

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна
Факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем
Кафедра _____ теоретичної радіофізики _____

ЗАТВЕРДЖУЮ

В. о. завідувача кафедри

 В. В. Хардіков
підпис ініціали, прізвище

“ ____ ” _____ 20__ року

Кваліфікаційна робота магістра

на тему: ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЗОНАТОРІ З
ІДЕАЛЬНО ПРОВІДНИМИ СТІНКАМИ, ЯКИЙ ЗАПОВНЕНО
МЕТАМАТЕРІАЛОМ З ПОКАЗНИКОМ ЗАЛОМЛЕННЯ
БЛИЗЬКИМ ДО НУЛЯ

Виконав: студент II курсу магістратури, групи РР-61
спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали,
освітньо-професійна програма «Радіофізика і електроніка»



Сергій ПОЖАРСЬКИЙ.

Керівник
доктор фіз.-мат. наук, проф



Сергій ШУЛЬГА

Консультант
канд. фіз.-мат. наук



Марія АНТЮФЄЄВА

2022 рік

РЕФЕРАТ

Пожарський С. В. Електромагнітне поле в резонаторі з ідеально провідними стінками, який заповнено метаматеріалом з показником заломлення близьким до нуля. Дипломна робота магістра за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали». Харків. Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, кафедра теоретичної радіофізики, 2022, 13 рис., 38 стор., 28 посилань.

У кваліфікаційній роботі магістра розглянуто задачу про електромагнітні поля в резонаторі, що заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля. Середовище з такими характеристиками змодельовано за допомогою полюсів Друде для ефективної діелектричної та магнітної сприйнятливості середовища, з однаковими параметрами. Отримано та проаналізовано власні характеристики такого резонатора та власні коливання, які існують у відсутності джерел.

SUMMARY

Pozharskyi S. The electromagnetic field in the cavity with perfect conducted walls, filled with a near-zero refractive index metamaterial. Thesis master on 105 «Applied physics and nanomaterials». Kharkiv. V. N. Karazin Kharkiv National University, Department of theoretical physics, 2022, 13 figures, 38 pages, 28 references.

In the master's qualification work, the problem of electromagnetic fields in a cavity, which is filled with a medium with a near-zero refractive index. A medium with such characteristics is modelled using Drude poles for the effective dielectric and magnetic susceptibility of the medium, with the same parameters. The inherent characteristics of such a resonator and the inherent oscillations that exist in the absence of sources have been obtained and analyzed.

ЗМІСТ

РЕФЕРАТ	2
SUMMARY	3
ЗМІСТ	4
ВСТУП	5
1 Аналітичний огляд	6
1.1 Середовища з показником заломлення близьким до нуля.....	6
1.2 Конуси Дірака — глибоке розуміння поведінки середовища з нульовим показником заломлення.....	13
1.3 Моделювання середовища за допомогою моделей Лоренца, Друде.....	17
2 Підхід до розв’язку задачі про електромагнітне поле в резонаторі з ідеально провідними стінками, який заповнено метаматеріалом з показником заломлення близьким до нуля	21
2.1 Представлення електромагнітних полів в резонаторі, який заповнено середовищем в рамках ЕАЕ.....	21
2.2 Еволюційні рівняння	23
2.3 Еволюційні рівняння для електромагнітного поля в резонаторі, який заповнено середовищем з показником заломлення близьким до нуля	25
2.4 Розв’язок еволюційних рівнянь (2.45) – (2.47) у випадку власних коливань у резонаторі, що заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля.....	29
3 Власні електромагнітні поля в резонаторі, що заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля	30
3.1 Параметри моделі заповнення резонатора	30
3.2 Власні характеристики резонатора із заповненням	32
Висновки	35
Посилання	36

ВСТУП

Цікавість та інтерес до вивчення поширення хвиль у середовищах модульованих у просторі та часі або взагалі залежних від часу можна простежити до десятиліть тому. У спільноті фізики плазми це дослідження прискорення фотонів за допомогою флеш-іонізації плазми через залежні від часу середовища. Нестационарні радіочастотні елементи в модуляції електричних сигналів існують десятиліттями: відомим прикладом є осцилятор, керований напругою, який використовується в частотних модуляціях. У більш широкому сенсі лінійні схеми, що змінюються в часі, привертають увагу інженерів з 1950-х років (від параметричних підсилювачів і невзаємних пристроїв в мікрохвильовій техніці, до змінних комутаційних мереж для інженерії управління). В телекомунікаційній техніці фундаментальна область досліджень зосереджена на ЕМ-випромінюванні в середовищах, де вони розрізняються за часом, такі як, наприклад, мобільний телефон під час руху, де необхідно враховувати часову та просторову зміну перешкод поблизу: лінійна дисперсія часу, таким чином, є ключовим інгредієнтом мобільного зв'язку, тому спільнота обробки сигналів присвятила багато зусиль його вивченню. Більш актуальні для електромагнітних взаємодій і матерії вже досить тривалий час присутні параметричні підсилювачі мандрівних хвиль, фазові модулятори на основі ефекту Погкельса і на рідких кристалах, п'єзооптичні перетворювачі і електрооптична модуляція кремнію носіями заряду.

Ці та інші можливості також використовують сучасні елементи для генерації та накопичення електромагнітної енергії. Тому дуже важливим є розв'язання теоретичних та практичних задач, які пов'язані з розширенням функціональності об'ємних резонаторів, як за допомогою зміни їх геометрії, так і шляхом заповнення їх середовищами з особливими електромагнітними властивостями.

1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД

1.1 Середовища з показником заломлення близьким до нуля

Структури з параметрами, близькими до нуля, демонструють низку унікальних особливостей, таких як роз'єднання просторових і часових варіацій поля, що дозволяє досліджувати якісно іншу динаміку хвиль. У цьому огляді підсумовано основні принципи та основні характеристики, фізичну реалізацію та технологічний потенціал цих структур, на жаль у даний час більшість реалізацій запропоновано у діапазоні *мкм* довжин хвиль. Але ми наведемо загальний аналіз особливого впливу таких структур на поведінку електромагнітних полів, на процеси розсіювання, направлення, захоплення та випромінювання хвиль. Також обговорюється їх роль у підкресленні вторинних реакцій матерії, таких як нелінійні, невзаємні та нелокальні ефекти.

Будь-яке середовище, ефективний показник заломлення якого змінюється з від'ємних значень на додатні значення в якомусь діапазоні частот, зобов'язане демонструвати нульовий показник заломлення на частоті переходу, тобто частоті, на якій крива показника заломлення перетинає вісь абсцисс. Цей тип дисперсії ненормальний для природних матеріалів, але вірогідний для метаматеріалів.

Коли світло переходить від одного середовища до іншого, залежно від опору двох середовищ, частина його відбивається, частина поглинається, а решта пропускається [1]. Роль узгодження імпедансу в електромагнітній передачі енергії добре визначена [2, 3–6]. Чим більше розбіжність імпедансу, тим більше відбиття і менше передача. Показники заломлення двох середовищ визначають напрямок променів, що проходять, відносно падаючих променів відповідно до закону заломлення Снеліуса. Закони заломлення та відбиття Снеліуса використовувалися протягом тривалого часу для систем, що включають природні середовища та середовища з додатним показником заломлення, і нещодавно було визнано придатними також для середовищ з від'ємним показником заломлення. Носії з нульовим

показником заломлення є останнім доповненням до цього списку, і в цьому розділі буде розглянуто, електромагнітні хвилі відбиваються або заломлюються, коли показник заломлення середовища нульовий або близький до нуля.

Розглянемо поведінку електромагнітного поля при поширенні хвилі від позитивного показника заломлення до негативного. Середовище з нульовим показником заломлення формується коли ефективні діелектрична ε та магнітна μ проникності нульові чи близькі до нуля. Можна розглянути кілька окремих варіантів, коли ε нульова, коли μ нульова, чи коли ε та μ обидві нульові. Показник заломлення та імпеданс визначаються відповідно [7, 9]

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad z = \sqrt{\mu/\varepsilon}, \quad (1.1)$$

а коефіцієнт відбиття та пропускання, для простоти вважаємо

$$R = \left| \frac{z-1}{z+1} \right|^2, \quad T = 1 - R. \quad (1.2)$$

У випадку коли $\varepsilon \approx 0$, ми маємо відповідно (1.1), (1.2) що на границі розділу середовищ електромагнітне поле повністю відбивається. У випадку коли $\mu \approx 0$ – на границі розділу середовищ електромагнітне поле також повністю відбивається, завдяки, як і в попередньому випадку невідповідності імпедансу на границі розділу середовищ. У випадку ж коли $\varepsilon \approx 0$, так і $\mu \approx 0$, імпеданс на границі розділу середовищ має кінцеве значення яке можна наблизити до одиниці, якщо зробити відносну діелектричну проникність приблизно рівною відносній проникності, тобто ($\varepsilon \approx \mu$). Тоді імпеданс такого середовища стає близьким до одиниці і коефіцієнт відбиття буде близьким до нуля, що означає повне, чи майже повне пропускання крізь границю розділу середовищ. Така характеристика є бажаною, а метаматеріал настільки стратегічно розроблений, що ε і μ обидва прагнуть до нуля на одній довжині хвилі. З іншого боку, якщо $\mu \neq \varepsilon$, коефіцієнт відбиття знаходиться в межах від 0 до 1 ($0 < R < 1$).

Розглянемо поширення хвиль з середовища з нульовим показником заломлення до середовища з додатним показником заломлення. Припустимо, що електромагнітне поле поширюється від середовища з нульовим

показником заломлення до повітря. Тепер $n_1 (\approx 0)$ – показник заломлення ZIM, а $n_2 (=1)$ – показник заломлення повітря. Відповідно до закону Снеліуса, коли світло поширюється від ZIM до повітря, кут заломлення $\theta_r = \sin^{-1}(n_1 \sin \theta_i / n_2) \approx 0$, незалежно від значення θ_i , оскільки $n_1 \approx 0$.

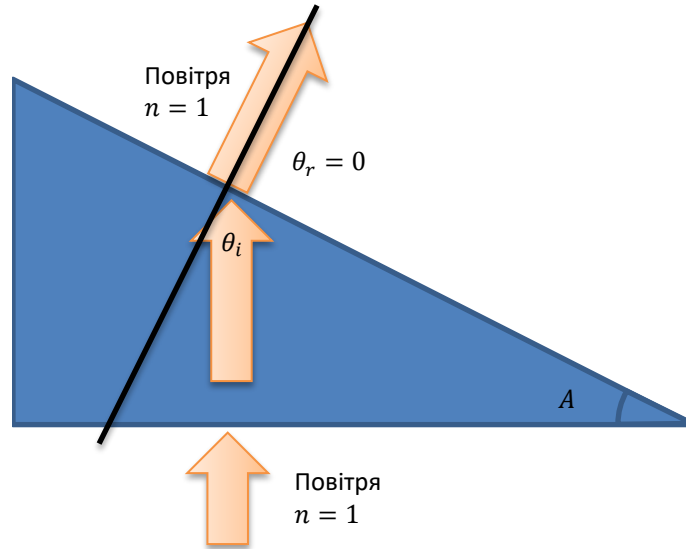


Рис. 1.1 Схематичне зображення призми з нульовим індексом, що використовується для аналізу поширення світла від середовища з нульовим показником заломлення до повітря

Простіше кажучи, електромагнітні хвилі завжди нормально виходять із середовища з нульовим індексом, незалежно від кута падіння. У цьому випадку, якщо проаналізувати у числах поширення світла від ZIM до повітря для різних кутів падіння [9], а саме, 30° , 45° та 90° , то виявляється, що світло виходить із ZIM нормально у всіх трьох випадках. Для цієї мети ми використали прямокутну призму з однорідного матеріалу з нульовим індексом, другий базовий кут A якої дорівнює бажаному куту падіння.

Конструкція показана на Рис. 1.1. Хвиля подає нормально в призму від основи так, що воно стягує кут $\theta_i = A$ на повітряній межі ZIM (гіпотенуза) відносно нормаль (пунктирна лінія). θ_i варіюється за допомогою трьох наведених вище значень шляхом зміни A . Результати моделювання [9] показано на Рис. 1.2.

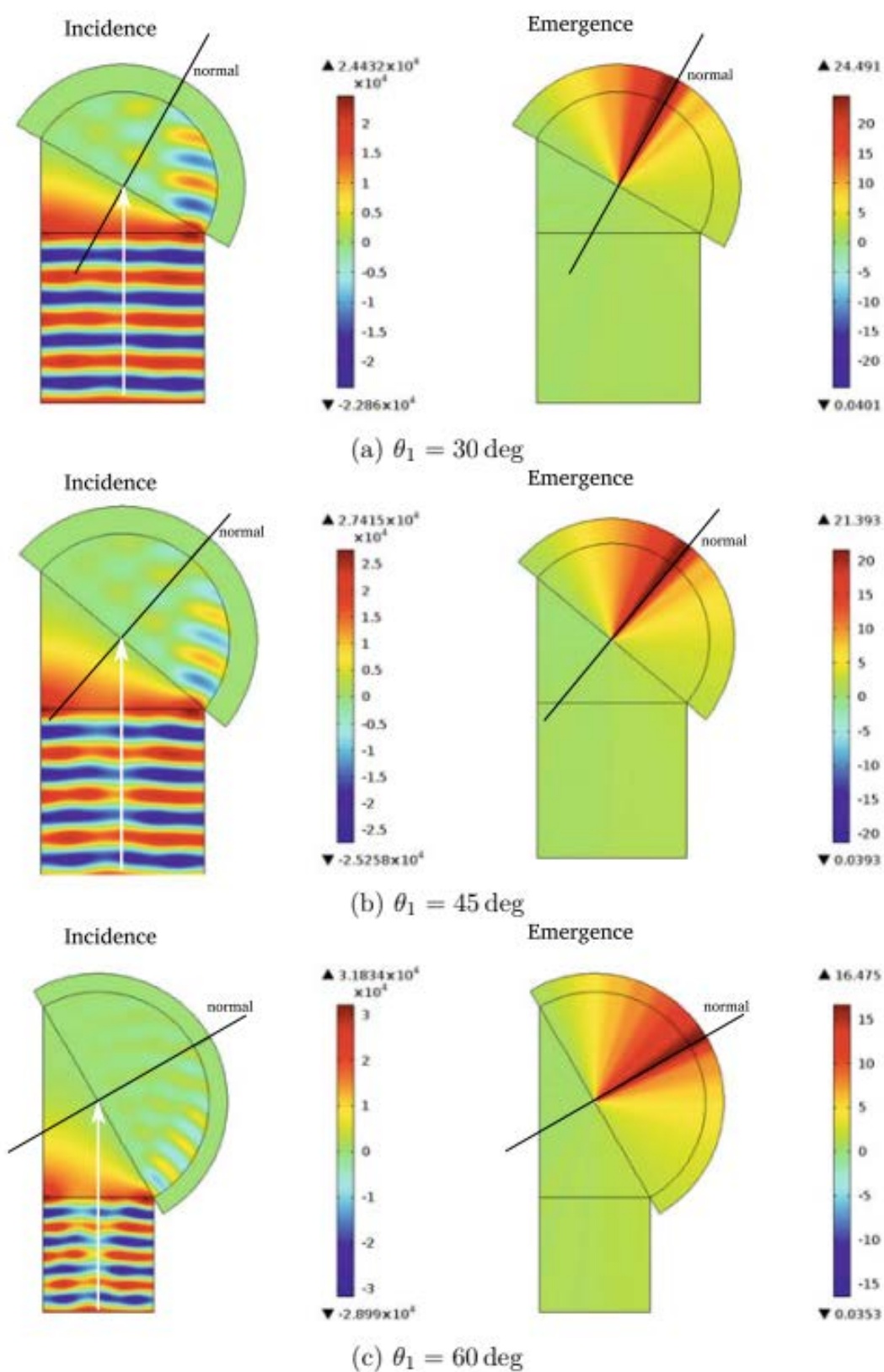


Рис. 1.2 Майже нормальний вихід незалежно від кута падіння. Ліва сторона: падаюча хвиля, що поширюється до межі ZIM–повітря для (a) $\theta_1 = 30 \text{ deg}$, (b) $\theta_1 = 45 \text{ deg}$ і (c) $\theta_1 = 60 \text{ deg}$. Права сторона: заломлений промінь, що виходить із межі ZIM–повітря. В усіх трьох випадках $\theta_2 \approx 0$.

Ліва сторона кожного рисунку з Рис. 1.2 ілюструє електричне поле падаючої хвилі, тоді як права сторона показує поле заломлюючої (або вихідної) хвилі в області дальнього поля. Причина використання області дальнього поля для показу рефракції полягає в тому, що форма променя стає видимою, а напрямок поширення та кут заломлення легше розпізнаються. У кожному випадку видно, що більша частина поля зосереджена навколо нормалі, підтверджуючи нормальне виникнення. Тут ми хочемо згадати цікавий додаток, заснований на властивості нормальної появи, а саме, управління променем. Зауважте, що зі зміною A змінюється нахил гіпотенузи, а також напрям вихідного променя відносно в горизонтальному напрямку. Таким чином, керуючи кутом A призми ZIM, можна контролювати напрямок променя, що виходить з неї.

Тут слід зазначити, що хоча в [9] проаналізували та показали вихід світла лише з гіпотенузи, випромінювання виходить також і з вертикальної сторони. Електричне поле однорідне по всьому ZIM і пронизує весь простір всередині нього. Усі точки всередині призми та на двох інших границях вібрують у тій самій фазі та величині, що й основа (тобто межа входу). Ми проілюстрували цю властивість на Рис. 1.3, використовуючи однорідний блок матеріалу з нульовим індексом. Електромагнітна хвиля потрапляє в блок з одного боку і виходить з усіх інших сторін.

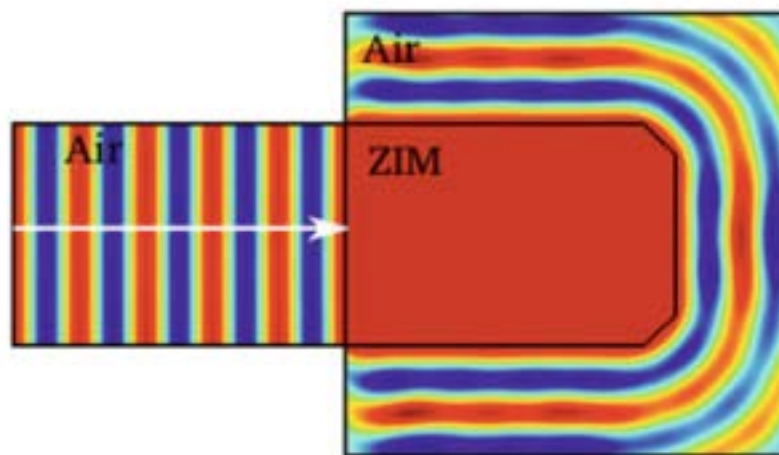


Рис. 1.3 Схема призми ZIM, яка використовується для аналізу поширення світла від ZIM до повітря [9]

На рис. 1.3 показано, що світло, що поширюється в повітрі, входить у ZIM з лівого боку, рівномірно розподіляє своє електричне поле (оскільки всередині ZIM не видно гребнів і западин) і виходить з усіх інших межі. Ця властивість ZIM може бути використана для багатьох корисних застосувань. Цим ми вважаємо, що ми пояснили властивості відбиття та заломлення метаматеріалів з нульовим індексом.

Можна стверджувати, що використовуючи рідини ($n > 1$) як оточуючі середовища, які можна видалити або замінити за бажанням (Рис. 1.4 (а)), можна досягти динамічного контролю над довжиною хвилі. В [9] перевірили здійсненність цієї техніки чисельно, і результати показані на Рис. 1.4 (с)–(d). Результати показують, що динамічного налаштування нелегко досягти. На Рис. 1.4 (с) показано необхідне значення r/a для досягнення чітко визначеного конуса Дірака (червона крива) і відповідну частоту точки Дірака (a/λ) отриманого таким чином конуса Дірака (синя крива) відносно показника заломлення (n_s) навколишнього середовища. Це означає, що якщо метаматеріал занурити в рідке середовище, він не може відразу почати працювати на іншій довжині хвилі.

Зміна показника заломлення навколишнього середовища вимагає зміни геометрії структури (тобто співвідношення r/a), а також для отримання конуса Дірака та забезпечення функціонування метаматеріалу на новій довжині хвилі.

На Рис 1.4 (d) показана залежність довжини хвилі нульового показника заломлення від навколишнього показника заломлення (n_s). Це було отримано з синьої кривої на Рис. 1.4 (с) шляхом перетворення нормалізованої частоти a/λ у довжину хвилі λ , припускаючи, що $a = 840$ нм. Хоча структуру налаштовують від 1550 до 2100 нм, це не можна назвати динамічною настроюваністю, оскільки вона вимагає зміни радіуса r стовпців.

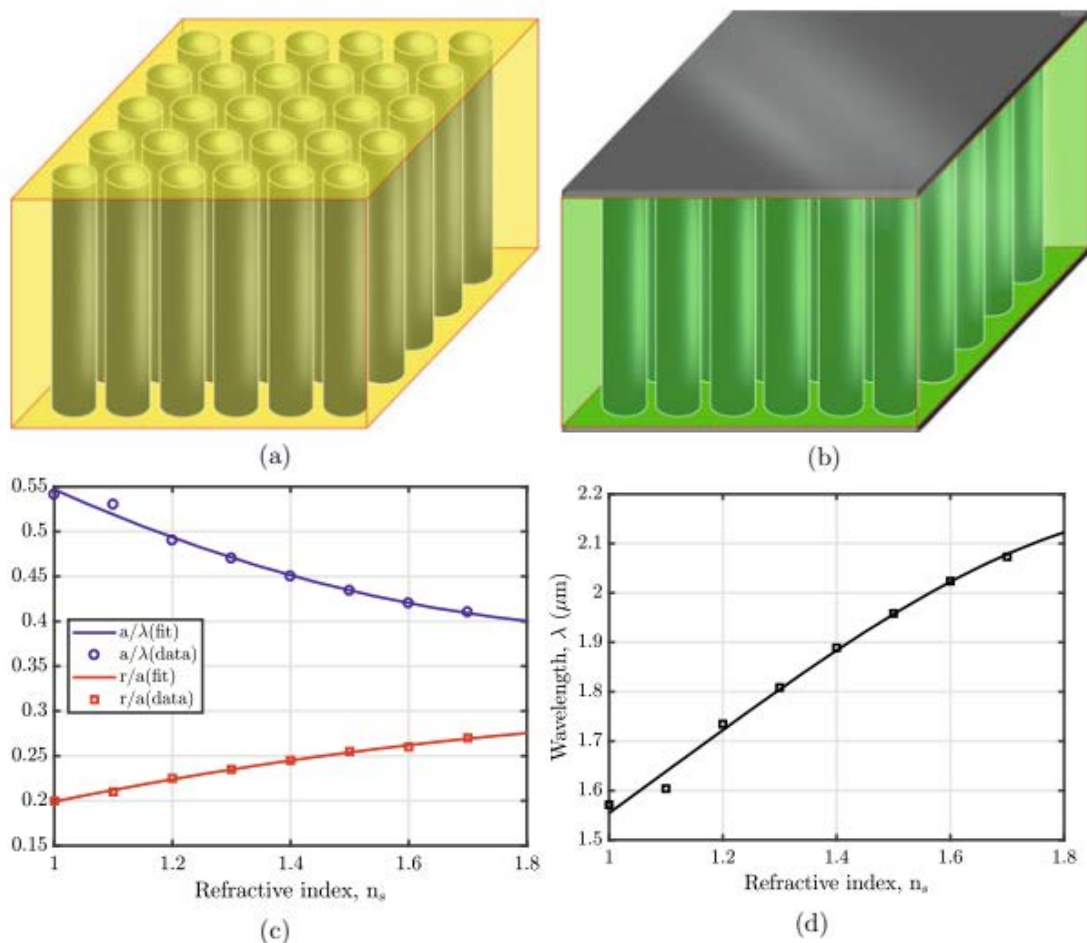


Рис. 1.4 Налаштування метаматеріалу з нульовим показником заломлення зміною навколишнього середовища та електрооптичним ефектом. **a** ZIM, вбудований у матеріал з низьким індексом, наприклад кремнезем; **b** ZIM, вбудований в електрооптичний матеріал і оснащений паралельними пластинчастими електродами для застосування зовнішнього електричного поля; **c** необхідне відношення r/a (червоний) для різних значень показника заломлення (n_s) навколишнього середовища для досягнення чітко визначеного конуса Дірака та нормалізоване положення частоти (a/λ) отриманого конуса Дірака (синій); **d** нульовий індекс довжини хвилі показник заломлення (n_s) навколишнього середовища, для $a = 840 \text{ нм}$ [9]

Однак ймовірним методом досягнення динамічної перестроюваності може бути використання електрооптичного ефекту. Можна вибрати матеріал, показник заломлення якого можна змінювати шляхом застосування сильного електричного поля. Такі матеріали називають електрооптичними. На

Рис. 1.4 (b) показано метаматеріал, вбудований в електрооптичний матеріал, такий як ніобат літію (LiNbO_3), забезпечений металевими пластинами, які служать електродами для застосування електричного поля. Показник заломлення електрооптичного матеріалу залежить від прикладеного електричного поля. Можна просунути на крок вперед, зробивши також стрижні з іншого електрооптичного матеріалу. Хоча ми не проводили ні експериментального, ні чисельного аналізу електрооптичної конструкції, ми вважаємо, що ця ідея захоплююча і варта дослідження. Перевага динамічних методів полягає в тому, що не буде необхідності створювати кілька структур, оскільки одну структуру можна використовувати для широкого діапазону довжин хвиль, просто змінюючи навколишні умови. У всіх методах налаштування, розглянутих вище, завжди повинно виконуватися універсальне правило, тобто чітко визначений конус Дірака повинен бути отриманий у зонній структурі. Якщо такі методи будуть успішно розроблені та освоєні, це буде дуже вигідно та економічно ефективно для застосувань інтегрованої оптики.

1.2 Конуси Дірака — глибоке розуміння поведінки середовища з нульовим показником заломлення

В останні роки дуже популярними тематиками досліджень стали дослідження кількох екзотичних матеріалів. Один з них — графен. Графен є двовимірним одношаровим розташуванням атомів вуглецю в гексагональній решітці (рис.1.5a). Екзотичний матеріал має структуру екзотичної зони, що має конічну форму у валентній зоні та зоні провідності, званих конусами Дірака, які перетинаються в спільній точці (Рис. 1.5b)[10][11]. Завдяки конічній формі дисперсійних поверхонь дисперсія в околицях точки Дірака є лінійною $E = \hbar k v_f$, де E — енергія, k — хвильовий вектор, $\hbar = (h/2\pi)$ — приведена стала Планка, а v_f — Швидкість Фермі. Через лінійну дисперсію поведінка електронів провідності в графені відрізняється від такої в металах і ізоляторах, які є параболічними дисперсійними матеріалами.

У 2009 році Wang та ін. [12] проаналізував можливість конусів Дірака в структурі фотонних зон типових оптичних систем і заклав фундаментальний принцип того, що пізніше призведе до появи всіх діелектричних метаматеріалів з нульовим показником заломлення. Вони стверджували, що оптична система, яка підтримує подвійні конуси Дірака, яка демонструє діраківську лінійну дисперсію (див. рис. 1.6a), є ідеальною для реалізації нульового показника заломлення.

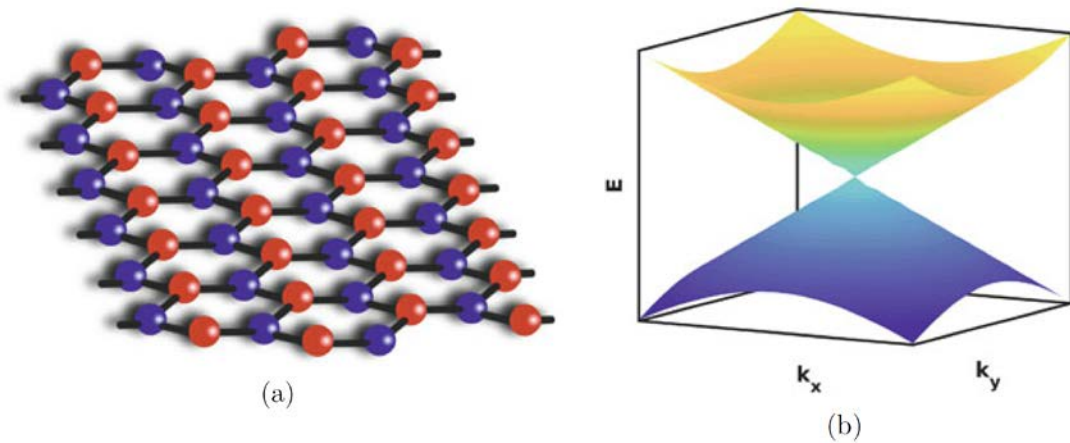


Рис. 1.5 (a) Структура графену; (b) Конуси Дірака в зонній структурі, отриманій з дисперсійного співвідношення $E = \hbar k v_f$ [9]

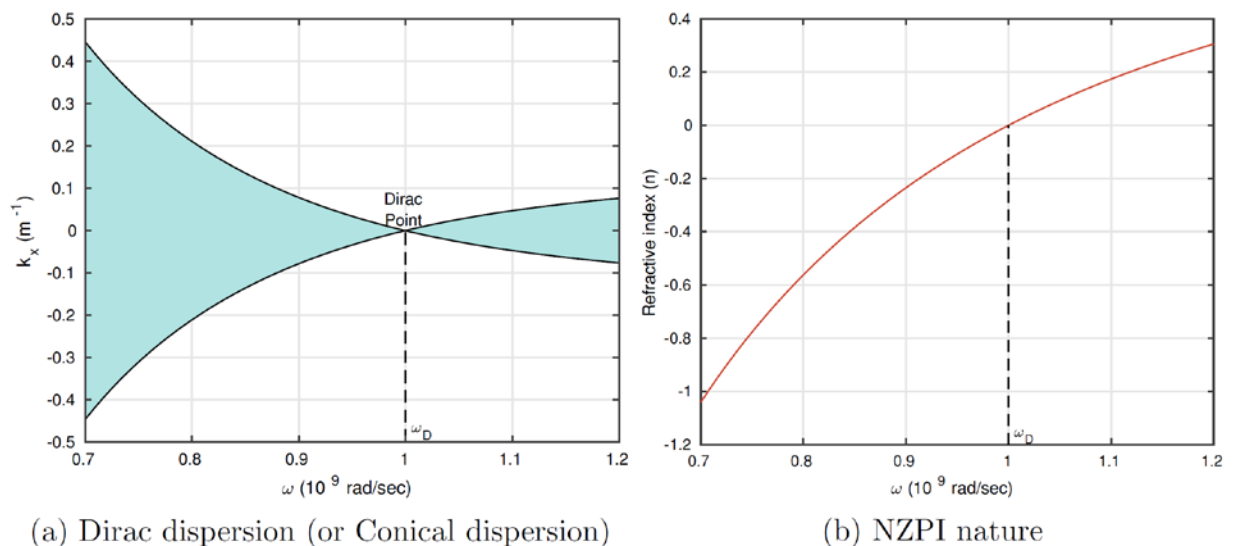


Рис. 1.6 (a) Діраківська дисперсія в метаматеріалі з негативним нульовим позитивним показником заломлення (очевидна конічна форма) і (b) відповідна крива показника заломлення [12]

З математичної точки зору дисперсійне співвідношення оптичної системи — це просто співвідношення між хвильовим вектором і частотою. Хвильовий вектор k можна записати як функцію кутової частоти ω у вигляді ряду Тейлора [13] щодо точки Дірака як

$$K(\omega) = k(\omega_D) + \frac{k'(\omega_D)}{1!}(\omega - \omega_D) + \frac{k''(\omega_D)}{2!}(\omega - \omega_D)^2 + \dots \quad (1.3)$$

де ω_D — частота, що відповідає точці Дірака. Якщо $k(\omega_D) = 0$ і можна знехтувати квадратичними членами вищого порядку, тоді дисперсія стає лінійною, і рівняння 1.3 скорочується до

$$k(\omega) = \frac{\omega - \omega_D}{v_D} \quad (1.4)$$

де $v_D = (d\omega/dk)|_{\omega=\omega_D} = 1/k'(\omega_D)$ групова швидкість у точці Дірака. Це видно в рівнянні 1.4, видно, що при $\omega < \omega_D$, $k(\omega) < 0$; $\omega = \omega_D$, $k(\omega) = 0$ і при $\omega > \omega_D$, $k(\omega) > 0$. Це означає, що значення $k(\omega)$ змінюється від від'ємного, через нуль, до позитивного по відношенню до частоти. Показник заломлення, визначений як $n(\omega) = k(\omega)/k_0$, має ту саму тенденцію, що й k , з $n(\omega) < 0$ для $\omega < \omega_D$, $n(\omega) = 0$ при $\omega = \omega_D$, $n(\omega) > 0$ при $\omega > \omega_D$ (див. рис. 1.6 б). Автори [14,15] назвали такі середовища середовищами з негативним нульовим позитивним показником заломлення (NZPI) і виступили за використання метаматеріалу з низькими втратами для цієї мети.

Щоб реалізувати середовище NZPI, припустимо, що метаматеріал демонструє як електричну, так і магнітну активність і чия ефективна діелектрична проникність (ϵ_{eff}) і проникність (μ_{eff}) задані моделлю Друде як [16, 17]

$$\epsilon_{eff}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{ep}^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \quad (1.5)$$

$$\mu_{eff}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{mp}^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \quad (1.6)$$

де ω_{ep} і ω_{mp} — електрична та магнітна плазмові частоти, а γ ($\ll \omega_{ep}$, ω_{mp}) — коефіцієнт втрат. Відповідно до наведених вище рівнянь, коли $\omega \rightarrow \omega_{ep}$, $\epsilon_{eff}(\omega) \rightarrow 0$ і коли $\omega \rightarrow \omega_{mp}$, $\mu_{eff}(\omega) \rightarrow 0$. Тепер, якщо якась магнітна

плазмова частота дорівнює електричній плазмовій частоті тобто $\omega_{mp} = \omega_{ep} = \omega_D$, і $\gamma = 0$, тоді для $\omega = \omega_D$ обидва ϵ_{eff} і μ_{eff} стають нульовими. У результаті на частоті точки Дірака $\omega = \omega_D$ ефективний показник заломлення $n_{eff} = \sqrt{\epsilon_{eff}}\sqrt{\mu_{eff}}$ також стає нульовим. На малюнку 1.2 зображено такий тип системи, де $\omega_{mp} = \omega_{ep} = \omega_D = 1 \times 10^9 \text{ рад/с}$ і $\gamma = 10^{-5}\omega_{ep}$. На Рис. 1.6 (а) показано його дисперсійну діаграму, на якій можна спостерігати конуси Дірака та точку Дірака, а на Рис. 1.6 (b) зображено результуючий ефективний показник заломлення, який дорівнює нулю при ω_D . Рисунок 1.7 [9] ілюструє розподіл електричного поля в середовищі NZPI при $0.5 \times 10^9 \text{ рад/с}$ ($\omega < \omega_D$), $1.0 \times 10^9 \text{ рад/с}$ ($\omega = \omega_D$) і $1.5 \times 10^9 \text{ рад/с}$ ($\omega > \omega_D$). Це показує, що коли хвиля, яка спочатку поширюється в повітрі, потрапляє в середовище NZPI, її довжина хвилі змінюється відповідно до показника заломлення середовища (див. рис. 1.7). Відповідно до рівнянь (1.5) і (1.6), при $\omega = 0.5 \times 10^9 \text{ рад/с}$ середовище стає середовищем з негативним індексом з $n_{eff} = \sqrt{\epsilon_{eff}}\sqrt{\mu_{eff}} = -3.0$, таким чином довжина хвилі всередині середовища стає третьою довжини хвилі в повітрі (рис. 1.7b). Тоді як при $\omega = 1.0 \times 10^9 \text{ рад/с}$ (тобто $\omega = \omega_D$), середовище стає середовищем з нульовим індексом з $n_{eff} = 0$, отже, довжина хвилі всередині середовища стає нескінченною, а електричне поле досягає квазістатичного стану, тобто електричне поле залишається постійним у всьому середовищі, як показано на рис. 1.7c. І, нарешті, при $\omega = 1.5 \times 10^9 \text{ рад/с}$ середовище набуває позитивного характеру з $n_{eff} = \sqrt{\epsilon_{eff}}\sqrt{\mu_{eff}} = 0.56$, відповідно довжина хвилі стає в 1.78 рази більшою, ніж у повітрі (рис. 1.7d). Ці графіки представляють стаціонарні поля, отримані за допомогою обчислень у частотній області, ефект негативного показника заломлення не видно. Якщо використовується метод обчислення у часовій області, такий як FDTD, поширення хвилі всередині середовища, безумовно, демонструватиме негативне заломлення.

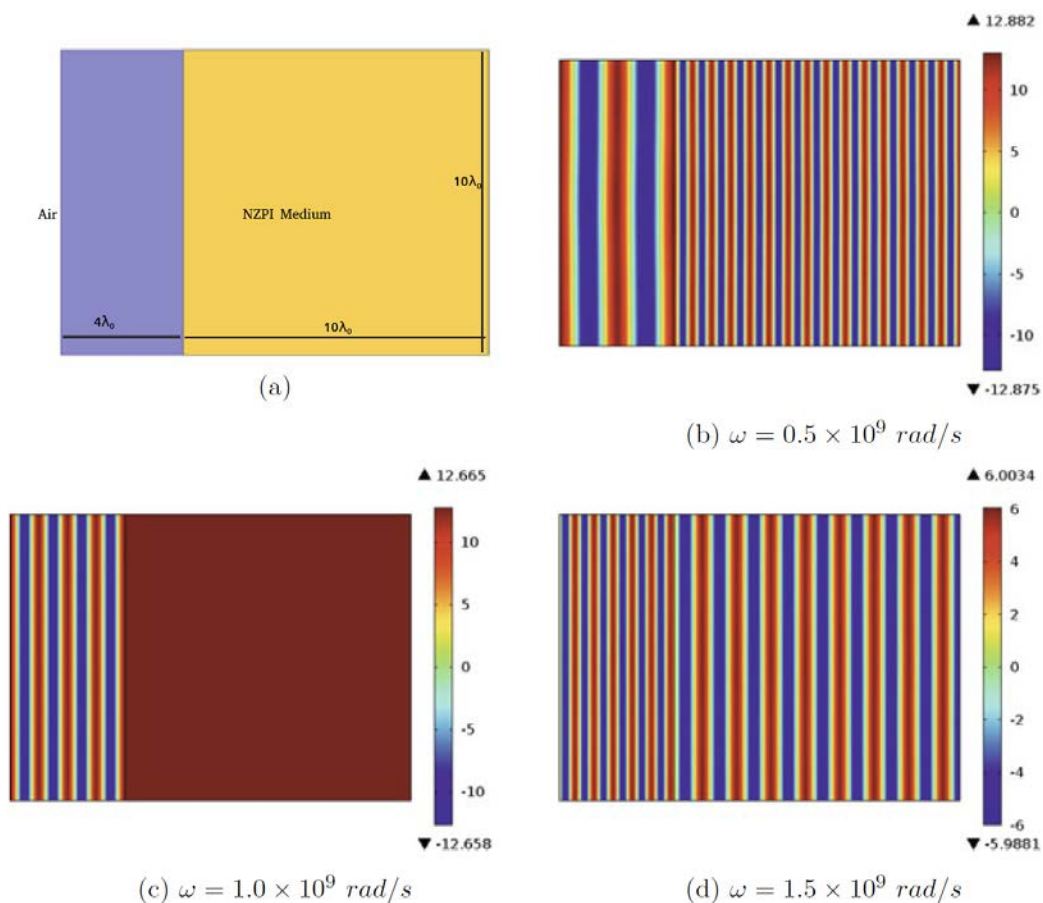


Рис. 1.7 Розподіл електричного поля в середовищі NZPI на різних частотах

Саме таку модель середовища ми будемо розглядати далі як заповнення резонатора з ідеально провідними стінками.

1.3 Моделювання середовища за допомогою моделей Лоренца, Друде

Різні реалізації структур із параметрами, близькими до нуля [8], показані на Рис. 1.8. Почнемо з того, що різні безперервні середовища демонструють параметри, близькі до нуля, у різних діапазонах частот (рис. 1.8, а). Наприклад, поведінка ENZ спостерігається на плазмовій частоті різних матеріалів, включаючи калій (частоти ТГц) і поляритонні матеріали, такі як карбід кремнію (середні інфрачервоні частоти). Леговані напівпровідники, такі як прозорі провідні оксиди (TCO), наприклад, легований алюмінієм оксид цинку (AZO) і ITO, також демонструють близьку до нуля діелектричну проникність на частотах, близьких до інфрачервоного діапазону, навколо довжин хвиль телекомунікацій ($\lambda \approx 1550$ нм). , з додатковими перевагами CMOS-сумісної та

регульованої платформи, частоту ENZ якої можна регулювати, контролюючи рівень легування.

Топологічні ізолятори, такі як $Bi_{1.5}Sb_{0.5}Te_{1.8}Se_{1.2}$ (BSTS), демонструють відповідь ENZ на ультрафіолетових частотах. Природно, продуктивність безперервних середовищ ENZ в кінцевому підсумку обмежена їхніми власними втратами, хоча сучасні матеріали мають відносно низькі втрати, такі як $\varepsilon(\omega_p) \approx i0.03 - i0.1$ для SiC при $\lambda_p \sim 10.5$ мкм і $(\omega_p) \approx i0.2 - i0.3$ для AZO навколо $\lambda_p \sim 1,550$ нм. Іншою альтернативою є розробка метаматеріалів, що імітують властивості суцільних середовищ із близькими до нуля параметрами (рис. 1.28 б). Ймовірно, перші спроби відповідають піонерським роботам у штучних діелектриках, метою яких було моделювання властивостей плазми, і в основному здійснювалися з використанням хвильоводів і дротяних середовищ на мікрохвильових частотах. Наприклад, ефективна постійна поширення $k_{eff} = k_0 \sqrt{1 - (\lambda/2h)^2}$ та імпеданс $Z_{eff} = \eta_0 / \sqrt{1 - (\lambda/2h)^2}$ TE_{10} режим, що поширюється всередині паралельного пластинчастого хвильоводу висотою h , виготовленого зі стін PEC, вказує на те, що хвильовід на межі ($h = \lambda/2$) можна розглядати як середовище ENZ, принаймні з точки зору опису поширення цього режиму в середній площині. Однак ця концепція була вдосконалена, дозволяючи моделювати складні сценарії розсіювання, D-точкові дроти та середовища EMNZ. Реалізації на основі хвильоводів пропонують структурну простоту, і вони навіть були масштабовані до оптичних частот. Дротові носії також демонструють поведінку дисперсії, подібну до Друде, частоту ENZ якої можна налаштувати, регулюючи радіус і відстань між дротами. Цю структуру пізніше незалежно відновили в рамках метаматеріалів, спочатку як суттєвий компонент подвійного негативного середовища, а потім як попередника сильної нелокальної реакції. Однак також можна застосувати багато інших метаматеріальних підходів. Наприклад, складені шари з двох матеріалів, що характеризуються їх діелектричною проникністю ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) і товщиною (t_1, t_2),

можна описати ефективною діелектричною проникністю: $\varepsilon_{eff} = (t_1\varepsilon_1 + t_2\varepsilon_2)/(t_1 + t_2)$ для поширення хвилі з електричним струмом. поле паралельно плитам. Отже, для $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 < 0$, вибираючи співвідношення товщини/діелектричної проникності, можна легко реалізувати $\varepsilon_{eff} \approx 0$. Ця методологія була успішно продемонстрована у видимій області з використанням шарів нітриду кремнію та срібла. Ще одним успішним підходом є використання повністю діелектричних метаматеріалів. Коротше кажучи, геометрія діелектричних частинок з високим індексом може бути розроблена так, щоб антирезонанси електричних і магнітних диполів (або електричного монополя та магнітного диполя для 2D-структур) перетинали нуль майже одночасно, створюючи ефективне середовище EMNZ для масиву таких частинок. Цей ефект також можна зрозуміти з точки зору фотонного кристала, де точка EMNZ характеризується конусом Дірака в точці Г. У будь-якій інтерпретації ця реалізація забезпечує шлях із низькими втратами для реалізації структур із близькими до нуля параметрами на оптичних частотах і навіть інтеграцію в мікросхему. Інші фотонні кристали також демонструють властивості, пов'язані з близькими до нуля конститутивними параметрами. Це випадок структур з нульовою щільною, тобто фотонних кристалів із нульовим середнім показником заломлення, що демонструє заборонену зону, стійку до безладу, кута падіння та масштабування елементів. Підсумовуючи, можливо, саме поєднання обох підходів, суцільного та синтетичного середовищ (рис. 4с), могло б забезпечити найкращі можливості для розробки структур із параметрами, близькими до нуля. Спочатку було виявлено, що доповнення безперервного середовища ENZ діелектричними стрижнями забезпечує засоби для отримання середовища EMNZ у хвилеводах і періодичних масивах. Це частина дуже загального ефекту, який ми називаємо «фотонним легуванням» середовищ ENZ, у якому діелектричні частинки відіграють роль «допантів», що дозволяє контролювати ефективну проникність тіла ENZ довільної форми, незалежно від їхнього положення в хості.

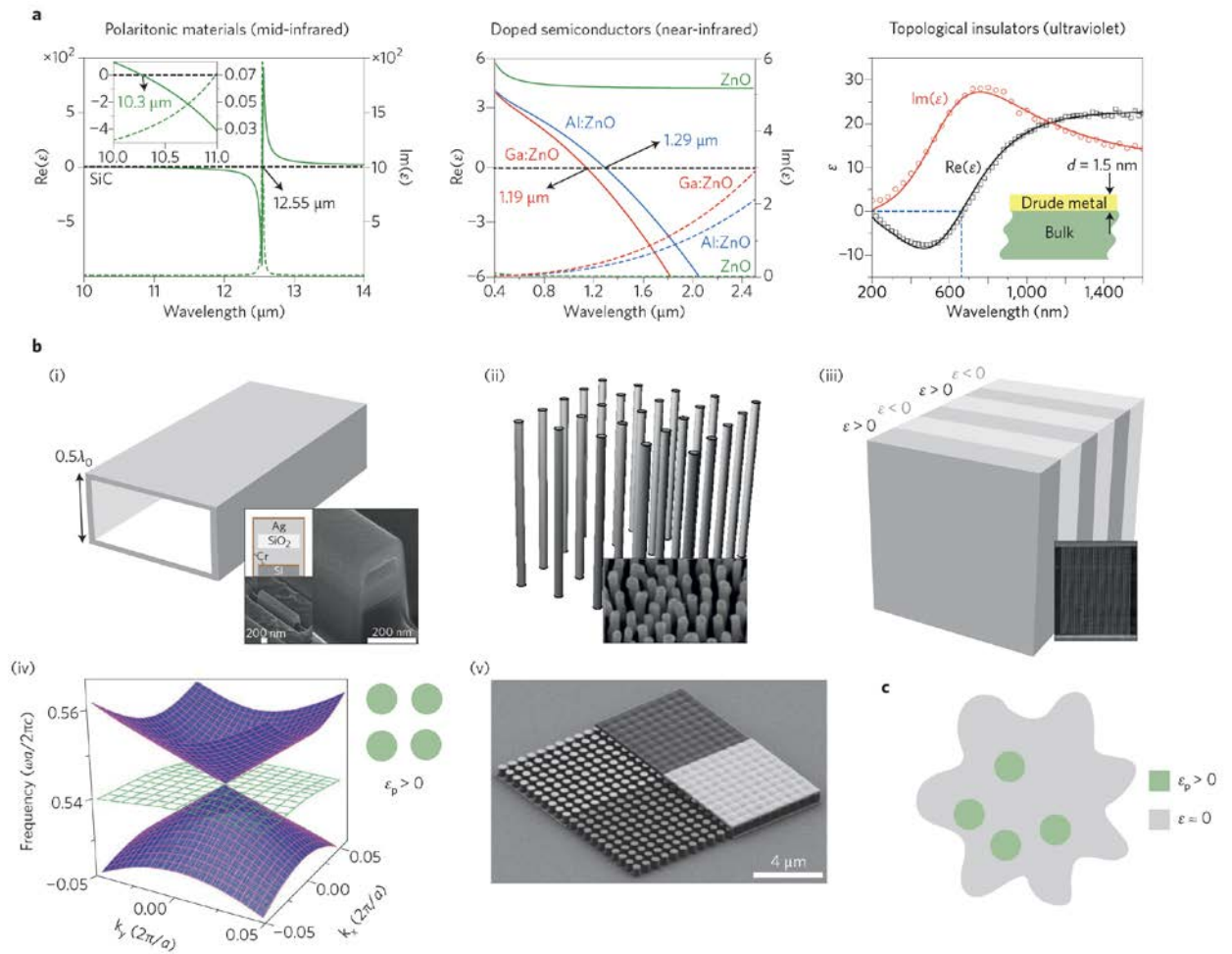


Рис. 1.8 Різні реалізації структур з параметрами, близькими до нуля.

Відповідно можемо зазначити, що розгляд поведінки електромагнітних полів в резонаторі, що заповнений середовищем з показником заломлення наближеним до нуля, характер якого враховується у певному діапазоні частот, але не на одній частоті, є значущим та актуальним завданням. Особливо цікавим та новим є розглядання даної задачі в часовій області, що у перспективі дозволить додатково розглядати як нестационарні заповнення резонатора, так і нестационарні струми які збуджують резонатор.

2 ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЗОНАТОРІ З ІДЕАЛЬНО ПРОВІДНИМИ СТІНКАМИ, ЯКИЙ ЗАПОВНЕНО МЕТАМАТЕРІАЛОМ З ПОКАЗНИКОМ ЗАЛОМЛЕННЯ БЛИЗЬКИМ ДО НУЛЯ

В цьому розділі, в рамках методу модового базису (ММБ) (еволюційного підходу до розв'язання задач електродинаміки в часовій області, Evolutionary Approach to Electromagnetics in Time Domain (EAE)), розробленого для аналізу електромагнітних полів в часовій області, які збуджені в об'ємних резонаторах з ідеально провідними стінками і довільним однорідним ізотропним заповненням [19, 20], розглянуто задачу про поведінку електромагнітних полів у випадку заповнення резонатора дисперсійним у часі середовищем, показник заломлення якого близький до нуля.

2.1 Представлення електромагнітних полів в резонаторі, який заповнено середовищем в рамках EAE

Метод модового базису представляє напруженості електричного та магнітного полів в заповненому середовищем резонаторі як розкладання за резонаторними модами пустого резонатору, які формують повний базис у просторі розв'язань внутрішніх задач електродинаміки:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha}(t) \nabla \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\beta=1}^{\infty} b_{\beta}(t) \nabla \Psi_{\beta}(\mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Тут $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ – напруженість електричного поля, як функція часу t та координат $\mathbf{r}$;

$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$ – напруженість магнітного поля, як функція часу t та координат $\mathbf{r}$;

$e_n(t)$, $a_{\alpha}(t)$, $h_n(t)$, $b_{\beta}(t)$ – модові амплітуди;

$\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$, $\nabla \Phi_{\alpha}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$, $\nabla \Psi_{\beta}(\mathbf{r})$ – базисні вектори.

Базисні вектори, в свою чергу, є розв'язками граничних задач на власні значення, які виділені з оператора просторового диференціювання з лівої частини перших двох рівнянь системи рівнянь Максвела

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^{-1} \operatorname{rot} \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0^{-1} \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0^{-1} \mathcal{J}_\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{H}) + \varepsilon_0^{-1} \mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t); \\ -\mu_0^{-1} \operatorname{rot} \nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(\mathbf{r}, t) + \mu_0^{-1} \mathcal{J}_m(\mathbf{r}, t);\end{aligned}\quad (2.3)$$

де $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ – вектор об'ємної щільності поляризації, є функцією часу t та координат $\mathbf{r}$;

$\mathcal{M}(\mathbf{r}, t)$ – вектор об'ємної щільності намагніченості, є функцією часу t та координат $\mathbf{r}$;

$\mathcal{J}_\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ – вектор щільності струму провідності, в загальному випадку залежить від напруженості електричного та магнітного полів;

$\mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t), \mathcal{J}_m(\mathbf{r}, t)$ – відомі вектори щільності струмів сторонніх джерел;

з доповненням граничними умовами для ідеально провідній поверхні резонатора

$$\mathbf{N} \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|_{r \in S} = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \mathcal{H}(\mathbf{r}, t)|_{r \in S} = 0. \quad (2.4)$$

Також підхід враховує, що електромагнітне поле в резонаторі підкоряється принципу причинності

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad t < 0,$$

може мати певний просторовий розподіл у початковий момент часу

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \mathcal{E}_0(\mathbf{r}), \quad \mathcal{H}(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \mathcal{H}_0(\mathbf{r}), \quad (2.5)$$

та задовольняє умові обмеженості енергії поля

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V (\varepsilon_0 \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}^* + \mu_0 \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}^*) dv \quad (2.6)$$

де $0 \leq t_1 < t_2 < \infty, V' \subseteq V$.

Базисні вектори $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ та потенціали $\Phi_\alpha(\mathbf{r})$, $\Psi_\beta(\mathbf{r})$ є рішенням векторних та скалярних задач на власні значення з граничними умовами Діріхле (2.7), (2.9) або Неймана (2.8), (2.10) та складають повний набір вихрових (2.7), (2.8) та невихрових (2.9), (2.10) власних векторів в функціональному просторі розв'язань внутрішніх електродинамічних задач

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_n^2 \varepsilon_0 \mu_0) \mathbf{E}_n &= \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_n = 0, \quad \mathbf{N} \times \mathbf{E}_n|_S = 0; \\ \mathbf{H}_n &= -i \nabla \times \mathbf{E}_n / k_{\pm n} \mu_0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_n^2 \varepsilon_0 \mu_0) \mathbf{H}_n &= \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_n = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{H}_n|_S = 0; \\ \mathbf{E}_n &= \frac{-i \nabla \times \mathbf{H}_n}{k_{\pm n} \varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$(\nabla^2 + \eta_\alpha^2) \Phi_\alpha = 0, \quad \Phi_\alpha|_S = 0, \quad \frac{\eta_\alpha^2 \varepsilon_0}{V} \int_V |\Phi_\alpha|^2 dv = 1; \quad (2.9)$$

$$(\nabla^2 + \nu_\alpha^2) \Psi_\beta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial N} \Psi_\beta|_S = 0, \quad \frac{\nu_\alpha^2 \mu_0}{V} \int_V |\Psi_\beta|^2 dv = 1, \quad (2.10)$$

де $k_{\pm n} = \pm k_n$, $\eta_\alpha > 0$ та $\nu_\alpha > 0$ – власні числа. Всі власні вектори підкорюються умовам ортогональності й нормування

$$\frac{\varepsilon_0}{V} \int_V \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_{n'}^* dv = \delta_{nn'}, \quad \frac{\mu_0}{V} \int_V \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{H}_{n'}^* dv = \delta_{nn'}, \quad n, n' = 1, 2, \dots; \quad (2.11)$$

$$\int_V \nabla \Phi_\alpha \cdot \nabla \Phi_{\alpha'}^* dv = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad \alpha, \alpha' = 1, 2, \dots; \quad (2.12)$$

$$\int_V \nabla \Psi_\beta \cdot \nabla \Psi_{\beta'}^* dv = \delta_{\beta\beta'}, \quad \beta, \beta' = 1, 2, \dots; \quad (2.13)$$

$$\int_V \mathbf{E}_n \cdot \nabla \Phi_\alpha^* dv = 0, \quad \int_V \mathbf{H}_n \cdot \nabla \Psi_\beta^* dv = 0 \quad (2.14)$$

Вихрові власні вектори визначають існування ТЕ- або ТМ- коливань у резонаторі, не вихрові потенціали – існування статичних полів. Такі набори вихрових и невихрових векторів складають повний модовий базис в функціональному просторі $L_2(V)$.

2.2 Еволюційні рівняння

Таким чином, граничні задачі (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) визначають просторову частину електромагнітного поля в резонаторі що заповнений лінійним ізотропним однорідним середовищем. Для багатьох простих геометричних форм резонаторів ці моди, розв'язки граничних задач, добре відомі. Але часова частина полів, яка міститься в скалярних коефіцієнтах розкладань (2.1), (2.2) – модових амплітудах, є невідомою.

Загальну процедуру отримання еволюційних рівнянь, як проєкцій рівнянь Максвела (2.3) на базис (2.7) – (2.10) докладно описано в [19, 20, 21]. В результаті поведінка вихрових та невихрових модових амплітуд визначена системою інтегро-диференційних рівнянь другого порядку

$$\frac{d}{dt}e_n(t) + ik_n h_n(t) = -j_n^e(t) - \frac{1}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(\mathcal{E}) + \mathcal{J}_\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{H}) \right\} \mathbf{E}_n^*(\mathbf{r}) dV \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt}h_n(t) + ik_n e_n(t) = -j_n^h(t) - \frac{\mu_0}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(\mathcal{H}) \right\} \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r}) dV \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt}a_\alpha(t) = -j_\alpha^e(t) + \frac{1}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(\mathcal{E}) + \mathcal{J}_\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{H}) \right\} \nabla \Phi_\alpha^*(\mathbf{r}) dV; \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt}b_\beta(t) = -j_\beta^h(t) + \frac{\mu_0}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(\mathcal{H}) \right\} \nabla \Psi_\beta^*(\mathbf{r}) dV, \quad (2.18)$$

Ці рівняння доповнюються початковими умовами для модових амплітуд,

$$\begin{aligned} e_n(0) &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \mathbf{E}_n^*(\mathbf{r}) dv = e_n^0, \\ h_0(0) &= \frac{\mu_0}{V} \int_V \mathcal{H}_0(\mathbf{r}) \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r}) dv = h_n^0; \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} a_\alpha(0) &= -\frac{\varepsilon_0}{V} \int_V \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) \nabla \Phi_\alpha^*(\mathbf{r}) dv = a_\alpha^0, \\ b_\beta(0) &= -\frac{\mu_0}{V} \int_V \mathcal{H}_0(\mathbf{r}) \nabla \Psi_\beta^*(\mathbf{r}) dv = b_\beta^0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

визначених проєктуванням початкового розподілу електромагнітного поля (2.5) на базисні вектори.

Інші електродинамічні величини, такі як вектори об'ємної щільності сторонніх струмів, вектор об'ємної щільності поляризації, вектор об'ємної щільності намагніченості та їх похідні за часом також можуть бути представлені у вигляді розкладів, аналогічних (2.1), (2.2), оскільки набір векторів, що визначаються граничними завданнями (2.7) – (2.10), становить повний базис у просторі рішень внутрішніх задач електродинаміки (у просторі векторних функцій, що задовольняють відповідним граничним умовам. Відповідно, розкладання векторів об'ємної щільності сторонніх струмів за базисними векторами має вигляд

$$\varepsilon_0^{-1} \mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} j_n^e(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} j_\alpha^e(t) \nabla \Phi_\alpha(\mathbf{r}); \quad (2.21)$$

$$\mu_0^{-1} \mathcal{J}_m(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} j_n^h(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\beta=1}^{\infty} j_\beta^h(t) \nabla \Psi_\beta(\mathbf{r}), \quad (2.22)$$

а, модові амплітуди сторонніх струмів визначаються подібно (2.19), (2.20):

$$j_n^e(t) = \frac{1}{V} \int_V \mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_n^*(\mathbf{r}) dv; \quad j_n^h(t) = \frac{1}{V} \int_V \mathcal{J}_m(\mathbf{r}, t) \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r}) dv; \quad (2.23)$$

$$j_\alpha^e(t) = -\frac{1}{V} \int_V \mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t) \nabla \Phi_\alpha^*(\mathbf{r}) dv; \quad j_\beta^h(t) = -\frac{1}{V} \int_V \mathcal{J}_m(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi_\beta^*(\mathbf{r}) dv. \quad (2.24)$$

Таким чином, система рівнянь (2.15) – (2.18) з початковими умовами (2.19), (2.20) описує еволюційні процеси в резонаторі з лінійним, однорідним ізотропним заповненням. Систему (2.15) – (2.18) також необхідно доповнити матеріальними рівняннями, які описують взаємодію середовища з електромагнітним полем у резонаторі.

Еволюційний підхід дуже зручний для розглядання поведінки полів та характеристик резонаторів у випадку змінюваних у часі або дисперсійних параметрів середовищ або не гармонічних часових залежностях збуджувальних струмів. За допомогою ММБ в цих випадках здійснюється повне відокремлення часової та просторової частини електромагнітних полів для довільної часової залежності як полів, так і матеріальних параметрів середовища, що в свою чергу дозволяє отримати досить прості аналітичні розв'язки.

2.3 Еволюційні рівняння для електромагнітного поля в резонаторі, який заповнено середовищем з показником заломлення близьким до нуля

Роботи [23, 24, 25, 26] докладно освітлюють схему побудови еволюційних рівнянь у випадку довільного середовища з часовою дисперсією. Але вони розглядають наближений до натурального діелектрик, де магнітна сприйнятливість моделюється тільки полюсами Лоренца. У випадку моделювання заповнення середовищем з показником заломлення близьким до нуля, як показано в [9, 12] ми моделюємо діелектричну та магнітну сприйнятливість за допомогою полюсів Друде з однаковими амплітудами, показниками втрат та електричною та магнітною плазмовими частотами.

В цьому конкретному випадку ефективна діелектрична та магнітна проникності мають вигляд

$$\begin{aligned}\varepsilon_{eff}(\omega) &= 1 + \chi_e(\omega) = 1 + \frac{\chi_{st}^e \omega_e^2}{i\omega(i\omega + \gamma_e)}, \\ \mu_{eff}(\omega) &= 1 + \chi_h(\omega) = 1 + \frac{\chi_{st}^h \omega_h^2}{i\omega(i\omega + \gamma_h)},\end{aligned}\tag{2.25}$$

і, вважається, що існують відповідні ефективні вектори об'ємної щільності поляризації та намагніченості

$$\mathcal{P}_{eff}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_e(\omega)\mathcal{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathcal{M}_{eff}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_h(\omega)\mathcal{H}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.26)$$

Оскільки розглядається штучний матеріал, який дає певний відгук на вплив електромагнітних полів, ми говоримо саме про ефективні характеристики. При переході в часову область, для такого середовища ми випишемо вираз для ефективних векторів об'ємної щільності поляризації та намагніченості у вигляді відповідних диференціальних рівнянь [23, 24]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{P}_{eff} + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{eff} &= \chi_{st}^e \omega_e^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{M}_{eff} + \gamma_h \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{eff} &= \chi_{st}^h \omega_h^2 \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Як вже було визначено, ефективні вектори об'ємної щільності поляризації та намагніченості та їх похідні можна представити у вигляді розкладань за базисними векторами, аналогічно (2.1), (2.2) та (2.21), (2.22) [23, 24]

$$\mathcal{P}_{eff}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \varepsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{\infty} d_{\alpha}(t) \nabla \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \varepsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{\infty} \tilde{d}_{\alpha}(t) \nabla \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \quad (2.29)$$

$$\mathcal{M}_{eff}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\beta=1}^{\infty} g_{\beta}(t) \nabla \Psi_{\beta}(\mathbf{r}), \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}_{eff}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\beta=1}^{\infty} \tilde{g}_{\beta}(t) \nabla \Psi_{\beta}(\mathbf{r}). \quad (2.31)$$

З урахуванням розкладань (2.28) – (2.31) та умов ортогональності та нормування базисних векторів (2.11) – (2.14) еволюційні рівняння (2.15) – (2.18) перетворюються на

$$\frac{d}{dt} e_n(t) + i k_n h_n(t) = -j_n^e(t) - \tilde{p}_n(t) \quad (2.32)$$

$$\frac{d}{dt} h_n(t) + i k_n e_n(t) = -j_n^h(t) - \tilde{m}_n(t) \quad (2.33)$$

$$\frac{d}{dt} a_{\alpha}(t) = -j_{\alpha}^e(t) - \tilde{d}_{\alpha}(t); \quad (2.34)$$

$$\frac{d}{dt} b_{\beta}(t) = -j_{\beta}^h(t) - \tilde{g}_{\beta}(t), \quad (2.35)$$

Проекція на базис матеріальних рівнянь (2.27), також з урахуванням умов ортогональності та нормування базисних векторів дає диференціальні рівняння (матеріальні рівняння) для вихрових та невихрових модових амплітуд у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}_n(t) + \gamma_e \tilde{p}_n(t) = \chi_{st}^e \omega_e^2 e_n(t), \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{d}_\alpha(t) + \gamma_e \tilde{d}_\alpha(t) = \chi_{st}^e \omega_e^2 a_\alpha(t) \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{m}_n(t) + \gamma_h \tilde{m}_n(t) = \chi_{st}^h \omega_h^2 h_n(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}_\beta(t) + \gamma_h \tilde{g}_\beta(t) = \chi_{st}^h \omega_h^2 b_\beta(t). \quad (2.37)$$

з початковими умовами.

Тепер завдання щодо розглядання еволюційного процесу у резонаторі, який заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля зведено до систем звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами для часових модових амплітуд шуканих полів які складаються з системи еволюційних рівнянь (2.32) – (2.35) та рівнянь (2.36) – (2.37). Запишемо окремо у матричній формі систему для вихрових модових амплітуд, для невихрових електричних модових амплітуд та невихрових магнітних модових амплітуд:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) + \mathbf{Q}_{sol} \cdot \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}_{sol}(t), \quad \mathbf{X}(t)|_{t=0} = \mathbf{X}_0, \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Y}^e(t) + \mathbf{Q}_{irr}^e \cdot \mathbf{Y}^e(t) = \mathbf{F}_{irr}^e(t), \quad \mathbf{Y}^e(t)|_{t=0} = \mathbf{Y}_0^e, \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Y}^h(t) + \mathbf{Q}_{irr}^h \cdot \mathbf{Y}^h(t) = \mathbf{F}_{irr}^h(t), \quad \mathbf{Y}^h(t)|_{t=0} = \mathbf{Y}_0^h, \quad (2.40)$$

$\mathbf{Q}_{sol}$, $\mathbf{Q}_{irr}^e$, $\mathbf{Q}_{irr}^h$ є матрицями постійних коефіцієнтів. Вони містять у собі параметри діелектричної та магнітної проникності середовища відповідно (2.36) – (2.37) та інформацію про геометрію резонатора, а саме власні частоти порожнього резонатора $k_n = 2\pi f_{0n}$, які є власними значеннями граничних завдань Діріхле та Неймана (2.7) – (2.10). Для випадка що розглядається, матриці та вектори з (2.38) – (2.40) мають такий вигляд

$$\mathbf{Q}_{sol} = \begin{pmatrix} 0 & k_n & 1 & 0 \\ -k_n & 0 & 0 & 1 \\ -\chi_{st}^e \omega_e^2 & 0 & \gamma_e & 0 \\ 0 & -\chi_{st}^h \omega_h^2 & 0 & \gamma_h \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e_n(t) \\ ih_n(t) \\ \tilde{p}_n(t) \\ i\tilde{m}_n(t) \end{pmatrix}, \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} e_n^0 \\ ih_n^0 \\ \tilde{p}_n^0 \\ i\tilde{m}_n^0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{Q}_{irr}^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\chi_e \omega_e^2 & \gamma_e \end{pmatrix}, \mathbf{Y}^e(t) = \begin{pmatrix} a_\alpha(t) \\ \tilde{d}_\alpha(t) \end{pmatrix}, \mathbf{Y}^e(0) = \begin{pmatrix} a_\alpha^0 \\ \tilde{d}_\alpha^0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

$$\mathbf{Q}_{irr}^h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\chi_h \omega_h^2 & \gamma_h \end{pmatrix}, \mathbf{Y}^h(t) = \begin{pmatrix} b_\beta(t) \\ \tilde{g}_\beta(t) \end{pmatrix}, \mathbf{Y}^h(0) = \begin{pmatrix} b_\beta^0 \\ \tilde{g}_\beta^0 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Тобто вектори $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y}^e(t)$, $\mathbf{Y}^h(t)$ складаються з невідомих вихрових та невихрових модових амплітуд з розкладань (2.1), (2.2), (2.28) – (2.31). Невихрові моди відповідають частині поля обумовленої присутністю зарядів та струмів в об'ємі резонатора – нестационарним полям Кулона та Ампера. Вектори правої частини $\mathbf{F}_{sol}(t)$, $\mathbf{F}_{irr}^e(t)$, $\mathbf{F}_{irr}^h(t)$ містять відомі модові амплітуди сторонніх струмів, отримані з (2.23) – (2.24), відповідно

$$\mathbf{F}_{sol}(t) = \begin{pmatrix} -j_n^e(t) \\ -ij_n^h(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{irr}^e(t) = \begin{pmatrix} -j_\alpha^e(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{irr}^h(t) = \begin{pmatrix} -j_\beta^h(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Розв'язок систем (2.38) – (2.40) [23, 24, 26] буде

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^{M_{sol}} \mathbf{K}(\lambda_k^{sol}) \left(e^{-\lambda_k^{sol} t} \mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{-(t-t')} \lambda_k^{sol} \mathbf{F}_{sol}(t') dt' \right), \quad (2.45)$$

$$\mathbf{Y}^e(t) = \sum_{k=1}^{M_{irr}^e} \mathbf{K}(\lambda_k^{irr(e)}) \left(e^{-\lambda_k^{irr(e)} t} \mathbf{Y}_0^e + \int_0^t e^{-(t-t')} \lambda_k^{irr(e)} \mathbf{F}_{irr}^e(t') dt' \right),$$

$$\mathbf{Y}^h(t) = \sum_{k=1}^{M_{irr}^h} \mathbf{K}(\lambda_k^{irr(h)}) \left(e^{-\lambda_k^{irr(h)} t} \mathbf{Y}_0^h + \int_0^t e^{-(t-t')} \lambda_k^{irr(h)} \mathbf{F}_{irr}^h(t') dt' \right), \quad (2.46)$$

$$\mathbf{K}(\lambda_k) = \prod_{s=1..M}^{s \neq k} \frac{\lambda_s \mathbf{I} - \mathbf{Q}}{\lambda_s - \lambda_k}$$

де λ_k^{sol} , $\lambda_k^{irr(e,h)}$ комплексні власні числа відповідних матриць, а $M_{sol} = 4$, $M_{irr}^{e,h} = 2$ порядок матриць постійних коефіцієнтів відповідних систем.

Вирази для модових амплітуд (2.45), (2.46) є загальним аналітичним розв'язком завдання знаходження модових амплітуд у випадку вільних і вимушених коливань у резонаторі відомі з [23, 24, 26] та інших попередніх робіт для різних варіантів заповнення. Тут наведемо та проаналізуємо розв'язок еволюційних рівнянь (2.38) – (2.40) у випадку власних коливань у резонаторі, що заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля.

2.4 Розв'язок еволюційних рівнянь (2.45) – (2.47) у випадку власних коливань у резонаторі, що заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля

Розв'язок еволюційних рівнянь (2.45) – (2.47) в матричному вигляді у випадку власних коливань у резонаторі, що заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля має вигляд

$$X(t) = \sum_{k=1}^{M_{sol}} K(\lambda_k^{sol}) e^{-\lambda_k^{sol} t} X_0, \quad (2.47)$$

$$Y^e(t) = \sum_{k=1}^{M_{irr}^e} K(\lambda_k^{irr(e)}) e^{-\lambda_k^{irr(e)} t} Y_0^e,$$

$$Y^h(t) = \sum_{k=1}^{M_{irr}^h} K(\lambda_k^{irr(h)}) e^{-\lambda_k^{irr(h)} t} Y_0^h, \quad (2.48)$$

$$K(\lambda_k) = \prod_{s=1..M, s \neq k} \frac{\lambda_s I - Q}{\lambda_s - \lambda_k}$$

З наведених розв'язків можна зробити деякі висновки. Порядок матриці $Q_{sol} \in M_{sol} = 4$, а власні числа є 2 пари комплексно спряжених чисел. Відповідно ми отримали резонансну систему з двома власними резонансами. Один цих резонансів обумовлений перевидбиттям електромагнітних хвиль між стінками резонатора, другий – присутністю середовища.

3 ВЛАСНІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОЛЯ В РЕЗОНАТОРІ, ЩО ЗАПОВНЕНИЙ СЕРЕДОВИЩЕМ З ПОКАЗНИКОМ ЗАЛОМЛЕННЯ БЛИЗЬКИМ ДО НУЛЯ

В цьому розділі роботи представлено числовий опис середовища з показником заломлення близьким до нуля з функціональною залежністю згідно [9], а також аналізується поведінка власних полів в резонаторі з таким заповненням.

3.1 Параметри моделі заповнення резонатора

Як було продемонстровано в [9], ми отримуємо показник заломлення близький до нуля, якщо маємо перетин нульового значення дійсною частиною показника заломлення. То в будь якому випадку ми маємо справу з дисперсійним середовищем, яке має у певному діапазоні частот від'ємні значення показника заломлення та у іншому діапазоні частот додатні значення показника заломлення середовища. Відповідні ефективні діелектрична та магнітна проникності, як було вказано в минулому розділі мають вигляд

$$\begin{aligned}\varepsilon_{eff}(\omega) &= 1 + \chi_e(\omega) = 1 + \frac{\chi_{st}^e \omega_e^2}{i\omega(i\omega + \gamma_e)}, \\ \mu_{eff}(\omega) &= 1 + \chi_h(\omega) = 1 + \frac{\chi_{st}^h \omega_h^2}{i\omega(i\omega + \gamma_h)},\end{aligned}\tag{3.1}$$

а показник заломлення визначається

$$n_{eff} = \sqrt{\varepsilon_{eff}} \sqrt{\mu_{eff}} = \sqrt{1 + \frac{\chi_{st}^e \omega_e^2}{i\omega(i\omega + \gamma_e)}} \sqrt{1 + \frac{\chi_{st}^h \omega_h^2}{i\omega(i\omega + \gamma_h)}}\tag{3.2}$$

Розглянемо приклад з такими параметрами:

$\chi_{st}^e = \chi_{st}^h = 1$ – амплітуди полюсів Друде;

$f_e = f_h = \frac{\omega_{e,h}}{2\pi} = 9.0$ ГГц – електрична та магнітна плазмові частоти полюсів Друде;

$\gamma_e = \gamma_h = 10^{-4} \omega_{e,h} = 5.655 \times 10^6$ с⁻¹ – коефіцієнт втрат.

Рис. 3.1 демонструє поведінку показника заломлення в діапазоні частот від 1 до 20 ГГц, з перетином нульового значення на плазмовій частоті 9.0 ГГц.

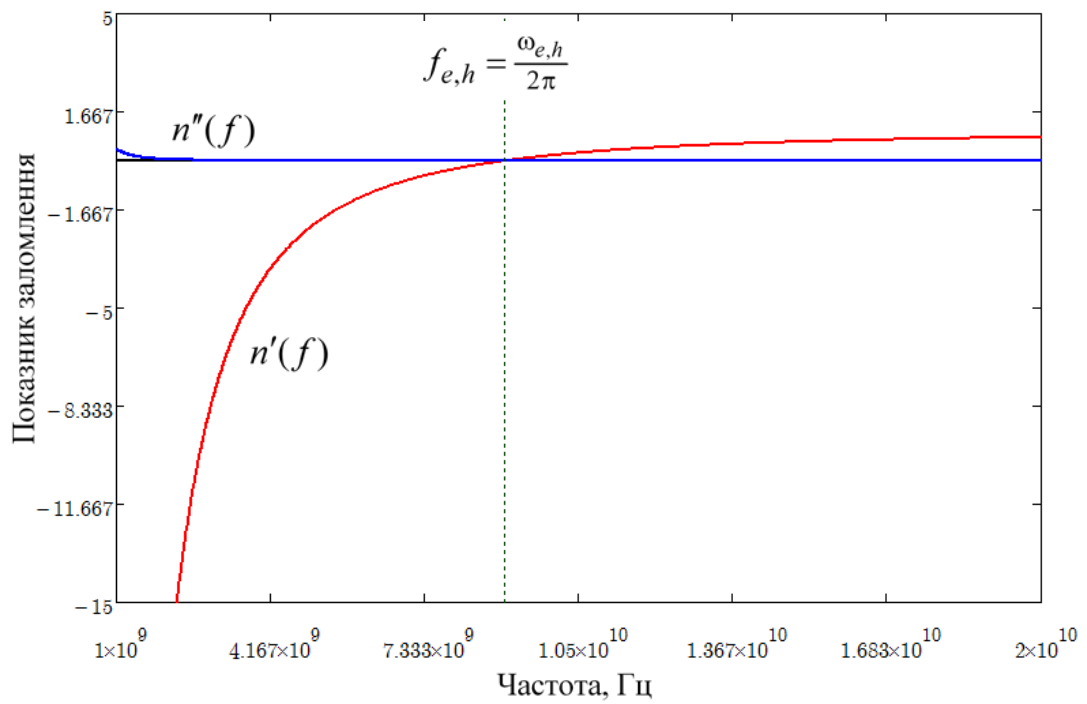


Рис. 3.1 Частотна залежність ефективного показника заломлення середовища

На Рис. 3.2 представлено поведінку дійсної частини фазової та групової швидкості хвиль у такому середовищі, нормовану на швидкість світла.

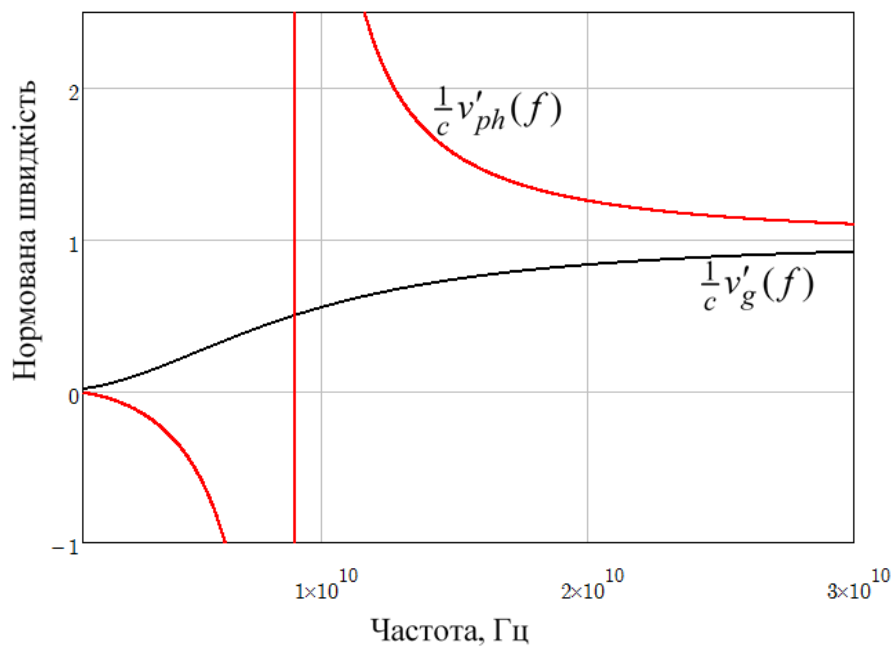


Рис. 3.2 Поведінка дійсної частини фазової та групової швидкості хвиль, що поширюються в розглянутому середовищі

3.2 Власні характеристики резонатора із заповненням

Значним чином поведінку електромагнітних полів в резонаторі із заповненням визначають власні характеристики такого резонатора – його власні частоти. В представленому випадку вони визначаються власними числами характеристичної матриці $\mathbf{Q}_{sol}$. Характеристичне рівняння з якого відшукуються власні числа $\mathbf{Q}_{sol}$ є аналогом дисперсійного рівняння в частотній області. Відповідні комплексні частоти, отримані з такого дисперсійного рівняння співвідносяться з власними числами матриці $\mathbf{Q}_{sol}$ як $\tilde{\omega}_r = i\lambda_r^{sol}$, де λ_r^{sol} власні числа матриці $\mathbf{Q}_{sol}$.

Рис. 3.3 ілюструє зміну власної частоти коливань в резонаторі зі зменшенням його розміру.

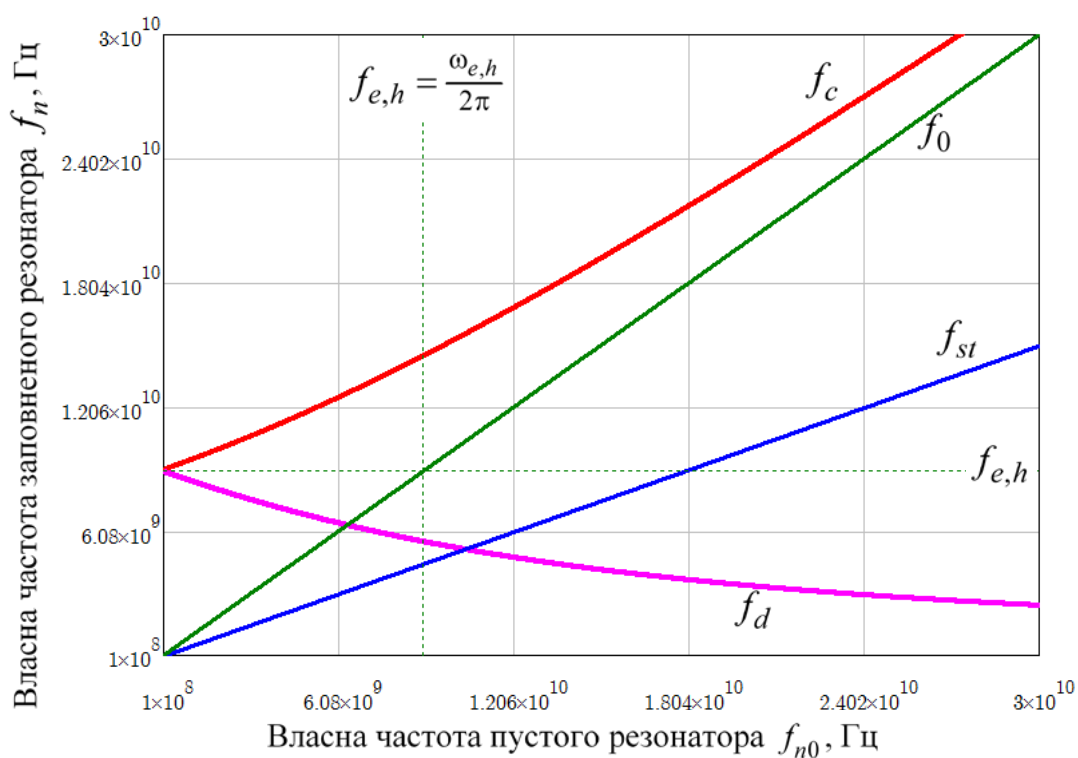


Рис. 3.3 Власні частоти резонатора, заповненого середовищем з показником заломлення близьким до нуля

Додаткові позначення присутні на графіках:

$f_0 = \frac{k_n}{2\pi}$ – власна частота пустого резонатора, визначена його геометрією;

$$f_{st} = \frac{k_n}{2\pi\sqrt{1+\chi_{st}^e}\sqrt{1+\chi_{st}^h}} - \text{власна частота резонатора у випадку відсутності}$$

дисперсії, де сприйнятливість середовища визначається амплітудою полюсу Друде;

f_c – власна частота резонатора заповненого середовищем з показником заломлення близьким до нуля, яка обумовлена перевидбиттям хвиль між стінками резонатора;

f_d – власна частота резонатора заповненого середовищем з показником заломлення близьким до нуля, яка обумовлена присутністю дисперсійного середовища.

Поведінка власних частот проілюстрована Рис. 3.3 говорить про те що на плазмовій частоті середовища коливань електромагнітного поля в резонаторі не відбувається. Власна частота f_c більша за власну частоту пустого резонатора і, за малих розмірів резонатора, наближається до прямої що відповідає власній частоті пустого резонатора, як до асимптоти. В свою чергу f_d , яка зумовлена присутністю дисперсійного середовища, знаходиться в діапазоні від’ємних значень показника заломлення середовища і зменшується зі зменшенням розмірів резонатора. Також треба відмітити, що ненавантажена добротність коливань, представлена на Рис. 3.4 показує, що добротність власних коливань на частоті f_d значно менша ніж на частоті f_c .

Рис. 3.5 представляє часову розгортку модової амплітуди напруженості електричного поля в резонаторі $e_n(t)$ у випадку початкових умов $e_n^0 = h_n^0 = \tilde{p}_n^0 = \tilde{m}_n^0 = 1$. На графіку присутні коливання на обох власних частотах резонатора, заповненого середовищем з показником заломлення близьким до нуля.

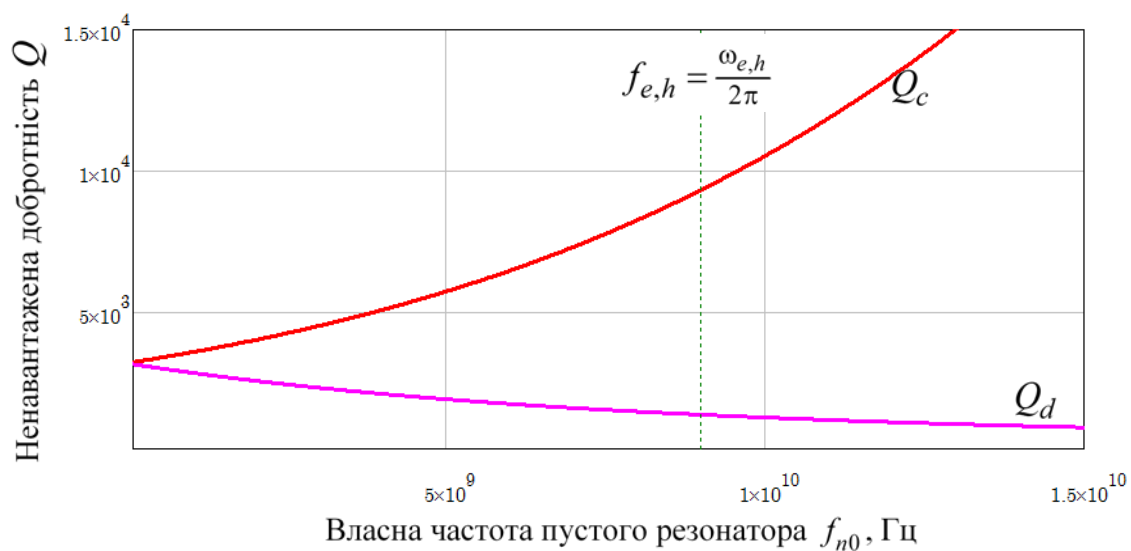


Рис. 3.4 Невантажена добротність коливань у резонаторі, який заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля, на кожній з власних частот

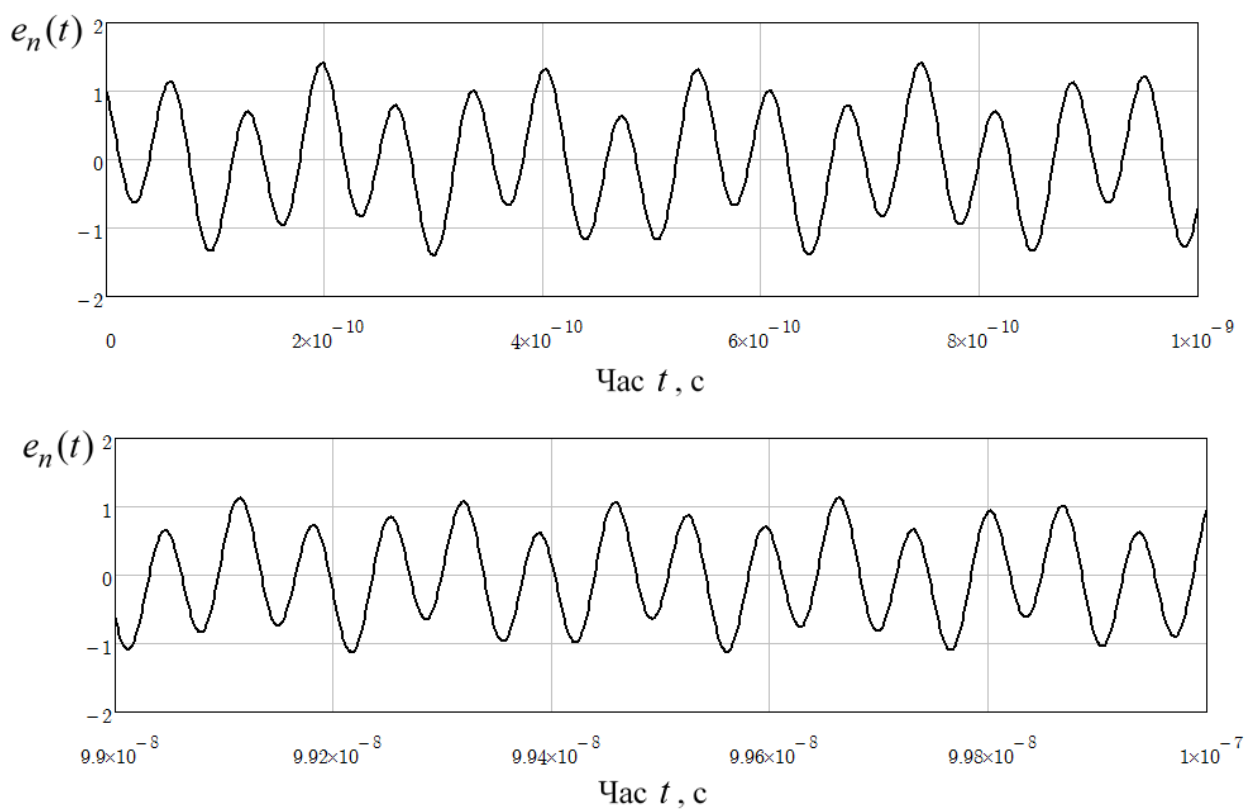


Рис. 3.5 Власні коливання у резонаторі, який заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля ($e_n^0 = h_n^0 = 1$)

ВИСНОВКИ

В кваліфікаційній роботі магістра розглянуто задачу про електромагнітні поля в резонаторі, що заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля. Згідно з літературою, можна промодельовати середовище з такими характеристиками за допомогою полюсів Друде для ефективної діелектричної та магнітної сприйнятливості середовища, з однаковими параметрами. Отримано та проаналізовано власні характеристики такого резонатора. Визначено, що на плазмовій частоті середовища коливань електромагнітного поля в резонаторі не відбувається. Власна частота зумовлена перевидбиттям хвиль між стінками резонатора більша за власну частоту порожнього резонатора і, за малих розмірів резонатора, наближається до прямої що відповідає власній частоті порожнього резонатора, як до асимптоти. В свою чергу частота, зумовлена присутністю дисперсійного середовища, знаходиться в діапазоні від'ємних значень показника заломлення середовища і зменшується зі зменшенням розмірів резонатора. Також отримано, що ненавантажена добротність коливань на частоті зумовленій присутністю дисперсійного середовища, значно менша ніж на частоті, зумовленій перевидбиттям хвиль між стінками резонатора. Наведено часову залежність модової амплітуди електричного поля у випадку вільних коливань в резонаторі, в якій присутні обидві власні частоти резонатора, який заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля.

ПОСИЛАННЯ

1. A.K. Ghatak, Optics (Tata McGraw Hill, 2003)
2. M.N.O. Sadiku, Elements of Electromagnetics (Oxford University Press, 2014)
3. J.D. Ryder et al., Networks, Lines and Fields (1955)
4. J.A. Edminister, Electric Circuits (1965)
5. J.D. Kraus, R.J. Marhefka, A.S. Khan, Antennas and Wave Propagation, Tata McGraw-Hill Education, 2006)
6. C.A. Balanis, Antenna Theory: Analysis and Design (Wiley, 2016)
7. B. Slovick, Z.G. Yu, M. Berding, S. Krishnamurthy, Perfect dielectric-metamaterial reflector. Phys. Rev. B 88(16), 165116 (2013)
8. Iñigo Liberal and Nader Engheta Nature Photonics 11, 149–158 (2017)
9. N. Shankhwar and R. K. Sinha, Zero Index Metamaterials, Nature Singapore Pte Ltd. 2021
10. M.I. Katsnelson, Zitterbewegung, chirality, and minimal conductivity in graphene. Eur. Phys. J. B-Condens. Matter Complex Syst. 51(2), 157–160 (2006)
11. A.K. Geim, K.S. Novoselov, The rise of graphene. Nat. Mater. 6(3), 183 (2007)
12. L.-G. Wang, Z.-G. Wang, J.-X. Zhang, S.-Y. Zhu, Realization of dirac point with double cones in optics. Opt. Lett. 34(10), 1510–1512 (2009)
13. E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 10th edn. (2009)
14. L.-G. Wang, Z.-G. Wang, J.-X. Zhang, S.-Y. Zhu, Realization of dirac point with double cones in optics. Opt. Lett. 34(10), 1510–1512 (2009)
15. F. Zhang, G. Houzet, E. Lheurette, D. Lippens, M. Chaubet, X. Zhao, Negative-zero-positive metamaterial with omega-type metal inclusions. J. Appl. Phys. 103(8), 084312 (2008)
16. D.J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics (AAPT, 2005)

17. P. Drude, Zur elektronentheorie der metalle. *Annalen der physik* 306(3),566–613 (1900)
- 18.Bozza G. Cavities involving metamaterials with an uncountable set of resonant frequencies / G. Bozza, G. Oliveri, M. Raffetto // *IEEE Microwave and Wireless Comp. Lett.* – 2007. – Vol. 17, № 8. – P. 565–567.
- 19.Erden F. Analytical approach for studying a time-domain cavity problem / F. Erden, O.A. Tretyakov // 2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI). – 2014. – [10.1109/APS.2014.6904397](https://doi.org/10.1109/APS.2014.6904397).
- 20.Tretyakov O. A. Essentials of nonstationary and nonlinear electromagnetic field theory / O. A. Tretyakov // *Analytical and numerical methods in the Electromagnetic Wave Theory*. In ed. by M. Hashimoto, M. Idemen, O. A. Tretyakov. – Science House Co., Ltd., Tokyo, 1993.
- 21.Aksoy S. Time-Domain Cavity Oscillations Supported by a Temporally Dispersive Dielectric / S. Aksoy, M. Antyufeyeva, E. Basaran, A. A. Ergin, O. A. Tretyakov // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. – 2005. – Vol. 53, № 8, p. 2465 – 2471.
- 22.Aksoy S. Study of a time variant cavity system / S. Aksoy, O.A. Tretyakov // *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. – 2012. – Vol. 16, Iss. 11. – p. 1535–1553.
- 23.Antyufeyeva M.S. Time-domain electromagnetic fields in a resonator with dispersive medium / M.S. Antyufeyeva, O.A. Tretyakov // *Conference Proceedings of Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET)*. – 2002. – [10.1109/MMET.2002.1106856](https://doi.org/10.1109/MMET.2002.1106856)
- 24..M. S. Antyufeyeva, "Cavity with dispersive medium that refractive index is positive and negative," 2011 *Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium*, 2011, pp. 73-76, doi: [10.1109/MRRS.2011.6053604](https://doi.org/10.1109/MRRS.2011.6053604).
- 25.M. S. Antyufeyeva and O. A. Tretyakov, "Pulse excitation of a cavity with dispersive medium that refractive index is positive and negative," 2010 5th *International Confernce on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*, 2010, pp. 134-135, doi: [10.1109/UWBUSIS.2010.5609163](https://doi.org/10.1109/UWBUSIS.2010.5609163).

26. M. S. Antyufeyeva, "Electromagnetic field in a dispersive medium filled cavity under pulse train excitation," 2012 6th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 2012, pp. 302-304, doi: 10.1109/UWBUSIS.2012.6379812.
27. Shvartsburg A. B. Impuls Time-Domain Electromagnetics of Continuous Media / A. B. Shvartsburg. – Birkhäuser, Boston. – 1999. 168 P.
28. Bohren C. F. Absorption and scattering of light by small particles / C. F. Bohren, D. R. Huffman. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.