

К-14038  
П267046

К-14038

# ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



№ 83

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 37

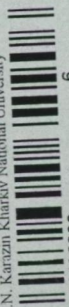


ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

ОБЯЗАТЕЛЬНЫЙ  
ЭКЗЕМПЛЯР

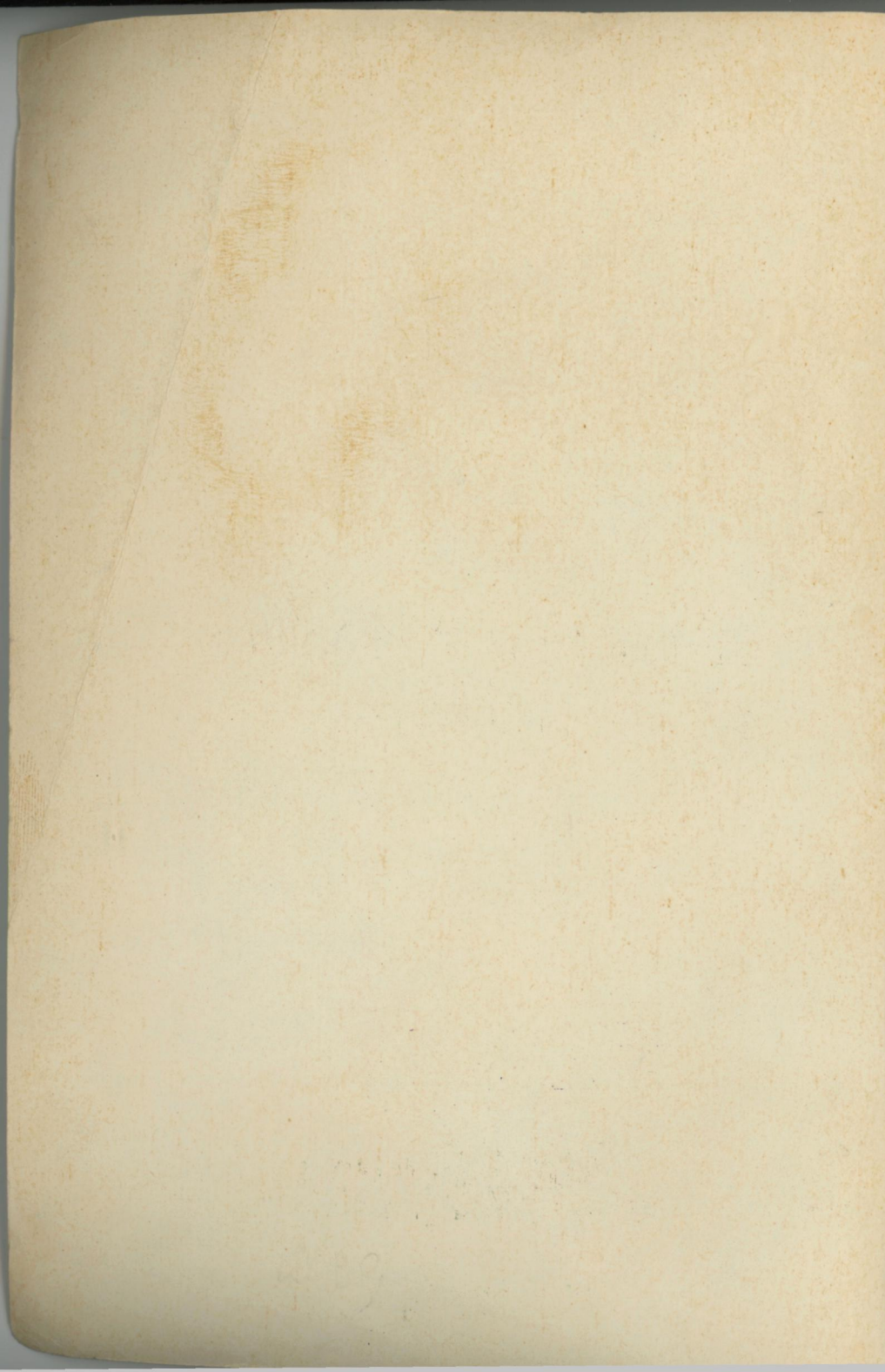
Цена 85 коп.

V.N. Karazin Kharkiv National University



00196086 6





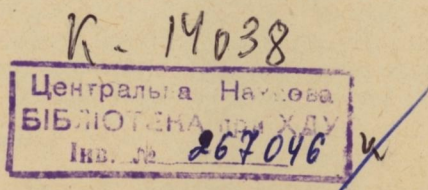
МИНИСТЕРСТВО  
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

# ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 83

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 37



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО  
Харьков

1972



В вестник включены работы, посвященные теории целых функций, несамосопряженным операторам и операторным узлам, краевым задачам специального типа, решетчатым многообразиям, случайным процессам и стохастическим мостам, некоторым вопросам магнитной гидродинамики, упругим волнам в сплошных средах, теории переноса излучения. Вестник подготовлен в сотрудничестве с Харьковским математическим обществом.

Печатается по постановлению Редакционной коллегии и Президиума Харьковского математического общества.

---

Редакционная коллегия:

член-корр. АН УССР *Н. И. Ахиезер* (ответственный редактор), акад. *В. А. Марченко*, акад. *А. В. Погорелов*, доц. *А. А. Янцевич* (ответственный секретарь).

Адрес редакционной коллегии:  
г. Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет.

---

## ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ВАЛИРОНА — ТИТЧМАРША

В. Н. Логвиненко<sup>1</sup>

Валирон [1] в 1913 г. доказал одну теорему абелева типа о канонических произведениях, все корни которых положительны. Согласно этой теореме из выполнения для функции  $n(t)$ , считающей нули канонического произведения  $f(z)$ , асимптотического равенства

$$n(t) \sim t^\rho, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1)$$

при  $\rho$  нецелом следует выполнение асимптотического равенства

$$\ln f(re^{i\theta}) \sim \frac{\pi}{\sin \rho\pi} e^{i\rho(\theta-\pi)} r^\rho, \quad r \rightarrow \infty, \quad (2)$$

выполняющегося равномерно при  $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$ , где  $\delta$  — любое положительное число.<sup>2</sup>

Соответствующая теорема тауберова типа была доказана Валироном [1] и Титчмаршем [2] в следующей форме.

Пусть  $f(z)$  — каноническое произведение нормального типа относительно порядка  $\rho$  ( $0 < \rho < 1$ ), все корни которого положительны. Тогда асимптотическое равенство

$$\ln f(-r) \sim \frac{\pi}{\sin \rho\pi} r^\rho, \quad r \rightarrow \infty \quad (3)$$

влечет выполнение асимптотического равенства

$$n(t) \sim t^\rho, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Утверждения теорем Валирона и Валирона — Титчмарша остаются справедливыми, если обыкновенный порядок  $\rho$ , фигурирующий в формулах (1) — (4), заменить уточненным порядком  $\rho(r)$ , лишь бы  $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$  было нецелым числом (не обязательно меньшим 1) [3, 88, 601].

<sup>1</sup> Автор глубоко благодарен научному руководителю В. Я. Левину за постановку задачи и И. В. Островскому за внимание к работе и ценные советы.

<sup>2</sup> Мы определяем функцию  $\arg G(z, \rho)$ , где  $G(z, \rho)$  — канонический множитель Вейерштрасса, в плоскости  $z$ , разрезанной вдоль луча  $[1, +\infty)$ , полагая ее равной  $-\pi$  на верхнем краю разреза и продолжая в разрезанную плоскость по непрерывности. Тем самым для любой целой функции  $f(z)$  приобретает смысл выражение  $\arg f(z)$ , а значит, и  $\ln f(z)$ .



Мы покажем, что утверждение теоремы Валирона – Титчмарша остается верным, если рассматривать более общий, нежели уточненный, колеблющийся порядок  $l(r)$ , который мы, следуя Валирону [1], определим как гладкую неотрицательную функцию  $l(r)$ , заданную на положительном луче и удовлетворяющую условиям:

$$а) 0 < \lambda = \liminf_{r \rightarrow \infty} l(r); \rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} l(r) < \infty;$$

$$б) \lim_{r \rightarrow \infty} r l'(r) \ln r = 0.$$

А именно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $l(r)$  — колеблющийся порядок, причем  $\rho \geq \lambda > [\rho]$ , и пусть  $f(z)$  — каноническое произведение нормального типа относительно колеблющегося порядка  $l(r)$ , все корни которого положительны. Тогда из выполнения при некотором  $\theta_0 \in (0, 2\pi)$  асимптотического равенства

$$\ln f(re^{i\theta_0}) \sim \frac{\pi}{\sin l(r)\pi} e^{il(r)(\theta_0 - \pi)} r^{l(r)}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

следует, что

$$n(t) \sim t^{l(t)}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Соответствующая теорема абелева типа доказана Валироном [1]. Простое доказательство этой теоремы имеется в книге А. А. Гольдберга и И. В. Островского [4, 91]. Там же приведены доказательства свойств колеблющихся порядков, используемых нами в дальнейшем.

*Доказательство теоремы 1.* Это доказательство следует, в основном, доказательству теоремы Валирона – Титчмарша для уточненного порядка, имеющемуся в книге Б. Я. Левина [3, 601].

Согласно формуле Иенсена имеем неравенство

$$n_f(r) \leq \ln M_f(er) \quad (M_f(R) = \max_{|z| < R} |f(z)|),$$

откуда вытекает существование постоянной  $C < \infty$ , такой, что для всех достаточно больших  $t$  справедливо неравенство

$$n(t) \leq C t^{l(t)}. \quad (7)$$

Так как все корни  $f(z)$  лежат на положительном луче вещественной оси, то справедливо соотношение

$$\ln f(z) = -z^{p+1} \int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{p+1}(t-z)} dt,$$

где  $p = [\rho]$  — род канонического произведения  $f(z)$ . Учитывая элементарные свойства колеблющегося порядка, неравенство (7)

и производя несложные оценки (аналогичные имеются в [4,93], получаем оценку, справедливую для всех достаточно больших  $r$ ,

$$|\ln f(re^{i\theta})| \leq Kr^{l(r)} \ln \left( \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} + 1 \right), \quad (8)$$

где величина  $K < \infty$  не зависит от  $r$  и  $\theta$ .

Введем вспомогательную целую функцию  $F(z)$ , определив ее как каноническое произведение, все корни которого положительны, а считающая нули функция  $n_F(t)$  имеет вид  $[t^{l(t)}]$ . Согласно уже упоминавшейся теореме Валирона имеем асимптотическое равенство

$$\ln F(re^{i\theta}) \sim \frac{\pi}{\sin l(r)\pi} e^{il(r)(\theta-\pi)} r^{l(r)}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (9)$$

выполняющееся равномерно по  $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$ , где  $\delta$  — любое положительное число.

Положим  $\varphi(z) = \frac{\ln f(z)}{\ln F(z)}$ . Из (8) и (9) вытекает, что в любом угле  $\{z: 0 < \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta\}$  функция  $\varphi(z)$  ограничена константой, зависящей лишь от  $\delta$ . Кроме того,  $\varphi(z) \rightarrow 1$ , когда  $z \rightarrow \infty$  вдоль луча  $\arg z = \theta_0$ . Значит,  $\varphi(z)$  равномерно стремится к 1 при  $z \rightarrow \infty$  внутри угла  $\{z: \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta\}$ . В силу (9) отсюда вытекает асимптотическое равенство

$$\ln |f(re^{i\theta})| \sim \frac{\pi \cos l(r)(\theta - \pi)}{\sin l(r)\pi} r^{l(r)}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (10)$$

выполняющееся равномерно по  $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$ .

Согласно (8) и (10) имеем следующую асимптотическую оценку

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta - \frac{r^{l(r)}}{l(r)} \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi \cos l(r)(\theta - \pi)}{\sin l(r)\pi} r^{l(r)} d\theta \right| \leq o(r^{l(r)}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} |\ln f(re^{i\theta})| d\theta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} |\ln f(re^{i\theta})| d\theta + \frac{\delta r^{l(r)}}{|\sin l(r)\pi|} \leq o(r^{l(r)}) + K_1 r^{l(r)} \delta \ln \frac{1}{\delta}, \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где постоянная  $K_1 < \infty$  не зависит от  $r$  и  $\delta$ . Отсюда уже легко следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta \sim \frac{r^{l(r)}}{l(r)}, \quad r \rightarrow \infty,$$



или, согласно формуле Иенсена,

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt \sim \frac{r^{l(r)}}{l(r)}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Стандартными методами доказательства элементарных тауберовых теорем (имеющимися, например, в книге [5, 174]) из асимптотического равенства (11) получаем

$$n(t) \sim t^{l(t)}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Теорема 1 доказана.

В литературе, посвященной различным уточнениям и обобщениям теоремы Валирона—Титчмарша, не рассматривался, насколько это известно автору, случай целого уточненного порядка  $\rho(r)$ , т. е. такого уточненного порядка, для которого  $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$  — натуральное число. Отсутствие интереса к этому вопросу объясняется, возможно, тем, что для наиболее часто встречающегося в приложениях случая  $\rho(r) \equiv \rho$  имеет место следующий факт. Из одной нормальности типа относительно порядка  $\rho$  канонического произведения  $f(z)$ , все корни которого положительны, уже вытекает существование предела  $\Delta_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n_t(t)}{t^\rho}$ , причем этот предел равен 0. Действительно, если  $\sigma_f < \infty$ , то по теореме Линделефа

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-\rho} < \infty, \quad (12)$$

где  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  — корни канонического произведения  $f(z)$ . Записывая левую часть (12) с помощью интеграла Стильтьеса и интегрируя по частям, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-\rho} = \int_0^{\infty} \frac{dn(t)}{t^\rho} = \frac{n(t)}{t^\rho} \Big|_0^{\infty} + \rho \int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t^{\rho+1}} dt. \quad (13)$$

Из (12) и (13) вытекает, в частности, существование предела  $\Delta_f$ . Учитывая, что второе слагаемое в правой части (13) — конечная величина, получаем, что единственным возможным значением для предела  $\Delta_f$  является число 0.

Ситуация меняется, однако, если рассматривать целые уточненные порядки  $\rho(r)$ , не равные тождественно постоянной. Введем медленно растущую функцию  $L(r) = r^{\varepsilon(r)-\rho}$ . Если тип  $\sigma_f$  канонического произведения  $f(z)$  относительно уточненного порядка  $\rho(r)$  не выше нормального, то [3, 65].

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup \{L(r)\}^{-1} \left| \sum_{|a_k| \leq r} a_k^{-\rho} \right| < \infty, \quad (14)$$

где  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  — корни  $f(z)$ . Рассмотрим в терминах функции  $L(r)$  все случаи, могущие представиться для плотности (обыкновен-

ной, верхней и нижней) относительно  $\rho(r)$  множества нулей канонического произведения  $f(z)$ , все корни которого положительны, а тип при уточненном порядке  $\rho(r)$  нормален.

Заметим, вначале, что для такого канонического произведения нижняя плотность множества нулей всегда равна 0, т. е.

$$\underline{\Delta}_f = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{n_1(t)}{t^{\rho(t)}} = 0. \quad (15)$$

Действительно, с помощью интегрирования по частям интеграла Стильтьеса легко выводим из (14) следующее неравенство, справедливое для всех  $r > r_0(\delta)$  ( $0 < \delta < 1$ )

$$\begin{aligned} \{L(r)\}^{-1} \sum_{a_k \leq r} a_k^{-\rho} &\geq \{L(r)\}^{-1} \int_{\delta r}^r \frac{n(t)}{t^{\rho+1}} dt \geq \\ &\geq \frac{2}{3} \{L(r)\}^{-1} \underline{\Delta}_f \int_{\delta r}^r \frac{L(t)}{t} dt \geq \frac{1}{2} \underline{\Delta}_f \ln \frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $L(r)$  — медленно растущая функция. Поскольку  $\delta$  можно выбрать сколь угодно малым, постольку это неравенство противоречит условию (14), если  $\underline{\Delta}_f \neq 0$ .

I.  $\liminf_{r \rightarrow \infty} L(r) = 0$ . В этом случае, очевидным образом, нет ни одного канонического произведения, все корни которого положительны, а тип при уточненном порядке  $\rho(r)$  нормален.

II.  $0 < C = \liminf_{r \rightarrow \infty} L(r) < \infty$ . В этом случае для любого канонического произведения, все корни которого положительны, а тип при уточненном порядке  $\rho(r)$  нормален, существует плотность относительно  $\rho(r)$  множества корней, равная 0, т. е.

$$\Delta_f = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n_1(t)}{t^{\rho(t)}} = 0.$$

В самом деле, из (14) следует, что

$$\sum_{a_k \leq r} a_k^{-\rho} = O(1), \quad r \rightarrow \infty,$$

что, в свою очередь, влечет асимптотическую оценку

$$n_1(t) = o(t^{\rho}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Значит,

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{n_1(t)}{t^{\rho(t)}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{n_1(t)}{t^{\rho_C/2}} = 0.$$

III.  $\lim_{r \rightarrow \infty} L(r) = \infty$ . В этом случае в рассматриваемом классе канонических произведений найдутся такие  $f(z)$ , у которых не существует предела  $\Delta_f$ . Покажем это.



Введем монотонно растущую к  $+\infty$  вспомогательную функцию  $L^*(r) = \inf_{t \geq r} L(t)$ . Существует последовательность монотонно возрастающих к  $+\infty$  чисел  $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ , таких, что

$$\text{а) } L(r_k) = L^*(r_k) \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$\text{б) } L(r_k) > \sum_{j=1}^{k-1} L(r_j) \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Пусть  $f(z)$  — каноническое произведение, корни которого лежат в точках  $r_k$  и имеют кратности  $n_k = [r_k^\rho L(r_k)]$ .

Имеем следующие соотношения:

$$\{L(r)\}^{-1} \sum_{r_k < r} \frac{n_k}{r_k^\rho} \leq \{L^*(r)\}^{-1} \sum_{r_k < r} L(r_k) \leq 2;$$

$$\frac{n_f(r)}{r^\rho L(r)} \leq \frac{1}{r^\rho L(r)} \sum_{r_k < r} r_k^\rho L(r_k) \leq 2 \frac{L^*(r)}{L(r)} \leq 2;$$

$$\bar{\Delta}_f = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r^\rho L(r)} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{n_f(r_k)}{r_k^\rho L(r_k)} \geq 1.$$

Из этих соотношений следует, что тип  $\sigma_f$  канонического произведения  $f(z)$  относительно уточненного порядка  $\rho(r)$  нормален. С другой стороны,  $\bar{\Delta}_f \geq 1$ , а в силу (15)  $\underline{\Delta}_f = 0$ . Значит, не существует плотности  $\Delta_f$  относительно  $\rho(r)$  множества корней канонического произведения  $f(z)$ .

Таким образом, в случае III для существования предела  $\Delta_f$  требуется некоторое дополнительное условие.

Прежде, чем формулировать соответствующую теорему, заметим, что, используя один результат Боуэна — Макинтайра ([6], лемма I), в теореме Валирона — Титчмарша, и в ее обобщении на нецелый уточненный порядок асимптотическое равенство (3) можно заменить асимптотическим равенством

$$\ln |f(re^{i\theta_0})| \sim \frac{\pi \cos \rho(\theta_0 - \pi)}{\sin \rho \pi} r^{\rho(r)}, \quad r \rightarrow \infty,$$

где

$$0 < \theta_0 < 2\pi; \quad \theta_0 \neq \pi + \frac{\pi}{\rho} \left(k + \frac{1}{2}\right); \quad k = -\left[\rho + \frac{1}{2}\right] + 1, \dots, \left[\rho - \frac{1}{2}\right],$$

не нарушая справедливости заключения теоремы.

Учитывая это, мы докажем следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть  $f(z)$  — каноническое произведение целого уточненного порядка  $\rho(r)$  ( $\lim_{r \rightarrow \infty} L(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\rho(r)-\rho} = \infty$ ), все корни которого положительны, и пусть на каком-либо луче

$$\arg z = \theta_0; \quad 0 < \theta_0 < 2\pi; \quad \theta_0 \neq \frac{\pi}{\rho} \left(k + \frac{1}{2}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 2\rho - 1)$$

выполняется асимптотическое равенство

$$\ln |f(re^{i\theta_0})| \sim \cos \rho \theta_0 \cdot r^{\rho(r)}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Тогда

$$\Delta_f = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\rho(t)} n_f(t) = 0. \quad (17)$$

*Доказательство теоремы 2.* Дадим оценку функции  $|\ln f(z)|$  в угле  $\{z: \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta\}$  ( $\delta > 0$ ), выбирая ветвь  $\ln f(z)$  равную 0 в 0. Используя классическую формулу Шварца — Йенсена [4, 16], рассуждениями, аналогичными приведенным в книге А. А. Гольдберга и И. В. Островского [4, 557] доказывается справедливость при  $\delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta$  следующего неравенства

$$|\ln f(re^{i\theta})| \leq 6 \ln M_f(2r) + 2n_f(2r) + \sum_{a_k < 2r} \ln \frac{2r}{|a_k - re^{i\theta}|}. \quad (18)$$

Так как каноническое произведение  $f(z)$  имеет нормальный тип относительно  $\rho(r)$ , то существует постоянная  $A = A_f < \infty$ , такая, что

$$\ln M_f(R) \leq AR^{\rho(R)} \quad (0 \leq R < \infty), \quad (19)$$

а, следовательно,

$$n_f(R) \leq BR^{\rho(R)} \quad (0 \leq R < \infty) \quad (20)$$

при некоторой постоянной  $B < \infty$ . Имеем, далее,

$$\begin{aligned} \sum_{a_k < 2r} \ln \frac{2r}{|a_k - re^{i\theta}|} &= \int_0^{2r} \ln \frac{2r}{|t - re^{i\theta}|} dn(t) = \\ &= n(2r) \ln \frac{2r}{|2r - re^{i\theta}|} + \operatorname{Re} \int_0^{2r} \frac{n(t)}{t - re^{i\theta}} dt. \end{aligned}$$

Учитывая (20) и используя элементарные свойства уточненного порядка, из последнего равенства получаем

$$\sum_{a_k < 2r} \ln \frac{2r}{|a_k - re^{i\theta}|} \leq C_\delta r^{\rho(r)}, \quad (21)$$

где величина  $C_\delta$  конечна при любом  $\delta > 0$  (19), (20), (21) влекут

$$|\ln f(re^{i\theta})| \leq D_\delta r^{\rho(r)} \quad (\delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta), \quad (22)$$

где величина  $D_\delta$  конечна при любом  $\delta > 0$  и не зависит от  $r, \theta$ .

2. Теперь, следуя Боуэну и Макинтайру [6], мы редуцируем соотношение (16) к случаю  $\theta_0 = \pi$ . Так как  $f(z) = \overline{f(z)}$ , то можно считать, что  $0 < \theta_0 < \pi$ . Определим голоморфную в верхней полуплоскости функцию  $\varphi(z)$ , полагая

$$\varphi(z) = \ln f(e^{i\pi} z^{(\pi - \theta_0)/\pi}).$$



Функция  $\varphi(z)$  вещественна на положительной полуоси и может быть продолжена в нижнюю полуплоскость по симметрии, после чего она станет голоморфной в плоскости, разрезанной вдоль отрицательного луча. Предельные значения ее на этом луче непрерывны.

Обозначим через  $\lambda$  число  $1 - \frac{t_0}{\pi}$ . Пусть  $p$  — неотрицательное целое число, определяемое неравенством

$$p - \frac{1}{2} < \rho\lambda < p + \frac{1}{2}. \quad (23)$$

Для функции  $\varphi(z)$  справедливо следующее интегральное представление

$$\varphi(z) = \frac{(-1)^p}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{\rho+1/2} \operatorname{Re} \{ \varphi(te^{-i\pi}) \}}{t^{\rho+1/2}(t+z)} dt. \quad (24)$$

Действительно, пусть  $\Gamma_{R,\varepsilon}$  — контур, образованный радиусами  $\arg \zeta = \pm \pi$ , соединенными окружностями  $|\zeta| = \varepsilon$  и  $|\zeta| = R$ . Если  $\varepsilon < |z| < R$ , то

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{z^{\rho+1/2} \varphi(\zeta)}{\zeta^{\rho+1/2}(\zeta-z)} d\zeta.$$

Учитывая (22), (23) и то, что  $\varphi(\zeta) = O(|\zeta|^{\lambda(\rho+1)})$  при  $\zeta \rightarrow 0$ , из последнего соотношения, устремляя  $\varepsilon$  к 0, а  $R$  к  $\infty$ , получаем (24).

Полагая в (24)  $z = x$  и используя элементарные свойства уточненного порядка [3, гл. I, § 12] и (16), из (24) выводим асимптотическое равенство

$$\ln f(e^{i\pi}r) \sim \cos \rho\pi \cdot r^{\rho(r)}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Из (25) вытекает, что, не ограничивая общности, можно считать функцию  $L(r) = r^{\rho(r)-\rho}$  монотонно неубывающей с ростом  $r$ . Действительно, имеем

$$\frac{\ln f(-r)}{(-1)^{\rho} r^{\rho}} = r \int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{\rho+1}(t+r)} dt,$$

откуда следует, что функция  $(-1)^{\rho} r^{-\rho} \ln f(-r)$  монотонно растет. С другой стороны,

$$\frac{\ln f(-r)}{\cos \rho\pi \cdot r^{\rho}} \sim L(r), \quad r \rightarrow \infty.$$

3. В этом пункте доказательства мы построим каноническое произведение  $F(z)$ , все корни которого положительны, с индикатором  $h(\theta) = \cos \rho\theta$  относительно уточненного порядка  $\rho(r)$  и вполне регулярного роста относительно  $\rho(r)$ . Строить  $F(z)$  мы будем по нулям.

Существует такое неотрицательное целое число  $k_1$ , что выполняется неравенство

$$k_1 \leq \rho L(1) < k_1 + 1.$$

Пусть числа  $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$  уже определены и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{j=1}^{n-1} k_j j^{-\rho} \leq \rho L(n-1) < \sum_{j=1}^{n-1} k_j j^{-\rho} + (n-1)^{-\rho}.$$

Так как функция  $L(r)$  монотонно не убывает, то найдется неотрицательное целое число  $k_n$  такое, что выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^n k_j j^{-\rho} \leq \rho L(n) < \sum_{j=1}^n k_j j^{-\rho} + n^{-\rho}$$

и так далее.

Целую функцию  $F(z)$  зададим равенством

$$F(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left\{ \left( 1 - \frac{z}{j} \right) \exp \left( \sum_{m=1}^{\rho} \frac{1}{m} \left( \frac{z}{j} \right)^m \right) \right\}^{k_j}.$$

Для величины  $\delta_F(r) = \rho^{-1} \sum_{a_n < r} a_n^{-\rho}$ , где  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  корни целой функции  $F(z)$ , выполняется асимптотическое соотношение

$$\frac{\delta_F(r)}{L(r)} = \frac{L(|r|) + O(|r|^{-\rho})}{L(r)},$$

т. е.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\delta_F(r)}{L(r)} = 1.$$

Кроме того, справедливо соотношение  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} n_F(r) = 0$ . Действительно, для любого положительного  $\varepsilon < 1$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{n_F(r)}{r^{\rho(r)}} &= \frac{\sum_{j < r} k_j}{r^{\rho(r)}} = \frac{\sum_{j < \varepsilon r} k_j + \sum_{\varepsilon r < j < r} k_j}{r^{\rho(r)}} \leq \\ &\leq \frac{(\varepsilon r)^{\rho} \sum_{j < \varepsilon r} k_j j^{-\rho} + r^{\rho} \sum_{\varepsilon r < j < r} k_j j^{-\rho}}{r^{\rho} L(r)} \leq \\ &\leq \varepsilon^{\rho} \frac{L(|\varepsilon r|) + |\varepsilon r|^{-\rho}}{L(r)} + \frac{L(|r|) + |r|^{-\rho} - L(|\varepsilon r|)}{L(r)}. \end{aligned}$$

Так как  $L(r)$  — медленно растущая функция, то величина  $\{L(r)\}^{-1} \{L(|r|) + |r|^{-\rho} - L(|\varepsilon r|)\}$  стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , а, значит,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} n_F(r) \leq \varepsilon^{\rho},$$



что в силу произвольности  $\varepsilon$  дает

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} n_F(r) = 0.$$

Согласно теореме теории целых функций вполне регулярного роста [3, 121] изложенные выше соображения влекут все свойства функции  $F(z)$ , о которых говорилось в начале этого пункта. Кроме того, внутри любого угла  $\{z: \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta\}$  ( $\delta > 0$ ) имеет место асимптотическое равенство, равномерное по  $\theta$ ,

$$\ln F(re^{i\theta}) \sim e^{i\rho\theta} r^{\rho(r)}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (26)$$

4. Рассмотрим функцию  $\varphi(z) = \frac{\ln f(z)}{\ln F(z)}$ . Согласно (22) и (26)

эта функция ограничена в любом угле, не содержащем положительного луча. Кроме того,  $\varphi(z) \rightarrow 1$ , когда  $z \rightarrow \infty$  вдоль отрицательного луча. Значит, в любом угле  $[\delta, 2\pi - \delta]$  ( $\delta > 0$ ) функция  $\varphi(z)$  равномерно стремится к 1, когда  $z \rightarrow \infty$ . Тем самым показано, что в любом таком угле функция  $f(z)$  имеет вполне регулярный рост относительно уточненного порядка  $\rho(r)$ . В силу замкнутости множества лучей вполне регулярного роста  $f(z)$  — целая функция вполне регулярного роста относительно  $\rho(r)$ . Это влечет [3, 205] существование предела  $\Delta_f = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\rho(t)} n_f(t)$ . А, как

нами показано выше, коль скоро такой предел существует, то он равен 0.

Теорема 2 доказана.

*Замечание 1.* Может возникнуть подозрение, что если в знаменателе отношения, стоящего в левой части формулы (17) подставить функцию, растущую при  $r \rightarrow \infty$  медленнее, чем  $r^{\rho(r)}$ , то для канонических произведений, удовлетворяющих условиям теоремы 2, все еще будет существовать конечный предел этого отношения. Однако это не так.

Пусть  $L_1(r) = o(L(r))$  при  $r \rightarrow \infty$ . Предположим, для простоты, что функция  $L(r)$   $\nearrow \infty$  при  $r \rightarrow \infty$ . Покажем, что в классе канонических произведений, описываемом условиями теоремы 2, найдется целая функция  $g(z)$ , такая, что

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{n_g(r)}{r^{\rho} L_1(r)} = \infty. \quad (27)$$

Чтобы показать это, зададим последовательность положительных чисел  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ , таких, что  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots < \infty$ . Найдется последовательность натуральных чисел  $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ , обладающих свойствами:

$$l_{n+1} > l_n; \quad nL_1(l_n) < \varepsilon_n L(l_n). \quad (28)$$

Функцию  $g(z)$  мы положим равной  $F(z)f(z)$ , где  $F(z)$  — целая функция, фигурировавшая при доказательстве теоремы 2, а  $f(z)$  — каноническое произведение с корнями в точках  $l_n$ , причем кратности этих корней равны  $[n l_n^{\rho} L_1(l_n)]$  соответственно.

Надлежит проверить, что функция  $g(z)$  удовлетворяет условиям теоремы 2. Мы должны установить нормальность типа этой функции относительно поряд-

ка  $\rho(r)$  и выполнение условия (16). Мы установим это, если докажем, что функция  $f(z)$  имеет минимальный тип относительно уточненного порядка  $\rho(r)$ .

Имеем, учитывая (28),

$$\frac{\delta_f(r)}{L(r)} = \frac{\frac{1}{\rho} \sum_{l_n < r} l_n^{-\rho} [n l_n^{\rho} L_1(l_n)]}{L(r)} \leq \\ \leq \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{L(r_0)}{L(r)} \sum_{l_n < r_0} \varepsilon_n + \sum_{l_n > r_0} \varepsilon_n \right\} = \frac{1}{\rho} \sum_{l_n > r_0} \varepsilon_n + o(1), \quad r \rightarrow \infty$$

Здесь мы учли, что  $L(r) \nearrow \infty$ . Отсюда вытекает

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\delta_f(r)}{L(r)} = 0. \quad (29)$$

Используя для записи  $\delta_f(r)$  интеграл Стильтеса и интегрируя его по частям из (29) выводим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(t)}{t^{\rho(t)}} = 0. \quad (30)$$

Формулы (29) и (30) обеспечивают минимальность типа функции  $f(z)$  относительно уточненного порядка  $\rho(r)$ . С другой стороны,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{n_g(r)}{r^{\rho} L_1(r)} \geq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{r^{\rho} L_1(r)} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n_f(l_m)}{l_m^{\rho} L_1(l_m)} = \infty.$$

*Замечание 2.* Можно показать, что утверждение замечания 1 остается в силе, если вместо целого уточненного порядка  $\rho(r)$ , соответствующего случаю III, рассматривать уточненный порядок  $\rho(r)$ , соответствующий случаю II, даже если требовать дополнительно выполнения асимптотического равенства (16).

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. Valiron. Annales de Toulouse, (3), 5 (1913), 117—257.
2. E. G. Titchmarsh. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 26 (1927), 185—200.
3. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, Гостехиздат, 1956.
4. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.
5. Н. Г. де Брейн. Асимптотические методы в анализе. Изд-во иностр. лит-ры, 1961.
6. N. A. Bowen, A. J. Macintyre. Trans. Amer. Math. Soc. 70, № 1, 1951, 114—127.

## АНТИУНИТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

*Ш. Асади, И. Е. Луценко*

Отображение  $K$  комплексного гильбертова пространства  $H$  на себя называется антиунитарным оператором (АУО) [8, 9], если для  $f, g \in H$

$$(Kf, Kg) = (g, f) = \overline{(f, g)}.$$



АУО  $K$  называется инволюцией (или оператором комплексного сопряжения) [1, 2, 4], если  $K^2 = 1$  ( $1$  — единичный оператор). АУО  $K$  будем называть антиинволюцией, если  $K^2 = -1$ . Если  $K$  инволюция, а  $Kf = f$ , то  $f$  называется  $K$  — вещественным вектором. Для того чтобы АУО  $K$  был инволюцией, необходимо и достаточно, чтобы в  $H$  существовал  $K$  — вещественный ортонормированный базис [1].

Линейный оператор  $T$  может быть связан с инволюцией  $K$  одним из условий [1, 2, 4, 7, 10]:

$$\begin{array}{ll} \text{(А)} & KTK^{-1} = T \\ \text{(Б)} & KTK^{-1} = -T \\ \text{(В)} & KTK^{-1} = T^* \\ \text{(Г)} & KTK^{-1} = -T^* \end{array}$$

В этом случае оператор  $T$  называется  $K$ -вещественным (А),  $K$ -мнимым (Б),  $K$ -симметрическим (В),  $K$ -кососимметрическим (Г).

Если существуют две инволюции  $K_1$  и  $K_2$ , связанные с оператором  $T$  условиями  $K_1TK_1^{-1} = T$  и  $K_2TK_2^{-1} = -T$ , то оператор  $T$  называется бисимметричным [12, 13]. В квантовой механике ([8], задача обращения времени) рассматриваются операторы, связанные условиями (А—Г) с антиинволюцией. В работе [11] и в настоящей статье мы отказываемся от условия  $K^2 = \mp 1$ .

**Определение.** Линейный оператор  $T$  будем называть  $K$ -вещественным ( $K$ -мнимым,  $K$ -симметрическим,  $K$ -кососимметрическим), если  $T$  связан с АУО  $K$  условием (А) ((Б), (В), (Г)).

Это обобщение не всегда является существенным: если нормальный оператор  $T$  ( $TT^* = T^*T$ ) связан с некоторым АУО одним из условий (А—Г), то он связан тем же условием и с некоторой инволюцией (теорема 3.1). С другой стороны, существуют операторы  $T$  ( $TT^* \neq T^*T$ ), связанные с некоторой антиинволюцией  $K_0$  одним из условий (А—Г), и такие, что любой другой АУО, связанный с  $T$  тем же условием, имеет вид  $e^{i\alpha}K_0$  (см. пример 3 в [11]). Повторяя рассуждения работы [11], приведенные для случая (А), можно доказать справедливость следующего утверждения:

**Теорема 0.1.** Если ограниченный линейный оператор  $T$  связан с АУО  $K$  одним из условий (А—Г), то пространство  $H$  распадается в ортогональную сумму  $H_1 \oplus H_2$  приводящих  $T$  и  $K$  подпространств таких, что в  $H_1$  существует инволюция  $K_1$ , а в  $H_2$  антиинволюция  $K_2$ , связанные, соответственно, с  $T_1 = T|_{H_1}$  и  $T_2 = T|_{H_2}$  таким же условием, каким  $T$  связан с  $K$ .

## § 1. Общие свойства линейных операторов, инвариантных относительно антиунитарных преобразований

Пусть  $T$  — ограниченный линейный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве,  $M(T)$  — его матрица в каком-нибудь о. н. б.,  $\bar{M}(T)$  — матрица, составленная из комплексно-сопряженных элементов,  $M^{\tau}(T)$  — транспонированная матрица. Легко проверяется



**Теорема 1.1.** Для того чтобы оператор  $T$  был связан с АУО  $K$  одним из условий (А—Г), необходимо и достаточно, чтобы для каждого о. н. б. нашлась такая унитарная матрица  $U$ , которая связана с  $M(T)$  соответствующим условием:

$$(AM) \quad UM(T)U^{-1} = M(T), \quad (BM) \quad U\bar{M}(T)U^{-1} = -\bar{M}(T),$$

$$(BM) \quad UM(T)U^{-1} = M^{\tau}(T), \quad (GM) \quad UM(T)U^{-1} = -M^{\tau}(T).$$

Для того чтобы  $T$  был связан с инволюцией  $K$  одним из условий (А—Г) необходимо и достаточно, чтобы существовал такой о. н. б., в котором матрица  $M(T)$  удовлетворяет, соответственно, условию:

$$\bar{M}(T) = M(T), \quad \bar{M}(T) = -M(T),$$

$$M^{\tau}(T) = M(T), \quad M^{\tau}(T) = -M(T),$$

т. е. необходимо и достаточно чтобы существовал такой о. н. б., в котором  $T$  задается вещественной, мнимой, симметричной или кососимметричной матрицей.

Нетрудно проверить следующие утверждения:

**Теорема 1.2.** Если  $T$  связан с  $K$  одним из условий (А—Г), то:

а)  $T$  связан и с  $K^{-1}$  таким же условием,

б)  $T^*$  и  $T^{-1}$  (если они существуют) связаны с  $K$  и с  $K^{-1}$  тем же условием.

**Теорема 1.3.** Если  $T$  удовлетворяет условию А (Б, Г), то множество регулярных значений и множество собственных чисел оператора  $T$  симметричны относительно вещественной оси (мнимой оси, начала координат). При этом соответствующие собственные подпространства оператора  $T$  преобразуются оператором:  $K$  друг в друга.

**Теорема 1.4.** Для того чтобы симметрический оператор  $A$  ( $A \subseteq A^*$ ) был  $K$ -вещественным, необходимо и достаточно, чтобы его преобразование Кэли  $V = (A - iI)(A + iI)^{-1}$  удовлетворяло условию  $KVK^{-1} = V^{-1}$ , а для того чтобы  $A$  был  $K$ -мнимым, необходимо и достаточно, чтобы  $V$  был  $K$ -вещественным.

В дальнейшем будем пользоваться таким утверждением [10]:

**Теорема 1.5.** Пусть  $A = A^*$ , а  $K = AUO$ . Тогда

а) существует такая инволюция  $K$ , что  $KA K^{-1} = A$ ;

б) если  $KA K^{-1} = A$ ,  $T = f(A)$ , то  $KT K^{-1} = T^*$ ;

в) если  $E(t)$  — спектральная функция (разложение единицы) для  $A$ , то условие  $KA K^{-1} = A$  равносильно условию  $KE(t)K^{-1} = E(t)$  (при всех  $t$ );

г) если  $E(\varphi)$  — спектральная функция унитарного оператора  $U$ , то условие  $KUK^{-1} = U^*$  равносильно условию  $KE(\varphi)K^{-1} = E(\varphi)$  (при всех  $\varphi$ ).

**ПРИМЕР 1.** Оператор двустороннего сдвига  $Ue_n = e_{n+1}$  ( $\pm n = 0, 1, \dots$ )  $e_n$  — о. н. б., удовлетворяет каждому из условий (А—Г) при соответствующем выборе АУО  $K$ .



**ПРИМЕР 2.** Пусть  $V$  — оператор обобщенного одностороннего сдвига [3],  $L_0 = H \oplus VH$ ;  $L_n = V^n L_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — его попарно ортогональные блуждающие подпространства. Если  $K_0$  — любой АУО в  $L_0$ , то общий вид АУО  $K_1$  и  $K_2$ , связанных с  $V$  условиями  $K_1 V K_1^{-1} = V$ ,  $K_2 V K_2^{-1} = -V$ , определяется выражениями

$$K_1|L_n = V^n K_0 V^{-n}, \quad K_2|L_n = (-1)^n V^n K_0 V^{-n}.$$

Используя теоремы 1.2, 1.4 и пример 2, получим следствие:

**Теорема 1.6.** а) Всякий простой максимальный изометрический оператор бисимметричен.

б) Для любого простого максимального симметрического оператора  $A$  существует такая инволюция  $K$ , что  $KA K^{-1} = -A$ .

## § 2. Разложение линейных операторов

Пусть  $T$  — ограниченный линейный оператор, так что  $T = T_R^+ T_I$ ; где  $T_R = \frac{1}{2}(T + T^*)$ ,  $T_I = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ . Легко проверяется

**Теорема 2.1.** Для того чтобы  $T$  удовлетворял условию А (Б, В, Г), необходимо и достаточно, чтобы  $T_R$  удовлетворял условию А (Б, А, Б), а  $T_I$  — условию Б (А, А, Б).

Ограниченный нормальный линейный оператор допускает также полярное разложение  $T = U \cdot R = R U$ , где  $U$  — унитарный оператор, а  $R \geq 0$ . Будем предполагать, что  $\ker U = \ker R$ , что обеспечивает единственность выбора  $U$  и  $R$ . Тогда справедлива

**Теорема 2.2.** Для того чтобы нормальный оператор  $T$  удовлетворял одному из условий (А—Г), необходимо и достаточно, чтобы этому же условию удовлетворял оператор  $U$ , а оператор  $R$  удовлетворял условию (А).

Ограниченный линейный оператор  $T$  можно единственным образом разложить в ортогональную сумму его максимальной самосопряженной части  $T_1$  и вполне несамосопряженной части  $T_2$  [13].

**Теорема 2.3.** Для того чтобы оператор  $T$  удовлетворял одному из условий (А—Г), необходимо и достаточно, чтобы этому условию удовлетворяли как оператор  $T_1$ , так и оператор  $T_2$ .

**Следствие.** Для того чтобы оператор  $T$  удовлетворял условию (А) или (Б), необходимо и достаточно, чтобы этому условию удовлетворяла его вполне несамосопряженная часть.

В [15] показано, как строится максимальная унитарная часть  $U$  и вполне неунитарная часть  $T_0$  любого ограниченного оператора.

**Теорема 2.4.** Для того чтобы  $T$  удовлетворял одному из условий (А—Г), необходимо и достаточно, чтобы этому условию удовлетворяли как  $U$ , так и  $T_0$ .

**Следствие 1.** Для того чтобы оператор  $T$  удовлетворял условию (В), необходимо и достаточно, чтобы этому условию удовлетворяла его вполне неунитарная часть.



Для всякой изометрии  $V$  имеет место разложение Вольда [3]:  $V = U \oplus V_0$ , где  $U$  — максимальная унитарная часть, а  $V_0$  — односторонний (обобщенный) сдвиг. Используя теоремы 1.6 и 2.4, получим:

**Следствие 2.** Изометрия не может удовлетворять условию (В) или (Г).

**Следствие 3.** Для того чтобы изометрия удовлетворяла условию (А) или (Б), необходимо и достаточно, чтобы этому условию удовлетворяла ее максимальная унитарная часть.

Ограниченный линейный оператор  $T$  можно разложить и ортогональную сумму максимальной изометрической части  $V$  и аннигилирующей части  $\tau$  [14]: если  $G_T = \ker(T^*T - I)$ ,  $H_T = H \ominus G_T$ , то  $V = T|_{G_T} \in [G_T, G_T^*]$ ,  $\tau = T|_{H_T} \in [H_T, H_T^*]$ .

**Теорема 2.5.** Для того чтобы  $T$  удовлетворял одному из условий (А—Г), необходимо и достаточно, чтобы этому условию удовлетворяли как  $V$ , так и  $\tau$ .

### § 3. Нормальные операторы

Цель настоящего параграфа — доказать утверждение:

**Теорема 3.1.** Если нормальный оператор  $T$  связан с АУО  $K$  одним из условий (А—Г), то существует инволюция  $K_0$ , связанная с  $T$  тем же условием.

Начнем с условия (В). Для этого случая утверждение следует из более общего:

**Лемма 1.** Если нормальный оператор  $T$  коммутирует с унитарным оператором  $U$ , то существует инволюция  $K$ , связанная с  $T$  и с  $U$  условием (В). В частности, для всякого нормального оператора существует инволюция, связанная с ним условием (В).

Действительно, пусть  $T = A + iB$  ( $A = A^*$ ,  $B = B^*$ ,  $AB = BA$ ) и  $TU = UT$ . Тогда операторы  $\{U, A, B\}$  попарно коммутируют, и если  $E(\varphi)$  — спектральная функция  $U$ , то семейство  $\{A, B, E(\varphi)\}$  состоит из попарно коммутирующих самосопряженных операторов. В силу теоремы Неймана о порождающем операторе [1], существует ограниченный самосопряженный оператор  $C$ , функциями которого являются все операторы данного семейства. Теорема 1.5 гарантирует существование инволюции  $K$ , связанной с оператором  $C$  условием (А), а поэтому связанной с  $T$  и с  $U$  условием (В).

(А) — нормальные  $K$  — вещественные операторы. Легко проверить утверждение:

**Лемма 2 (А).** Если нормальный оператор  $T$  является  $K$ -вещественным, то существует унитарный оператор  $U$ , связанный с  $T$  условием  $UTU^{-1} = T^*$  (достаточно взять  $U = KK_1$ , где  $K_1TK_1^{-1} = T^*$ ). Наоборот, если нормальный оператор  $T$  связан с некоторым унитарным оператором  $U$  условием  $UTU^{-1} = T^*$ , то  $T$  является  $K$ -вещественным оператором (достаточно взять  $K = UK_1^{-1}$ , где  $K_1TK_1^{-1} = T^*$ ).



Как показывает следующая теорема, условие  $UTU^{-1} = T^*$  для нормального оператора означает, в некотором смысле, симметрию относительно вещественной оси.

**Теорема 3.2 (А).** Если нормальный оператор  $T$  связан с унитарным оператором  $U$  условием  $UTU^{-1} = T^*$ , то  $T$  распадается в ортогональную сумму трех операторов: самосопряженного  $T_0 = T|_{H_0}$  перестановочного с  $U$  ( $UH_0 = H_0$ ) и  $T_{\pm} = T|_{H_{\pm}}$ , связанных условием  $UT_{\pm}U^{-1} = T_{\mp}^*$  ( $UH_{\pm} = H_{\mp}$ ).

*Доказательство.* Пусть  $T = A + iB$  ( $A = A^*$ ,  $B = B^*$ ,  $AB = BA$ ). Тогда  $UAU^{-1} = A$ ,  $UBU^{-1} = -B$ ,  $UB^2 = B^2U$  и поэтому  $U|B| = |B|U$  (здесь  $|B| = \sqrt{B^2}$ ). Положим  $B_{\pm} = \frac{1}{2}(|B| \pm B)$ . Тогда  $UB_{\pm}U^{-1} = B_{\mp}$ , откуда  $U[\ker B_{\pm}] = \ker B_{\mp}$ . Если  $H_{\pm} = \overline{R(B_{\pm})}$  (замыкание области изменения оператора  $B_{\pm}$ ), то  $H = H_{+} \oplus \ker B_{+}$ , так что  $UH_{\pm} = H_{\mp}$ . Операторы  $T$  и  $A$  перестановочны с  $B$ , а потому и с проекторами на  $\ker B_{\pm}$  [2, 301], так что пространства  $H_{+}$ ,  $H_{-}$  и  $H_0 = [\ker B_{+}] \cap [\ker B_{-}]$  приводят  $T$  и  $A$ , причем  $UH_0 = H_0$ . Но  $B_{+}B_{-} = B_{-}B_{+}$ , поэтому  $H_{\pm} = \overline{R(B_{\pm})} \subset \ker B_{\mp}$ , так что  $H_{-}$  и  $H_{+}$  — ортогональны, а  $H \ominus [H_{+} \oplus H_{-}] = H_0$  и остается лишь заметить, что  $B = B_{+} - B_{-}$ , откуда  $B|_{H_0} = 0$ , т. е.  $T_0 = T|_{H_0} = A|_{H_0} = T^*$ .

**Теорема 3.3. (А)** Если нормальный оператор  $T$  связан с унитарным оператором  $U$  условием  $UTU^{-1} = T^*$ , то  $U = K_1A_2$ , где  $K_1$  и  $K_2$  — инволюции, связанные с  $T$  условиями (А) и (В).

*Доказательство.* Унитарный оператор  $V = U^2$  коммутирует с  $T$ , а пространства  $H_0$ ,  $H_{+}$ ,  $H_{-}$  — приводят, в силу теоремы 3.2, операторы  $V$  и  $T$ . Используя лемму 1, определим в  $H_0$  и  $H_{-}$  инволюции  $K_0$  и  $K_{-}$ , связанные с  $T_0$ ,  $U_0$  и, соответственно, с  $T_{-}$ ,  $V|_{H_{-}}$  условием (В). В пространстве  $H_{+}$  зададим АУО  $K_{+} = UK_{-}U$ , откуда получим

$$K^2 = UK_{-}U^2K_{-}U = UK_{-}VK_{-}^{-1}U = UV^*U = 1,$$

так что  $K_{+}^2$  — инволюция. Используя теорему 3.2 (А), найдем:

$$\begin{aligned} K_{+}T_{+}K_{+}^{-1} &= UK_{-}UT_{+}UK_{-}U = UK_{-}T_{-}^*U^2K_{-}U = \\ &= UK_{-}T_{-}^*K_{-}^{-1}V^*U = UT_{-}U^{-1} = T_{+}^*. \end{aligned}$$

Таким образом, инволюция  $K_2 = K_0 \oplus K_{-} \oplus K_{+}$  связана с  $T$  условием (В), а тогда, в силу леммы 2, АУО  $K_1 = K_2^{-1}U$  связан с  $T$  условием (А). Теперь остается лишь проверить, что  $K_1$  — инволюция:

$$K_1^2|_{H_0} = K_0U_0K_0U_0 = U_0^*U = 1;$$

$$K_1^2|_{H_{-}} = K_2UK_2U|_{H_{-}} = K_2U(UK_{-}U)U = K_{-}VK_{-}V = V^*V = 1;$$

$$\begin{aligned} K_1^2|_{H_{+}} &= K_2UK_2U|_{H_{+}} = K_2UK_{-}U = (UK_{-}U)(UK_{-}U) = \\ &= UK_{-}VK_{-}U = UV^*U = 1, \end{aligned}$$



что полностью доказывает теорему 3.3 (А), а вместе с тем и теорему 3.1 для случая (А).

**(Б)-нормальные К-мнимые операторы.** Случай (Б) теоремы 3.1 сводится к случаю (А) заменой  $T$  на  $iT$ .

Легко также перефразировать для этого случая лемму 2 (А) и теоремы 3.2 (А) и 3.3 (А).

**(Г) нормальные К-кососимметрические операторы.** Легко проверяется.

**Лемма 2 (Г).** Если нормальный оператор  $T$  является К-кососимметрическим, то существует унитарный оператор  $U$ , связанный с  $T$  условием  $UTU^{-1} = -T$ .

Наоборот, если нормальный оператор  $T$  связан с некоторым унитарным оператором  $U$  условием  $UTU^{-1} = -T$ , то  $T$  является К-кососимметрическим оператором.

Повторяя доказательство теоремы 3.2 (А) с заменой оператора  $B$  на оператор  $A$  ( $T = A + iB$ ), получим утверждение:

**Теорема 3.2 (Г).** Если нормальный оператор  $T$  связан с унитарным оператором  $U$  условием  $UTU^{-1} = -T$ , то  $T$  распадается в ортогональную сумму трех операторов:  $T_0 = T|_{H_0} = -T_0^*$ ,  $T_{\pm} = T|_{H_{\pm}}$ , причем  $UH_0 = H_0$ ,  $UH_{\pm} = H_{\mp}$ , так что  $UT_{\pm}U^{-1} = -T_{\mp}$ .

**Следствие.** Для того чтобы нормальный оператор  $T$  был К-кососимметрическим, необходимо и достаточно, чтобы  $T = T_1 \oplus T_2$ , где  $T_1$  и  $(-T_2)$  унитарно эквивалентны.

Из теоремы 3.2 (Г) можно получить и следующее утверждение, доказанное для случая вполне непрерывного самосопряженного оператора В. И. Годишем в его диссертации [13]:

**Теорема 3.3 (Г).** Если нормальный оператор  $T$  связан с унитарным оператором  $U$  условием  $UTU^{-1} = -T$ , то  $U = K_1 K_2$ , где  $K_1$  и  $K_2$  — инволюции, связанные с  $T$  условиями (В) и (Г).

#### § 4. Антиунитарный квадратный корень

Очевидно, квадрат любого АУО есть унитарный оператор.

**Теорема 4.** Для того чтобы унитарный оператор  $U$  был квадратом некоторого АУО, необходимо и достаточно, чтобы он обладал следующими свойствами:

(I) Подпространство  $H_{-1} = \{f; Uf = -f\}$  имеет четную размерность;

(II) Существует АУО, коммутирующий с  $U$

(условие II означает, что  $U$  есть К-вещественный нормальный оператор, и поэтому теорема 3.3 (А) равносильна существованию унитарного оператора  $V$ , связанного с  $U$  условием  $VUV^{-1} = U^*$ ).

Для доказательства необходимости (I) заметим, что если  $U = K^2$ , то  $H_{-1}$  приводит  $K$  (теорема 1.3), так что  $K|_{H_{-1}}$  антиинволюция, а всякая антиинволюция переводит любой вектор в ортогональный. Необходимость условия (II) — очевидна ( $UK = KU = K^3$ ).



Пусть теперь  $U$  обладает свойствами (I) и (II). Тогда существует инволюция  $K_1$ , такая, что  $K_1 U K_1^{-1} = U^*$  (лемма 1). Положим  $V = K_2 K_1$ , где  $K_2 U K_2^{-1} = U$  и применим к операторам  $U (= T)$  и  $V (= U)$  теорему 3.2 (A). При этом получим разложение  $H = H_0 \oplus H_+ \oplus H_-$ , где  $H_0$ ,  $H_+$ ,  $H_-$  приводят  $U$ ,  $\sqrt{U}$ . Легко проверяется, что  $K_2|_{H_0} = H_0$ ,  $K_2 H_{\pm} = H_{\mp}$ .

Зададим теперь АУО  $K$  следующим условием:  $K|_{H_+} = K_2 \sqrt{U}|_{H_+}$ ,  $K|_{H_-} = \sqrt{U} K_2|_{H_-}$ . Тогда  $K H_{\pm} = H_{\mp}$ , а поэтому  $K^2|_{H_{\pm}} = U|_{H_{\pm}}$ .

Оператор  $U|_{H_0} = U_0$  — самосопряженный и унитарный, поэтому  $H = H_{-1} \oplus H_{+1}$ , где  $H_{\pm 1} = \{f; Uf = \pm f\}$ . Зададим в  $H_{+1}$  оператор  $K$  любой инволюцией, а в  $H_{-1}$  — любой антиинволюцией (последнее обеспечивается условием 1). Тогда получим  $K^2 = U$ , что и доказывает теорему.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. «Наука», М., 1966.
2. Ф. Рисс, Б. С — Надь. Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
3. Б. С — Надь, Ч. Фояш. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. «Мир», М., 1970.
4. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. «Наука», М., 1967.
5. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. «Наука», М., 1969.
6. И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. Физматгиз, 1963.
7. И. М. Глазман. Об одном аналоге теории расширений эрмитовых операторов и не симметрической одномерной краевой задаче на полуоси. ДАН СССР 115, № 2 (1957).
8. Е. Вигнер. Теория групп. ИЛ, М., 1961.
9. E. Wigner. Normal form of antiunitary operators, Journal of Math. Phys. V. 1, № 5, 1960.
10. В. И. Годиц, И. Е. Луценко. О представлении унитарного оператора в виде произведения двух инволюций. «УМН», т. XX, вып. 6 (126), 1965.
11. И. Е. Луценко. Линейные операторы коммутирующие с антиунитарными. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 9, Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.
12. В. И. Годиц. Об инвариантных подпространствах вполне непрерывных бисимметричных операторов. «УМЖ», 18, № 3, 1966.
13. В. И. Годиц. Спектральный анализ бисимметричных операторов. Автореф. диссерт., Донецк, 1970.
14. Ю. Л. Шмультян. Изометрические операторы с бесконечными индексами дефекта и их ортогональные расширения. ДАН СССР 87, № 1, 1952.
15. E. Dorszt. On the unitary part of an operator on Hilbert space. Asta Sci. Math. 31 (1—2), 1970.



# АНТИУНИТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УЗЛОВ

Ш. Асади, И. Е. Луценко

## § 1. Локальные узлы и их преобразования

Пусть  $H$  и  $E$  — сепарабельные гильбертовы пространства,  $T \in [H, H]$ ,  $\Gamma \in [E, H]$ ,  $J \in [E, E]$  (запись  $\Gamma \in [E, H]$  означает, что  $\Gamma$  — ограниченный линейный оператор, действующий из  $E$  в  $H$ ). Агрегат  $M(T) = [(H, T), \Gamma, (E, J)]$  называется локальным узлом [1, 2], если  $J^2 = I$  ( $Jf = f$ ),  $J = J^*$ ,  $\Gamma J \Gamma^* = B$ , ( $T = A + + iB$ ,  $A = A^*$ ,  $B = B^*$ ). Подпространство  $E_0 = \overline{B(H)}$  называется неэрмитовым, а  $\overline{\Gamma(E)} \supset E_0$  канальным. Всякий  $T \in [H, H]$  можно включить в локальный узел, например, таким способом [1, 2]:

$E = E_0$ ,  $J_0 = \text{sign } B|_{E_0}$ ,  $\Gamma_0 = |B|^{\frac{1}{2}} E_0$ . Этот узел будем называть стандартным минимальным узлом. Локальный узел будем называть минимальным, если  $\text{Ker } \Gamma = 0$ . Легко проверяется

**Лемма 1.** Для того чтобы узел был минимальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:

$$\text{Ker } \Gamma = 0; \quad \overline{\Gamma^*(H)} = E; \quad \overline{\Gamma(E)} = E_0; \quad \text{Ker } \Gamma^* = \text{Ker } B.$$

**Лемма 2.** Для минимального узла оператор  $J$  однозначно определяется оператором  $\Gamma$ .

Оператор  $V \in [E_1, E_2]$  называется  $J$  — унитарным, если оператор  $J_1 = VJV^*$  инволютивен, т. е.  $J_1^2 = I$ . Легко проверяется

**Лемма 3.** Для того чтобы оператор  $V$  был  $J$  — унитарным, необходимо и достаточно, чтобы оператор  $\tau = V^*V = \tau^*$  удовлетворял условию  $\tau J \tau = J$  или чтобы выполнялось условие  $J = = V^* J_1 V$ , где  $J_1^2 = I$ .

**Определение.** Локальный узел будем называть  $J$  — унитарным преобразованием узла  $M(T)$ , если  $\Gamma_1 = \Gamma V^{-1}$ ,  $J_1 = VJV$ ,  $VE = E_1$ , где  $V$  —  $J$  — унитарный оператор. Справедлива

**Лемма 4.**  $J$  — унитарное преобразование локального узла является также локальным узлом, причем если один из этих узлов минимальный конечномерный, то и другой такой же (конечномерность узла означает, что  $\dim E_0 < \infty$ ).

**Теорема 1. 1.** Если  $M(T)$  и  $M_1(T)$  минимальные конечномерные узлы оператора  $T$ , то один из них есть  $J$  — унитарное преобразование другого.

Для локального узла  $M(T) = [(H, T), \Gamma, (E, J)]$  замыкание  $E_M$  линейной оболочки векторов вида  $T^n \Gamma g$  ( $g \in E$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ) называется главным подпространством, а  $E_M^0 = H \ominus E_M$  избыточным; сужения узла на эти подпространства называются главной и избыточной частью узла; узел называется простым, если



$E_M = H$  [1]. Узел  $M(T)$  будем называть стандартным простым узлом оператора  $T$ , если  $E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$ , где  $E_1 = H \ominus E_0$ ,  $E_2 = U^{-1}E_1$  ( $U$  — унитарный оператор),  $\Gamma = \Gamma_0 \oplus I \oplus U$ ,  $J = J_0 \oplus I \oplus (-I)$ .

Введем следующие преобразования локального узла  $M(T) = M$  в локальные узлы:

$$M_- = M(-T) = [(H, -T), \Gamma, (E, -J)];$$

$$M^* = M(T^*) = [(H, T^*), \Gamma, (E, -J)];$$

$$M_K = M_K(T) = [(K_1 H, K_1 T K_1^{-1}), K_1 \Gamma K_2^{-1}, (K_2 E, -K_2 J K_2^{-1})],$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — антиунитарные операторы (АУО), действующие из  $H$  на  $H$  и из  $E$  на  $E$ , соответственно.

*Определение.* Если существует такая пара АУО  $K_1$  и  $K_2$ , что выполняется одно из условий (А — Г):

$$(A) M_K = M, (B) M_K = M_-, (B) M_K = M^*, (Г) M_K = M_-,$$

то узел  $M(T)$  будем называть, соответственно,  $K$  — вещественным,  $K$  — мнимым,  $K$  — симметричным,  $K$  — кососимметричным. При этом сам оператор  $T$  называется  $K$  — вещественным ( $K$  — мнимым,  $K$  — симметричным,  $K$  — кососимметричным), если существует такой АУО  $K$ , который связан с  $T$ , соответственно, условием

$$(A) KTK^{-1} = T, (B) KTK^{-1} = -T, (B) KTK^{-1} = T^*,$$

$$(Г) KTK^{-1} = -T^*.$$

**Теорема 1. 2.** Если узел  $M(T)$  удовлетворяет одному из условий (А — Г), то оператор  $T$  удовлетворяет такому же условию, а канальное подпространство  $H_1 = \Gamma(E)$  приводит оператор  $K_1$  (т. е.  $K_1 H_1 = H_1 = K^{-1} H_1$ ). Наоборот, если оператор  $T$  удовлетворяет одному из условий (А — Г), а подпространство  $H_1$  лежит между  $E_0$  и  $H$  ( $E_0 \subseteq H_1 \subseteq H$ ) и приводит  $K_1$ , то  $T$  можно включить в узел, удовлетворяющий такому же условию и имеющий  $H_1$  своим канальным подпространством. Стандартные (минимальный и простые) узлы оператора, удовлетворяющего одному из условий (А — Г), сами удовлетворяют такому же условию.

**Теорема 1. 3.** Если узел  $M$  распадается в произведение [1] узлов  $M_1$  и  $M_2$ , удовлетворяющих одному из условий (А — Г), то и узел  $M$  удовлетворяет этому же условию. Наоборот, если узел  $M$  удовлетворяет одному из условий (А — Г), а  $H_1 \subset H$  приводит  $T$  и  $K_1$ , то  $M$  распадается в произведение узлов  $M_1 \cdot M_2$  (где  $M_1$  — сужение  $M$  на  $H_1$ ), каждый из которых удовлетворяет такому же условию.

*Следствие 1.* Если узел  $M$  удовлетворяет одному из условий (А — Г), то главное и избыточное подпространства приводят  $K_1$ , а главная и избыточная части узла удовлетворяют такому же условию.



*Следствие 2.*  $K_1|E_M$  однозначно определяется по  $K_2$ ; в частности, если  $K_2^2 = \pm I$  (т. е.  $K_2$  — инволюция или антиинволюция), то и  $K_1^2 = \pm I$ .

*Следствие 3.* Если узел  $M$  минимален и удовлетворяет одному из условий  $(A - \Gamma)$ , то  $K_2$  однозначно определяется по  $K_1$ , в частности, если  $K_1^2 = \pm I$ , то и  $K_2^2 = \pm I$ .

Каждому конечномерному локальному узлу  $M$  соответствует семейство матричных узлов  $\Theta$ , определяемых выбором о. н. б. в  $E$  [1]:

$\Theta = [T, g_\alpha, j]$ ;  $g_\alpha = \Gamma e_\alpha$ ,  $\{e_\alpha\}$  о. н. б. в  $E$ ,  $j$  — матрица оператора  $J$  в базисе  $\{e_\alpha\}$ .

*Определение.* Матричный узел  $\Theta$  удовлетворяет одному из условий  $(A - \Gamma)$ , если этому условию удовлетворяет его оператор  $T$  и существует такая унитарная матрица  $U$ , что

$$K_1 g_\alpha = \sum_{\beta} U_{\alpha\beta} g_\beta \quad \text{и} \quad U j U^{-1} = -\bar{j} \quad (A, \Gamma) \quad U j U^{-1} = j \quad (B, V),$$

где  $\bar{j}$  — комплексно-сопряженная матрица.

**Теорема 1.4.** Для того чтобы операторный узел  $M$  удовлетворял одному из условий  $(A - \Gamma)$ , необходимо и достаточно, чтобы любой его матричный узел удовлетворял такому же условию. Для того чтобы узел  $M$  удовлетворял одному из условий  $(A - \Gamma)$  относительно некоторой инволюции ( $K_1^2 = I$ ,  $K_2^2 = I$ ), необходимо и достаточно, чтобы среди его матричных узлов нашелся узел, удовлетворяющий соответствующему условию, в котором  $U$  — единичная матрица.

## § 2. Характеристические функции локальных узлов

Всякому простому локальному узлу  $M$  соответствует характеристическая оператор-функция (х. о. — ф.), которая определяет его с точностью до унитарной эквивалентности [1]:  $W_M(\lambda) = I - 2i\Gamma^*(T - \lambda L)^{-1}\Gamma J$ . Легко видеть что узлу  $M_K$  соответствует х. о. — ф.  $K_2 W_M(\bar{\lambda}) K_2^{-1}$ .

*Определение.* Х. о. — ф.  $W(\lambda)$  удовлетворяет одному из условий  $(A - \Gamma)$ , если существует такой АУО  $K_2$ , что выполняется, соответственно, условие

$$(A) \quad K_2 W(\bar{\lambda}) K_2^{-1} = W(\lambda); \quad K_2 J K_2^{-1} = -J;$$

$$(B) \quad K_2 W(-\bar{\lambda}) K_2^{-1} = W(\lambda); \quad K_2 J K_2^{-1} = J;$$

$$(B) \quad K_2 W^*(\lambda) K_2^{-1} = W(\lambda); \quad K_2 J K_2^{-1} = J;$$

$$(Г) \quad K_2 W^*(-\lambda) K_2^{-1} = W(\lambda); \quad K_2 J K_2^{-1} = -J.$$

**Теорема 2.1.** Для того чтобы операторный узел удовлетворял одному из условий  $(A - \Gamma)$ , необходимо и достаточно, чтобы его х. о. — ф. удовлетворяла соответствующему условию. (При этом



для х. о. — ф. минимального узла вторая часть условия является следствием первой).

Если  $K_2^2 = I$ , то условие  $K_2 J K_2^{-1} = -J$  означает, что  $E$  — пространство с инволюцией [3], а условие  $K_2 W(\bar{\lambda}) K_2^{-1} = W(\lambda)$  эквивалентно тому, что транспонированный оператор  $W^\tau(\lambda) = K_2 W^*(\lambda) K_2^{-1}$  удовлетворяет условию  $J W^\tau J = W^{-1}$ , т. е. является симплектическим. Отсюда —

*Следствие 1.* Если внешнее пространство узла  $M$  является  $J$  — пространством с инволюцией, то для того чтобы узел был вещественным относительно этой инволюции, необходимо и достаточно чтобы его х. о. — ф. была симплектической.

Матричному узлу  $\Theta(T)$  соответствует характеристическая матрица-функция (х. м. — ф.)  $w_\theta(\lambda) = \|(W_M(\lambda) e_\alpha, e_\beta)\|$  (Эту м. — ф. будем называть соответствующей оператору  $T$ ).

*Определение.* Х. м. — ф.  $w(\lambda)$  удовлетворяет одному из условий  $(A - \Gamma)$ , если существует такая постоянная унитарная матрица  $U$ , что

$$(A) \overline{w(\bar{\lambda})} = U w(\lambda) U^{-1}; \quad \bar{U} j U^{-1} = -j;$$

$$(B) \overline{w(-\bar{\lambda})} = U w(\lambda) U^{-1}; \quad \bar{U} j U^{-1} = j;$$

$$(B) w^\tau(\lambda) = U w(\lambda) U^{-1}; \quad U j U^{-1} = -j;$$

$$(Г) w^\tau(-\lambda) = U w(\lambda) U^{-1}; \quad U j U^{-1} = -j.$$

**Теорема 2.2.** Для того чтобы матричный узел удовлетворял одному из условий  $(A - \Gamma)$ , необходимо и достаточно, чтобы его х. м. — ф. удовлетворяла такому же условию. Для того чтобы операторный узел  $M(T)$  удовлетворял одному из условий  $(A - \Gamma)$  относительно некоторой инволюции, необходимо и достаточно, чтобы среди его матричных узлов нашелся такой, х. м. — ф. которого удовлетворяет соответствующему условию с единичной матрицей  $U$ .

**Теорема 2.3.** Если  $T$  — линейный оператор, удовлетворяющий одному из условий  $(A - \Gamma)$ , то для любой его минимальной х. м. — ф. найдется такая пара постоянных унитарных матриц  $\varphi$  и  $\psi$ , что

$$(A) \overline{w(\bar{\lambda})} = \varphi w(\lambda) \psi \quad (B) w^\tau(\lambda) = \varphi w(\lambda) \psi;$$

$$(B) \overline{w(-\bar{\lambda})} = \varphi w(\lambda) \psi \quad (Г) w^\tau(-\lambda) = \varphi w(\lambda) \psi.$$

*Следствие.* Если  $T - K$  — симметричный оператор, а  $K^2 = -I$  ( $K^2 \neq \pm I$ ), то среди  $n^2$  элементов любой его минимальной х. м. — ф. найдется не более  $\frac{n(n+1)}{2} \left( \frac{n(n-1)}{2}, 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \right)$  линейно-независимых функций,

Пусть  $n$  означает ранг неэрмитовости оператора  $T$ . Используя теорему 2. 3 и ее следствие, получим такие результаты:

1. Если  $T$   $K$  — вещественный оператор, то  $n$  — четное. Для любого  $n = 2k > 0$  существуют как  $K$  — вещественные операторы, так и операторы, не являющиеся  $K$  — вещественными ни при каком  $K$ .

2. При любом  $n > 1$  существуют как  $K$  — симметричные операторы, так и операторы, не являющиеся  $K$  — симметричными ни при каком  $K$ .

3. При  $n = 1$  всякий оператор  $K$  — симметричен, причем  $K$  — инволюция.

4. Если  $K$  — симметричный оператор  $T$  имеет  $n = 2$ , то либо  $K$  — инволюция, либо антиинволюция, причем в последнем случае  $T = T_1 \oplus T_1$ , так что существует еще инволюция, с которой  $T$  также связан условием (В).

### § 3. Метрические узлы и их преобразования

Операторный комплекс  $L(T) = [(H, T), \Gamma, (E, J)]$  будем называть метрическим узлом [2, 3, 4], если  $H, E$  — гильбертовы пространства,  $T \in [H, H]$ ,  $\Gamma \in [E, H]$ ,  $J \in [E, E]$ ,  $J^2 = I$ ,  $J = J^*$ ,  $I - T^*T = \Gamma J \Gamma^*$ .

Всякий  $T \in [H, H]$  можно включить в метрический узел  $L_0(T)$ , полагая [2, 4]:

$$E = \overline{(I - T^*T)H}; J = \text{Sign}(I - T^*T)|E; \Gamma = |I - T^*T|^{\frac{1}{2}}|E.$$

Этот узел  $L_0(T)$  будем называть стандартным метрическим узлом оператора  $T$ . Введем следующие преобразования метрических узлов:

$$L_-(T) = [(H, -T), \Gamma, (E, J)] = L(-T)$$

$$L_K(T) = L(K_1TK_1^{-1}) = [K_1H, K_1TK_1^{-1}], K_1\Gamma K_2^{-1}, (K_2E, K_2JK_2^{-1})].$$

*Определение.* Метрический узел будем называть  $K$  — вещественным ( $K$  — мнимым), если существует такая пара АУО  $K_1, K_2$ , что

$$(A) L_K(T) = L(T) \quad (B) L_K(T) = L_-(T).$$

Метрический узел будем называть  $K$  — симметрическим ( $K$  — кососимметрическим), если существует такая пара АУО  $K_1, K_2$  и такой узел  $L_1(T^*)$ , что

$$(B) L_K(T) = L_1(T^*) \quad (\Gamma) L_K(T) = L_1(-T^*).$$

**Теорема 3. 1.** Если  $T$  удовлетворяет одному из условий (А — Г), то его стандартный узел  $L_0(T)$  удовлетворяет тому же условию.



Если  $T \in [H, H]$  и  $T^{-1} \in [H, H]$ , то  $T$  можно включить в узел, который мы будем называть, по предложению М. С. Лившица, двойным метрическим узлом [3, 4]

$$\Delta(T) = [L(T), \Phi] = [(H, T), \Gamma, (E, J, \Phi)],$$

$$\text{где } \Phi = U(I - J\Gamma^*\Gamma)^{\frac{1}{2}}, \quad U = U^*JU, \quad J - \Gamma^*\Gamma = \Phi^*J\Phi.$$

Рассмотрим следующие операции над двойными метрическими узлами:

$$\Delta_-(T) = [L_-(T), \Phi]; \quad \Delta_K(T) = [L_K(T), K_2\Phi K_2^{-1}];$$

$$\Delta^*(T) = [(H, T), T\Gamma\Phi^{-1}J, (E, J, \Phi^*)]$$

(узел  $\Delta^*(T)$  введен А. А. Янцевичем).

Можно проверить, что эти операторные узлы являются двойными метрическими узлами, причем повторное применение этих операций возвращает нас к исходному узлу.

*Определение.* Двойной метрический узел будем называть  $K$  — вещественным ( $K$  — мнимым,  $K$  — симметрическим,  $K$  — кососимметрическим), если существует такая пара АУО  $K_1, K_2$ , что выполняется условие:

$$(A) \Delta_K = \Delta \quad (B) \Delta_K = \Delta_- \quad (B) \Delta_K = \Delta^* \quad (Г) \Delta_K = \Delta_-^*.$$

**Теорема 3.2.** Если оператор удовлетворяет одному из условий  $(A - \Gamma)$ , то его можно включить в двойной метрический узел, удовлетворяющий такому же условию.

Каждому двойному метрическому узлу соответствует х. м. — ф. [3, 4]

$$\Theta_\Delta(\xi) = J(\Phi^*)^{-1} [J - \Gamma^*(I - \xi T^*)^{-1}\Gamma].$$

Можно проверить, что преобразованным узлам соответствуют х. м. — ф.

$$\Theta_{\Delta_-}(\xi) = \Theta_\Delta(-\xi); \quad \Theta_{\Delta_K}(\xi) = K_2\Theta_\Delta(\bar{\xi})K_2^{-1}; \quad \Theta_{\Delta^*}(\xi) = [\Theta_\Delta(\bar{\xi})]^*.$$

Отсюда не трудно получить утверждение:

**Теорема 3.3.** Для того чтобы двойной метрический узел вполне неунитарного оператора  $T$  удовлетворял одному из условий  $(A - \Gamma)$ , необходимо и достаточно, чтобы существовал такой АУО  $K_2$ , что

$$(A) K_2\Theta_\Delta(\bar{\xi})K_2^{-1} = \Theta_\Delta(\xi); \quad K_2JK_2^{-1} = J;$$

$$(B) K_2\Theta_\Delta(-\bar{\xi})K_2^{-1} = \Theta_\Delta(\xi); \quad K_2JK_2^{-1} = J;$$

$$(B) K_2\Theta_\Delta(\bar{\xi})K_2^{-1} = \Theta_\Delta^*(\xi); \quad K_2JK_2^{-1} = J;$$

$$(Г) K_2\Theta_\Delta(-\bar{\xi})K_2^{-1} = \Theta_\Delta^*(\xi); \quad K_2JK_2^{-1} = J.$$

При этом, если  $K_2^2 = \pm I$ , то  $K_1^2 = \pm I$ .

ПРИМЕЧАНИЕ. Условия (А, Б) теорем 1. 2 и 2. 1. для случая инволюции имеются в работах [8, 6], условие (В) теорем 1. 2 и 2. 2 и следствие теоремы 2. 3. для случая инволюции имеется в [7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский. Треугольные и кордановы представления линейных операторов. «Наука», М., 1969.
2. М. С. Лившиц. О неунитарных представлениях групп. «Функ. анализ», 3, вып. 1, 1969, 62—71.
3. В. М. Бродский. Некоторые теоремы об узлах и их характеристических функциях. «Функ. анализ», 4, вып. 3, 1970, 95—96.
4. В. М. Бродский, И. Ц. Гохберг, М. К. Крейн. Определение и основные свойства характеристической функции  $U$  — узла. «Функ. анализ», 4, вып. 1, 1970, 88—90.
5. Ю. Л. Шмульян. Дробно-линейные преобразования в пространстве с инволюцией. «Изв. вузов. Матем.», № 281 1969 — 117—126.
6. В. И. Годиц. Критерий  $(I_1, I_2)$  — одноклоточности  $(I_1, I_2)$  — бисимметричных операторов. «Доповіді АН УРСР», № 12, 1969.
7. И. Е. Луценко. Об инволюциях линейных операторов. НДВШ, № 6, 1959.
8. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны, «Наука», 1966.

## СИММЕТРИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НОРМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

### Ш. Асади

Антиунитарным оператором (АУО) называется отображение  $K$  всего гильбертова пространства  $H$  на себя, удовлетворяющее условию  $(Kf, Kg) = (\overline{f}, \overline{g})$ ; если при этом  $K^2 = I$  ( $I$  — единичный оператор), то  $K$  называется инволюцией или оператором комплексного сопряжения. Если ограниченный линейный оператор  $T$  связан с некоторым АУО  $K$  одним из условий

$$(I) \quad KTK^{-1} = T \quad (II) \quad KTK^{-1} = -T$$

$$(III) \quad KTK^{-1} = T^* \quad (IV) \quad KTK^{-1} = -T^*,$$

то  $T$  называется  $K$  — вещественным (I),  $K$  — мнимым (II),  $K$  — симметрическим (III),  $K$  — кососимметрическим (IV) [1].

Условие (I) обеспечивает симметрию спектра  $T$  относительно вещественной оси, условие (II) — относительно мнимой оси, условие (IV) — относительно начала координат [1]. Обратное неверно: существуют, например, операторы с чисто вещественным спектром, не удовлетворяющие условию (I) ни при каком  $K$  ([1], пример 2). В данной статье показано, что для нормального оператора симметрия спектральной функции (разложения единицы) обеспечивает выполнение условий (I), (II) или (IV). Заметим, что условие (III) выполняется для любого нормального оператора [1].



Самосопряженный оператор. Для каждого  $A = A^*$  существует такая инволюция  $J$  ( $J^{-1} = J$ ), что  $JAJ = A$  [3], и если  $KAJ^{-1} = -A$ , то унитарный оператор  $V = KJ$  связан с  $A$  условием  $VAV^{-1} = -A$ . Наоборот, если  $VAV^{-1} = -A$ , где  $V$  — унитарный оператор, то АУО  $K = VJ$  связан с  $A$  условием (II) при условии, что  $JAJ = A$ .

Пусть  $E(t)$  — полунепрерывная слева спектральная функция оператора  $A$ , а  $\hat{E}(t)$  — полунепрерывная справа спектральная функция того же оператора. Легко видеть, что оператору  $VAV^{-1}$  соответствует спектральная функция  $VE(t)V^{-1}$ , а оператору  $(-A)$  функция  $I - \hat{E}(-t)$ .

**Теорема 1.** Для того чтобы существовал АУО  $K$ , связанный с самосопряженным оператором  $A$  условием (II), необходимо и достаточно, чтобы существовал такой унитарный оператор  $V$ , что при всех  $(t)$

$$VE(t)V^{-1} = I - \hat{E}(-t). \quad (1)$$

При выполнении условия (1) в качестве  $K$  можно взять  $VJ$ , где  $J$  инволюция, удовлетворяющая условию  $JAJ = A$ .

Если ввести обозначения  $\Delta = [\alpha, \beta]$ ,  $-\Delta = [-\beta, -\alpha]$   $E^+(\Delta) = E(\beta + 0) - E(\alpha)$ , то условие (1) можно заменить эквивалентным условием (2), выражающим симметрию спектральной функции относительно нуля:

$$VE^+(\Delta)V^{-1} = E^+(-\Delta). \quad (2)$$

**Нормальные операторы.** Пусть  $T$  — ограниченный нормальный оператор, т. е.  $T = A + iB$ , где  $A = A^*$ ,  $B = B^*$ ,  $AB = BA$ . Тогда [1] существует такая инволюция  $J$ , что  $JAJ = A$ ,  $JB = B$ , а значит  $JTJ = T^*$ . Если  $KTJ^{-1} = T$ , то  $KAJ^{-1} = A$ ,  $KBK^{-1} = -B$  и наоборот. Пусть  $E_x(t)$  — спектральная функция  $A$ , а  $E_y(s)$  — оператора  $B$ . Тогда условие  $\{KAJ^{-1} = A, KBK^{-1} = -B\}$  эквивалентно существованию унитарного оператора  $V (= KJ)$ , удовлетворяющего при всех  $\Delta$  условию

$$VE_x^+(\Delta)V^{-1} = E_x^+(\Delta), \quad VE_y^+(\Delta)V^{-1} = E_y^+(-\Delta). \quad (3)$$

Оператору  $T$  соответствует спектральная функция  $E(t, s) = E_x(t) \cdot E_y(s)$  и если ввести обозначения  $E^+(\Delta) = E^+(\Delta_x) \times E^+(\Delta_y)$  для  $\Delta = (\Delta_x) \cdot (\Delta_y)$ , то условие (3) окажется эквивалентным следующему условию, выражающему симметрию функции  $E(\Delta)$  относительно вещественной оси:

$$VE[(\Delta_x) \cdot (\Delta_y)]V^{-1} = E^+[(\Delta_x) \cdot (-\Delta_y)]. \quad (4)$$

**Теорема 2 (А).** Для того чтобы нормальный оператор  $T$  был  $K$  — вещественным, необходимо и достаточно, чтобы его спектральная функция была симметрична относительно вещественной оси,



Аналогичные рассуждения доказывают справедливость и следующих утверждений:

**Теорема 2 (Б).** Для того чтобы нормальный оператор был  $K$  — мнимым, необходимо и достаточно, чтобы его спектральная функция была симметрична относительно мнимой оси:

$$VE^+[(\Delta_x) \cdot (\Delta_y)]V^{-1} = E^+[( - \Delta_x) \cdot (\Delta_y)]. \quad (5)$$

**Теорема 2 (Г).** Для того чтобы нормальный оператор  $T$  был  $K$  — кососимметричным, необходимо и достаточно, чтобы его спектральная функция была симметрична относительно начала координат:

$$VE^+[(\Delta_x) \cdot (\Delta_y)]V^{-1} = E^+[( - \Delta_x) \cdot ( - \Delta_y)]. \quad (6)$$

Унитарные операторы. Для любого унитарного оператора  $U$  существует инволюция  $J$ , связанная с ним условием [3]:  $JUJ = U^*$ , поэтому существование АУО  $K$ , связанного с  $U$  условием I, II, IV эквивалентно существованию унитарного оператора  $V$ , связанного с  $U$ , соответственно, условием  $VUV^{-1} = U^*$ ,  $VUV^{-1} = -U^*$ ,  $VUV^{-1} = -U$ . Пусть  $E(\varphi)$   $2\pi$  — периодическая спектральная функция оператора  $U$ . Тогда оператору  $VUV^{-1}$  отвечает спектральная функция  $VE(\varphi)V^{-1}$ . Легко проверяется

**Лемма (А).** Спектральная функция  $E_1(\varphi)$  оператора  $U^*$  получается из спектральной функции  $E(\varphi)$  оператора  $U$  отражением относительно вещественной оси:  $E_1(\varphi) = I - \hat{E}(2\pi - \varphi)$ .

**Лемма (Б).** Спектральная функция  $E_2(\varphi)$  оператора  $-U^*$  получается из спектральной функции оператора  $U$  отражением относительно мнимой оси:

$$E_2(\varphi) = \begin{cases} \hat{E}(\pi) - \hat{E}(\pi - \varphi) & (0 \leq \varphi \leq \pi), \\ I + \hat{E}(\pi) - \hat{E}(3\pi - \varphi) & (\pi \leq \varphi \leq 2\pi). \end{cases}$$

**Лемма (Г).** [2]. Спектральная функция  $F_3(\varphi)$  оператора  $-U$  получается из спектральной функции оператора  $U$  отражением относительно начала координат:

$$E_3(\varphi) = \begin{cases} E(\varphi + \pi) - E(\pi) & (0 \leq \varphi \leq \pi), \\ I - E(\pi) + E(\varphi - \pi) & (\pi \leq \varphi \leq 2\pi). \end{cases}$$

Отсюда нетрудно получить утверждение:

**Теорема 3.** Для того чтобы унитарный оператор  $U$  был  $K$  — вещественным ( $K$  — мнимым,  $K$  — кососимметричным), необходимо и достаточно, чтобы его спектральная функция была симметрична относительно вещественной оси (мнимой оси, начала координат), т. е. чтобы существовал такой унитарный оператор  $V$ , что при всех  $(\varphi)$

$$VE(\varphi)V^{-1} = E_1(\varphi), \quad VE(\varphi)V^{-1} = E_2(\varphi), \quad VE(\varphi)V^{-1} = E_3(\varphi).$$



## ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. Асади, И. Е. Луценко. Антиунитарные преобразования линейных операторов. «Вестник Харьковского университета, механика и математика», вып. 37, 1972.

2. И. Е. Луценко. Линейные операторы, коммутирующие с антиунитарными. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 9, Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.

3. В. И. Годич, И. Е. Луценко. О представлении унитарного оператора в виде произведения двух инволюций. «УМН», т. XX, вып. 6 (126), 1965.

## ОБ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВАХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ВЕЙЛЕВСКИХ СЕМЕЙСТВ УЗЛОВ

*В. К. Дубовой*

1. **Х. о. — ф. вейлевских семейств узлов\***. При задании элементов группы Лоренца матрицами будем считать, что они действуют на векторы  $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in R^4$ , где  $p_0$  — временная, а  $p_1, p_2, p_3$  — пространственные координаты. В этих обозначениях каждый элемент  $g$  группы Лоренца задается матрицей  $\|g_{ik}\|_{i,k=0}^3$ , при этом, если  $p' = gp$ , то  $l^2(p') = l^2(p)$ ,

где 
$$l^2(p) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2.$$

Напомним, что уравнение  $l^2(p) = 0$  определяет в  $R^4$  конус, который называют световым. Внутренность светового конуса, т. е. область  $l^2(p) > 0$ , обозначим через  $D$ . Под окрестностью бесконечно удаленной точки светового конуса будем понимать любое в  $D$  множество, содержащее область вида  $l^2(p) > \rho$ ,  $\rho > 0$ .

Пусть  $E$  — векторное пространство с индефинитной метрикой и  $g \rightarrow v_g$  — унитарное представление собственной группы Лоренца  $G_+$  в  $E$ , распадающееся в прямую сумму неприводимых представлений типа  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$  и  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ . Пусть  $Q_1, -Q_2, Q_3$  — инфини-

тезимальные операторы представления  $g \rightarrow v_g$ , отвечающие гиперболическим вращениям в плоскостях  $(p_0, p_1, 0, 0)$ ,  $(p_0, 0, p_2, 0)$ ,  $(p_0, 0, 0, p_3)$  соответственно и

$$Q(p) = -Ip_0 + 2 \sum_{a=1}^3 Q_a p_a.$$

Будем считать, что функция  $W(p)$ , значения которой являются линейными операторами в  $E$ , принадлежат классу  $\Omega_{E,v}^{(F)}$ , если  $(I_{E,v}^F) W(p)$  определена в области  $D_W$ , получающейся при исклю-

\* Все рассматриваемые в статье пространства (кроме  $R^4$ ) предполагаются конечномерными векторными пространствами над полем  $C$  комплексных чисел (см. также [1, 2, 3]).



чении из области  $D$ , конечного числа двухполостных гипербо-  
лоидов вида  $l^2(p) = \rho_k$ ,  $\rho_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots, q_W$ );  
( $\Pi_{E,v}^{(F)}$ )  $W(p)$  допускает представление в виде

$$W(p) = \tilde{\omega}(l^2(p)) + \omega(l^2(p)) Q(p) \quad (p \in D_W), \quad (1)$$

где  $\tilde{\omega}(\lambda)$  и  $\omega(\lambda)$  — оператор-функции, аналитические в областях, которые представляют собой всю расширенную комплексную плоскость, за исключением конечного числа точек, каждая из которых является полюсом; при этом выполнены соотношения

$$\left. \begin{aligned} Q_\alpha \tilde{\omega}(\lambda) &= \tilde{\omega}(\lambda) Q_\alpha \\ Q_\alpha \omega(\lambda) &= -\omega(\lambda) Q_\alpha \end{aligned} \right\} (\alpha = 1, 2, 3); \quad (2)$$

( $\Pi_{E,v}^{(F)}$ ) функция  $\tilde{\omega}(\lambda^2) - \omega(\lambda^2) \lambda$ , являющаяся аналитическим продолжением функции  $W(p_0, 0, 0, 0)$  в комплексную плоскость, принадлежит классу  $\Omega^{(F)}$ .

Так как инфинитезимальные операторы  $Q_\alpha$  удовлетворяют условиям

$$Q_\alpha Q_\beta = -Q_\beta Q_\alpha, \quad Q_\alpha^2 = \frac{1}{4} I \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3; \alpha \neq \beta),$$

то легко видеть, что вместе с каждым двумя функциями класс  $\Omega_{E,v}^{(F)}$  содержит и их произведение. Кроме того, используя вид операторов  $Q_\alpha$  и (2), можно показать, что каждая функция  $W(p) \in \Omega_{E,v}^{(F)}$  преобразуется по групповому закону, т. е.

$$W(gp) = v_g W(p) v_g^{-1} \quad (p \in D_W). \quad (3)$$

*Определение.* Вейлевское семейство операторных узлов  $\tau(p) = (N(p) + A, H_{\tilde{u}, \tilde{u}}, K, E_v)$  будем называть простым, если прост узел  $(A, H, K, E)$ .

Из результатов, полученных в [3], следует, что х.о.-ф. вейлевского семейства узлов с внешним пространством  $E$  и внешним представлением  $g \rightarrow v_g$  принадлежит классу  $\Omega_{E,v}^{(F)}$ . С другой стороны справедлива

**Основная теорема 1.** Если  $W(p) \in \Omega_{E,v}^{(F)}$ , то существует такое простое вейлевское семейство узлов  $\tau(p)$ , что  $D_W \subseteq D_{W_\tau}$  и  $W_\tau(p) = W(p)$  ( $p \in D_W$ ).

*Доказательство.* Известно [см. 4], что класс  $\Omega^{(F)}$  является классом х.о.-ф. узлов, внутреннее пространство которых конечномерно и унитарно. Поэтому функции  $W(p_0, 0, 0, 0)$  с точностью до унитарной эквивалентности соответствует простой операторный узел  $\Theta = (A, H, K, E)$ , где  $H$  — конечномерное пространство с дефинитной метрикой. Функция  $W(p_0, 0, 0, 0)$  совпадает с



с рассматриваемой на вещественной оси х.о.-ф узла  $\Theta$ . Поэтому при

$$|p_0| > \max(M_W, \|A\|), \quad M_W = \max_{1 \leq k \leq q_W} \rho_k$$

имеем

$$W(p_0, 0, 0, 0) = I + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_0^{n+1}} K A^n K^+.$$

С другой стороны, в силу (1)

$$W(p_0, 0, 0, 0) = \tilde{\omega}(p_0^2) - \omega(p_0^2) p_0.$$

Следовательно,

$$\tilde{\omega}(\lambda) = I + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K A^{2n+1} K^+}{\lambda^{n+1}} (|\lambda| > \|A\|^2), \quad (4)$$

$$\omega(\lambda) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K A^{2n} K^+}{\lambda^{n+1}} (|\lambda| > \|A\|^2). \quad (5)$$

Из (4), (5) и (2) вытекает

$$\left. \begin{aligned} Q_\alpha K A^{2n+1} K^+ &= K A^{2n+1} K^+ Q_\alpha, \\ Q_\alpha K A^{2n} K^+ &= -K A^{2n} K^+ Q_\alpha \end{aligned} \right\} (\alpha = 1, 2, 3).$$

Откуда, учитывая вид операторов  $Q_\alpha$ , получаем

$$v_g K A^{2n+1} K^+ v_g^{-1} = K A^{2n+1} K^+, \quad (6)$$

$$v_g K A^{2n} K^+ v_g^{-1} = -K A^{2n} K^+ Q \left( \overset{\wedge}{g p} \right) = -Q \left( \overset{\wedge}{s g p} \right) K A^{2n} K^+, \quad (7)$$

где  $\overset{\wedge}{p} = (1, 0, 0, 0)$ , а  $s$  — матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $H_0$  линейную оболочку векторов  $A^{2n} K^+ f$  ( $n = 0, 1, 2, \dots; f \in E$ ), а через  $H_1$  линейную оболочку векторов вида  $A^{2n+1} K^+ f$  ( $n = 0, 1, 2, \dots; f \in E$ ). В силу простоты узла  $\Theta$

$$H = H_0 + H_1.$$

Из (6) и (7) следует, что пространства  $\text{Ker}(A^n K^+)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) инвариантны относительно операторов  $v_g$ . Поэтому на

$\Delta_n = A^n K^+ (E)$  можно определить представление  $g \rightarrow \omega_g^{(n)}$  группы  $G_+$ , положив

$$\omega_g^{(n)} A^n K^+ = A^n K^+ v_g.$$

Из (7) находим

$$\begin{aligned} K A^{2m} \omega_g^{(2n)} A^{2n} K^+ &= K A^{2m} A^{2n} K^+ v_g = \\ &= -v_g Q \left( s g^{-1} \hat{p} \right) K A^{2m} A^{2n} K^+. \end{aligned}$$

Далее, в силу (6)

$$K A^{2m+1} \omega_g^{(2n)} A^{2n} K^+ = K A^{2m+1} A^{2n} K^+ v_g = v_g K A^{2m+1} A^{2n} K^+.$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} K A^{2m} \omega_g^{(2n)} h &= -v_g Q \left( s g^{-1} \hat{p} \right) K A^{2m} h, \\ K A^{2m+1} \omega_g^{(2n)} h &= v_g K A^{2m+1} h \\ (h \in \Delta_{2n}; m, n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Отсюда вытекает, что в  $H_0$  можно определить представление  $g \rightarrow \tilde{\omega}_g$  группы  $G_+$ , положив

$$\tilde{\omega}_g h = \omega_g^{(2n)} h \quad (h \in \Delta_{2n}, n = 0, 1, 2, \dots),$$

при этом выполнены соотношения

$$\left. \begin{aligned} K A^{2m} \tilde{\omega}_g h &= -v_g Q \left( s g^{-1} \hat{p} \right) K A^{2m} h, \\ K A^{2m+1} \tilde{\omega}_g h &= v_g K A^{2m+1} h \\ (h \in H_0, m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Как и (8), можно показать, что

$$\begin{aligned} K A^{2m} \omega_g^{(2n+1)} h &= v_g K A^{2m} h, \\ K A^{2m+1} \omega_g^{(2n+1)} h &= -v_g Q \left( s g^{-1} \hat{p} \right) h \\ (h \in \Delta_{2n+1}; m, n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Следовательно, в  $H_1$  можно определить представление  $g \rightarrow \omega_g$  группы  $G_+$ , положив

$$\omega_g h = \omega_g^{(2n+1)} h \quad (h \in \Delta_{2n+1}, n = 0, 1, 2, \dots),$$

при этом справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} K A^{2m} \omega_g h &= v_g K A^{2m} h, \\ K A^{2m+1} \omega_g h &= -v_g Q \left( s g^{-1} \hat{p} \right) K A^{2m+1} h \\ (h \in H_1, m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$



Можно показать, что представления  $g \rightarrow \tilde{\omega}_g$ ,  $g \rightarrow \omega_g$  нормальны соответственно в  $H_0$  и  $H_1$ . Значит,

$$\tilde{\omega}_g^{*-1} = \tilde{\omega}_g^{*-1}, \quad \omega_g^{*-1} = \omega_g^{*-1}.$$

Учитывая это, из (10) получаем

$$\left. \begin{aligned} KA^{2m}\omega_g^{*-1}h &= v_{g^{*-1}}KA^{2m}h, \\ KA^{2m+1}\omega_g^{*-1}h &= -v_{g^{*-1}}Q(sg^*p)KA^{2m+1}h \\ (h \in H_1, m = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Так как

$$\begin{aligned} v_{g^{*-1}} &= -v_gQ(sg^{-1}p), \\ -v_{g^{*-1}}Q(sg^*p) &= v_g, \end{aligned}$$

то из (9) и (11) заключаем

$$KA^{2m}\tilde{\omega}_gh = KA^{2m}\omega_g^{*-1}h \quad (h \in H_0 \cap H_1; m = 0, 1, 2, \dots).$$

Следовательно,

$$\tilde{\omega}_gh = \omega_g^{*-1}h, \quad h \in H_0 \cap H_1.$$

Аналогично можно показать, что

$$\tilde{\omega}_g^{*-1}h = \omega_g h, \quad h \in H_0 \cap H_1.$$

Значит, в  $H$  можно определить пару представлений  $g \rightarrow \tilde{u}_g$ ,  $g \rightarrow u_g$  группы  $G_+$ , положив

$$\tilde{u}_gh_0 = \tilde{\omega}_gh_0, \quad \tilde{u}_gh_1 = \omega_g^{*-1}h_1,$$

$$u_gh_0 = \tilde{\omega}_g^{*-1}h_0, \quad u_gh_1 = \omega_g h_1,$$

где  $h_i \in H_i$  ( $i = 0, 1$ ).

Можно показать, что представления  $g \rightarrow \tilde{u}_g$ ,  $g \rightarrow u_g$  нормальны, их инвариантные подпространства совпадают и  $\tilde{u}_g = u_g^{*-1}$ .

Пусть  $\frac{1}{2}N_1$ ,  $-\frac{1}{2}N_2$ ,  $\frac{1}{2}N_3$  — инфинитезимальные операторы представления  $g \rightarrow u_g$ , отвечающие гиперболическим вращениям в плоскостях  $(p_0, p_1, 0, 0)$ ,  $(p_0, 0, p_2, 0)$ ,  $(p_0, 0, 0, p_3)$  соответственно. Покажем, что совокупность операторных узлов

$$\tau(p) = \left( -N_0p_0 + \sum_{\alpha=1}^3 N_\alpha p_\alpha + A, H_{u, u}, K, E_v \right),$$

где  $N_0 = I$ , является вейлевским семейством узлов. Очевидно, совокупность  $(\{N_k\}_{k=0}^3, H_{u,u}^{\sim})$  — связка. Поэтому достаточно про-

верить, что узел  $\tilde{\Theta} = (A, H_{u,u}^{\sim}, K, E_v)$  инвариантен относительно группы  $G_+$ . Из выведенных ранее соотношений следует

$$\begin{aligned}\tilde{u}_g A A^{2n+1} K^+ &= \tilde{w}_g A A^{2n+1} K^+ = A A^{2n+1} K^+ v_g = \\ &= A w_g A^{2n+1} K^+ = A u_g A^{2n+1} K^+, \\ \tilde{u}_g A A^{2n} K^+ &= u_g^* A A^{2n} K^+ = w_g^* A A^{2n} K^+ = A A^{2n} K^+ v_g^* = \\ &= A \tilde{w}_g^{-1} A^{2n} K^+ = A u_g A^{2n} K^+.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{u}_g A A^n K^+ = A u_g A^n K^+ \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Откуда, учитывая простоту узла  $\tilde{\Theta}$ , получаем

$$\tilde{u}_g A = A u_g.$$

Далее,

$$\tilde{u}_g K^+ = \tilde{w}_g K^+ = K^+ v_g. \quad (12)$$

Так как  $v_g^+ = v_g^{-1}$ ,  $\tilde{u}_g = u_g^{*-1}$ , то из (12) следует  $v_g K = K u_g$ ,

и инвариантность узла  $\tilde{\Theta}$  доказана.

Пусть  $W_\tau(p)$  — х.о.ф. вейлевского семейства узлов  $\tau(p)$ . Очевидно,

$$W_\tau(p_0, 0, 0, 0) = W(p_0, 0, 0, 0), \quad (p_0, 0, 0, 0) \in D_W.$$

Учитывая групповой закон преобразования функций  $W_\tau(p)$  и  $W(p)$ , получаем

$$W_\tau(p) = W(p) \quad (p \in D_W),$$

и теорема полностью доказана.

При доказательстве основной теоремы был получен следующий результат:

**Теорема 2.** Внутренние представления простого вейлевского семейства узлов  $\tau(p) = (N(p) + A, H_{u,u}^{\sim}, K, E_v)$  однозначно определяются по узлу  $(A, H, K, E)$  и внешнему представлению  $g \rightarrow v_g$ .

**2. Унитарно эквивалентные вейлевские семейства узлов.** Будем говорить, что вейлевские семейства узлов

$$\tau_i(p) = \left( -N_0^{(i)} p_0 + \sum_{\alpha=1}^3 N_\alpha^{(i)} p_\alpha + A_i, H_{u^{(i)}, u^{(i)}}^{\sim}, K_i, E_v \right) \quad (i = 1, 2)$$



унитарно эквивалентны, если существует такое изометрическое отображение  $U$  пространства  $H^{(1)}$  на  $H^{(2)}$ , что

$$UA_1 = A_2U, \quad K_1 = K_2U, \quad (13)$$

$$Uu_g^{(1)} = u_g^{(2)}U, \quad (14)$$

$$U\tilde{u}_g^{(1)} = \tilde{u}_g^{(2)}U, \quad (15)$$

$$UN_k^{(1)} = N_k^{(2)}U \quad (k = 0, 1, 2, 3). \quad (16)$$

Так как  $\tilde{u}_g^{(i)} = u_g^{(i)*-1}$  и операторы  $\frac{1}{2}N_1^{(i)}, -\frac{1}{2}N_2^{(i)}, \frac{1}{2}N_3^{(i)}$  являются инфинитезимальными операторами представления  $g \rightarrow u_g^{(i)}$ , то (15) и (16) следуют из (14).

Из (13) и (16) вытекает, что  $D_{W_{\tau_1}} = D_{W_{\tau_2}}$  и  $W_{\tau_1}(p) = W_{\tau_2}(p) \pm \pm (p \in D_{W_{\tau_1}})$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\tau_i(p) = (N_{(p)}^{(i)} + A_i, H_{u^{(i)}, u^{(i)}}^{(i)}, K_i, E_v)$  ( $i = 1, 2$ ) простые вейлевские семейства узлов. Если в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки светового конуса

$$W_{\tau_1}(p) = W_{\tau_2}(p),$$

то  $\tau_1(p)$  и  $\tau_2(p)$  унитарно эквивалентны.

*Доказательство.* В силу условия теоремы существует такое  $M > 0$ , что

$$W_{\tau_1}(p_0, 0, 0, 0) = W_{\tau_2}(p_0, 0, 0, 0) \quad (|p_0| > M).$$

Отсюда, учитывая простоту семейств  $\tau_1(p)$  и  $\tau_2(p)$ , получаем унитарную эквивалентность узлов  $\theta_i = (A_i, H^{(i)}, K_i, E)$ . Поэтому доказываемое утверждение является следствием теоремы 2.

**3. Делители и правильные делители функций класса  $\mathcal{Q}_{E,v}^{(F)}$ .** Будем говорить, что функция  $W_1(p) \in \mathcal{Q}_{E,v}^{(F)}$  является делителем функции  $W_2(p) \in \mathcal{Q}_{E,v}^{(F)}$ , если существует такая функция  $W_{12}(p) \in \mathcal{Q}_{E,v}^{(F)}$ , что в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки светового конуса

$$W_2(p) = W_1(p) W_{12}(p).$$

Функцию  $W_1(p)$  назовем правильным делителем функции  $W_2(p)$ , если сцепление  $\tau_1(p) V_{\tau_{12}(p)}$  простых вейлевских семейств узлов  $\tau_1(p) = (N_{(p)}^{(1)} + A_1, H_{u^{(1)}, u^{(1)}}^{(1)}, K_1, E_v)$  и  $\tau_{12}(p) = (N^{(12)}(p) + A_{12}, H_{u^{(12)}, u^{(12)}}^{(12)}, K_{12}, E_v)$  для которых  $W_{\tau_1}(p) = W_1(p)$  и  $W_{\tau_{12}}(p) = W_{12}(p)$ , есть простое вейлевское семейство узлов.

Заметим, что определение правильного делителя не связано с выбором семейств узлов  $\tau_1(p)$  и  $\tau_{12}(p)$ .

Вейлевское семейство узлов  $\tau_1(p)$  будем называть делителем вейлевского семейства узлов  $\tau(p) = (N(p) + A, H_{\sim}^{u,u}, K, E_v)$ , если  $\tau_1(p)$  является проекцией семейства узлов  $\tau(p)$  на некоторое инвариантное относительно оператора  $A$  подпространство.

**Теорема 4.** Пусть  $W(p) \in \Omega_{E,v}^{(F)}$  и  $\tau(p) = (N(p) + A, H_{\sim}^{u,u}, K, E_v)$  — простое вейлевское семейство узлов такое, что  $W_{\tau}(p) = W(p)$ . Для того чтобы функция  $W_1(p)$  была правильным делителем функции  $W(p)$ , необходимо и достаточно, чтобы она являлась х.о. — ф. некоторого делителя семейства узлов  $\tau(p)$ .

**Теорема 5.** Пусть  $\tau_1(p)$  и  $\tau_2(p)$  — делители простого вейлевского семейства узлов  $\tau(p)$ . Для того чтобы семейство узлов  $\tau_1(p)$  было делителем семейства узлов  $\tau_2(p)$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $W_{\tau_1}(p)$  была делителем функции  $W_{\tau_2}(p)$ .

Теоремы 4 и 5 доказываются аналогично соответствующим утверждениям из теории делителей х.о.-ф. узлов [см. 4]. Наконец, отметим без доказательства, что справедлива следующая

**Теорема 6.** Пусть  $W(p) \in \Omega_{E,v}^{(F)}$  и  $\tau(p) = (N(p) + A, H_{\sim}^{u,u}, K, E_v)$  — простое вейлевское семейство узлов такое, что  $W_{\tau}(p) = W(p)$ . Для того чтобы функция  $W_1(p)$  была правильным делителем функции  $W(p)$ , необходимо и достаточно, чтобы аналитическое продолжение в комплексную плоскость функции  $W(p_0, 0, 0, 0)$  являлось правильным делителем х.о.-ф. узла  $(A, H, K, E)$ .

**4. Разложение функций класса  $\Omega_{E,v}^{(F)}$  на множители.** Пусть  $\tau(p) = (N(p) + A, H_{\sim}^{u,u}, K, E_v)$  — вейлевское семейство узлов.

Из унитарности представления  $g \rightarrow v_g$  следует, что в  $E$  существует базис  $\{e_k\}_{k=1}^{4r}$  (будем называть его каноническим) такой, что\*

$$1) (f_1, f_2) = \sum_{k=1}^{4r} f_1^{(k)} \bar{f}_2^{(4r-k+1)},$$

$$f_i = \sum_{k=1}^{4r} f_i^{(k)} e_k \quad (i = 1, 2);$$

2) матрицы операторов  $v_g$  в этом базисе имеют вид

$$\begin{pmatrix} c_g & & & \\ & \ddots & & \\ & & c_g & \\ & & & c_g^{*-1} \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_g^{*-1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

\* Существование такого базиса следует из общего результата, доказательство которого имеется в [5, 325—336].



Введем в  $E$  дефинитную метрику, положив

$$[f_1, f_2] = \sum_k f_1^{(k)} \bar{f}_2^{(k)}.$$

Тогда  $(f_1, f_2) = [Jf_1, f_2]$ , причем матрица оператора  $J$  в каноническом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & I_2 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ I_2 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

В дальнейшем все рассмотрения в  $E$  будут вестись в каноническом базисе. При этом любому оператору  $C$  в  $E$  будем ставить в соответствие матрицу  $(c_{ij})_{i,j=1}^{4r}$ , положив

$$Ce_j = \sum_i c_{ij} e_i.$$

Обозначим через  $K^*$  оператор, сопряженный к  $K$  в дефинитной метрике, т. е.

$$[Kh, f] = (h, K^*f), \quad h \in H, f \in E.$$

Очевидно,  $K^+ = K^*J$ . Заметим, что операторы  $Q_\alpha$  в силу (17) задаются в каноническом базисе пространства  $E$  матрицами

$$\Lambda_{\sigma_\alpha} = \begin{vmatrix} \sigma_\alpha & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_\alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & \sigma_\alpha \end{vmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Поэтому в каноническом базисе

$$Q(p) = -Ip_0 + \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_{\sigma_\alpha} p_\alpha. \quad (18)$$

В [2] было показано, что любое вейлевское семейство узлов  $\tau(p)$  с внешним пространством  $E$  и внешним представлением  $g \rightarrow v_g$  представимо в виде сцепления неразложимых вейлевских семейств узлов трех видов:

$$1) \quad \tilde{\tau}_1(p) = \left( -\sigma_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha p_\alpha, H_{u^{(1)}, u^{(1)}}^{(1)}, K_1, E_v \right),$$

$$\tilde{u}_g^{(1)} = c_g^{*-1}, \quad u_g = c_g;$$

$$2) \tilde{\tau}_2(p) = \left( -\tilde{\sigma}_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\sigma}_\alpha p_\alpha, H_{u^{(2)}, u^{(2)}}^{(2)}, K_2, E_v \right),$$

$$\tilde{u}_g^{(2)} = c_g, \quad u_g = c_g^{-1};$$

$$3) \tilde{\tau}_3(p) = \left( -N_0 p_0 + \sum_{\alpha=1}^3 N_\alpha p_\alpha + A, H_{u^{(3)}, u^{(3)}}^{(3)}, K_3, E_v \right),$$

при этом в  $H^{(3)}$  можно указать такой канонический базис, в котором

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} I_2 \\ \mu I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \quad \mu > 0;$$

$$\tilde{u}_g^{(3)} = \begin{pmatrix} c_g^{-1} & 0 \\ 0 & c_g \end{pmatrix}, \quad u_g^{(3)} = \begin{pmatrix} c_g & 0 \\ 0 & c_g^{-1} \end{pmatrix}.$$

Используя известную лемму Шура, найдем, что операторы  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при выборе в  $H^{(i)}$  и  $E$  канонических базисов задаются матрицами

$$K_1 = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ O_{r1} \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} O_{r1} \\ \Pi_2 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} \Pi_{31} & O_{r1} \\ O_{r1} & \Pi_{32} \end{pmatrix},$$

где

$$\Pi_i = \begin{pmatrix} q_1^{(i)} I_2 \\ \vdots \\ q_r^{(i)} I_2 \end{pmatrix}, \quad \Pi_{3i} = \begin{pmatrix} q_1^{(3i)} I_2 \\ \vdots \\ q_r^{(3i)} I_2 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2),$$

а  $O_{ji}$  — нулевая матрица с  $2j$  строками и  $2i$  столбцами. Заметим, что из условия узла следует

$$\Pi_{31}^* \Pi_{32} = \frac{1}{i} \left( \frac{\lambda}{\mu} - \bar{\lambda} \mu \right).$$

Пользуясь формулами (4), (5), найдем, что х. о. -ф.  $W_{\tau_j}^{\sim}(p)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в каноническом базисе пространства  $E$  имеют вид

$$W_{\tau_1}^{\sim}(p) = I - \frac{i}{l^2(p)} \begin{pmatrix} O_{rr} \Pi_1 \Pi_1^* \\ O_{rr} O_{rr} \end{pmatrix} Q(p), \quad (19)$$

$$W_{\tau_2}^{\sim}(p) = I - \frac{i}{l^2(p)} \begin{pmatrix} O_{rr} & O_{rr} \\ \Pi_2 \Pi_2^* O_{rr} \end{pmatrix} Q(p), \quad (20)$$



$$W_{\tau_s}(p) = I + \frac{i\lambda}{l^2(p) - \lambda^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \Pi_{31} \Pi_{32}^* & O_{rr} \\ O_{rr} & \mu \Pi_{32} \Pi_{31}^* \end{pmatrix} - \\ - \frac{i}{l^2(p) - \lambda^2} \begin{pmatrix} O_{rr} & \Pi_{31} \Pi_{31}^* \\ \Pi_{32} \Pi_{32}^* & O_{rr} \end{pmatrix} Q(p). \quad (21)$$

Определение. Функцию  $W(p) \in \Omega_{E,v}^{(F)}$  будем называть элементарной, если матрица  $W(p)$  в каноническом базисе задается при помощи одной из формул (19)–(21).

**Теорема 7.** Каждая функция  $W(p) \in \Omega_{E,v}^{(F)}$  представима в виде произведения элементарных.

*Доказательство.* Пусть  $\tau(p)$  — простое вейлевское семейство узлов такое, что  $W_{\tau}(p) = W(p)$ . Представим семейство узлов  $\tau(p)$  в виде сцепления неразложимых вейлевских семейств узлов:

$$\tau(p) = \tau_1(p) V \tau_2(p) V \dots V \tau_k(p).$$

Тогда

$$W(p) = W_{\tau_1}(p) W_{\tau_2}(p) \dots W_{\tau_k}(p),$$

и каждая из функций  $W_{\tau_j}(p)$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) элементарна.

Таким образом, класс  $\Omega_{E,v}^{(F)}$  совпадает с совокупностью всевозможных произведений элементарных функций.

Автор выражает благодарность М. С. Лившицу за постановку задачи и руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Дубовой. Инвариантные операторные узлы. «Вестник Харьковского университета, механика и математика», вып. 36, 1971.
2. В. К. Дубовой. Вейлевские семейства операторных узлов и соответствующие им открытые поля. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 14. Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.
3. В. К. Дубовой. О характеристической оператор-функции вейлевского семейства узлов. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения» вып. 15. Изд-во ХГУ, Харьков, 1972.
4. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. «Наука», 1969.
5. М. А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. Физматгиз, М., 1958.
6. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, и З. Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, М., 1955.
7. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. «Наука», 1966.
8. М. С. Лившиц, А. А. Янцевич. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.