

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ


Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем

Кафедра теоретичної радіофізики

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. завідувача кафедри

 Вячеслав ХАРДІКОВ

“6” грудня _____ 2024 року

Кваліфікаційна робота магістра

**НИЗЬКОЧАСТОТНЕ РОЗСІЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ
НА БІАНІЗОТРОПНИХ ТІЛАХ В АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

Виконав: студент II курсу магістратури, групи РР-61

спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали



Артем ХРИЧОВ

Керівник

кандидат фіз.-мат. наук,

доцент



Ольга БАГАЦЬКА

2024 рік

АНОТАЦІЯ

Хричов А. С. Низькочастотне розсіювання електромагнітних хвиль на біанізотропних тілах в анізотропних середовищах. Кваліфікаційна робота магістра, 2024, 44 стор., 6 рис., 52 посилання.

За допомогою методу інтегральних рівнянь макроскопічної електродинаміки отримано аналітичний розв'язок задачі низькочастотного розсіювання плоскої електромагнітної хвилі на однорідному біанізотропному еліпсоїді в однорідному анізотропному середовищі. Як результат отримано тензори поляризованості біанізотропного еліпсоїда. Виявлено якісні закономірності низькочастотного розсіювання плоскої хвилі на біанізотропному тілі правильної форми в анізотропному середовищі та їхні кількісні особливості.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: анізотропне середовище, біанізотропне середовище, еліпсоїд, низькочастотне розсіювання, тензор поляризованості, диференціальний переріз розсіювання.

ABSTRACT

Khrychov A. S. Low-frequency scattering of electromagnetic waves on bianisotropic bodies in anisotropic media. Masters qualifying work, 2024, 44 pp., 6 fig., 52 references.

Using the method of integral equations of macroscopic electrodynamics, an analytical solution to the problem of low-frequency scattering of a plane electromagnetic wave on a homogeneous bianisotropic ellipsoid in a homogeneous anisotropic medium was obtained. As a result, the polarization tensors of the bianisotropic ellipsoid were determined. Qualitative regularities of low-frequency scattering of a plane wave on a bianisotropic body of regular shape in an anisotropic medium and their quantitative features were revealed.

KEYWORDS: anisotropic medium, bianisotropic medium, ellipsoid, low-frequency scattering, polarization tensor, differential scattering cross section.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	6
РОЗДІЛ 2. НИЗЬКОЧАСТОТНЕ РОЗСІЮВАННЯ ПЛОСКИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА БІАНІЗОТРОПНИХ ОБ'ЄКТАХ ПРАВИЛЬНОЇ ФОРМИ В АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ	9
2.1 Загальна постановка задачі дифракції електромагнітних хвиль в анізотропному середовищі	10
2.2. Формулювання інтегральних рівнянь в низькочастотному наближенні	13
2.3. Розсіювання електромагнітних хвиль на малих тілах еліпсоїдальної форми	16
2.4. Числові результати	26
ВИСНОВКИ	36
ДОДАТОК А. Просторові статичні функції Гріна рівнянь Максвелла для однорідного анізотропного середовища	38
ЛІТЕРАТУРА	41

ВСТУП

Пропонована кваліфікаційна робота магістра присвячена теоретичному дослідженню електродинамічних властивостей біанізотропних середовищ, аналізу закономірностей розсіяння електромагнітних хвиль на біанізотропних об'єктах. Під біанізотропними середовищами розуміють лінійні анізотропні середовища, яким притаманна просторова дисперсія. До таких середовищ відносять, зокрема, взаємні (кіральні), невзаємні біанізотропні середовища (середовища Теллегена), природні анізотропні кристали з гіротропними властивостями тощо.

У біанізотропних середовищах одночасно наявні анізотропія електричних і магнітних властивостей і просторова дисперсія, що обумовлює їх сумісний вплив на закономірності поширення електромагнітних хвиль в таких середовищах. Просторова дисперсія є результатом нелокальної залежності відгуку середовища (векторів електричного зміщення, магнітної індукції або векторів електричної поляризації чи намагніченості) від зовнішнього електромагнітного поля. Фізичні процеси і явища, що спричиняють просторову дисперсію, можуть бути доволі різними, зокрема, просторова дисперсія може бути обумовлена такими факторами, як мікроскопічна структура речовини, асиметричність центрів розсіювання, особливості динамічної поведінки вільних носіїв зарядів, які є специфічними для певних класів речовин і частотних діапазонів. У діапазонах радіохвиль і надвисоких частот до середовищ з просторовою дисперсією належать штучні біанізотропні середовища, створені на основі асиметричних елементів, що забезпечують магнітоелектричну взаємодію.

Використання властивостей біанізотропних середовищ відкриває значні перспективи розробки нових приладів і пристроїв мікрохвильової та антенної техніки, що обумовлює значний науковий і науково-практичний інтерес до

дослідження електродинамічних властивостей і процесів у таких середовищах. Це спричиняє необхідність побудови адекватних фізичних і математичних моделей для опису взаємодії електромагнітного поля з біанізотропними середовищами й обумовлює актуальність тематики, досліджуваної у кваліфікаційній роботі.

Зокрема, перспективним є використання властивостей біанізотропних матеріалів при розробці пристроїв для перетворення поляризації електромагнітних хвиль, створення екранів з керованими відбивними властивостями, напівпрозорих поверхонь. Також важливим виглядає той аспект, що ціла низка результатів і висновків дослідження ефектів, обумовлених просторовою дисперсією, може бути використана при аналізі аналогічних ефектів в механіці суцільних середовищ і акустиці.

Як відомо, просторова дисперсія є суттєвою за умови співмірності характерного фізичного розміру (розміру частинок, постійної решітки, радіуса молекулярної дії) із довжиною хвилі, що визначає ефект нелокальності. Для опису ефектів просторової дисперсії першого порядку в межах феноменологічної теорії застосовуються матеріальні рівняння, які пов'язують вектори електричного зміщення і магнітної індукції з відповідними векторами напруженості поля за допомогою тензорів діелектричної і магнітної проникностей і тензорів магнітоелектричної взаємодії. Використання таких матеріальних рівнянь дозволяє досліджувати макроскопічні («ефективні») електромагнітні властивості біанізотропних середовищ без урахування складної мікроскопічної структури речовини. При цьому для визначення тензорів матеріальних параметрів і магнітоелектричної взаємодії для конкретних моделей середовищ використання мікроскопічної теорії є необхідним.

Метою роботи є побудова фізико-математичної моделі і дослідження на її основі особливостей взаємодії електромагнітного поля з біанізотропними середовищами з урахуванням одночасного впливу на характеристики

поширення плоских електромагнітних хвиль анізотропії середовища і просторової дисперсії.

Пропонована робота містить аналітичне розв'язання задачі низькочастотного розсіювання плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі на довільно біанізотропному однорідному еліпсоїді в однорідному безграничному анізотропному середовищі. Розв'язання проведено на основі методу інтегральних рівнянь макроскопічної електродинаміки, його результатом є тензори поляризованості біанізотропного еліпсоїда, а також аналіз закономірностей і кількісних особливостей низькочастотного розсіювання плоскої хвилі на біанізотропному тілі правильної форми в анізотропному середовищі. Отримані результати можуть представляти як самостійний науковий інтерес, так і бути застосованими у подальших дослідженнях. Зокрема, тензори поляризованості біанізотропного еліпсоїда можуть бути використані при визначенні ефективних електромагнітних параметрів штучного біанізотропного середовища.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Вивчення біанізотропних середовищ є перспективним напрямком сучасного розвитку електродинаміки суцільних середовищ, що активно розвивається багатьма дослідниками. Біанізотропні середовища – це лінійні анізотропні середовища, яким притаманна просторова дисперсія, що проявляється в нелокальному характері залежностей векторів індукції від напруженостей електромагнітного поля [1-6]. Це означає, що вектор електричного зміщення і вектор магнітної індукції у конкретній точці середовища визначається значеннями напруженості поля не тільки в тій самій точці, а й у деякому її околі. Ефекти просторової дисперсії необхідно враховувати, коли характерний для певного фізичного процесу параметр a (наприклад, радіус молекулярної дії, максимальний розмір частинки, довжина вільного пробігу, відстань перенесення тощо) стає порівняним з характерною відстанню λ , на якій істотно змінюється поле [1-6]. Просторова дисперсія може виникати внаслідок різних фізичних процесів, пов'язаних із мікроскопічною будовою речовини, динамічною поведінкою вільних зарядів, асиметричністю центрів розсіювання та іншими аспектами [1-10].

У кристалах, рідинах та інших неметалевих конденсованих середовищах природна оптична активність (гіротропія) як сукупність оптичних явищ, в основі яких лежать ефекти просторової дисперсії порядку a/λ , обумовлена симетричністю молекул, структурною або кристалічною симетрією [2], [10]. У металах, розчинах електролітів, феромагнетиках, плазмі нелокальність виникає внаслідок руху вільних зарядів [6], [8], [11-15]. У діапазоні радіохвиль просторова дисперсія притаманна штучним біанізотропним середовищам – композиційним матеріалам складної структури із включеннями [16-19].

Ефекти просторової дисперсії порядку a/λ в межах феноменологічної теорії описуються лінійними матеріальними рівняннями, при цьому компоненти Фур'є векторів електричного зміщення і магнітної індукції

виражаються одночасно через компоненти Фур'є як електричної, так і магнітної складових напруженостей електромагнітного поля [7], [18], [20-25]. Матеріальні рівняння для анізотропних середовищ записуються за допомогою тензорів другого рангу діелектричної $\hat{\epsilon}$ та магнітної $\hat{\mu}$ проникностей, а також тензорів магнітоелектричної взаємодії $\hat{\xi}$, $\hat{\zeta}$. У теорії гіротропних середовищ тензори магнітоелектричної взаємодії також називають тензорами гірації [10]. Система матеріальних рівнянь із тензорами $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}$, $\hat{\zeta}$, що застосовується у цій роботі, є симетричною відносно електричних і магнітних величин, і відповідає загальним вимогам закону збереження енергії та симетричності кінетичних коефіцієнтів [26-29].

У кристалооптиці також застосовують інший підхід [1-2], [5], який передбачає використання вектора електричного зміщення, що визначається з урахуванням усіх складових, які виникають при усередненні мікроскопічних струмів. При цьому всі електричні та магнітні властивості речовини описуються одним тензором діелектричної проникності. Для різних моделей біанізотропних середовищ визначення тензорів діелектричної та магнітної проникностей, а також тензора магнітоелектричної взаємодії (або гірації) представляє предмет мікроскопічної теорії [1, 2], [10]. Для оптичного діапазону мікроскопічну теорію суцільних середовищ наведено, зокрема, у фундаментальних роботах [1, 2], [10], [30, 31]. У пропонованій роботі розглядаються малорозмірні біанізотропні включення правильної форми, кіральність яких спричиняє мікроскопічна структура середовища [32, 33]. Дослідження розсіювання на таких включеннях наведено, зокрема, в роботах [34, 35], проте всі результати досліджень обмежувались перебуванням розсіювачів в ізотропній матриці. В загальному випадку анізотропія оточуючого середовища може суттєво впливати на розсіювальні властивості включень [36], що, в свою чергу, може привести до появи якісно нових електродинамічних характеристик композиційного матеріалу з анізотропною матрицею [37]. Саме це і обумовлює тематику пропонованого дослідження,

що містить розв'язання задачі низькочастотного розсіювання плоскої електромагнітної хвилі на однорідному довільно біанізотропному еліпсоїді, розташованому в анізотропному середовищі. Розв'язання ґрунтується на методі інтегральних рівнянь макроскопічної електродинаміки, розвиненому у роботах М. А. Хижняка [38].

Дослідження ефектів, обумовлених анізотропією і просторовою дисперсією речовини, представляють значний теоретичний інтерес, а також знаходять практичне застосування у різних наукових і науково-практичних галузях. У зв'язку з цим побудова та аналіз фізико-математичних моделей взаємодії електромагнітного поля з біанізотропними матеріальними середовищами є актуальною і практично затребуваною.

РОЗДІЛ 2

НИЗЬКОЧАСТОТНЕ РОЗСІЮВАННЯ ПЛОСКИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА БІАНІЗОТРОПНИХ ОБ'ЄКТАХ ПРАВИЛЬНОЇ ФОРМИ В АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Фундаментальні положення теорії низькочастотного розсіювання було розроблено у відомих класичних роботах Релея. Ця теорія має широкий спектр важливих застосувань у сучасній радіофізиці. Зокрема, можна визначити закономірності дифракції електромагнітних хвиль на неоднорідних дискретних середовищах як природного (полікристали, хмари, град), так і штучного походження (композиційні матеріали), маючи інформацію про індивідуальні розсіювальні властивості окремого розсіювача, а саме однієї частинки із урахуванням статистичних характеристик розподілу частинок в оточуючому середовищі. Анізотропія електромагнітних властивостей оточуючого середовища і розсіювача може набувати головного значення, наприклад, під час побудови моделі штучних середовищ, або ж бути другорядним чинником, який потрібно брати до уваги під час розрахунків.

У цьому розділі наведено розв'язання задачі низькочастотного розсіювання плоских електромагнітних хвиль на тривимірних біанізотропних і анізотропних тілах правильної форми, розташованих у довільному анізотропному середовищі. Як базову модель структури, на якій розсіюється плоска електромагнітна хвиля, розглядається тривісний біанізотропний еліпсоїд, занурений в безмежне однорідне анізотропне середовище. Фізичний зміст такої моделі є доволі загальним і охоплює широкий спектр практично важливих випадків [39].

В основі пропонованого розгляду лежить метод інтегральних рівнянь макроскопічної електродинаміки, розвинений у фундаментальних роботах М.А. Хижняка [38].

2.1. Загальна постановка задачі дифракції електромагнітних хвиль в анізотропному середовищі

Розглянемо безграничне анізотропне середовище, що займає весь простір $V = (-\infty < (x, y, z) < +\infty)$, в якому розташовано детерміноване біанізотропне включення об'ємом V_b . Дифракція електромагнітних хвиль для такої структури описується інтегральними рівняннями загального вигляду [40]

$$\vec{E}(\vec{R}) = \vec{E}_{in}(\vec{R}) + \int_{V_b} [\hat{G}_{ee}(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \vec{J}_b(\vec{R}') + \hat{G}_{em}(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \vec{M}_b(\vec{R}')] d\vec{R}', \quad (2.1)$$

$$\vec{H}(\vec{R}) = \vec{H}_{in}(\vec{R}) + \int_{V_b} [\hat{G}_{me}(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \vec{J}_b(\vec{R}') + \hat{G}_{mm}(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \vec{M}_b(\vec{R}')] d\vec{R}'.$$

Фізичний зміст цих рівнянь можна сформулювати так: повне поле $\vec{E}(\vec{R}), \vec{H}(\vec{R})$ в анізотропному середовищі, $\vec{R} \in V$, дорівнює сумі первинного електромагнітного поля $\vec{E}_{in}(\vec{R}), \vec{H}_{in}(\vec{R})$, створеного джерелами за відсутності включення, і поля, розсіяного біанізотропним детермінованим розсіювачем. У рівняннях (2.1) тензори другого рангу $\hat{G}_{\nu\tau}(\vec{R} - \vec{R}'), (\nu, \tau = e, m)$ – діадні функції Гріна однорідного безграничного анізотропного середовища [41], матеріальні параметри якого є тензорами діелектричної $\hat{\epsilon}$ та магнітної $\hat{\mu}$ проникностей. Вектори $\vec{J}_b(\vec{R}), \vec{M}_b(\vec{R})$ – поляризаційні струми, наведені в об'ємі біанізотропного включення, густина яких визначається співвідношеннями:

$$\vec{J}_b(\vec{R}) = \begin{cases} (\omega/4\pi i)[(\hat{\epsilon}_b - \hat{\epsilon}) \cdot \vec{E}(\vec{R}) + \hat{\xi}_b \cdot \vec{H}(\vec{R})] & , \vec{R} \in V_b \\ 0 & , \vec{R} \notin V_b \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\vec{M}_b(\vec{R}) = \begin{cases} (\omega/4\pi i)[\hat{\zeta}_b \cdot \vec{E}(\vec{R}) + (\hat{\mu}_b - \hat{\mu}) \cdot \vec{H}(\vec{R})] & , \vec{R} \in V_b \\ 0 & , \vec{R} \notin V_b \end{cases} \quad (2.3)$$

Вирази (2.2), (2.3) містять матеріальні параметри біанізотропного включення, а саме, тензори діелектричної $\hat{\epsilon}_b$ і магнітної $\hat{\mu}_b$ проникностей, а також тензори магнітоелектричної взаємодії $\hat{\xi}_b$, $\hat{\zeta}_b$, які в обраній, так званій абсолютній, системі координат x, y, z , представляються в загальному випадку комплексними матрицями, що мають усі дев'ять компонент. Практично важливим є окремий випадок великих порівняно з розмірами розсіювача довжин хвиль, для якого є застосовним метод Релея, який надає можливість представити розв'язок інтегральних рівнянь (2.1) у вигляді ряду за степенями відношення характерного розміру включення до довжини хвилі в оточуючому середовищі. Коефіцієнти цього розкладання, що залежать від координат, задовольняють нескінченному ланцюжку рівнянь, що «зачіпляються». Обрив цього ланцюжка на певній ланці надає наближений вираз для поля. У кваліфікаційній роботі дослідження обмежується розв'язанням інтегральних рівнянь у нульовому (квазістатичному) наближенні. Ці рівняння випливають із (2.1) за умови малості характерного розміру розсіювача a :

$$k_0 a \ll 1. \quad (2.4)$$

При цьому від функцій Гріна залишаються тільки найбільш сингулярні члени при $\vec{R} \rightarrow \vec{R}'$ [42, 43]. Інтегральні рівняння (2.1) у квазістатичного наближення набудуть вигляду:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \vec{E}_{in}^{(0)}(\vec{R}) + \int_{V_b} \hat{G}_{ee}^{stat}(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \vec{J}_b(\vec{R}') d\vec{R}',$$

(2.5)

$$\vec{H}(\vec{R}) = \vec{H}_{in}^{(0)}(\vec{R}) + \int_{V_b} \hat{G}_{mm}^{stat}(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \vec{M}_b(\vec{R}') d\vec{R}'.$$

Тут $\vec{E}_{in}^{(0)}, \vec{H}_{in}^{(0)}$ – нульові члени розкладання за (ik_0) заданого поля первинної хвилі, c – швидкість світла у вакуумі, $k_0 = \omega/c$. Надалі будемо опускати індекси $^{(0)}$ у величин, що описують поле, оскільки ми обмежуємо наш розгляд інтегральними рівняннями розсіювання квазістатичного наближення. У виразах (2.5) взято до уваги, що в однорідному анізотропному середовищі сингулярну частину мають тільки електрична $\hat{G}_{ee}(\vec{R} - \vec{R}')$ й магнітна $\hat{G}_{mm}(\vec{R} - \vec{R}')$ функції Гріна, в той час як статична частина функцій $\hat{G}_{em}(\vec{R} - \vec{R}')$ і $\hat{G}_{me}(\vec{R} - \vec{R}')$ дорівнює нулю [42, 43].

Рівняння (2.5) представляють собою інтегральні рівняння Фредгольма, які мають обмежені розв'язки в усіх точках всередині розсіювача за умови скінченності вільного члена. Для точок всередині включення $\vec{R} \in V_b$ співвідношення (2.5) встановлюють інтегральний зв'язок між первинним полем і внутрішнім полем розсіювача (еліпсоїда), на який у загальному випадку впливають властивості оточуючого середовища, що змінюють характеристики розсіювання включення. Для точок поза включенням $\vec{R} \notin V_b$

вказані співвідношення визначають сумарне електромагнітне поле, утворене первинним полем і полем, розсіяним включенням. Інтегральні рівняння (2.5) мають замкнений аналітичний розв'язок для внутрішнього поля тіл правильної форми, який надається у подальших розділах.

2.2. Формулювання інтегральних рівнянь в низькочастотному наближенні

Для однорідного анізотропного середовища спектральні статичні функції Гріна отримані у проведених раніше дослідженнях, результати яких наведені, зокрема в [35-36]. Просторові статичні функції Гріна, визначені у Додатку А, можна записати так:

$$\hat{G}_{ee}^{stat}(\vec{R} - \vec{R}') = \frac{4\pi i}{\omega} \nabla \nabla g_e(\vec{R} - \vec{R}'), \quad (2.6)$$

$$\hat{G}_{mm}^{stat}(\vec{R} - \vec{R}') = \frac{4\pi i}{\omega} \nabla \nabla g_m(\vec{R} - \vec{R}'). \quad (2.7)$$

Символом ∇ традиційно позначається тривимірний оператор «набла». Скалярна функція $g_e(\vec{R} - \vec{R}')$ задається виразом

$$g_e(\vec{R} - \vec{R}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \bar{\epsilon}^{(s)} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')}}, \quad (2.8)$$

а скалярну функцію $g_m(\vec{R} - \vec{R}')$ можна отримати з функції $g_e(\vec{R} - \vec{R}')$ шляхом формальної заміни $\vec{\epsilon}^{(s)} \rightarrow \vec{\mu}^{(s)}$. Симетрична частина діад діелектричної та магнітної проникності $\hat{\alpha} = \hat{\epsilon}, \hat{\mu}$ визначається формулою

$$\hat{\alpha}^{(s)} = \frac{1}{2}(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^T). \quad (2.9)$$

Символом Γ позначено операцію транспонування, а $\bar{\alpha} = \hat{\alpha}^{-1} \det \hat{\alpha}$, ($\hat{\alpha} = \hat{\epsilon}, \hat{\mu}$) – це приєднана або сполучена діада [44]. Отже, закономірності низькочастотного розсіювання в анізотропному середовищі будуть визначатися симетричною частиною діад діелектричної та магнітної проникностей.

При дослідженні ефектів, що виникають при взаємодії електромагнітних хвиль із біанізотропними середовищами [37], [46] надзвичайно ефективним є застосування 6-векторного формалізму електродинаміки, запропонованого, зокрема, в роботі [45]. Ця методологія передбачає, що будь-який шестивимірний вектор вводиться як впорядкована пара (стовпчик) двох тривимірних векторів, а будь-яка 6-діада – впорядкований набір (матриця) чотирьох тензорів 2-го рангу.

Перейдемо у співвідношеннях (2.5) до 6-векторної форми:

$$\mathbf{e}(\vec{R}) = \mathbf{e}_{in}(\vec{R}) + \int_{V_b} \mathbf{G}^{stat}(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \mathbf{j}_b(\vec{R}') d\vec{R}'. \quad (2.10)$$

У формулі (2.10) шестивимірні вектори повного електромагнітного поля і первинного поля задаються так:

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{R}) \\ \vec{H}(\vec{R}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{in} = \begin{pmatrix} \vec{E}_{in}(\vec{R}) \\ \vec{H}_{in}(\vec{R}) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

а статична функція Гріна $\mathbf{G}^{stat}(\vec{R} - \vec{R}')$ представляється у вигляді 6-діади вигляду:

$$\frac{\omega}{4\pi i} \mathbf{G}^{stat} = \begin{pmatrix} \nabla \nabla g_e(\vec{R} - \vec{R}') & 0 \\ 0 & \nabla \nabla g_m(\vec{R} - \vec{R}') \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Густина струмів, що наводяться первинним полем всередині об'єму еліпсоїда, описується 6-вектором:

$$\mathbf{j}_b = \begin{pmatrix} \vec{J}_b(\vec{R}) \\ \vec{M}_b(\vec{R}) \end{pmatrix} = \frac{\omega}{4\pi i} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_b - \hat{\epsilon} & \hat{\xi}_b \\ \hat{\zeta}_b & \hat{\mu}_b - \hat{\mu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{R}) \\ \vec{H}(\vec{R}) \end{pmatrix} = \frac{\omega}{4\pi i} \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{e}. \quad (2.13)$$

У формулі (2.13) 6-діада $\tilde{\mathbf{M}}$ визначається як різниця 6-діад \mathbf{M}_b і \mathbf{M}_0 :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_b - \mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_b & \hat{\xi}_b \\ \hat{\zeta}_b & \hat{\mu}_b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\epsilon} & 0 \\ 0 & \hat{\mu} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Взявши до уваги визначення (2.13), можна отримати інтегро-диференціальне рівняння (2.10) у 6-векторній формі:

$$\mathbf{e}(\vec{R}) = \mathbf{e}_{in}(\vec{R}) + \int_{V_b} \mathbf{G}^{stat}(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{e}(\vec{R}') d\vec{R}'. \quad (2.15)$$

Останнє рівняння є справедливим для неоднорідного малого за розмірами і довільного за формою біанізотропного розсіювача. Далі ми будемо розглядати однорідний біанізотропний розсіювач у формі еліпсоїда, розташований в анізотропному середовищі, для якого отримаємо аналітичний розв'язок задачі низькочастотного розсіювання плоскої електромагнітної хвилі.

2.3. Розсіювання електромагнітних хвиль на малих тілах еліпсоїдальної форми

Розглянемо структуру, утворену анізотропним середовищем, в якому розташовано довільний тривісний біанізотропний еліпсоїд, розміри півосей якого дорівнюють a_1, a_2, a_3 ($a_1 \geq a_2 \geq a_3$). Геометрію задачі наведено на рисунку 2.1.

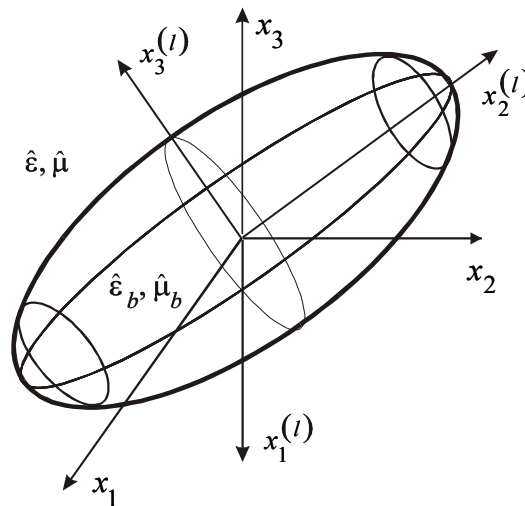


Рис. 2.1. Геометрія задачі

На еліпсоїд падає плоска електромагнітна хвиля

$$\mathbf{e}_{in} = \mathbf{e}_a \exp(i\vec{k}_{in} \cdot \vec{R}), \quad (2.16)$$

хвильовий вектор \vec{k}_{in} якої підкоряється дисперсійному рівнянню

$$\Delta(\vec{k}) = 0. \quad (2.17)$$

Шестивекторні амплітуди плоскохвильової моди електромагнітного поля в анізотропному середовищі $\mathbf{e}_a = \text{col}[\vec{E}_a, \vec{H}_a]$, а також оператор $\Delta(\vec{k})$ в явному вигляді отримано в роботах [36], [44]. До розгляду введено дві декартові системи координат: (x_1, x_2, x_3) – абсолютна система координат, ідентична до системи (x, y, z) , і $(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, x_3^{(l)})$ – система координат, у якій рівняння еліпсоїда записується в канонічному вигляді:

$$\left(\frac{x_1^{(l)}}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2^{(l)}}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3^{(l)}}{a_3}\right)^2 \equiv \underline{x}^{(l)T} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x}^{(l)} \leq 1. \quad (2.18)$$

Тут $\underline{\underline{A}}$ – діагональна матриця $\underline{\underline{A}} = \text{diag} [1/a_1^2, 1/a_2^2, 1/a_3^2]$, вектор-стовпець $\underline{x}^{(l)T} = \text{col}[x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, x_3^{(l)}]$. Орієнтація еліпсоїда задається дійсною ортогональною матрицею $\underline{\underline{O}} = [O_{jk}]$, яка визначає лінійне перетворення

$$e_j = \sum_{k=1}^3 O_{jk} e_k^{(l)}. \quad (2.19)$$

У (2.19) матриця переходу задає лінійний зв'язок між двома системами координат – абсолютною (x_1, x_2, x_3) і повернутою $(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, x_3^{(l)})$. Відповідно до [47], будь-яке обертання системи координат $(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, x_3^{(l)})$ відносно системи координат (x_1, x_2, x_3) можна представити як сукупність послідовних поворотів на кути Ейлера: навколо осі $z(x_3)$ – на кут φ_e , навколо осі $x(x_1)$ – на кут θ_e і навколо осі $z(x_3)$ – на кут ψ_e . Матриця переходу може бути записана так:

$$\underline{\underline{O}} = \begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 c_2 & c_1 s_3 - s_1 c_2 c_3 & s_1 s_2 \\ s_1 c_3 + c_1 c_2 s_3 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_1 s_2 \\ s_2 s_3 & s_2 c_3 & c_2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Тут використані позначення

$$c_1 = \mathbf{cos} \varphi_e, \quad s_1 = \mathbf{sin} \varphi_e,$$

$$c_2 = \mathbf{cos} \theta_e, \quad s_2 = \mathbf{sin} \theta_e,$$

$$c_3 = \mathbf{cos} \psi_e, \quad s_3 = \mathbf{sin} \psi_e.$$

Після урахування співвідношення

$$e_k^{(l)} = \sum_{j=1}^3 O_{jk} e_j \quad (2.21)$$

рівняння еліпсоїда (2.18) в абсолютній системі координат набуває вигляду

$$B(\underline{x}, \underline{x}) \equiv \underline{x}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{x} \leq 1, \quad (2.22)$$

$$\underline{B} = \underline{O} \cdot \underline{A} \cdot \underline{O}^T.$$

В останньому рівнянні \underline{B} позначає дійсну симетричну додатно визначену матрицю, а $B(\underline{x}, \underline{x})$ – відповідну квадратичну форму.

Беручи до уваги умову (2.4), можна вважати, що всередині еліпсоїда електромагнітне поле $\mathbf{e}(\vec{R})$ не змінюється. З урахуванням цього припущення, у внутрішніх точках еліпсоїда є справедливим співвідношення [43]:

$$\nabla \nabla \int_V g_v(\vec{R} - \vec{R}') d^3 \vec{R}' = -\hat{N}_v, \quad \vec{R} \in V, \quad (v = e, m) \quad (2.23)$$

У роботі [43] показано, що діади деполяризації тривісного біанізотропного еліпсоїда \hat{N}_v , ($v = e, m$) визначаються формою й орієнтацією еліпсоїда, а також електромагнітними властивостями оточуючого анізотропного середовища, при цьому об'єм і матеріальні параметри еліпсоїда на них не впливають. Взнявши до уваги співвідношення (2.23), рівняння (2.15) для поля всередині еліпсоїда набудатиме вигляду

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{in} - \mathbf{N} \cdot \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{e}, \quad (2.24)$$

де б-діада деполяризації \mathbf{N} записується так:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \hat{N}_e & 0 \\ 0 & \hat{N}_m \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Отже, постійне поле всередині еліпсоїда є лінійним функціоналом первинного поля:

$$\mathbf{e} = [\mathbf{I} + \mathbf{N} \cdot \tilde{\mathbf{M}}]^{-1} \cdot \mathbf{e}_{in}(0). \quad (2.26)$$

Тут $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & \hat{I} \end{pmatrix}$ – одинична 6-діада, для якої є справедливим співвідношення

$\mathbf{F} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}$, де \mathbf{F} – довільна 6-діада, \hat{I} – одиничний тензор другого рангу.

Аналіз формули (2.26) в квазістатичному випадку приводить до висновку про однорідність поля всередині біанізотропного еліпсоїда, розташованого в анізотропному середовищі. Це є узагальненням відповідного результату для внутрішнього поля анізотропного еліпсоїда, зануреного до ізотропного середовища [38].

Наступним кроком розв'язання задачі дифракції є визначення розсіяного поля, виходячи з того, що поле всередині еліпсоїда відоме. Визначення повного поля на довільних відстанях від розсіювача до точки спостереження є доволі складною задачею навіть за умови, що розсіювачем є однорідний еліпсоїд малих розмірів. Оскільки ми передбачаємо можливість використання отриманих результатів у теорії штучних діелектриків, обмежимося дослідженням розсіяного поля на відстанях, які значно перевищують довжину хвилі, тобто поля в дальній зоні. Довгохвильова асимптотика амплітуди розсіювання [38], [48] біанізотропного еліпсоїда задається діадами

поляризованості $\hat{\alpha}_{\nu\tau}$, ($\nu, \tau = e, m$), які, в свою чергу, є компонентами 6-діади поляризованості:

$$A = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{ee} & \hat{\alpha}_{em} \\ \hat{\alpha}_{me} & \hat{\alpha}_{mm} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Присутність у 6-діаді позадіагональних компонент тензорів «крос-поляризованості» $\hat{\alpha}_{em}$, $\hat{\alpha}_{me}$ є свідченням того, що електрична компонента електромагнітного поля, що падає, збуджує в малорозмірному біанізотропному розсіювачі одночасно електричний і магнітний дипольні моменти, а магнітна компонента поля, в свою чергу, збуджує магнітний і електричний дипольні моменти.

Під час визначення тензорів поляризованості можна наближено замінити поляризаційні струми (2.13), які наводяться в об'ємі розсіювача, точковим диполем, розташованим у центрі еліпсоїда:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \vec{p}_e \\ \vec{p}_m \end{pmatrix} = \frac{i}{\omega} \begin{pmatrix} \int_V \vec{J}_b(\vec{R}) d^3 \vec{R}' \\ \int_V \vec{M}_b(\vec{R}) d^3 \vec{R}' \end{pmatrix} = \frac{V}{4\pi} \tilde{\mathbf{M}} \cdot [\mathbf{I} + \mathbf{N} \cdot \tilde{\mathbf{M}}]^{-1} \cdot \mathbf{e}_{in}(0). \quad (2.28)$$

Візьмемо до уваги, що 6-вектор дипольного моменту \mathbf{p} лінійно залежить від первинного поля \mathbf{e}_{in} , коефіцієнтом пропорційності є 6-діада поляризованості A :

$$\mathbf{p} = A \cdot \mathbf{e}_{in}(0). \quad (2.29)$$

Внаслідок формул (2.28) і (2.29) маємо

$$A = \frac{V_b}{4\pi} \tilde{M} \cdot [I + N \cdot \tilde{M}]^{-1}. \quad (2.30)$$

Скористаємось формулами для визначення зворотного б-тензора¹ [45], [49]. Тоді із (2.30) можна отримати явні вирази для діагних компонент $\hat{\alpha}_{\nu\tau}$ ($\nu, \tau = e, m$) б-діади

$$\hat{\alpha}_{ee} = (4\pi)^{-1} V_b \hat{Q}_e \cdot [\hat{I} + \hat{N}_e \cdot \hat{Q}_e]^{-1}, \quad (2.31)$$

$$\hat{\alpha}_{em} = (4\pi)^{-1} V_b \hat{B}_e \cdot \hat{\xi}_b \cdot [\hat{I} + \hat{N}_m \cdot \hat{Q}_m]^{-1}, \quad (2.32)$$

$$\hat{\alpha}_{me} = (4\pi)^{-1} V_b \hat{B}_m \cdot \hat{\xi}_b \cdot [\hat{I} + \hat{N}_e \cdot \hat{Q}_e]^{-1}, \quad (2.33)$$

$$\hat{\alpha}_{mm} = (4\pi)^{-1} V_b \hat{Q}_m \cdot [\hat{I} + \hat{N}_m \cdot \hat{Q}_m]^{-1}. \quad (2.34)$$

Тут використані позначання

¹ Інший можливий вигляд зворотного б-тензора

$$\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{a} - \hat{b} \cdot \hat{d}^{-1} \cdot \hat{c} & -(\hat{a} - \hat{b} \cdot \hat{d}^{-1} \cdot \hat{c})^{-1} \cdot \hat{b} \cdot \hat{d} \\ -(\hat{d} - \hat{c} \cdot \hat{a}^{-1} \cdot \hat{b})^{-1} \cdot \hat{c} \cdot \hat{a}^{-1} & (\hat{d} - \hat{c} \cdot \hat{a}^{-1} \cdot \hat{b})^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\hat{B}_m = \hat{I} - (\hat{\mu}_b - \hat{\mu}) \cdot [\hat{I} + \hat{N}_m \cdot (\hat{\mu}_b - \hat{\mu})]^{-1} \cdot \hat{N}_m,$$

$$\hat{B}_e = \hat{I} - (\hat{\varepsilon}_b - \hat{\varepsilon}) \cdot [\hat{I} + \hat{N}_e \cdot (\hat{\varepsilon}_b - \hat{\varepsilon})]^{-1} \cdot \hat{N}_e,$$

$$\hat{Q}_e = \hat{\varepsilon}_b - \hat{\varepsilon} - \hat{\xi}_b \cdot [\hat{I} + \hat{N}_m \cdot (\hat{\mu}_b - \hat{\mu})]^{-1} \cdot \hat{N}_m \cdot \hat{\zeta}_b,$$

$$\hat{Q}_m = \hat{\mu}_b - \hat{\mu} - \hat{\zeta}_b \cdot [\hat{I} + \hat{N}_e \cdot (\hat{\varepsilon}_b - \hat{\varepsilon})]^{-1} \cdot \hat{N}_e \cdot \hat{\xi}_b,$$

а $V = (4\pi/3)a_1a_2a_3$ – об'єм еліпсоїда (a_i – розміри його півосей).

Зауважимо, що наведені формули є справедливими для довільної геометричної структури тензорів магнітоелектричної взаємодії $\hat{\xi}_b, \hat{\zeta}_b$, які, в тому числі, можуть бути сингулярними діадами. Якщо $\hat{\xi}_b = \hat{\zeta}_b = 0$, співвідношення (2.31)-(2.34) визначають поляризованість анізотропного еліпсоїда, розташованого в анізотропному середовищі:

$$\hat{\alpha}_{ee} = (4\pi)^{-1} V_b \cdot (\hat{\varepsilon}_b - \hat{\varepsilon}) \cdot [\hat{I} + \hat{N}_e \cdot (\hat{\varepsilon}_b - \hat{\varepsilon})]^{-1}, \quad (2.35)$$

$$\hat{\alpha}_{mm} = (4\pi)^{-1} V_b \cdot (\hat{\mu}_b - \hat{\mu}) \cdot [\hat{I} + \hat{N}_m \cdot (\hat{\mu}_b - \hat{\mu})]^{-1}. \quad (2.36)$$

Якщо припустити, що $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_1 \hat{I}$, $\hat{\mu} = \mu_1 \hat{I}$, то вирази (2.35)-(2.36) перетворяться на формули для поляризованостей анізотропного еліпсоїда в

ізотропному середовищі, наведені в [38] (в цій роботі зв'язок між величинами \hat{g}, \hat{p} і $\hat{\alpha}_{ee}, \hat{\alpha}_{mm}$ визначається формулами $\hat{g} = \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot \hat{\alpha}_{ee}, \hat{p} = \hat{\mu}^{-1} \cdot \hat{\alpha}_{mm}$). Тензори $\hat{\alpha}_{ee}, \hat{\alpha}_{mm}$ в абсолютній системі координат x, y, z представляються діагональними матрицями лише у випадку, коли головні осі еліпсоїда збігаються з головними напрямками тензорів діелектричної і магнітної проникності розсіювача і середовища, в якому він розташований. При цьому матриця поляризованості анізотропного діелектричного еліпсоїда в анізотропному діелектричному середовищі запишеться так:

$$\alpha_{=ee} = \frac{a_1 a_2 a_3}{3} \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{bx} - \varepsilon_x}{1 + N_{ex}(\varepsilon_{bx} - \varepsilon_x)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_{by} - \varepsilon_y}{1 + N_{ey}(\varepsilon_{by} - \varepsilon_y)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_{bz} - \varepsilon_z}{1 + N_{ez}(\varepsilon_{bz} - \varepsilon_z)} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

У співвідношенні (2.37) $\varepsilon_{bj}, \varepsilon_j, (j = x, y, z)$ – це відповідно діагональні компоненти матриці діелектричної проникності еліпсоїда і оточуючого середовища. Використовуючи, наприклад, формулу (11.26) роботи [38], можна порівняти тензор поляризованості (2.37) з аналогічним тензором поляризованості еліпсоїда в ізотропному оточуючому середовищі. Головна відмінність полягає в тому, що компоненти тензора деполіризації $N_{ej}, j = (x, y, z)$ у виразі (2.37) залежать не тільки від форми еліпсоїда, як це спостерігається для ізотропного оточуючого середовища, а й від анізотропних властивостей оточуючого середовища. Для випадку феритового еліпсоїда з магнітною проникністю

В іншому випадку, якщо еліпсоїд має дуже велику діелектричну проникність $\hat{\varepsilon}_b = \varepsilon_b \hat{I}$, $\varepsilon_b \rightarrow \infty$, з виразу (2.31) отримуємо

$$\hat{\alpha}_{ee}|_{\varepsilon_b \rightarrow \infty} = \frac{a_1 a_2 a_3}{3} \hat{N}_e^{-1}. \quad (2.40)$$

Взявши до уваги результати роботи [43], останній вираз може бути переписаний так:

$$\hat{\alpha}_{ee}|_{\varepsilon_b \rightarrow \infty} = \frac{a_1 a_2 a_3}{3} \left| \underline{\underline{\varepsilon}}^{(s)} \right| \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{L}}^{-1} \cdot \underline{\underline{Z}}^T. \quad (2.41)$$

З останньої формули (2.41), враховуючи вирази для геометричних факторів еліпсоїда, наведених у [38], [49], можна отримати явний вид тензора поляризованості для металевого диска, якому відповідає сплющений еліпсоїд обертання $a_1 = a_2 \gg a_3$ і металевого диполя – тонкого витягнутого еліпсоїда обертання $a_1 = a_2 \ll a_3$.

Отримані в цьому розділі результати (2.31)-(2.41) можуть бути використані у подальших дослідженнях для побудови тензорів ефективних матеріальних параметрів штучних магнітодіелектриків, утворених елементарними розсіювачами наведених типів.

2.4. Числові результати

Скористаємось результатами попередніх підрозділів і застосуємо вирази (2.31)-(2.41). Розглянемо анізотропне діелектричне середовище, в якому розташовано малорозмірний анізотропний діелектричний еліпсоїд. Нас буде цікавити електромагнітне поле, розсіяне цим еліпсоїдом. Не зменшуючи

загальності нашого розв'язання, будемо вважати оточуюче еліпсоїд середовище одновісним діелектриком, що характеризується діадою діелектричної проникності вигляду

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{\perp} \hat{I} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \vec{c} \vec{c}, \quad \hat{\mu} = \hat{I}. \quad (2.42)$$

Тут \vec{c} – одиничний дійсний вектор, спрямований уздовж оптичної осі. На еліпсоїд падає плоска електромагнітна хвиля, яка наводить усередині еліпсоїда поляризаційний струм з об'ємною густиною (2.2). Цей струм можна наближено замінити точковим джерелом, розташованим у центрі еліпсоїда

$$\vec{J}_b(\vec{R}) = -i\omega \vec{p} \delta(\vec{R}). \quad (2.43)$$

Отже, можна вважати, що малий порівняно із довжиною хвилі еліпсоїд за своїми розсіювальними характеристиками є еквівалентним до випромінювального точкового джерела, електрична компонента б-вектора дипольного моменту якого визначається співвідношенням (2.28). Це означає, що в низькочастотному наближенні поле, розсіяне еліпсоїдом, у дальній зоні можна вважати еквівалентним до поля, що збуджується точковим диполем в дальній зоні, яке, відповідно до [44], визначається так:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{\omega^2 \sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{c^2} \left\{ \frac{\varepsilon_{\parallel} \exp(ikr_e)}{r_e} \frac{[\vec{R} \times (\vec{R} \times \vec{c})][\vec{R} \times (\vec{R} \times \vec{c})]}{r_e^2 (\vec{R} \times \vec{c})^2} + \frac{\exp(ikr_o)}{r_o} \frac{(\vec{R} \times \vec{c})(\vec{R} \times \vec{c})}{(\vec{R} \times \vec{c})^2} \right\} \cdot \vec{p}, \quad (2.44)$$

$$\vec{H}(\vec{R}) = \frac{\omega^2 \sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{c^2} \left\{ \frac{\varepsilon_{\perp} \exp(ikr_o)}{r_o} \frac{[\vec{R} \times (\vec{R} \times \vec{c})][\vec{R} \times (\vec{R} \times \vec{c})]}{r_o^2 (\vec{R} \times \vec{c})^2} - \frac{\exp(ikr_e)}{r_e} \frac{(\vec{R} \times \vec{c})[\vec{R} \times (\vec{R} \times \vec{c})]}{r_e (\vec{R} \times \vec{c})^2} \right\} \cdot \vec{p}. \quad (2.45)$$

Тут використані позначення: $r_e = \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \vec{R} \cdot \hat{\varepsilon} \cdot \vec{R}}$, $r_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp} \vec{R} \cdot \vec{R}}$.

Важливою фізичною характеристикою розсіювання хвиль на частинках є диференціальний переріз розсіювання $\sigma(\vec{n}, \vec{n}_0)$, який визначається як відношення розсіяного потоку енергії на одиницю тілесного кута (на великій відстані від частинки) до падаючого потоку:

$$\sigma(\vec{n}, \vec{n}_0) = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \frac{|\vec{E}_{sc} \times \vec{H}_{sc}|}{|\vec{E}_{in} \times \vec{H}_{in}|} = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \frac{|\vec{S}_{sc}|}{|\vec{S}|}. \quad (2.46)$$

Тут \vec{n}_0 і \vec{n} – одиничні вектори, які задають напрями поширення плоскої хвилі, що падає, і розсіяної хвилі; \vec{S} і \vec{S}_{sc} – це відповідно вектори Пойнтинга хвилі, що падає, і розсіяної хвилі. Введемо до розгляду сферичну систему координат (R, θ, φ) , яка відповідає абсолютній декартовій системі координат. В цій системі координат переріз розсіювання можна записати так:

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{\omega^4 \varepsilon_{\perp}}{c^4} \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} (p_x \sin \varphi - p_y \cos \varphi)^2 + \right.$$

$$\frac{\varepsilon_{\parallel}^2}{\left(\varepsilon_{\parallel} \sin^2 \varphi + \varepsilon_{\perp} \cos^2 \varphi\right)^{5/2}} \left(p_x \cos \varphi \cos \theta + p_y \sin \varphi \cos \theta - p_z \sin \theta\right)^2 \Big] / S_{o,e}, \quad (2.47)$$

де $S_{o,e}$ позначає модуль вектора Пойнтинга хвилі, що падає, а індекси «о», «е» відповідають звичайній і незвичайній хвилі; $p_j, (j = x, y, z)$ – проєкції дипольного моменту на осі абсолютної декартової системи координат.

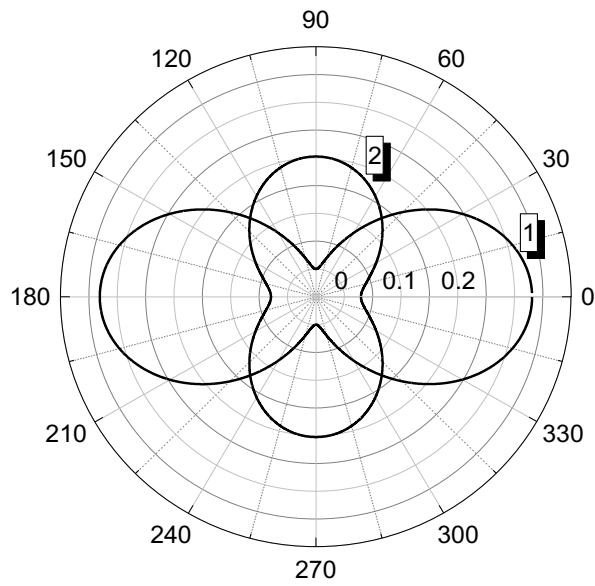
Вважатимемо, що плоска електромагнітна хвиля, що характеризується виразами (2.16)-(2.17), падає на малорозмірний розсіювач, розташований в анізотропному одновісному діелектричному середовищі, в напрямку, протилежному до осі x_1 абсолютної системи координат. На рисунках 2.2-2.3 наведено ілюстративні результати розрахунку перерізу розсіювання для анізотропного розсіювача в формі еліпсоїда, а рис. 2.4 – в формі сфери. Для випадку, представленою на рис. 2.2, як оточуюче середовище розглядався одновісний від'ємний кристал NaNO_3 [50], напрямки головних осей тензора діелектричної проникності середовища збігаються з напрямками осей абсолютної системи координат, а головні значення тензора дорівнюють $\varepsilon_{\perp} = 2.52$, $\varepsilon_{\parallel} = 1.78$. Як матеріал еліпсоїдального розсіювача було обрано двовісний кристал SbSi , для якого в локальній системі координат, пов'язаній з осями еліпсоїда, тензор діелектричної проникності має діагональний вигляд зі значеннями $\varepsilon_x = 7.29$, $\varepsilon_y = 10.24$, $\varepsilon_z = 14.44$. Рис. 2.2.а представляє нормований переріз розсіювання еліпсоїда для випадку, коли напрямки його осей збігаються з напрямками осей абсолютної системи координат, а рис. 2.2.б – нормований переріз розсіювання еліпсоїда, повернутого відносно осей абсолютної системи координат на кути Ейлера $\varphi_e = 45^\circ$, $\theta_e = 45^\circ$, $\psi_e = 0^\circ$.

На рис. 2.3 наведено нормовані перерізи розсіювання еліпсоїда з наведеними вище параметрами, однак з іншими матеріальними параметрами оточуючого середовища: тепер еліпсоїд розташований в одновісному

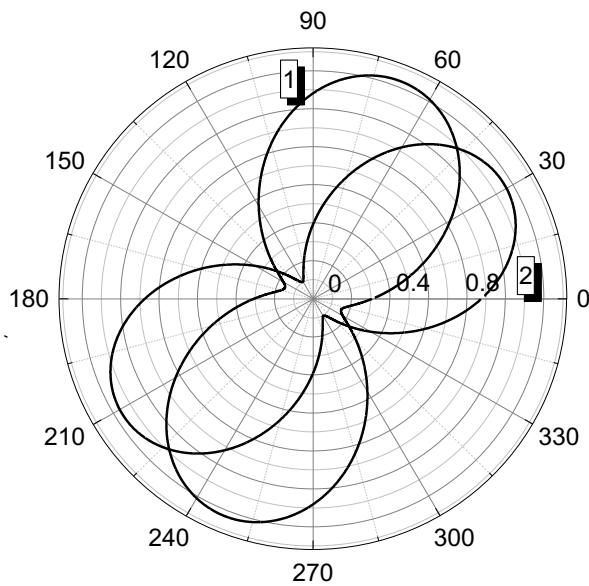
анізотропному середовищі, для якого головні значення тензора діелектричної проникності дорівнюють $\varepsilon_{\perp} = 3.69$, $\varepsilon_{\parallel} = 3.87$. Такому середовищу відповідає циркон – одновісний додатний кристал [50]. На рис. 2.3.а досліджується випадок, коли головні напрямки тензора діелектричної проникності середовища й еліпсоїда збігаються між собою і спрямовані так само, як і півосі еліпсоїда, уздовж осей абсолютної системи координат. Для рис. 2.3.б єдина відмінність матеріальних параметрів полягає в тому, що головні напрямки тензора діелектричної проникності оточуючого середовища повернуті відносно осей абсолютної системи координат на кути Ейлера $\varphi_a = 0^\circ, \theta_a = 30^\circ, \psi_a = 0^\circ$.

На рис. 2.4 представлено диференціальний переріз розсіювання електромагнітної хвилі для одновісного анізотропного розсіювача в формі сфери, при цьому головні значення тензора діелектричної проникності розсіювача і оточуючого середовища збігаються і дорівнюють $\varepsilon_{\perp} = 3.69$. Головні напрямки тензора діелектричної проникності сфери збігаються з напрямками локальної системи координат. За умови однакової орієнтації локальної та абсолютної систем координат розсіяне поле відсутнє, і $\sigma(\vec{n}, \vec{n}_0) \equiv 0$. Зміна орієнтації сфери (яка характеризується кутами Ейлера $\varphi_{sp}, \theta_{sp}, \psi_{sp}$) викликає появу розсіяної хвилі.

Наведені на рисунках 2.2-2.4 ілюстративні залежності демонструють, зокрема, що диференціальний переріз розсіювання анізотропного еліпсоїда в анізотропному середовищі є симетричним відносно розсіювання вперед і назад, а при зміні орієнтації розсіювача в просторі та/або осей анізотропії розсіювача і середовища спостерігається поворот діаграми спрямованості.



a)



б)

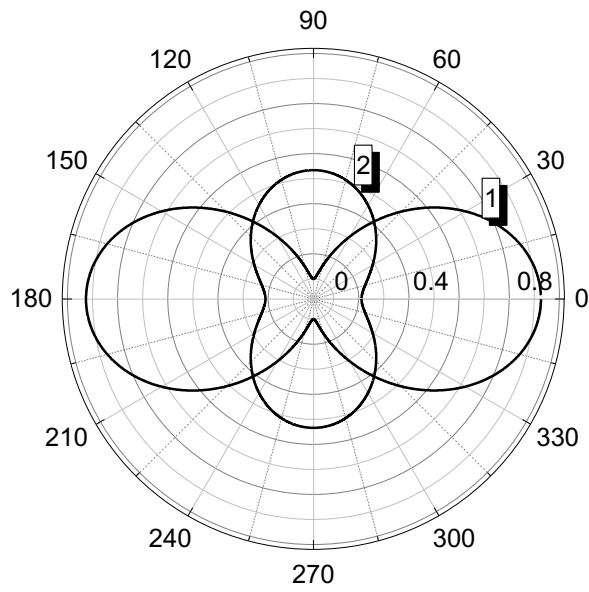
Рис. 2.2. Нормований переріз розсіювання еліпсоїда

$$\sigma(\theta = \pi/2, \varphi) \times 10^4 / \pi a_1^2, \quad k_0 a_2 = k_0 a_3 = 0.05, \quad k_0 a_1 = 0.2$$

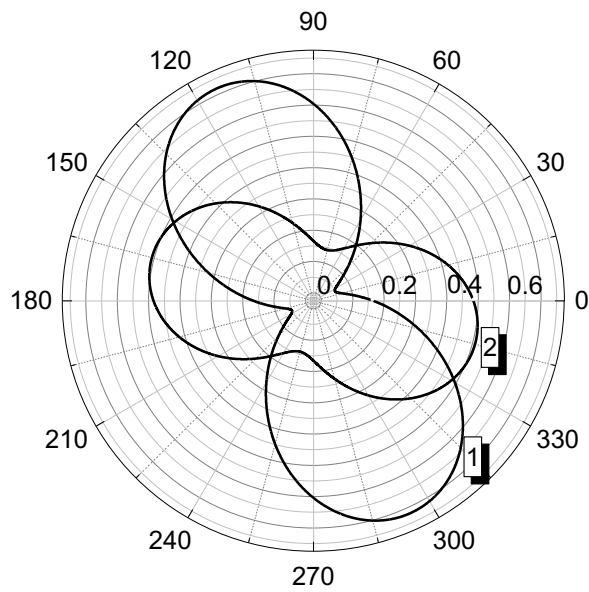
1 – звичайна хвиля, 2 – незвичайна хвиля,

а) кути Ейлера $\varphi_e = \theta_e = \psi_e = 0^\circ$,

б) кути Ейлера $\varphi_e = 0^\circ, \theta_e = 30^\circ, \psi_e = 0^\circ$.

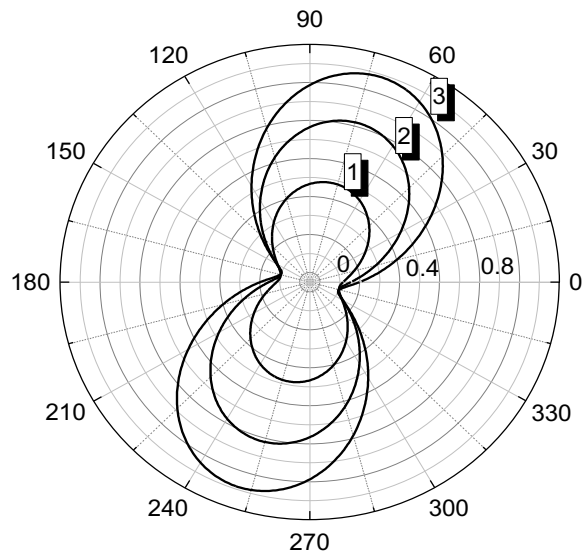


а)

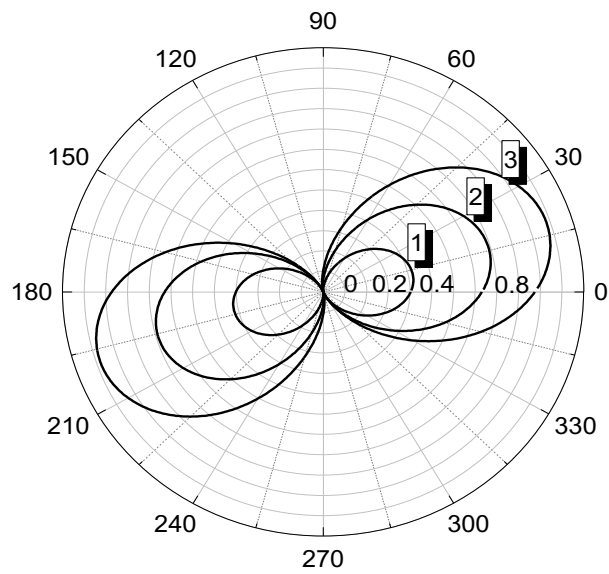


б)

Рис. 2.3. Нормований переріз розсіювання еліпсоїда
 $\sigma(\theta = \pi/2, \varphi) \times 10^4 / \pi a_1^2$, $k_0 a_2 = k_0 a_3 = 0.05$, $k_0 a_1 = 0.2$
 1 – звичайна хвиля, 2 – незвичайна хвиля,
 а) кути Ейлера $\varphi_e = \theta_e = \psi_e = 0^\circ$,
 б) кути Ейлера $\varphi_a = 0^\circ$, $\theta_a = 30^\circ$, $\psi_a = 0^\circ$.



a)



б)

Рис. 2.4. Нормований переріз розсіювання сфери

$$\sigma(\theta = \pi/2, \varphi) \times 10^2 / \pi a^2, ka = 0.2.$$

Кути Ейлера: 1 – $\varphi_{sp} = \theta_{sp} = 0^\circ, \psi_{sp} = 20^\circ$, 2 – $\varphi_{sp} = \theta_{sp} = 0^\circ, \psi_{sp} = 30^\circ$,

3 – $\varphi_{sp} = \theta_{sp} = 0^\circ, \psi_{sp} = 45^\circ$.

а) – звичайна хвиля, б) – незвичайна хвиля.

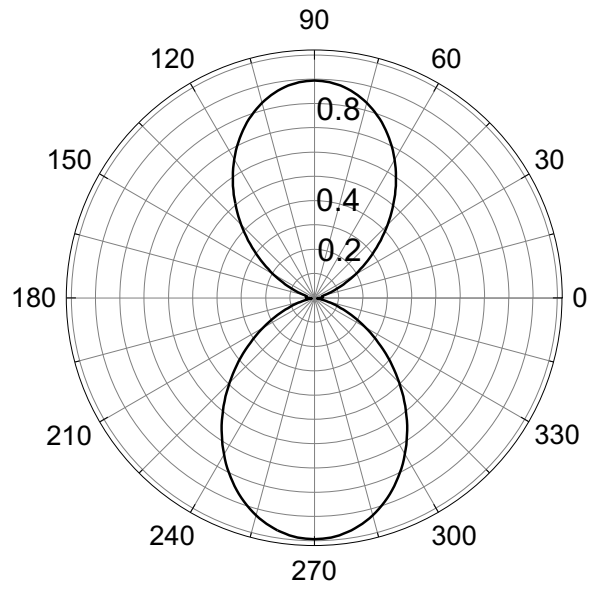
Рисунок 2.5, на якому наведено результати розрахунків для біанізотропної сфери у вільному просторі, ілюструє ефект порушення симетрії диференціального перерізу розсіювання відносно розсіювання вперед і назад. Матеріальні параметри сфери обрано такими:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= \varepsilon_{\perp} \hat{I}_{\perp} + \varepsilon_{\parallel} \vec{z}_0 \vec{z}_0, & \hat{\mu} &= \mu_{\perp} \hat{I}_{\perp} + \mu_{\parallel} \vec{z}_0 \vec{z}_0, \\ \hat{\xi} &= \kappa_{\perp} \hat{I}_{\perp} + \kappa_{\parallel} \vec{z}_0 \vec{z}_0 + i\Omega \vec{z}_0 \times \hat{I}_{\perp}, & \hat{\zeta} &= -\hat{\xi}^T,\end{aligned}\quad (2.48)$$

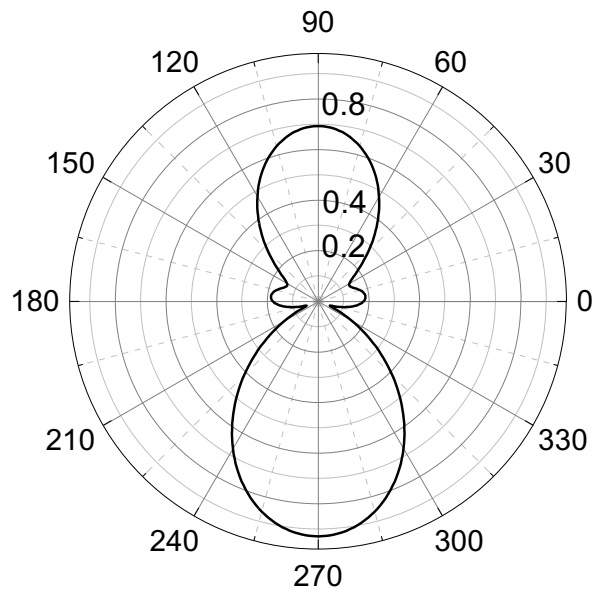
Тут $\hat{I}_{\perp} = \vec{x}_0 \vec{x}_0 + \vec{y}_0 \vec{y}_0$ – одинична діада в площині $x-y$. Середовище з наведеними параметрами виду (2.48) може бути створене штучно шляхом розміщення в діелектрику дровових мікроспіралей і розімкнутих кілець [51]. Значення матеріальних параметрів, беручи до уваги роботи [27], [51], [52], оберемо так:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = \varepsilon_2 &= 2.61, \quad \varepsilon_3 = 4.61, \quad \mu_1 = \mu_2 = 1.0, \\ \mu_3 &= 1.21 \quad \kappa_1 = \kappa_2 = 0.1i, \quad \kappa_3 = 0.4i.\end{aligned}\quad (2.49)$$

Вважаємо, що напрямок падіння плоскої хвилі є протилежним до напрямку осі z . На рис. 2.5.а параметр $\Omega = 0.4$ а на рис. 2.5.б $\Omega = 0.9$. Зауважимо, що ефект порушення симетрії диференціального перерізу розсіювання стосовно розсіювання вперед і назад спостерігається для біанізотропних розсіювачів з відмінними від нуля позадіагональними компонентами тензорів магнітоелектричної взаємодії.



а)



б)

Рис.2.5. Нормований переріз розсіювання $\frac{\sigma(\theta = \pi/2, \varphi)}{\pi a_1^2} \times 10^2$

одновісною біанізотропною сферою з матеріальними параметрами (2.49).

а) $\Omega = 0.4$, б) $\Omega = 0.9$.

ВИСНОВКИ

Використання властивостей біанізотропних середовищ відкриває широкі перспективи в розробці нових приладів і пристроїв мікрохвильової та антенної техніки, що викликає суттєвий науковий і науково-практичний інтерес до дослідження електродинамічних властивостей і процесів у таких середовищах. Це спричиняє потребу розробки адекватних фізичних і математичних моделей для аналізу взаємодії електромагнітного поля з біанізотропними середовищами й обумовлює актуальність тематики пропонованої кваліфікаційної роботи.

Роботу присвячено теоретичному дослідженню електродинамічних властивостей біанізотропних середовищ, аналізу закономірностей розсіяння електромагнітних хвиль на біанізотропних об'єктах.

Метою роботи є побудова фізико-математичної моделі і дослідження на її основі особливостей взаємодії електромагнітного поля з біанізотропними середовищами з урахуванням одночасного впливу на характеристики поширення плоских електромагнітних хвиль анізотропії середовища і просторової дисперсії.

Пропонована робота містить аналітичне розв'язання задачі низькочастотного розсіювання плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі на довільно біанізотропному однорідному еліпсоїді в однорідному безграничному анізотропному середовищі. Розв'язання проведено на основі методу інтегральних рівнянь макроскопічної електродинаміки, його результатом є тензори поляризованості біанізотропного еліпсоїда, а також аналіз закономірностей і кількісних особливостей низькочастотного розсіювання плоскої хвилі на біанізотропному тілі правильної форми в анізотропному середовищі.

В роботі отримано такі результати:

1. На основі аналітичних виразів для квазістатичних просторових функцій Гріна однорідного безграничного довільно анізотропного середовища зроблено висновок про те, що електрична (магнітна) квазістатична функція Гріна визначається симетричною частиною тензора діелектричної (магнітної) проникності середовища.

2. За допомогою методу інтегральних рівнянь макроскопічної електродинаміки отримано аналітичний розв'язок задачі низькочастотного розсіювання плоскої електромагнітної хвилі на однорідному біанізотропному еліпсоїді в однорідному анізотропному середовищі. Як результат отримано тензори поляризованості біанізотропного еліпсоїда.

3. Виявлено якісні закономірності низькочастотного розсіювання плоскої хвилі на біанізотропному тілі правильної форми в анізотропному середовищі та їхні кількісні особливості.

Отримані результати можуть представляти як самостійний науковий інтерес, так і бути застосованими у подальших дослідженнях.

Додаток А

ПРОСТОРОВІ СТАТИЧНІ ФУНКЦІЇ ГРІНА РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ОДНОРІДНОГО АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

Для однорідного анізотропного середовища просторові функції Гріна $\hat{G}_{\nu\tau}(\vec{R} - \vec{R})$ рівнянь Максвелла пов'язані зі спектральними функціями Гріна $\hat{G}_{\nu\tau}(\vec{k})$ перетворенням Фур'є:

$$\hat{G}_{\nu\tau}(\vec{R} - \vec{R}') = (2\pi)^{-3} \int d^3k \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')] \hat{G}_{\nu\tau}(\vec{k}). \quad (\text{A.1})$$

Виходячи, зокрема, з результатів робіт [42, 43] можна записати спектральні статичні функції Гріна однорідного анізотропного середовища:

$$\hat{G}_{ee}^{stat}(\vec{k}) = -\frac{4\pi i}{ck_0} \frac{\vec{k}\vec{k}}{\vec{k} \cdot \hat{\epsilon} \cdot \vec{k}} \quad \hat{G}_{mm}^{stat}(\vec{k}) = -\frac{4\pi i}{ck_0} \frac{\vec{k}\vec{k}}{\vec{k} \cdot \hat{\mu} \cdot \vec{k}}, \quad (\text{A.2})$$

при цьому складові \hat{G}_{em}^{stat} , \hat{G}_{me}^{stat} тотожно дорівнюють нулю. Отже, можна записати просторові статичні функції Гріна так:

$$\hat{G}_{ee}^{stat}(\vec{R} - \vec{R}') = \frac{4\pi i}{ck_0} \nabla \nabla g_e(\vec{R} - \vec{R}'), \quad \hat{G}_{ee}^{stat}(\vec{R} - \vec{R}') = \frac{4\pi i}{ck_0} \nabla \nabla g_e(\vec{R} - \vec{R}'). \quad (\text{A.3})$$

Тут скалярні функції $g_{e,m}$ дорівнюють

$$g_e(\vec{R} - \vec{R}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\exp[i\vec{k} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')] }{\vec{k} \cdot \hat{\epsilon} \cdot \vec{k}}, \quad (\text{A.4})$$

$$g_m(\vec{R} - \vec{R}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\exp[i\vec{k} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')] }{\vec{k} \cdot \hat{\mu} \cdot \vec{k}}. \quad (\text{A.5})$$

Інтеграли у формулах (A.4) і (A.5) стандартно можна представити так:

$$g_e(\vec{R} - \vec{R}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{S_+} dS \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[ik\vec{n} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')] \frac{dk}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon} \cdot \vec{n}}, \quad (\text{A.6})$$

де S_+ – це півсфера одиничного радіуса з віссю обертання вздовж вектора $\vec{z}_0 = (\vec{R} - \vec{R}')/L$, $L = |\vec{R} - \vec{R}'|$, dS – елемент площі поверхні цієї сфери, \vec{n} – радіус-вектор точки на описаній сфері (рис. А.1)

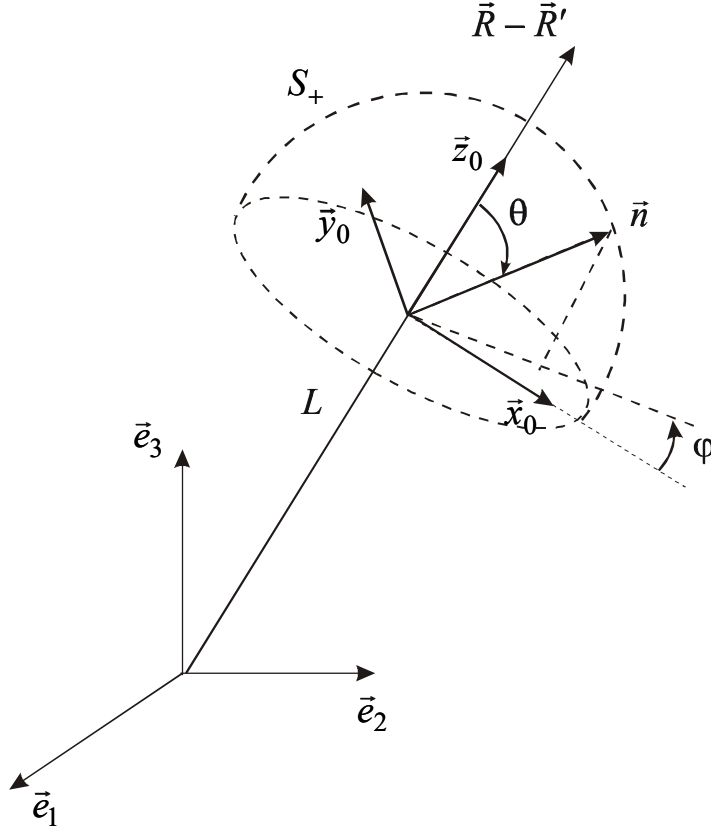


Рис. А.1. Допоміжна система координат $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Якщо знехтувати просторовою дисперсією, тобто вважати, що тензори $\hat{\epsilon}, \hat{\mu}$ не залежать від хвильового вектора \vec{k} , маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[ik\vec{n} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')] dk = 2\pi\delta(\vec{n} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')) = 2\pi\delta(L \cos \theta), \quad (\text{A.7})$$

і інтеграл (А.6) можна записати так:

$$g_e(\vec{R} - \vec{R}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2L} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\vec{n} \cdot \hat{\epsilon} \cdot \vec{n}} \Big|_{\cos \theta=0}. \quad (\text{A.8})$$

Визначення останнього інтеграла, відповідно до результату, зокрема, роботи [43], надає остаточний результат у вигляді

$$g_e(\vec{R} - \vec{R}') = \pm \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \hat{\epsilon}^{(s\leftrightarrow\leftrightarrow\leftrightarrow)} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')}} \quad (\text{A.9})$$

Абсолютно аналогічно можна визначити функцію $g_m(\vec{R} - \vec{R}')$

$$g_m(\vec{R} - \vec{R}') = \pm \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(\vec{R} - \vec{R}') \cdot \hat{\mu}^{(s\leftrightarrow\leftrightarrow\leftrightarrow)} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')}}. \quad (\text{A.10})$$

Верхній знак у (A.9), (A.10) відповідає випадку додатно визначеної, а нижній – від'ємно визначеної діади $\hat{v}^{(s)}$, ($v = \epsilon, \mu$).

ЛІТЕРАТУРА

1. Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 2nd ed., vol. 8 of *Course of Theoretical Physics*, Butterworth–Heinemann, 1984.
2. Agranovich, V. M., and V. L. Ginzburg, *Crystal Optics with Spatial Dispersion, and Excitons*, 2nd ed., Springer, 1984.
3. Wolf, E. (ed.), *Progress in Optics*, vol. 9, North-Holland, Amsterdam, 1971.
4. Fuchs, R., and P. Halevi, *Basic Concepts and Formalism of Spatial Dispersion*, in: *Spatial Dispersion in Solids and Plasmas*, P. Halevi (ed.), North-Holland, 1992, pp. 1–72.
5. Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, vol. 2, Butterworth-Heinemann, 1975.
6. Stix, T. H., *Waves in Plasmas*, IEEE Press, 1992.
7. Fedorov, F. I., *Theory of Gyrotropy*, Oxford Science Publications, 1997.
8. Krall, N. A., and A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, San Francisco Press, 1986.
9. Pekar, S. I., *Theory of Electromagnetic Waves in Crystals*, Academic Press, 1971.
10. Birss, R. R., *Symmetry and Magnetism*, North-Holland, 1966.
11. Swanson, M. L. S., *Plasma Waves*, 2nd ed., CRC Press, 2003.
12. Mahan, G. D., *Many-Particle Physics*, 3rd ed., Springer, 2000.
13. Ferry, D. K., and S. M. Goodnick, *Transport in Nanostructures*, Cambridge Univ. Press, 1997.
14. Yariv, A., and P. Yeh, *Propagation and Control of Laser Radiation*, Wiley, 1984.
15. Zvezdin, A. K., and V. A. Kotov, *Modern Magneto-optics and Magneto-optical Materials*, CRC Press, 1997.
16. Simovski, C. R., *Composite Media with Weak Spatial Dispersion*, Jenny Stanford Publishing, 2018.
17. Lindell, I. V., A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov, and A. J. Viitanen, *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*, Artech House, 1994.

18. Sihvola, A. H., and I. V. Lindell, Material Effects in Bi-anisotropic Electromagnetics, *IEICE Trans. Electron.*, vol. E78-C, no. 10, pp. 1383–1390, 1995.
19. Zvezdin, A. K., and V. A. Kotov, *Modern Magneto-optics and Magneto-optical Materials*, CRC Press, 1997.
20. Tretyakov, S. A., Complex Electromagnetic Materials: A New Look Through the Six-Vector Analysis, in *URSI/IEEE Conference*, Oulu, 1997.
21. Lindell, I. V., Some Properties of Lossless Bianisotropic Media, *Proc. IEE*, vol. 60, no. 9, pp. 463–464, 1972.
22. Lindell, I. V., A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov, and A. J. Viitanen, *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*, Artech House, 1994.
23. Kong, J. A., *Electromagnetic Wave Theory*, Wiley, 1986.
24. Lindell, I. V., *Methods for Electromagnetic Field Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1992.
25. Weiglhofer, W., Bianisotropy and Bianisotropics – a Perspective, in *Conf. Bianisotropics' 97*, Glasgow, 1997, pp. 123–127.
26. Kaminsky, W., Experimental and Phenomenological Aspects of Circular Birefringence in Transparent Crystals, *Rep. Prog. Phys.*, vol. 63, no. 10, pp. 1575–1640, 2000.
27. Chuang, S. L., *Physics of Optoelectronic Devices*, Wiley, 1995.
28. Sihvola, A. H., and I. V. Lindell, Material Effects in Bi-anisotropic Electromagnetics, *IEICE Trans.*, 1995.
29. Karlsson, A., and G. Kristensson, Constitutive Relations, Dissipation and Reciprocity for the Maxwell Equations in the Time Domain, *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol. 6, no. 5/6, pp. 537–551, 1992.
30. Born, M., and E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th ed., Cambridge University Press, 1999.
31. Caldwell, D., and H. Eyring, *The Theory of Optical Activity*, Academic Press, 1971.

32. Bohren, C. F., Light Scattering by an Optically Active Sphere, *Chem. Phys. Lett.*, vol. 29, no. 3, pp. 458–462, 1974.
33. Lakhtakia, A., Polarizability Dyadics of Small Bianisotropic Spheres, *J. Physique (France)*, vol. 51, pp. 2235–2242, 1990.
34. Lakhtakia, A., Rayleigh Scattering by a Bianisotropic Ellipsoid in a Biisotropic Medium, *Int. J. Electronics*, vol. 71, no. 6, pp. 1057–1062, 1991.
35. Lakhtakia, A., Frequency-Dependent Continuum Electromagnetic Properties of a Gas of Scattering Centers, in *Modern Nonlinear Optics, Part 2*, ed. M. Evans and S. Kielich, *Advances in Chemical Physics*, vol. 85, Wiley, 1993.
36. Dalton, R. B., and D. N. Seaton, Scattering of a Plane Wave by a General Anisotropic Dielectric Ellipsoid, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 7, no. 6, pp. 991–998, 1984.
37. Smith, D. R., J. B. Pendry, and M. C. K. Wiltshire, Metamaterials and Negative Refractive Index, *Science*, vol. 305, no. 5685, pp. 788–792, 2004.
38. Wilcox, W. M., and C. P. Thron, *Macroscopic Electrodynamics: An Introductory Graduate Treatment*, World Scientific, 2016.
39. Malyuskin, A. V., and S. N. Shulga, Low Frequency Scattering of a Plane Wave by an Anisotropic Ellipsoid in Anisotropic Medium, *Int. Conf. on Math. Methods in EM Theory*, Kharkov, Ukraine, 1998, pp. 716–718.
40. Felsen, L. B., and N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, Wiley–IEEE Press, 2003.
41. Zhuck, N. P., Strong-Fluctuation Theory for a Mean Electromagnetic Field in a Statistically Homogeneous Random Medium, *Phys. Rev. B*, vol. 50, no. 21, pp. 15636–15645, 1994.
42. Sihvola, A., and I. V. Lindell, Electromagnetic Green Dyadics of Bi-anisotropic Media in Spectral Domain – the Six-Vector Approach, Helsinki Univ. of Technology, Electromagnetic Laboratory Report, no. 240, 1997, 8 p.
43. Jakoby, B., and F. Olyslager, Quasistatic Asymptotic of Dynamic Green Dyadics for General Bianisotropic Media, *AEÜ – Int. J. Electronics and Communications*, vol. 50, no. 3, pp. 189–195, 1996.

44. Chen, H. C., *Theory of Electromagnetic Waves: A Coordinate-Free Approach*, McGraw–Hill, 1983.
45. Lindell, I. V., A. H. Sihvola, and K. Suchy, Six-Vector Formalism in Electromagnetics of Bi-anisotropic Media, *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol. 9, no. 7/8, pp. 887–903, 1995.
46. Sihvola, A., and S. A. Tretyakov, Complex Electromagnetic Materials: A New Look Through the Six-Vector Analysis, *URSI/IEEE/Infotech Oulu Conference*, Univ. of Oulu, 1997, pp. 119–120.
47. Korn, G. A., and T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, Dover Publications, 2000.
48. Newton, R. G., *Scattering Theory of Waves and Particles*, 2nd ed., Springer, 1982.
49. Sihvola, A. H., et al., Macroscopic Electromagnetic Properties of Bi-Anisotropic Mixtures, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 44, no. 6, pp. 836–843, 1996.
50. Yariv, A., and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*, Wiley, 1984.
51. Tretyakov, S. A., et al., Antenna Model for Conductive Omega Particles, *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol. 11, pp. 1509–1530, 1997.
52. Mariotte, F., S. A. Tretyakov, and B. Saviac, Modelling Effective Properties of Chiral Composites, *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 38, pp. 22–32, 1996.