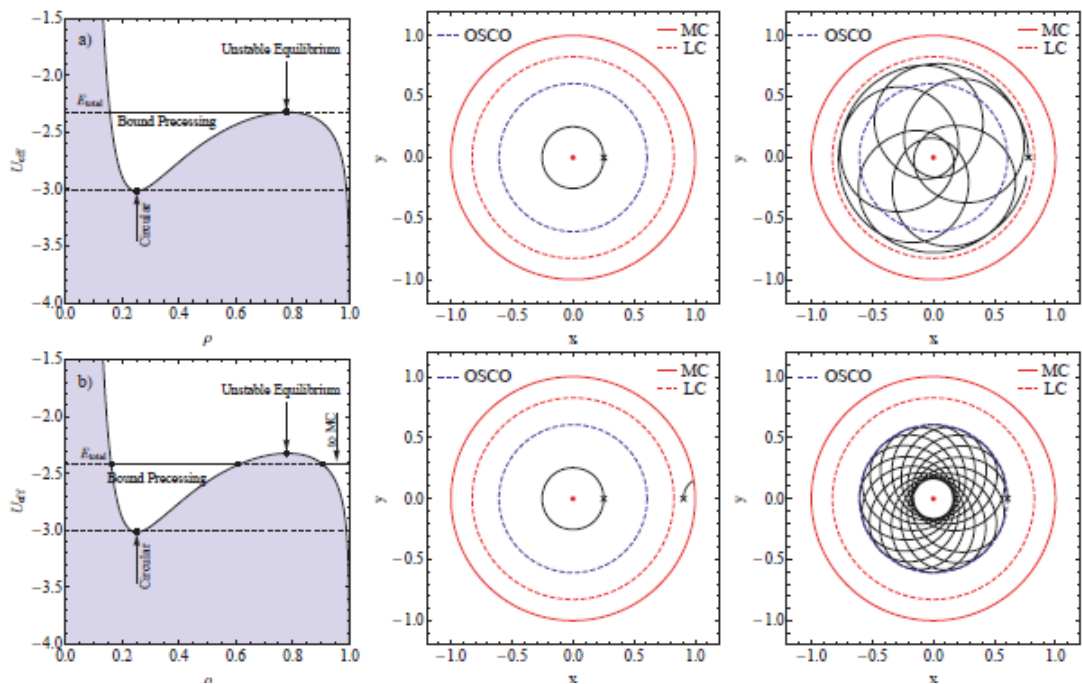


Рис. 8: Ефективний потенціал (ліва колонка) і орбіта пробної частинки (середня, права колонка) в екваторіальній площині кільця для $M_0 = M_{mc}$. Початкові умови: а) $I = 0.5, \rho_0 = 0.252, \rho_0 = 0.779$; б) $I = 0.5, \rho_0 = 0.252, \rho_0 = 0.606$. Рисунок взятий з роботи [8]

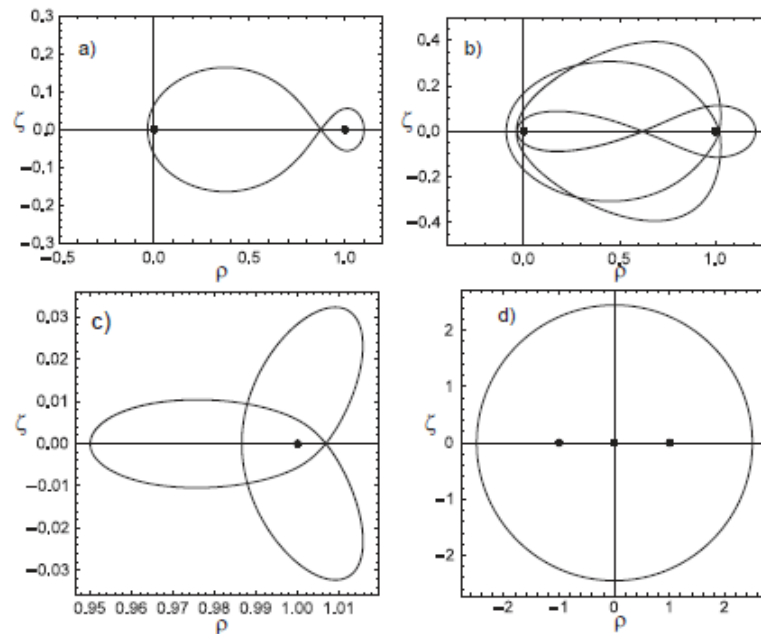


Рис. 9: Замкнуті траєкторії пробної частинки в меридіональній площині масивної окружності для $M_0 = M_{mc}$ і початкових умов: $\zeta_0 = 0, V_\rho(0) = 0$, $a) \rho_0 = 1.1, V_\zeta(0) = 0.392$, $b) \rho_0 = 1.21, V_\zeta(0) = 0.3924$, $c) \rho_0 = 0.95, V_\zeta(0) = 0.145$, $d) \rho_0 = 2.5, V_\zeta(0) = 0.905$. Рисунок взятий з роботи [8].

Розділ 2. Особливості динаміки в

гравітаційному полі тора та центральної маси

2.1. Компоненти гравітаційної сили з боку тора для всієї області

Для того, щоб записати рівняння руху, необхідно знайти компоненти гравітаційної сили тора. Для цього ми скористаємося виразами гравітаційного потенціалу для зовнішньої та внутрішньої областей. Знаходячи похідні за координатами від S-наближення потенціалу (5), отримуємо відповідно

вирази для компонент сили у зовнішній області:

$$\begin{aligned}
F_{\text{out},\rho} = \frac{\partial\varphi_{\text{out}}}{\partial\rho} = & -\frac{GM_{\text{tor}}}{8\pi R^2\beta^2\rho} \left(\frac{m}{4\rho}\right)^{\frac{3}{2}} \left(- \left[\left(r_0^2[(1+\zeta^2)^2 + \right. \right. \right. \\
& + (-1 - 12\zeta^2 + \zeta^4)\rho^2 + (-1 + 2\zeta^2)\rho^4 + \rho^6] - \\
& \left. \left. \left. - 8\beta(1 + \zeta^2 - \rho^2)\frac{4\rho}{m} \right) E(m) \right] + \right. \\
& \left. + \beta(r_0^2(1 + \zeta^2 + (\zeta^2 - 2)\rho^2 + \rho^4) - 8\xi)K(m) \right) \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\text{out},\zeta} = \frac{\partial\varphi_{\text{out}}}{\partial\zeta} = & -\frac{GM_{\text{tor}}\zeta}{8\pi R^2\beta^2} \left(\frac{m}{4\rho}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\left(16\xi + r_0^2(-7 + \zeta^2[\zeta^2 - 6] + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2(3 + \zeta^2)\rho^2 + \rho^4) \right) E(m) - r_0^2\beta(\zeta^2 + \rho^2 - 1)K(m) \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

де $\beta = \zeta^2 + (\rho - 1)^2$, $\xi = (1 + \zeta^2)^2 + 2(\zeta^2 - 1)\rho^2 + \rho^4$.

Для знаходження компонентів гравітаційної сили у внутрішній області ми використовуємо розкладання потенціалу в степеневий ряд (12) :

$$\begin{aligned}
F_{\text{in},\rho} = \frac{\partial\varphi_{\text{in}}}{\partial\rho} = & \frac{GM_{\text{tor}}}{2R^2\pi r_0^4} \left(r_0^3 a_1 + 2a_2 r_0^2 (\rho - 1) + t_{12} r_0 \zeta^2 + \right. \\
& \left. + 2t_{22} \zeta^2 (\rho - 1) + 3a_3 r_0 (\rho - 1)^2 + 4a_4 (\rho - 1)^3 \right). \quad (15)
\end{aligned}$$

$$F_{\text{in},\zeta} = \frac{\partial\varphi_{\text{in}}}{\partial\zeta} = \frac{GM_{\text{tor}}\zeta}{\pi R^2 r_0^4} \left(b_2 r_0^2 + 2b_4 \zeta^2 + (\rho - 1)(t_{12} r_0 + t_{22} (\rho - 1)) \right) \quad (16)$$

При цьому коефіцієнти для внутрішнього потенціалу, як було зазначено вище, знаходились методом зшивки на поверхні тора із зовнішнім потенціалом. Щоб перевірити наскільки точно дані вирази описують гравітаційне поле кругового тора, ми порівнюємо їх із компонентами сили, отриманими

за "точною" формулою. Для того, щоб отримати вирази для компонент сили за інтегральним виразом потенціалу (2), ми повинні продиференціювати підінтегральні вирази за відповідними координатами:

$$F_{\text{tor},\rho} = \frac{\partial \varphi_{\text{tor}}(\rho, \zeta)}{\partial \rho} = \frac{GM_{mc}}{\pi^2 R r_0^2} \cdot \int_{-r_0}^{r_0} \int_{-\sqrt{r_0^2 - \eta'^2}}^{\sqrt{r_0^2 - \eta'^2}} \frac{\partial \phi_\rho(\rho, \zeta; \eta', \zeta')}{\partial \rho} d\eta' d\zeta' \quad (17)$$

$$F_{\text{tor},\zeta} = \frac{\partial \varphi_{\text{tor}}(\rho, \zeta)}{\partial \zeta} = \frac{GM_{mc}}{\pi^2 R r_0^2} \cdot \int_{-r_0}^{r_0} \int_{-\sqrt{r_0^2 - \eta'^2}}^{\sqrt{r_0^2 - \eta'^2}} \frac{\partial \phi_\zeta(\rho, \zeta; \eta', \zeta')}{\partial \zeta} d\eta' d\zeta'. \quad (18)$$

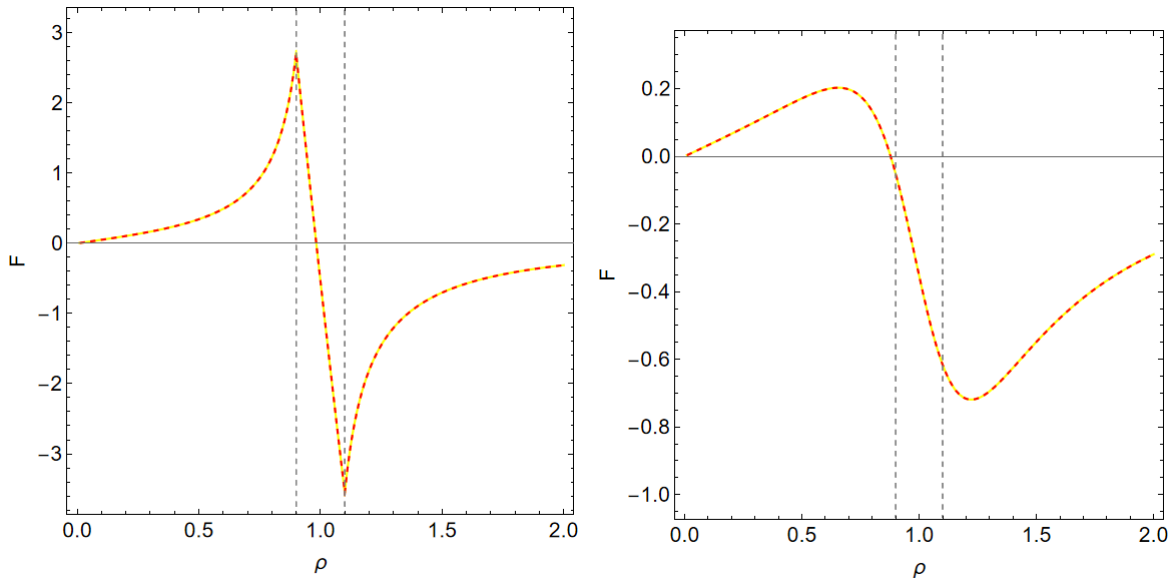


Рис. 10: Залежність гравітаційної сили тора від координати ρ : 1) $r_0 = 0.1, \zeta = 0$; 2) $r_0 = 0.1, \zeta = 0.3$; (суцільна лінія відповідає інтегральному виразу (17), штрихована - наближенням: (13)- поза об'ємом тора, (15)- всередині).

На рис.10 показані криві компонент гравітаційної сили з боку тора, отримані по наближеним формулам (15) та (13) і за інтегральним виразом (17) для різних значень ζ .

Через те, що в подальших розрахунках ми будемо використовувати наближені вирази для сил є необхідним дізнатися для них відносну похибку.

Для цього ми використовуємо загально відому формулу для відносних похибок:

$$RE(\rho, \zeta) = \left(1 - \frac{F_{integral,tor}}{F_{approx,tor}}\right)100\% \quad (19)$$

де $F_{approx,tor}$ відповідна компонента гравітаційної сили, отримана за наближеними виразами (13),(14) та (15),(16), а $F_{integral,tor}$ - за точними виразами (18) і (17). При чому для того, щоб отримати карту похибок ззовні й всередині тора спочатку вони отримуються окремо для внутрішньої та зовнішньої області, а потім просто накладаються. Так на рис.11 зображено контурні графіки відносних похибок порівняння гравітаційної сили тора для геометричного параметра $r_0 = 0.3$, що описується за інтегральними виразами для ρ (17) та ζ координати(18) та наближеними виразами для ρ - (13),(15) та ζ - (14),(16),що були отримані шляхом зшивання зовнішньої та внутрішньої сил відповідно. Максимальні значення похибок не перевищують 1%. Таким чином, ми можемо використовувати отримані наближені вирази для

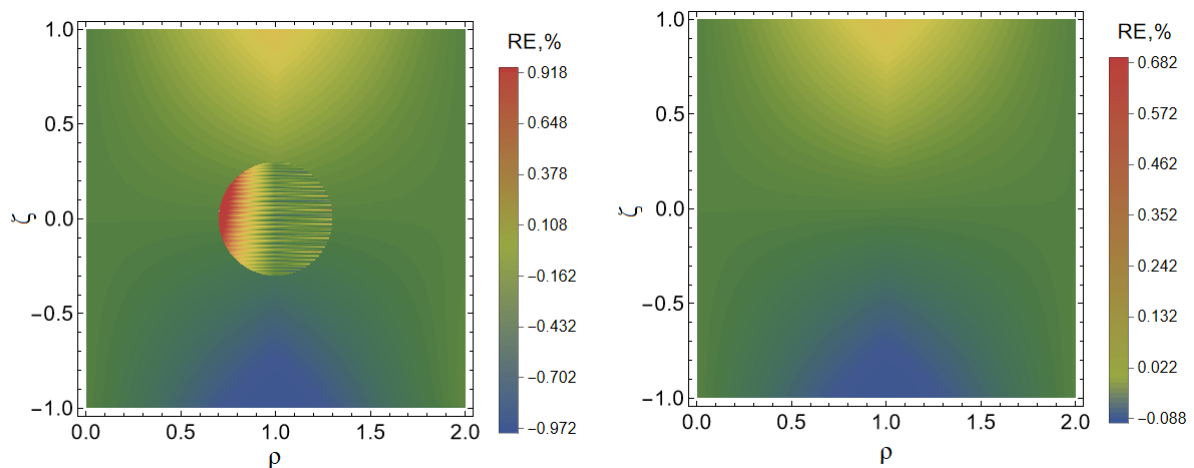


Рис. 11: Контурні графіки відносних похибок порівняння гравітаційної сили тора для геометричного параметра $r_0 = 0.3$, що описується за інтегральними виразами для ρ (17) - справа, та ζ координати(18)- зліва, та наближеними виразами для ρ - (13),(15) та ζ - (14),(16), відповідно.

дослідження динаміки пробної частинки в такому гравітаційному полі.

2.2. Окружність Лагранжа

Для побудови та класифікації орбіт в екваторіальній площині необхідно відзначити області де існують фінітні, зокрема кругові орбіти, а також область нестійкої рівноваги.

На частинку, що знаходиться в гравітаційному полі тора та центральної маси діють сили притягання у різних напрямках відповідно. З цього випливає, що є область, де сили з боку центральної маси і тором знаходять баланс - цю область за аналогією з L_1 називають кільцем (окружністю) Лагранжа [8]. Так як ця рівновага є нестійкою, то навіть невелике збурення буде вирішальним для частинки, яка буде захоплена або тором або центральною масою. У роботі [8] було показано, що рівновага сил $|F_{mc,\rho}| = |F_{0,\rho}|$, де $F_{mc,\rho}$ – радіальні компоненти сили нескінченно тонкого кільця, можна отримати наступне рівняння для визначення радіуса окружності Лагранжа для тонкого кільця ρ_L :

$$\frac{\rho_L}{1 - \rho_L} E(m_L) - \frac{\rho_L}{1 + \rho_L} K(m_L) = q\pi \quad (20)$$

де $q = \frac{M_0}{M_{mc}}$, Параметр еліптичного інтеграла m_L визначається формулою: $m_L = \frac{4\rho_L}{(\rho_L+1)^2}$. При цьому для дослідження динаміки частинки був розглянутий тільки випадок зовнішнього потенціалу тора, який замінювався потенціалом нескінченно тонкого кільця. У цій дипломній роботі враховується як зовнішня так і внутрішня область тора. Для зовнішньої області використовується більш точне наближення для потенціалу, а саме S-наближення.

Для отримання значень радіуса окружності Лагранжа, розглядається рівновага сил (13) поза тором і (15) усередині (залежно від місцеперебування частинки) з виразом для сили, яка діє зі сторони центральної маси (26).

В дірці тора ці сили діють у протилежних напрямках (див. схему

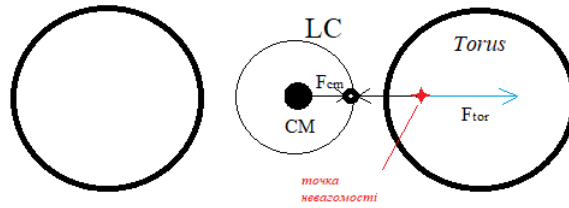


Рис. 12: Схематичне зображення дій сил. Тут центральна маса позначена як CM і кільце Лагранжа - LC, червона зірка - точка невагомості.

на рис. 12). Це справедливо аж до точки невагомості, яка знаходиться всередині об'єму тора.

Для отримання точки рівноваги ми використовуємо рівняння $|F_{out,\rho}| = |F_{0,\rho}|$; $|F_{in,\rho}| = |F_{0,\rho}|$. При цьому враховуємо, що область допустимих рішень має перебувати всередині радіуса, що відповідає точці невагомості. На радіальних відстанях більших, ніж відстань до точки невагомості, сили діють в одному напрямку і рівновага сил між центральною масою та тором неможлива. Рівняння для знаходження радіуса Лагранжа неможливо розв'язати аналітично, тому що вирази для радіальних компонент сили тора (13) і (15) досить громіздкі і виражаються через еліптичні функції. Розв'язки для радіуса кільця Лагранжа отримано чисельно і показано на рис. 13 для різного значення відношення центральної маси до маси тора (q). При цьому враховується, що допустиме рішення можливе тільки в області всередині точки невагомості, координати якої визначаються виразом (11). Бачимо, що можливе існування другого кільця Лагранжа всередині обсягу тора. Це пов'язано з тим, що гравітаційна сила з боку тора зменшується від поверхні до центру. Таким чином можлива рівновага сил з боку тора та центральної маси. Аналіз показує, що існування другого кільця Лагранжа можливе для випадку тонкого тора та його значної маси стосовно центральної маси. У побудові подальших траєкторій розглянемо окремий випадок рівного відношення маси тора до центральної маси ($q = 1$). У наступному розділі

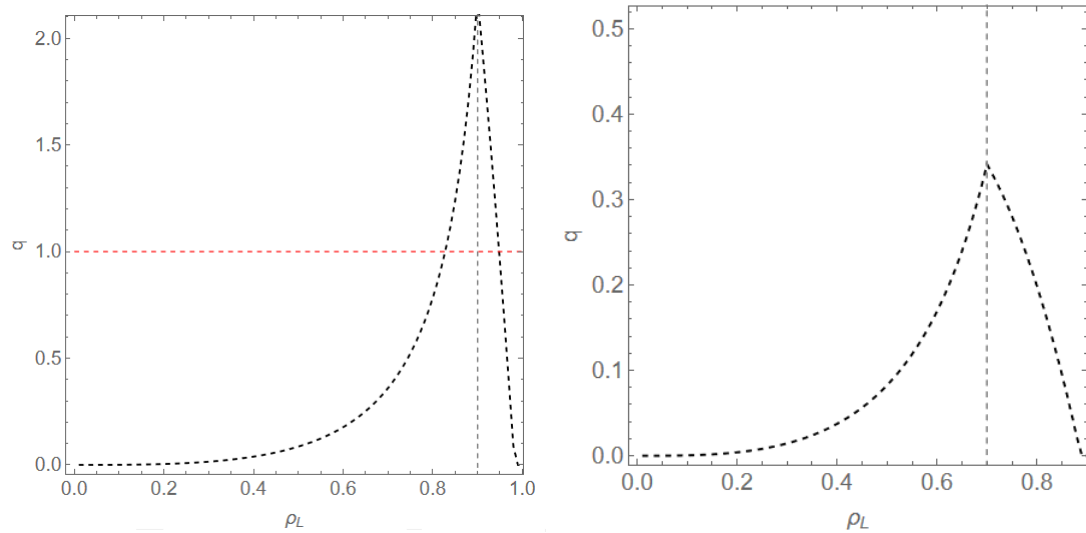


Рис. 13: Залежність радіуса Лагранжа від відношення мас q , $\zeta = 0$ для різних значень геометричного параметра: $r_0 = 0.1$ (зліва); $r_0 = 0.3$ (справа). Вертикальний пунктир позначає межі тора.

буде розглянуто траєкторії в околі кільця Лагранжа для випадку $r_0 = 0.1$.

2.3. Остання стабільна кругова орбіта (OSCO)

У роботі [8] було показано, що у зовнішній області тора існує область нестійких орбіт і, відповідно, існує остання стійка кругова орбіта OSCO (the outermost stable circular orbit). Радіус OSCO визначають за допомогою екстремумів ефективного потенціалу, який має вигляд:

$$U_{eff} = U_0 + U_{torus} + \frac{I^2}{2R\rho}, \quad (21)$$

де $U_0 = -\frac{GM_0}{R\rho}$ – потенціальна енергія центральної маси, $U_{torus} = -\varphi_{torus}$ – потенціальна енергія тора, а $I = I_\zeta$ – кутовий момент частинки на одиницю маси. При цьому потенціал тора (φ_{torus}) задається інтегральним виразом (2). На рис. 14 показано приклади кривих ефективного потенціалу для тора з різним радіусом його поперечного перерізу (ліворуч) і для різного значення моменту частинки (праворуч). З рис. 14 (праворуч) видно, що існують два мінімуми. При збільшенні моменту перший мінімум (ближче до центральної

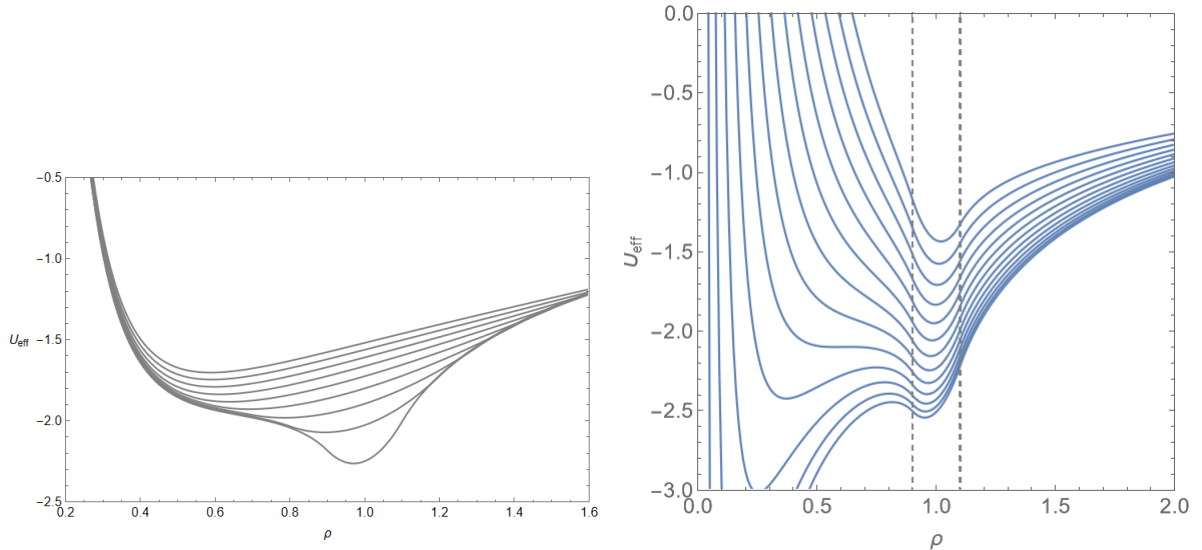


Рис. 14: Приклади залежності ефективного потенціалу від ρ : при різних значеннях товщин тора (нижня крива відповідає $r_0 = 0.1$,кожна наступна відповідає збільшенню цього геометричного параметра на 0.1, остання крива відповідає $r_0 = 0.9$), $I = 0.68$ (зліва) і для $r_0 = 0.1$ при різних значеннях моменту імпульсу (перша крива відповідає $I = 0.3$,кожна наступна відповідає збільшенню цього моменту імпульсу на 0.1.)

маси в області діри тора) зникає, що відповідає OSCO. При цьому другий мінімум зберігається і він розташований усередині об'єму тора. Оскільки мінімуми ефективного потенціалу відповідають стійким круговим орбітам, то це означає, що всередині об'єму тора можливе існування кругових орбіт. Існування замкнутих фінітних орбіт усередині об'єму тора становить особливий інтерес. Такі траєкторії частинок буде розглянуто нижче.

Екстремуми ефективного потенціалу знаходяться з умови $dU_{eff}/d\rho = 0$. Враховуючи (21) і відповідні вирази для радіальної компоненти сили у внутрішній та зовнішній області, умову для екстремумів можна записати у загальному вигляді:

$$I^2 = W(\rho), \quad (22)$$

де

$$W(\rho) = \rho + \frac{GM\rho}{16\pi R(\rho-1)^2} \sqrt{\frac{m}{\rho}} \times \left((8(\rho^2-1) + r_0^2(1+\rho^2))E(m) - (8+r_0^2)K(m) \right). \quad (23)$$

Тепер рівняння для OSCO може бути отримано з умови $dW(\rho)/d\rho = 0$, що приводить до наступного рівняння:

$$1 + \frac{GM\rho}{4\pi R\sqrt{\frac{m}{\rho}}\alpha^3} \left(-16\alpha + r_0^2(-2 - 7\rho^2 + \rho^4) E(m) \right) - (-1 + \rho)^2 (r_0^2(-2 + \rho^2) - 16\alpha) K(m) = 0 \quad (24)$$

де $\alpha = \rho^2 - 1$. Як бачимо з рис. 15 у нас є два дійсних розв'язки, тобто існує дві OSCO у "дірці" та зовні тора. Зрозуміло що вони будуть існувати не для всіх r_0 , а саме вони будуть зникати, коли тор починає заходити за ці дві точки(тобто коли $r_0 > 0.4$). Координати точок перетину різні для

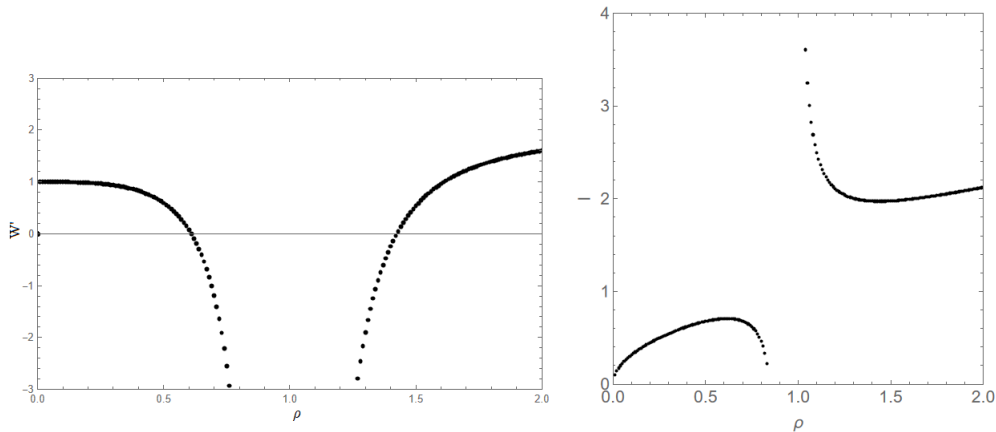


Рис. 15: Зліва: залежність похідної функції W від радіальної координати ρ для $r_0 = 0.1$; справа: залежність моменту імпульсу від координати для $r_0 = 0.1$. Обидва випадки відповідають $q = 1$.

тора з різним геометричним параметром. У таблиці (1) надані значення цих точок.

r_0	1-й перетин	2-й перетин
0.1	0.609344	1.4244
0.2	0.61168	1.42965
0.3	0.615731	1.438

Табл. 1: Значення радіальної координати, яка відповідає останній стійкій круговій орбіті (ρ_{osco}) для різних значень геометричного параметра r_0

Розділ 3. Класифікація траєкторій частинок

Для дослідження динаміки частки в системі тор і центральна маса запишемо рівняння руху:

$$\begin{cases} \rho'' = F_{\text{tor},\rho} + F_{0,\rho}, \\ \zeta'' = F_{\text{tor},\zeta} + F_{0,\zeta}, \end{cases} \quad (25)$$

де вектор $\mathbf{F}_0 = (F_{0,\rho}, F_{0,\zeta})$ – сила, яка діє на частинку зі сторони центральної маси, $\mathbf{F}_{\text{tor}} = (F_{\text{tor},\rho}, F_{\text{tor},\zeta})$ – зі сторони тора. При цьому сила нормована на масу частинки. Ліва частина є другою похідною за відповідними координатами. Вираз для F_0 не залежать від того всередині чи ззовні знаходиться частинка і має наступний вигляд:

$$F_{0,\rho} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho} = \frac{GM_0 \rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (26)$$

$$F_{0,\zeta} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} = \frac{GM_0 \zeta}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (27)$$

Зауважимо, що розмірний множник $R = 1$.

Наявність двох кіл Лагранжа може призводити до особливостей в динаміці частинки в такому гравітаційному полі. Як зазначалося вище, динаміка була розглянута раніше лише випадку зовнішнього гравітаційного

потенціалу тора. При цьому зовнішній потенціал був замінений потенціалом нескінченно тонкого кільця [8]. У цій дипломній роботі та, зокрема, у цьому розділі, ми не тільки використовуємо більш точний вираз для зовнішнього потенціалу тора (S-наближення), але також і враховуємо внутрішній потенціал тора. Наприклад, якщо частинка запускається із зовнішньої області тора ми використовуємо в рівняннях руху відповідні компоненти гравітаційної сили (13),(14). Як тільки частка досягає поверхні тора і заходить всередину його об'єму, за допомогою умовного циклу компоненти гравітаційної сили з боку тора замінюються на (15),(16). Код для розрахунку траєкторії частинок був написаний на Wolfram Mathematica 13. При цьому також контролюється положення кілець Лагранжа, положення останньої кругової стійкої орбіти. (OSCO). Також будуються криві ефективного потенціалу для вибраних значень параметрів системи та повна енергія, що відповідає початковим умовам запуску пробної частинки.

3.1. Екваторіальна площина

Оскільки кільця Лагранжа перебувають в екваторіальній площині, дослідження орбіт у цьому разі представляє особливий інтерес. При цьому ми задаємо початкові умови таким чином, щоб розглянути різні класи орбіт: у зовнішній області, поряд з кільцями Лагранжа та в області всередині об'єму.

Орбіти в околі кілець Лагранжа

Всі розрахунки для орбіт отримані в системі одиниць $R = 1, M_{tor} = 1, G = 1, q = 1$. Будемо розглядати траєкторії частинки в околі кілець Лагранжа для $r_0 = 0.1$. Спочатку отримаємо різні типи траєкторій при одній швидкості, а саме $V_y(0) = 1$. В області радіусу OSCO існують кругові орбіти, які відповідають мінімуму ефективного потенціалу. Це узгоджується з результатом, отриманим у роботі [8], де зовнішній потенціал тора замінювався

потенціалом нескінченно тонкого кільця. Також існують орбіти типу розетки які починаються із заданої координати і йдуть усередину, приклади яких показані на рис. 16.

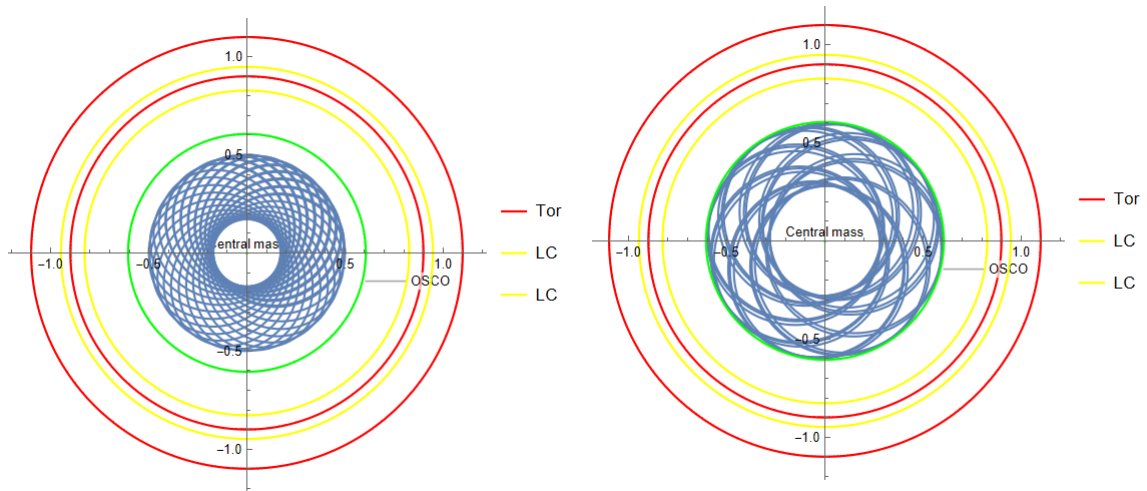


Рис. 16: Траєкторії руху пробної частинки для різних початкових умов: $V_\rho(0) = 1, \rho_0 = 0.5$ (зліва); $V_\rho(0) = 1, \rho_0 = 0.6$ (справа). Тут і у наступних малюнках червоними колами позначені межі об'єму тора; жовтим кольором позначені кільця Лагранжа; зеленим - коло, що відповідає останнім круговим стійким орбітам (OSCO).

Чисельний розв'язок рівняння для радіуса кільця Лагранжа для цього випадку: $L_{out} \approx 0.828; L_{in} \approx 0.948$. Бачимо на рис.(17), що коли початкові умови відповідають $L_{out} \leq \rho_0 \leq (1 - r_0)$, траєкторія частинки охоплює область від кільця Лагранжа до кінця тора; коли $(1 - r_0) \leq \rho_0 \leq L_{in}$, траєкторія щільно охоплює внутрішню частину тора, повністю його охоплюючи; коли $L_{in} \leq \rho_0 \leq (1 + r_0)$ - у нас трапилась кільцева орбіта, після якої орбіти рухаються в напрямку границі тора не охоплюючи весь об'єм тора, а ніби помаленьку займають простір зі збільшенням значення моменту імпульсу, причому тепер траєкторія не заходить за межу L_{in} .

Коли $\rho_0 \geq (1 + r_0)$ частинка рухається у сторону тора і може його перетинати (рис.18). З рис.18 можна побачити, що незважаючи наскільки далеко від тора частинка починає рухатись, вона всередині тора зупиняється на одному з кільця Лагранжа. Через це з'являються орбіти схожі на 'арахіс',

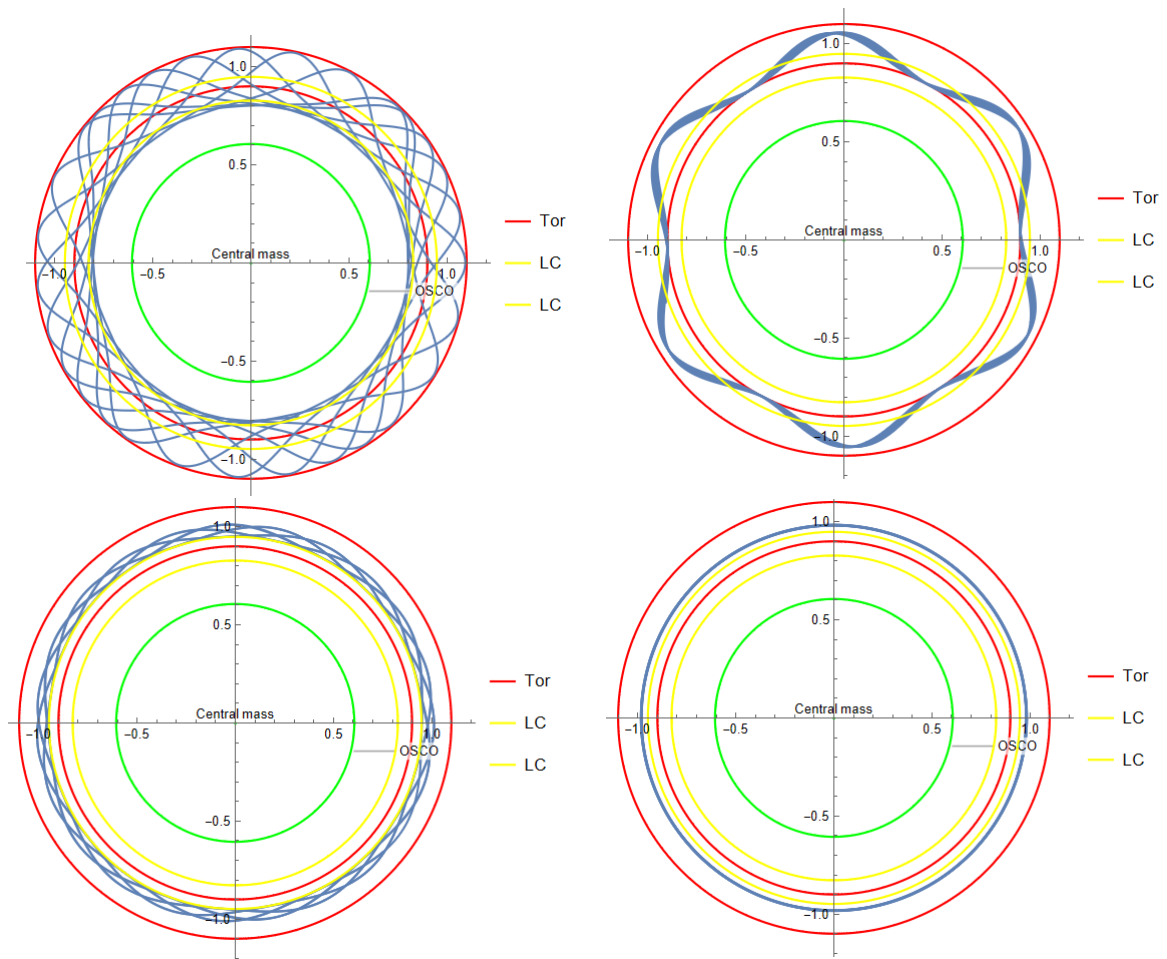


Рис. 17: Траєкторії пробної частинки для початкової швидкості $V_\rho(0) = 1$:
 1) $\rho_0 = 0.8$; 2) $\rho_0 = 0.9$; 3) $\rho_0 = 0.95$; 4) $\rho_0 = 0.98$

бо мають звуження з двох сторін де вони заходять у тор (3-я тр. на рис.18). З цікавих орбіт також необхідно зазначити орбіту яка з'являється між OSCO і L_{out} - рис.19. Ця орбіта також звужується, коли заходить усередину тора, але це відбувається тільки з одного боку, тому це на вигляд схоже на "пелюстки".

Для цієї швидкості ($V_\rho(0) = 1$) було знайдено 2 кругові орбіти, одна всередині тора, інша - ззовні. Причому орбіта ззовні (4-а тр.на рис.18) залишається такою для всіх значень r_0 . Це не стосується внутрішньої орбіти (вона різна для різних товщин тора), але її зміщення мінімальне (так для $r_0 = 0.1$ величина $\rho_0 = 0.98$, а для $r_0 = 0.2$ $\rho_0 = 0.93$). Варто зазначити, що і при зміні швидкості для одного і того самого r_0 зсув кругової орбіти досить малий. Щоб мати точну впевненість у тому, що кругова орбіта не прецесує

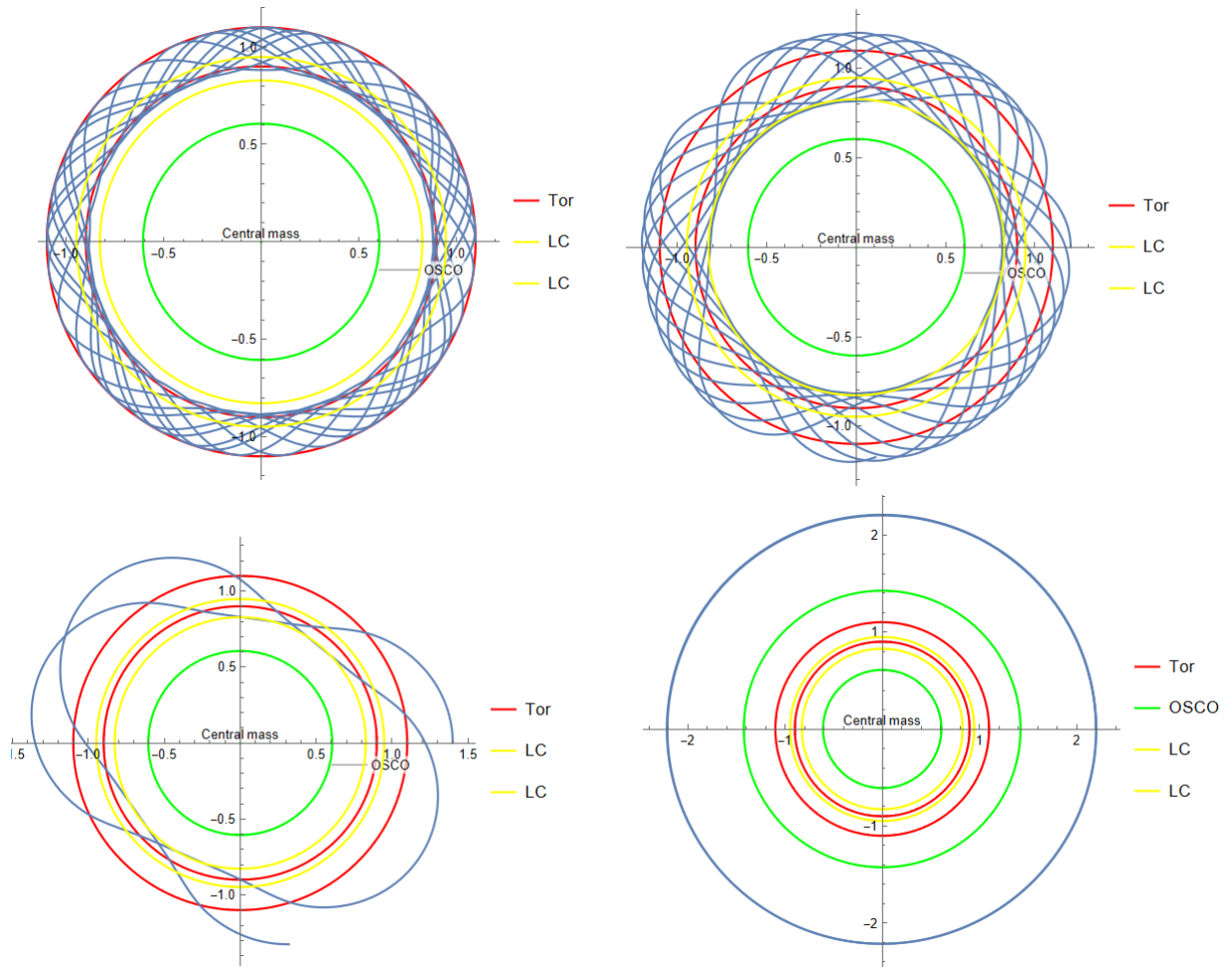


Рис. 18: Траєкторії пробної частинки для початкових умов: 1) $V_\rho(0) = 1, \rho_0 = 1.1$ 2) $V_\rho(0) = 1, \rho_0 = 1.2$; 3) $V_\rho(0) = 1.2, \rho_0 = 1.4$; 4) $V_\rho(0) = 1, \rho_0 = 2.2$.

під час розрахунку було задано велику кількість ітерацій, що підтверджує те, що вони дійсно являються круговими.

Трапляються нестабільні кругові орбіти, які починають розкручуватись і вилітати в бік тора. Це трапляється коли енергія системи припадає на мінімум ефективного потенціалу, але при цьому орбіта виходить за межі OSCO.

Кругові орбіти існують не для всіх значень моменту імпульсу, бо при деяких значеннях ефективний потенціал набагато менше енергії системи, до того ж ефективний потенціал згладжується при збільшенні товщини тора. Так, наприклад на рис. 20 показано, що мінімум ефективного потенціалу при збільшенні моменту частинки зміщується в бік центральної маси і стає

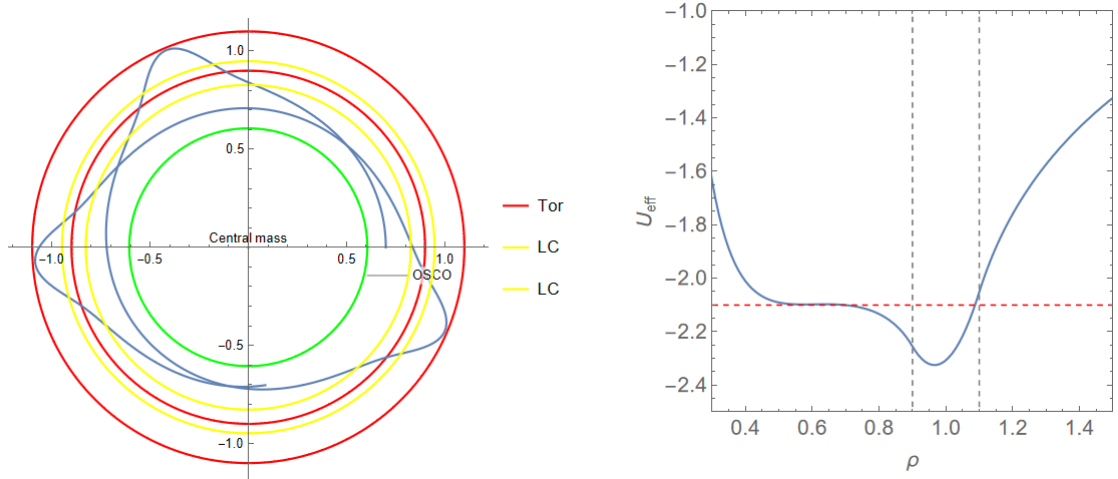


Рис. 19: Зліва: траєкторія частинки при $\rho_0 = 0.7$, $V_\rho(0) = 1$, $r_0 = 0.1$; Справа: графік ефективного потенціалу для даного випадку

досить глибоким. Щоб сісти за повною енергією в мінімум ефективного потенціалу, повна енергія за модулем має бути досить високою, що фактично недосяжно. Тому для цього випадку кругових орбіт не існує.

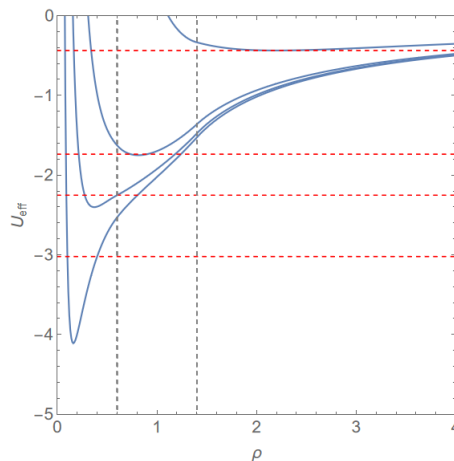


Рис. 20: Графік ефективного потенціалу для випадку $r_0 = 0.4$; $I = 0.4, 0.6, 0.8, 2.2$, красний пунктир - повна енергія системи

Було помічено, коли орбіти є у "дірці" тора, то їх немає з зовнішньої сторони тора і навпаки. Деякі з кругових орбіт, які вдалося отримати зображені на рис. 21.

Зовнішня область

На рис. представлені типові орбіти ззовні тора, які не перетинають його

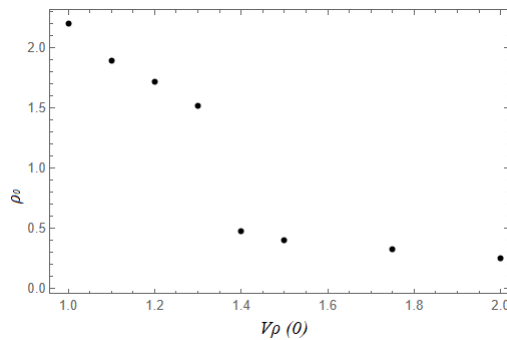


Рис. 21: Початкові умови для $\rho_0, V_\rho(0)$ при яких отримуємо кругові орбіти для геометричного параметра $r_0 = 0.1$

тіло. Якщо енергія системи досить мала, то ми бачимо випадок 1 на рис., а при збільшенні випадок 2 рис., тобто вона стає менш щільною, з'являється "вільна" зона між центральною масою і орбітою. Також бачимо що рух частинки направлений у сторону центральної маси. Так буде відбуватися допоки не зустрінеться кільцева орбіта. Вона слугує місцем де частинка змінює напрямлення свого руху на протилежний. Через те, що тут немає кільця Лагранжа то різноманітність орбіт для торів більше ніж $r_0 = 0.1$ менше.

Внутрішня область

Як бачимо, тут можна спостерігати зміну напрямку руху частинки після кругової орбіти (3-я і 4-а орбіти на рис.23). Також бачимо з 1-ї орбіти на рис.23, що орбіта може займати весь простір всередині тора, але це залежить і від початкових координат частинки і від швидкості. Так на 2-й орбіті задана та ж швидкість, але початок координат інший. Через це між тором і орбітою утворюється "вільний" простір. Якщо ж ми задаємо координати близько до зовнішньої частини тора, то вона може перетинати.

Орбіти, що перетинають об'єм тора

Як писалося вище, якщо частинка задається близько до зовнішньої частини тора з будь-якого боку, то вона може створювати орбіту, яка

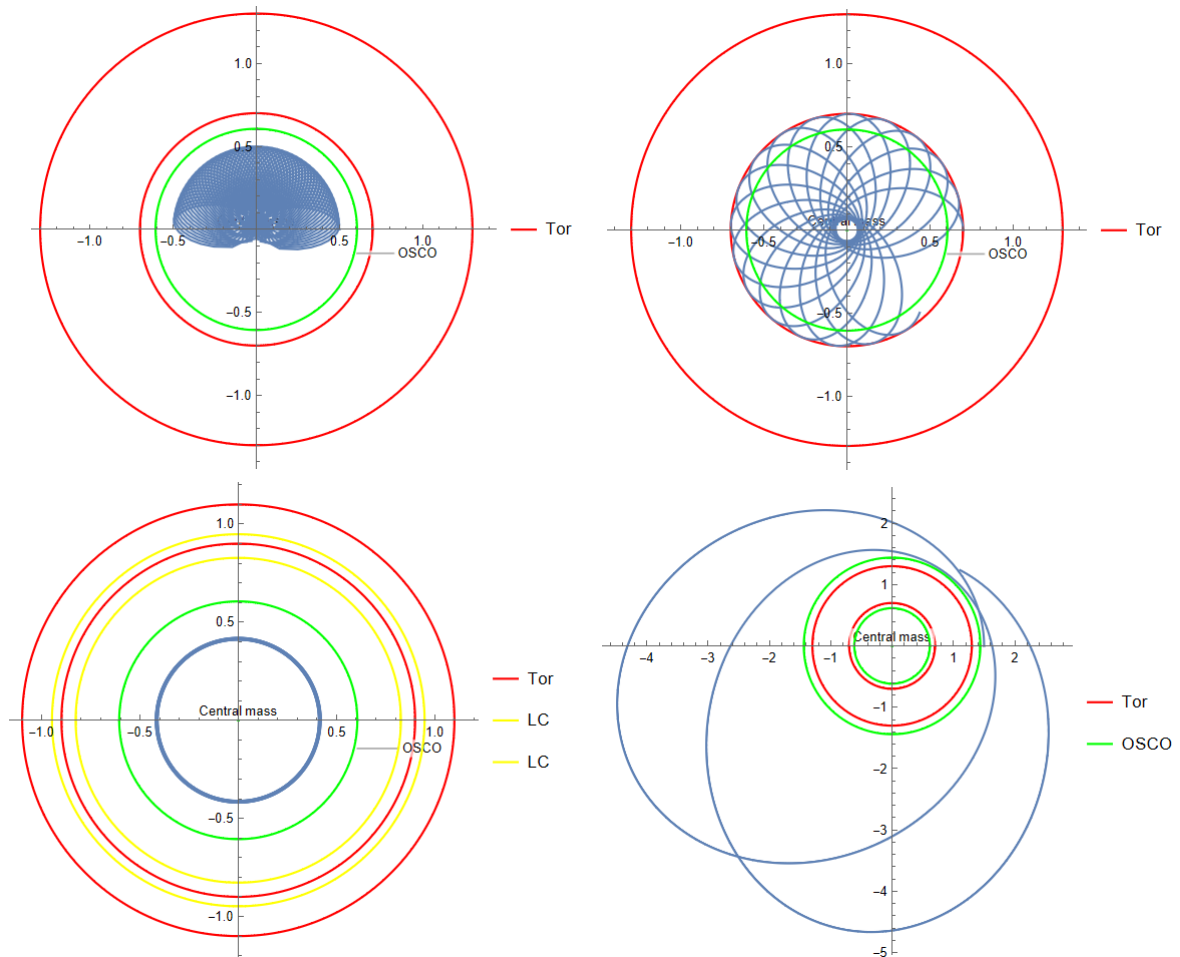


Рис. 22: Траєкторії частинки для тора з $r_0 = 0.3$: 1) $V_\rho(0) = 0.5, \rho_0 = 0.5$; 2) $V = 0.5, \rho_0 = 0.7$ 4) $V_\rho(0) = 1.5, \rho_0 = 1.5$; та для $r_0 = 0.1$: 3) $V_\rho(0) = 1.5, \rho_0 = 0.42$

перетинає тор. Такий випадок - 1-ша, 2-га і 5-та орбіти на рис.24. Траєкторії 3 та 4 на рис.24 показують, що бувають випадки, коли частинка влітає у тор із зовнішньої області.

Остання орбіта на рис.24 є прикладом нестійкої орбіти, яка немає чіткої форми. Такі орбіти трапляються в обох зовнішніх областях тора. На рис.25 така ж нестійка орбіта та її ефективний потенціал. Часто такі орбіти зустрічаються перед або після круговою орбітою. Трапляються також випадки, коли орбіта мала б бути круговою (згідно з їх ефективного потенціалу і повної енергії системи), але вона по координатах виходить за OSCO і через це стає нестійкою.

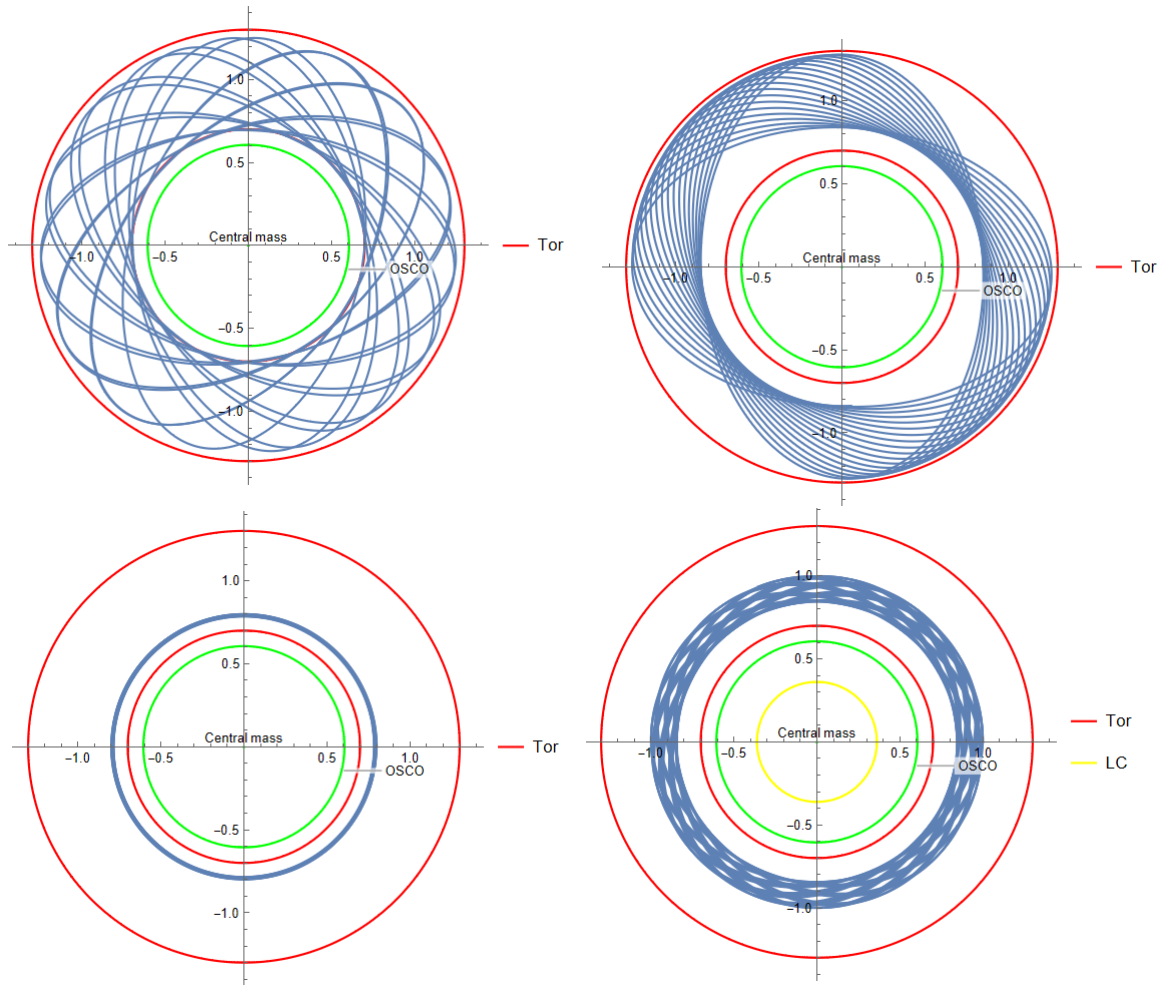


Рис. 23: Траєкторії частинки для тора $r_0 = 0.3$: 1) $V_\rho(0) = 1.5$, $\rho_0 = 0.7$; 2) $V_\rho(0) = 1.5$, $\rho_0 = 0.8$; 3) $V_\rho(0) = 1$, $\rho_0 = 0.8$; 4) $V_\rho(0) = 1$, $\rho_0 = 1$

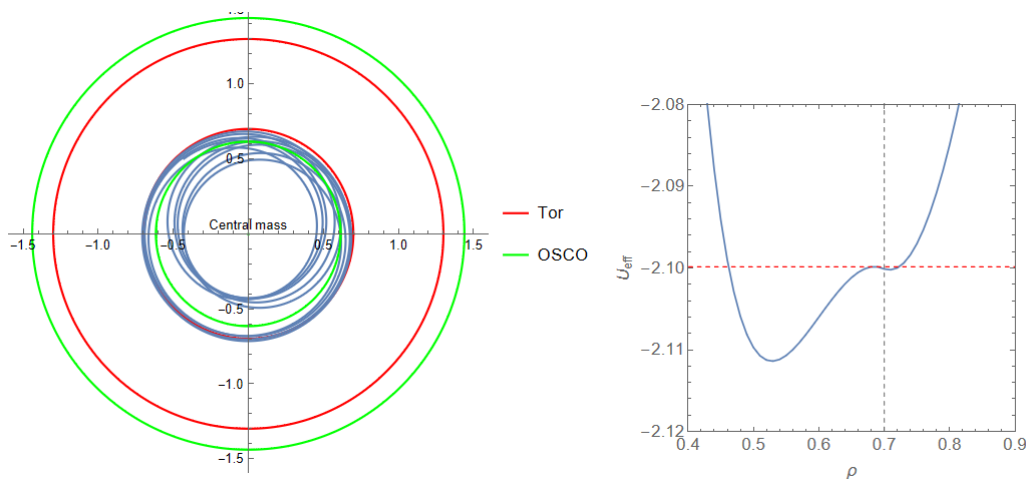


Рис. 25: Зліва: траєкторія частинки при $V_\rho(0) = 1$, $\rho_0 = 0.7$, $r_0 = 0.3$; Справа: графік ефективного потенціалу для даного випадку

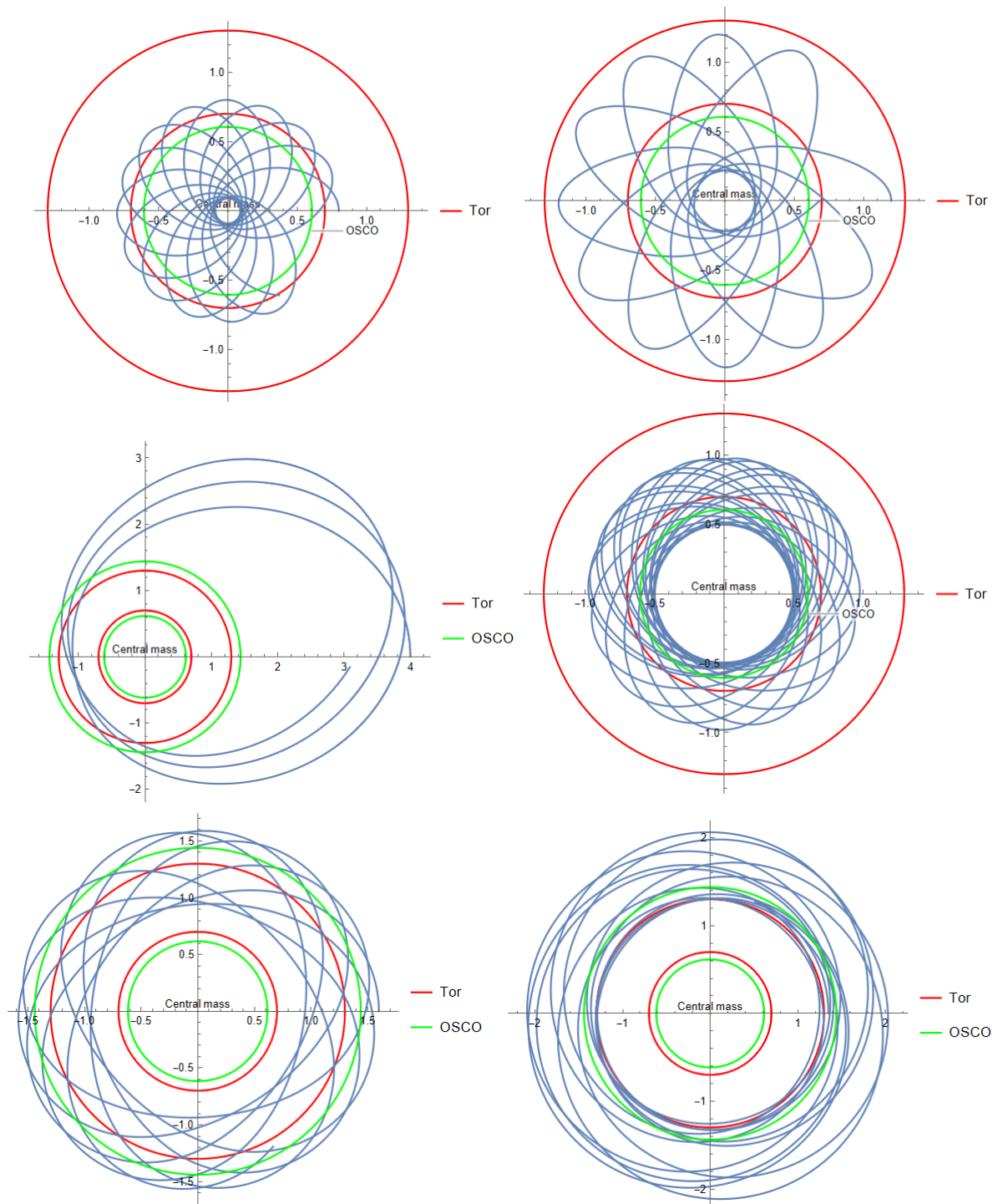


Рис. 24: Траєкторії частинки для тора $r_0 = 0.3:1) V_\rho(0) = 0.5, \rho_0 = 0.8; 2) V_\rho(0) = 0.5, \rho_0 = 1.2; 3) V_\rho(0) = 0.5, \rho_0 = 4; 4) V_\rho(0) = 1.5, \rho_0 = 0.5; 5) V_\rho(0) = 1, \rho_0 = 1.6; 6) V_\rho(0) = 1, \rho_0 = 1.9$

3.2. Меридіональна площина

Більшість траєкторій у меридіональній площині хаотичні (наприклад 6-та тр. на рис.26). На рис.26 1-ше і 2-ге зображення типові орбіти для осесиметричного потенціалу "чашка". Зазначимо, на 2-ому зображенні

частинка починає рух всередині тора. Якщо збільшити початкові умови для координати ζ то ми отримаємо 5-ту орбіту на рис.26. Якщо ж збільшити початкові умови для ρ то ми отримаємо 3-ту орбіту на рис.26. Також була отримана замкнена кругова орбіта навколо усього тора така як на рис.9 при тих же початкових умовах. Виявити ще замкнені орбіти не вийшло.

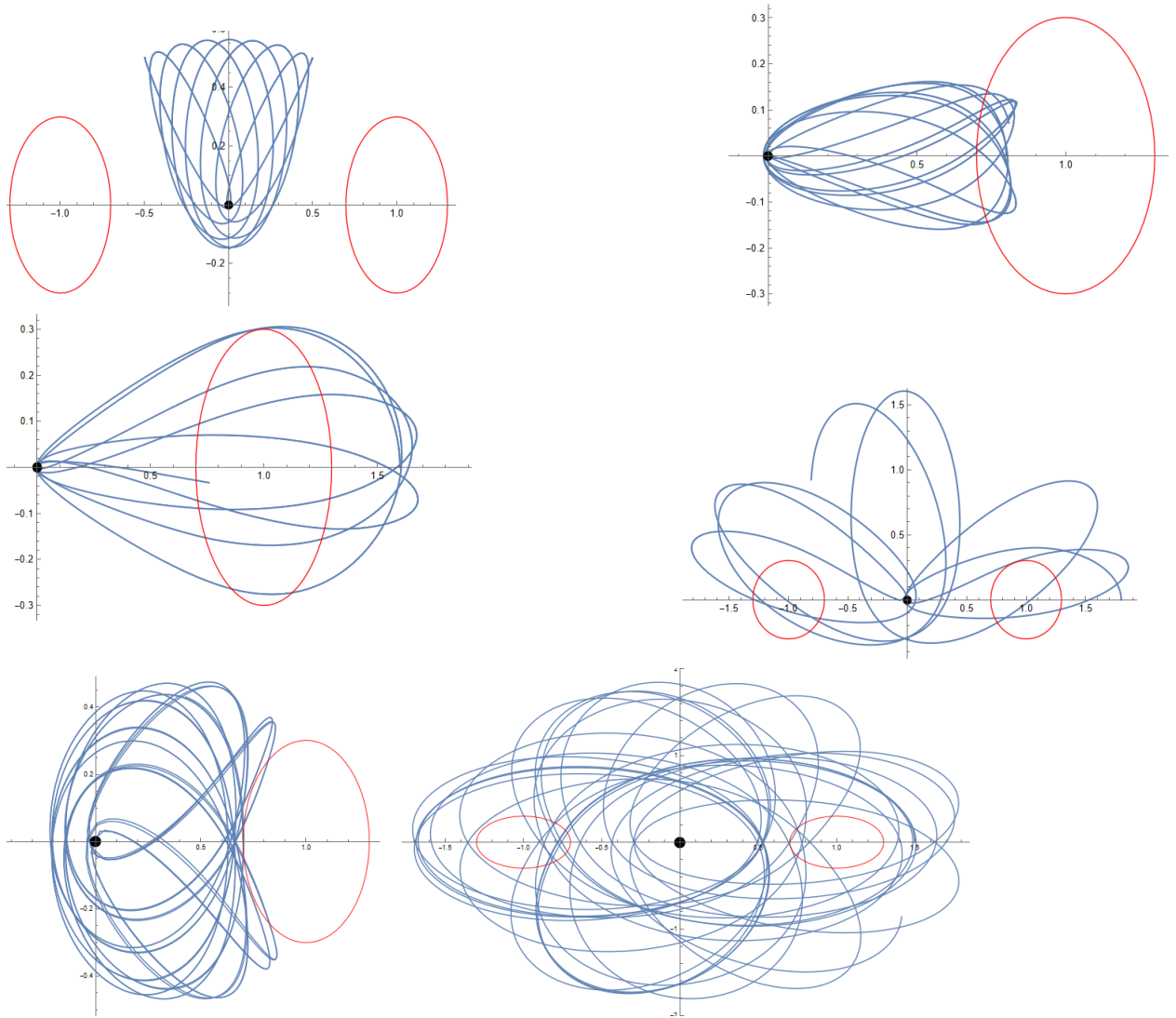


Рис. 26: Орбіти частинки для випадку $q = 1, r_0 = 0.3 : 1) V_z(0) = 0.5; \rho_0 = 0.5$ 2) $V_z(0) = 0.4; \rho_0 = 0.8$ 3) $V_z(0) = 0.4; \rho_0 = 1.6$; 4) $V_z(0) = 1.8; \rho_0 = 1.8$, 5) $V_z(0) = 1; \rho_0 = 0.7$, 6) $V_z(0) = 1; \rho_0 = 1.5$; Центральна маса розташована в точці $(0,0)$, координати тора $(\pm 1, 0)$

Висновки

Цю роботу присвячено дослідженню динаміки частинки в гравітаційному полі центральної маси й однорідного кругового тора. Основні результати, отримані в даній роботі:

1. Отримано нові наближені вирази для компонент гравітаційної сили з боку однорідного кругового тора для зовнішньої та внутрішньої областей. Побудовано графіки відносних похибок при порівнянні наближених та інтегральних виразів компонент гравітаційної сили. Показано, що максимальні значення відносних похибок доволі низькі й не перевищують 1 % (всередині тора на його границі).

2. Показано, що в гравітаційному полі тонкого тора і центральної маси існує друге кільце Лагранжа (всередині об'єму тора). Побудовано залежність радіуса Лагранжа від відношення мас.

3. Досліджено область існування нестійких орбіт і отримано рівняння для радіуса останньої стійкої кругової орбіти (OSCO), яке було вирішено чисельно.

4. Розроблено код для розв'язання рівнянь руху пробної частинки на підставі отриманих наближених виразів для гравітаційної сили тора у внутрішній і зовнішній областях. Проведено класифікацію траєкторій залежно від початкових умов і відповідно до форми ефективного потенціалу системи в екваторіальній та меридіональній площині тора.

5. Показано, що за певних початкових умов можливе існування стійких кругових орбіт по обидва боки від перерізу тора. Отримано умови, за яких орбіта завжди перебуває всередині об'єму тора або охоплює його тіло. А також отримано орбіти, які перетинають його об'єм.

Список використаних джерел

- [1] Баннікова О. Ю. Тороїдальні структури в астрофізичних об'єктах: дис. ... д-ра фіз.-мат. наук 01.03.02 // О. Ю. Баннікова – Х., 2019. – 337 с.
- [2] Garcia-Burillo S., Combes F., Ramos Almeida C., Usero A., Krips M., Alonso-Herrero, A., Aalto, S., et al. ALMA Resolves the Torus of NGC 1068: Continuum and Molecular Line Emission // *Astrophys. J. Letters*. 2016. Vol. 823, Issue 1. P. L12–L18.
- [3] Bournaud F., Combes F. Formation of polar ring galaxies // *Astron. & Astrophys.* 2003. Vol. 401. P. 817–833.
- [4] Brook C.B., Governato F., Quinn T., Wadsley J., Brooks A.M., Willman B. et al. The Formation of Polar Disk Galaxies // *Astrophys. J.* 2008. Vol. 689, Is. 2. P. 678–686.
- [5] Whitmore B.C., Lucas R.A., McElroy D.B.; Steiman-Cameron T.Y., Sackett P. D., Olling R.P. New Observations and a Photographic Atlas of Polar-Ring Galaxies // *Astron. J.* 1990. Vol. 100. P. 1489–1522
- [6] Bannikova E.Yu., Vakulik V.G., Shulga V.M. Gravitational potential of a homogeneous circular torus: a new approach // *MNRAS*. 2011.-Vol.411.- P.557-564
- [7] Bannikova E.Yu, Vakulik V.G., Sergeev A.V. N-body simulation of a clumpy torus: application to active galactic nuclei // *MNRAS*. – 2012.– Vol.424.– P.820-824
- [8] Bannikova E.Yu, Sergeev A.V., Akerman N.A., Berczik P.P., Ishchenko and Capaccioli M. Dynamical model of obscuring clumpy torus in AGNs:

- I. Velocity and dispersion maps for interpretation of ALMA observations // MNRAS. – 2021. – Vol.503. – P.1459 – 1472
- [9] Moiseev A.V., Smirnova K.I., Smirnova A.A., Reshetnikov V.P. A new catalogue of polar-ring galaxies selected from the Sloan Digital Sky Survey // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2011. Vol. 418, Issue 1. P. 244–257.
- [10] Tristram K.R.W., Meisenheimer, K.; Jaffe, W. et al. Resolving the complex structure of the dust torus in the active nucleus of the Circinus galaxy // Astron. & Astrophys. 2007. Vol. 474. P. 837–850.
- [11] Imanishi M., Nakanishi K., Izumi T., Wada K. ALMA Reveals an Inhomogeneous Compact Rotating Dense Molecular Torus at the NGC 1068 Nucleus // Astrophys. J. Letters. 2018. Vol. 853, Issue 2. P. L25–L32.
- [12] R.A. Broucke, Antonio Elipe, The Dynamics of Orbits in a Potential Field of a Solid Circular Ring // Regul. Chaotic Dyn., 10:2 (2005), 129–143
- [13] Hure J.-M., Trova A., Karas V., Lesca C. Interior potential of a toroidal shell from pole values // Mon. Not. R. Astron. Soc.- 2019. - Vol. 486. P. 5656–5669.
- [14] Angelo Albert, Claudio Vidal Singularities and Dynamics Aspects of a Particle in a Gravitational Field of a Central Punctual Body Surrounded by a Solid Circular Ring // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 18(1): 1-32 (2019).
- [15] Kondratyev B.P., Trubitsina N.G. Laplace series expansion of the internal potential of a homogeneous circular torus // Technical Physics. - 2010. - Vol. 55. - P. 22-25.
- [16] Krolik, J. H., Begelman, M. C. Molecular tori in Seyfert galaxies - Feeding the monster and hiding it // Ap.J. -1988. - Vol.329. - P.702–711.

- [17] Reshetnikov V.P., Mosenkov A.V. New candidates to polar-ring galaxies from the Sloan Digital Sky Survey // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2019. Vol. 483, Issue 2. P. 1470–1480.
- [18] Brosch N. The nature of Hoag’s object - The perfect ringed galaxy // *Astron. & Astrophys.* 1985. Vol. 153. P. 199– 206.
- [19] Riemann B. Collected papers, 1948
- [20] Jaffe W., Meisenheimer K., Röttgering H.J.A., Leinert Ch., Richichi A., Chesneau O., Fraix-Burnet D., Glazeborg-Kluttig A., Granato G.-L., Graser U., Heijligers B., Köhler R., Malbet F., Miley G. K., Paresce F., Pel J.-W., Perrin G., Przygodda F., Schoeller M., Sol H., Waters L. B. F. M., Weigelt G., Woillez J., and de Zeeuw P. T. The central dusty torus in the active nucleus of NGC 1068 // *Nature*. 2004. Vol. 429, Issue 6987. P. 47–49.
- [21] Schartmann M., Meisenheimer K., Camenzind M., et al. Towards a physical model of dust tori in Active Galactic Nuclei // *A&A.* – 2005. –Vol. 437. – P. 861-881.
- [22] Shakura, N. I., Sunyaev, R. A. Black Holes in Binary Systems. Observational Appearance // *A&A.* – 1973. – Vol. 24. – P. 337-355.
- [23] Schneider P. Extragalactic astronomy Extragalactic Astronomy and Cosmology // P. Schneider — Berlin: Springer. –2006. – 627 p.
- [24] Gravity Collaboration, Sturm E., Dexter J., Pfuhl O., Stock M.R., Davies R. I., et al. Spatially resolved rotation of the broad-line region of a quasar at sub-parsec scale // *Nature*. 2018. Vol. 563. P. 657–660
- [25] 216. Schmitt H. R., Antonucci R. R. J., Ulvestad J. S., Kinney A. L., Clarke C. J., and Pringle J. E. Testing the Unified Model with an Infrared-selected

Sample of Seyfert Galaxies // *Astrophys. J.* 2001. Vol. 555, Issue 2. P. 663–672.

- [26] Urry C., M., Padovani, P. Unified Schemes for Radio-Loud Active Galactic Nuclei // *PASP.* – 1995. – Vol. 107. – P. 803-845.
- [27] Hoag A.A. A peculiar object in Serpens // *Astron. J.* 1950. Vol. 55. P. 170.
- [28] Antonucci R.R.J., Miller J.S. Spectropolarimetry and the nature of NGC 1068 // *Astrophys. J.* 1985. Vol. 297. P. 621–632.
- [29] J-M Huré, B Basillais, V Karas, A Trova, O Semerák The exterior gravitational potential of toroids// *Mon. Not.R. Astron. Soc.*, 2020, Vol. 494, P.5825–5838
- [30] Beckmann V., Shrader C.R. *Active Galactic Nuclei.* Wiley-VCH Verlag GmbH, 2012. 350 p.

Додаток

Таблиця 1. Коефіцієнти степеневого ряду для внутрішнього потенціалу тора для різних значень r_0 , отриманих методом зшивання [8].

Коеф.	Геометричний параметр r_0								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
a_1	-0.33798	-0.53651	-0.68154	-0.79129	-0.87439	-0.93587	-0.97906	-1.00628	-1.01928
a_2	-0.98002	-0.93543	-0.87773	-0.81171	-0.74107	-0.66865	-0.59677	-0.52739	-0.46224
b_2	-1.00411	-1.01086	-1.01970	-1.02892	-1.03759	-1.04495	-1.05030	-1.05299	-1.05237
a_3	0.02392	0.04364	0.05781	0.06608	0.06853	0.06550	0.05753	0.04525	0.02938
t_{12}	0.02550	0.05329	0.08404	0.11791	0.15454	0.19323	0.23295	0.27238	0.30991
a_4	-0.00182	-0.00785	-0.01610	-0.02576	-0.03580	-0.04535	-0.05371	-0.06036	-0.06495
b_4	0.00061	0.00131	0.00308	0.00570	0.00922	0.01362	0.01880	0.02453	0.03045
t_{22}	-0.00122	-0.00812	-0.01948	-0.03681	-0.06076	-0.09157	-0.12900	-0.17213	-0.21931