Об одном гармоническом инварианте и поведении некоторых ограниченных аналитических функций вблизи границы области

Н. С. Ландкоф

§ 1.

Мы будем рассматривать единичный круг K плоскости переменного z и голоморфные внутри K функции $f(z)$, для которых $|f(z)| \leqslant 1$, т. е. функции, отображающие K на часть K. Искажения, которые имеют место при таких отображениях, подчиняются трём классическим теоремам:

1) лемме Шварца,
2) лемме Лӧвнера и
3) теореме Жюлиа—Каратеодори.

Мы сформулируем эти три результата в форме, подчёркивающей тесную связь каждой теоремы с некоторой подгруппой группы неэвклидовых движений круга K и с инвариантно связанной с ней гармонической функцией.

Рассмотрим, прежде всего, группу D_a неэвклидовых вращений вокруг точки $z = a$, $|a| < 1$. Точка $z = a$ является единственной неподвижной точкой при каждом преобразовании группы (исключая тождественное).

Лемма Шварца в общей форме, указаной Пиком, сводится к тому, что при всяком аналитическом отображении K в K, не являющемся тождеством, при котором точка $z = a$ остаётся неподвижной, эта точка является единственной внутренней неподвижной точкой.

Кроме того, хорошо известна формулировка леммы Шварца с помощью функции Грина с полюсом в точке $z = a$. Последняя является гармонической функцией, остающейся инвариантной при всех вращениях из D_a [1]).

Обратимся теперь к групе $V_{\alpha\beta}$ неэвклидовых переносов, оставляющих неподвижными две точки α, β ($|\alpha| = |\beta| = 1$). Иных неподвижных точек, разумеется, нет, но обе дуги единичной окружности с концами α и β, как целое, неподвижны.

Из леммы Лӧвнера следует, что всякое аналитическое отображение K в K, при котором одна из дуг единичной окружности с концами α и β, — назовём её Γ, — остаётся неподвижной (как целое), не имеет больше неподвижных точек (если это отображение не является тождеством).

---

[1]) Это требование определяет функцию Грина с точностью до целого линейного преобразования. Действительно, если $g(z; a)$ есть функция Грина, а $G(z)$—инвариантная относительно D_a гармоническая функция, то $G(z) = F[g(z;a)]$, откуда $\Delta G = F''. \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right] = 0$ и, следовательно, $F'' \equiv 0$. Аналогичное рассуждение применимо и к гармонической мере (см. дальше).

Формулировка леммы Лŏвнера в терминах гармонических функций приводит к частному случаю так называемого принципа гармонической меры[1]).

Гармонической мерой дуги Г относительно К в точке z называется, как известно, ограниченная гармоническая в К функция $\omega(z, \Gamma; K)$, равная единице во внутренних точках Г и нулю в точках единичной окружности внешних относительно Г. Эта функция инвариантна относительно переносов группы $V_{\alpha\beta}$, а факт, выражаемый леммой Лŏвнера, говорит о том, что при всяком аналитическом отображении К в К, оставляющем дугу Г неизменной, её гармоническая мера увеличивается.

Формулировка теоремы Жюлиа — Каратеодори выглядит несколько более сложной[2]). Причиной этого является более сложная структура соответствующей группы R_α, состоящей из всех неэвклидовых движений, при которых точка α, $|\alpha| = 1$ остаётся неподвижной. Эта группа R_α распадается в прямое произведение группы L_α, состоящей из всех движений, при которых только α остаётся неподвижной (это так называемые предельные вращения), и группы переносов $V_{\alpha\alpha'}$, где α'—точка, диаметрально противоположная α. Наличие „преобразований подобия" из $V_{\alpha\alpha'}$ и усложняет формулировку соответствующей теоремы.

Если, однако, ограничиться теми аналитическими преобразованиями, которые соответствуют подгруппе L_α, т. е. имеют лишь одну неподвижную точку α (в смысле, который будет уточнён ниже), то можно получить теорему, ближе примыкающую к леммам Шварца и Лŏвнера. Это ограничение естественно ещё и потому, что не существует гармонической функции (отличной от константы), инвариантной относительно всей группы R_α (ибо эта группа транзитивна), между тем как требование инвариантности относительно L_α определяет, как и раньше, с точностью до целого линейного преобразования гармоническую функцию

$$P(z, \alpha) = \frac{1 - |z|^2}{|\alpha - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}; \qquad z = re^{i\varphi}; \alpha = e^{i\vartheta}$$

Если мы ещё потребуем от определяемой гармонической функции равенства нулю во всех точках границы, кроме α, то она с точностью до постоянного множителя будет равна $P(z, \alpha)$.

Всякую такую функцию будем называть *гармоническим моментом точки* α и обозначать через $m(z, \alpha)$. При этом всякое равенство или неравенство, где встречается $m(z, \alpha)$, следует понимать в том смысле, что произвольная константа, содержащаяся в определении $m(z, \alpha)$, может быть определена независимо от точки z таким образом, чтобы соответствующее соотношение было справедливо.

Условимся ещё говорить, что аналитическое отображение $f(z)$ К в К имеет неподвижную точку α, $|\alpha| = 1$, если существует последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \to \alpha$ внутри К, для которых $f(z_n) \to \alpha$.

Тогда справедливо следующее предложение:

Теорема. Если $f(z)$ даёт аналитическое отображение К в К, причём точка α является единственной неподвижной точкой, то

$$m(f(z), \alpha) \geqslant m(z, \alpha), \tag{1}$$

1) См. Неванлинна, Однозначные аналитические функции.

2) Каратеодори, Конформное отображение: стр. 66.

т. е. гармонический момент точки α после преобразования не уменьшается[1]).

Доказательство. Прежде всего, если выполнить конформное отображение K на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ так, чтобы точка $z = \alpha$ перешла в $w = \infty$, то $f(z)$ преобразуется в функцию $F(w)$, для которой $\operatorname{Im} F(w) \geqslant 0$ при $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ и которая не имеет конечных неподвижных точек. Подлежащее доказательству неравенство (1) перейдёт в неравенство

$$\operatorname{Im} F(w) \geqslant \operatorname{Im} w.$$

В силу условий функция

$$\operatorname{Im} \frac{1}{F(w) - w} = -\frac{\operatorname{Im}[F(w) - w]}{|F(w) - w|^2}$$

будет гармонической в верхней полуплоскости и неположительной в окрестности всякой точки x вещественной оси[2]).

Если предположить ещё, что $|F(w) - w| \geqslant \varepsilon > 0$, то $\operatorname{Im} \frac{1}{F(w) - w}$ будет ограниченной функцией, и применяя обычным образом метод гармонической мажоранты, найдём, что в верхней полуплоскости

$$\operatorname{Im}[F(w) - w] \geqslant 0.$$

Если наше предположение несправедливо, то мы найдём такие точки $w_1, w_2, \ldots$, что $|F(w_n) - w_n| \to 0$. Легко видеть, что $w_n \to \infty$, ибо $F(w)$ не имеет по допущению неподвижных точек. Если теперь для какой-либо точки $w = \omega$ $\operatorname{Im} F(\omega) < \operatorname{Im} \omega$, то мы немедленно получим противоречие с леммой Шварца — Пика, проведя (при достаточно большом n) неэвклидову окружность с центром в w_n через ω. Неэвклидова окружность того же радиуса с центром в $F(w_n)$ не будет содержать $F(\omega)$, что невозможно. Теорема, таким образом, доказана.

Замечание. Если $f(z)$ отлично от движения, то в (1) знак равенства стоять не может; это доказывается обычным способом[3]).

Доказанная теорема может быть обобщена следующим образом. Условимся говорить, что функция $f(z)$ имеет, кроме $z = \alpha$, *существенно неподвижную* точку, если всякая функция вида $f[l(z)]$, где $l(z)$ — движение из группы L_α, имеет неподвижную точку.

Тогда легко убедиться в том, что неравенство (1) будет справедливо для всякой функции $f(z)$, не имеющей, кроме α, существенно неподвижной точки. Действительно, переходя, как и выше, к полуплоскости $\operatorname{Im} w \geqslant 0$, где группа L_α будет состоять из преобразований $cw + d$, причём c, d — вещественны, заключаем, что при некоторых c, d функция $F(cw + d)$ не имеет конечных неподвижных точек. Но тогда по доказанному $\operatorname{Im} F(cw + d) > \operatorname{Im} w$ или $\operatorname{Im} F(w) > \frac{1}{c} \operatorname{Im} w$. Это и обозначает, что $m(f(z), \alpha) > m(z, \alpha)$.

Так же легко обнаружить, что для функций, имеющих существенно неподвижную точку, неравенство (1) не имеет места.

---

1) В обеих частях неравенства (1) константа может быть взята одинаковой.

2) По поводу этого определения см. G. Julia, Principes géométriques d'analyse t. II, p. 5

3) Жюлиа, Геометрические принципы анализа, ч. 1, стр. 78.

§ 2.

Рассмотрим односвязную область D плоскости z, ограниченную простой жордановой кривой $\Gamma: \zeta = \zeta(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и некоторую точку α на Γ. Отображая конформно D на единичный круг K так, чтобы α перешла, например, в точку $w=1$, мы сможем определить в D с точностью до постоянного множителя функцию $m(z, \alpha, D)$, которая при таком отображении переходит в $\frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}$. Назовём, как и раньше, $m(z, \alpha, D)$ гармоническим моментом точки α относительно D.

Рассмотрим дугу $\alpha_0 \alpha$ на Γ с началом в $\alpha_0 = \zeta(0)$ и концом в $\alpha = \zeta(t)$. Пусть $\omega(z, \alpha_0 \alpha; D)$ есть гармоническая мера этой дуги. При любом фиксированном z $\omega(z, \alpha_0 \alpha; D)$ является возрастающей и непрерывной функцией от t[1]. Это позволяет, зафиксировав как-либо точку z_0 внутри D, ввести на Γ вместо t параметр $\omega_0 = \omega(z_0, \alpha_0 \alpha; D)$, $0 \leqslant \omega_0 \leqslant 1$. Тогда справедливо следующее предложение:

При любом z внутри D $\omega(\omega_0) = \omega(z, \alpha_0 \alpha; D)$ есть диференцируемая функция от ω_0, причём

$$\frac{d\omega}{d\omega_0} = m(z, \alpha; D). \tag{2}$$

Справедливость его легко усмотреть, если совершить конформное отображение D на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы точка z_0 перешла в $w=0$, и принять во внимание инвариантность гармонической меры[2].

Теорема, доказанная в § 1, может быть дословно повторена для функций, дающих аналитическое отображеиие D в D. Впрочем, легко получить следующее её обобщение, являющееся аналогом принципа возрастания гармонической меры (Неванлинна).

Пусть в односвязной жордановой области D определена аналитическая функция $w = f(z)$, значения которой лежат в односвязной жордановой области Δ плоскости w. Пусть точка α границы D переходит в точку β границы Δ. Допустим также, что существует такое конформное отображение $w = \varphi(w_1)$ области Δ в D, переводящее β в α, что аналитическое отображение $w = f[\varphi(w_1)]$ Δ в Δ не имеет, кроме β, неподвижных точек.

Тогда

$$m(z, \alpha; D) \leqslant m(w, \beta; \Delta).$$

Действительно,

$$m(w, \beta; \Delta) = m(f[\varphi(w_1)], \beta; \Delta) \geqslant m(w_1, \beta; \Delta) = m(z, \alpha; D).$$

Можно получить также аналог принципа расширения области (Карлеман) в следующей форме:

Пусть область D содержится в области D_1, причём их границы имеют общую дугу Γ. Тогда для всякой точки α на Γ, не совпадающей с её концами,

$$m(z, \alpha; D) \leqslant m(z, \alpha; D_1), \quad z \in D.$$

Доказательство. Можно считать, что D_1 есть единичный круг. Пусть $w = f(z)$ отображает D_1 на D так, что Γ переходит в себя

[1]) См. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, стр. 32.

[2]) Отсюда же следует, что $m(z, \alpha; D)$ есть непрерывная функция от α.

и точка α остаётся неподвижной. Эту функцию продолжаем по принципу симметрии через Γ и тогда она будет отображать плоскость с разрезом вдоль дуги единичной окружности дополнительной к Γ на внутреннюю область. Согласно принципу Линделёфа эта функция, кроме α, не имеет неподвижных точек. По доказанному выше

$$m(w, \alpha; D) = m(z, \alpha; D_1) \leqslant m(f(z), \alpha; D_1) = m(w, \alpha; D_1).$$

§ 3.

Рассматриваемая нами функция $m(z, \alpha; D)$ позволяет довольно естественно обобщить понятие некасательного пути.

Именно, путь l, лежащий внутри области D и оканчивающийся в точке α границы D, мы назовём *собственно внутренним*, если вдоль него $m(z, \alpha; D) \to \infty$.

Покажем, что свойство, выраженное этим определением, имеет локальный характер. Пусть Γ есть какая-либо дуга границы D, содержащая внутри точку α, а D_1 — любая жорданова область, получающаяся из D варьированием границы, не меняющим дугу Γ.

Убедимся в том, что если путь l является собственно внутренним для D, то он останется таковым для D_1.

Рассмотрим какую-либо односвязную область d, содержащуюся в D и в D_1, граница которой содержит Γ (или её часть, для которой точка α является внутренней). Тогда, в силу принципа расширения области, достаточно убедиться в том, что путь l будет собственно внутренним для d. Отобразим конформно D на верхнюю полуплоскость w так, чтобы точка α перешла $w = \infty$. В силу известного произвола в выборе области d, можно считать, что d перейдет в область $|w| \geqslant R$, $\operatorname{Im} w \geqslant 0$. Так как $m(z, \alpha, D)$ переходит просто в $\operatorname{Im} w$, то вдоль пути λ, образа l, $\operatorname{Im} w \to \infty$.

При отображении полуплоскости $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ на область $|w| \geqslant R$, $\operatorname{Im} w \geqslant 0$ с сохранением точки ∞, линии $\operatorname{Im} w = c$ перейдут в кривые $M(c)$, являющиеся линиями уровня гармонического момента точки ∞ относительно отображённой области. Достаточно теперь убедиться в том, что для точек каждой кривой $M(c)$ ордината ограничена. Это легко проверяется следующим образом:

Упомянутое отображение осуществляется функцией

$$w = \frac{(R - \omega)^2}{4R\omega},$$

откуда

$$\operatorname{Im} w = \frac{|\omega|^2 - R}{4R|\omega|^2} \cdot \operatorname{Im} \omega.$$

Так как при больших c $|\omega|$ будет сколько угодно велик, то отсюда следует, что кривые $M(c)$ при больших значениях c мало отличаются от прямых $\operatorname{Im} \omega = 4Rc$, что доказывает наше утверждение.

Теперь легко извлечь из теоремы, доказанной в § 1 и переформулированной в § 2, такое следствие:

Пусть аналитическая функция в односвязной жордановой области D принимает значения, также лежащие в D, имеет на грани це D неподвижную точку α и не имеет больше существенно неподвижных точек.

Тогда вдоль всякого собственно внутреннего пути, ведущего в точку α, имеем $f(z) \to \alpha$.

Так как собственно внутренний путь может касаться границы области, то это следствие для некоторого (правда, весьма узкого) класса ограниченных аналитических функций уточняет классическую теорему Линделöфа [1]).