

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна
Радіофізичний факультет**

**“ДО ЗАХИСТУ”
В.о.зав. кафедри
фізики НВЧ**

Сергій ПОГАРСЬКИЙ

**КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
МАГІСТРА ЗА СПЕЦІАЛЬНІСТЮ
РАДІОФІЗИКА**

**ХАРАКТЕРИСТИКИ ІНВЕРТОВАНОГО
ДІЕЛЕКТРИЧНОГО ХВИЛЕВОДУ**

Студент групи РР-64

Дмитро ПАТОКА

**Керівник
доктор фіз.-мат. наук
професор**

Сергій ПОГАРСЬКИЙ

Харків 2022

Зміст

	стор.
Анотація	3
Abstract	4
Вступ	5
1. СУЧАСНИЙ СТАН ТЕХНІКИ ЛІНІЙ ПЕРЕДАЧІ КВЧ ДІАПАЗОНУ	8
1.1. Основні типи ліній передачі, які використовуються у КВЧ діапазоні	8
1.2. Функціональні елементи на основі гібридних структур	13
2. ОГЛЯД МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПОШИРЕННЯ ВЛАСНИХ ХВИЛЬ У МЕТАЛЕВО-ДІЕЛЕКТРИЧНИХ СТРУКТУРАХ	16
2.1. Задачі по визначенню постійних поширення власних хвиль і методи їх розв'язання	16
2.1.1. Метод задачі Рімана-Гільберта	17
2.1.2. Метод часткових областей	21
2.1.3. Метод сингулярних інтегральних рівнянь	23
2.1.4. Метод сіток	25
3. ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ПРО СПЕКТР ВЛАСНИХ ХВИЛЬ ОБЕРНЕНОГО ДІЕЛЕКТРИЧНОГО ХВИЛЕВОДУ	27
3.1. Постановка задачі	27
3.1.1. Рівняння Максвелла для випадку TE - и TM - хвиль	28
3.1.2. Крайові задачі для рівняння Гельмгольца у випадку LM - і LE - хвиль	30
3.2. Рівняння Фредгольма	31
4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ	40
ВИСНОВКИ	45
Список використаних джерел	46
Додаток	50

УДК 537.874

Характеристики інвертованого діелектричного хвилеводу

Кваліфікаційна робота містить 53 стор., 8 рисунків, 34 джерела.

У роботі розглядається задача про спектр власних хвиль інвертованого діелектричного хвилеводу. При розв'язанні задачі проводиться декомпозиція поперечного перерізу досліджуваного хвилеводу на часткові області таким чином, що поле в кожній області представляється у вигляді суперпозиції власних хвиль плоского діелектричного хвилеводу. Використовуючи рівність дотичних компонент електричного та магнітного полів на границях розділу областей, отримано два інтегральні рівняння Фредгольма другого роду щодо амплітуд хвиль. Розглянуті симетричні та асиметричні хвилі. Представлені залежності постійної поширення від хвильового числа й розподіл поля у хвилеводі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: плоский діелектричний хвилевід, інвертований діелектричний хвилевід, перетворення Фур'є, інтегральні рівняння Фредгольма, дисперсійне рівняння.

UDC 537.874

Characteristics of inverted dielectric waveguide

Graduate paper includes 53 p., 8 figures and 34 references.

The eigenwaves problem of inverted dielectric waveguide is considered in the paper. The cross-section of waveguide is divided into partial domains in such way that the field in each domain is represented as a superposition of eigenwaves of a plane dielectric waveguide. Using the equality conditions of tangential components of electric and magnetic fields at the interface of domains two Fredholm integral equations of the second kind relatively waves amplitudes are obtained. The symmetric and asymmetric waves are considered. The dependencies of the propagation constant versus wave number and field distribution in the waveguide are presented.

KEY WORDS: plane dielectric waveguide, inverted dielectric waveguide, Fourier transformation, Fredholm integral equation, dispersion equation.

ВСТУП

Багатогранний розвиток сучасної радіофізики, НВЧ і КВЧ техніки зв'язане, насамперед, з освоєнням нових діапазонів електромагнітних коливань і з розв'язанням низки прикладних задач. Дослідники та розробники НВЧ і КВЧ приладів і обладнань зустрічаються в цьому розвитку як зі швидким ускладненням самих приладів і обладнань НВЧ і КВЧ діапазонів, так і з жорсткістю всього комплексу вимог, пропонованих до відповідної до апаратури в цілому. Це, у свою чергу, викликає інтенсивні пошуки принципово нових теоретичних ідей і пов'язаних з ними технічних реалізацій, нових перспективних у прикладному плані ефектів і явищ, нових типів ліній передачі, які б використовувались у якості базових; розробку сучасних комп'ютерних технологій аналізу й оптимізації параметрів як окремих “елементарних” НВЧ елементів, так і параметрів пристроїв в цілому.

Крім того, вирішення усіх цих проблем вимагає й використання комплексного підходу, який, на нашу думку, повинен містити в собі: а) розробку строгих методів розв'язання крайових задач електродинаміки; б) розробку математичних моделей адекватних досліджуваним фізичним системам; в) комп'ютерний аналіз характеристик; г) експериментальні дослідження параметрів і характеристик; д) розробку методів оптимізації електродинамічних і технічних характеристик.

Величезні потенційні можливості при вирішенні різних технічних задач таять у собі гібридні електродинамічні структури. Такі структури дозволяють вирішувати більш широкий клас функціональних задач, досить легко вбудовуються в існуючі НВЧ прилади, відрізняються технологічністю у виготовленні. До гібридних структур відносяться складні електродинамічні об'єкти, що являють собою комбінацію відрізків різних типів ліній передачі.

Зовсім очевидно, що використання складних гібридних електродинамічних структур як базових елементів при створенні

компонентної бази НВЧ техніки при дотриманні вимог мікромініатюризації веде до істотного підвищення ступеня інтеграції мікроелектронних пристроїв, що у свою чергу вимагає створення адекватних фізико-топологічних моделей таких об'єктів. Вимога адекватності моделей компонентів є тим більше важливим, що для мікроелектронних пристроїв радіочастотного діапазону з високим ступенем інтеграції виключається етап макетування на дискретних елементах, а для елементів НВЧ діапазону, особливо для об'ємних гібридних і напівпровідникових інтегральних схем, значно обмежені можливості масштабного моделювання. Аналіз сучасних фізико-топологічних моделей показує, що при дослідженнях регулярних ліній передачі НВЧ коливань із багатозв'язною областю поперечного переріза, функціональних елементів НВЧ, виконаних на основі багатoelementних структур і підтримуючих багатомодовий режим роботи (у тому числі й квази-Т коливань) найбільш ефективними виявляються моделі, що базуються на використанні властивостей різного роду метало-діелектричних структур. Врахування властивостей таких об'єктів дозволяє шляхом побудови моделей високого рівня, що базуються на алгоритмізації відповідних крайових задач, вирішувати досить складні задачі аналізу хвильових процесів, моделювання й оптимізації широкого класу як хвилеведучих структур, так і інтегральних компонентів у багатомодовому режимі.

Природно, що без належного розвитку теорії такого класу електродинамічних структур, систематичного та детального аналізу фізичних особливостей хвильових ефектів з урахуванням різних факторів, що впливають на ефективність процесу збудження спектру власних коливань, неможливо намітити шляхи поліпшення їх частотних і експлуатаційних характеристик, а також виявити нові явища та закономірності збудження коливань, що дозволяють розширити їхнє практичне застосування. Тому побудова такої теорії, здатної описати фізичні особливості збудження, перетворення коливань, розробка на основі цієї теорії методів аналізу й

оптимізації по обраному параметру (або критерію), а також вироблення практичних рекомендацій з метою поліпшення їх характеристик представляється актуальною науково-технічною проблемою.

Цілями кваліфікаційної роботи були:

- вивчення основних властивостей діелектричних хвильоводів, вивчення спектрального складу, методів моделювання електродинамічних процесів поширення власних хвиль;
- розробка математичної моделі регулярної лінії передачі КВЧ діапазону – одного з різновидів діелектричних хвильоводів - оберненого діелектричного хвильоводу, що адекватно відбиває фізику процесів при поширенні в ньому електромагнітних хвиль;
- виявленні характерних рис хвильової взаємодії та відшуканні оптимальних наборів параметрів за обраними критеріями для використання їх у задачах синтезу нових функціональних елементів із заданими характеристиками та виробленню практичних рекомендацій для модернізації існуючих;
- розвитку чисельних і аналітичних алгоритмів для знаходження й оптимізації вихідних характеристик функціональних елементів із метою використання цих алгоритмів у системах автоматизованого проектування пристроїв і систем НВЧ і КВЧ діапазонів.

Розділ 1

СУЧАСНИЙ СТАН ТЕХНІКИ ЛІНІЙ ПЕРЕДАЧІ КВЧ ДІАПАЗОНУ

1.1. Основні типи ліній передачі, які використовуються у КВЧ діапазоні

У сучасній радіофізиці відчувається явна тенденція до практичного використання техніки КВЧ діапазону 30-300 ГГц. Як наслідок, перед розробниками НВЧ апаратури з'явилася проблема створення та використання оптимальних ліній передачі КВЧ діапазону, що відповідають великим і досить суперечливим вимогам: малі втрати, рівномірна частотна й лінійна фазова характеристики, малі габарити та вага, технологічність, стійкість до зовнішніх впливів.

Найбільш перспективними лініями передачі електричних коливань у КВЧ діапазоні прийнято вважати діелектричні хвилеводи (ДХ) і різні лінії побудовані на їхній основі: дзеркальний ДХ (ДЗДВХ), ізолюваний ДЗДХ (ІДЗДХ), різні модифікації смужкових ліній передачі і т.п.

Діелектричні хвилеводи як лінії передачі електромагнітної енергії були розроблені досить давно. Найпростіші ДХ являють собою діелектричний стрижень, що володіє діелектричною проникністю, значення якої перевершує значення діелектричної проникності навколишнього середовища [1]. У найпростішому випадку ДХ мають прямокутний, круглий і еліптичний перетини. З розробкою генераторів міліметрового діапазону інтерес до діелектричних хвилеводів суттєво підвищився. Це обумовлене тим, що діелектричний хвилевід є однією з перспективних ліній передачі електричних коливань міліметрового та субміліметрового діапазонів. У цей час найбільш детальне досліджені діелектричні хвилеводи круглого, прямокутного й еліптичного перетину. Усі діелектричні хвилеводи належать до класу

хвильоводів поверхневих хвиль. Це означає, що частина енергії високочастотних коливань поширюється в діелектрику, а частина - у середовищі, що оточує хвильовід. Зазначений характер поширення хвиль у діелектричному хвильоводі має низку особливостей:

- 1) фазова швидкість поширення у діелектричному хвильоводі менше швидкості світла (хвиля є вповільненою);
- 2) у діелектричного хвильоводу без втрат існує кінцеве (дискретне) число типів власних хвиль;
- 3) при наявності неоднорідності в діелектричному хвильоводі виникають хвилі, що впливають;
- 4) у діелектричному хвильоводі завжди є два основні типи хвиль (строго говорячи, діелектричні хвильоводи не є одномодовими структурами);
- 5) теоретично критичні частоти основних типів хвиль дорівнюють нулю (хоча при зниженні частоти ступінь концентрації енергії в діелектричному хвильоводі швидко знижується);
- 6) у якості критичної частоти ДХ вибирають частоту, при якій ступінь концентрації енергії у ДХ досягає деякого граничного значення.

На практиці круглий ДХ використовується рідко, тому що в ньому основна хвиля не має стійкої площини поляризації. Для стабілізації площини поляризації можна застосовувати однорідні ДХ прямокутного, еліптичного й інших перетинів, що не мають азимутально однорідної геометрії.

Дослідженнями показано, що серед зазначених перетинів ДХ, що працюють у міліметровому та субміліметровому діапазонах хвиль, оптимальним є прямокутний перетин. Причому для виготовлення ДХ найкраще брати відношення сторін прямокутника 2:1. Електромагнітну хвилю в такому хвильоводі найкраще збуджувати так, щоб вектор електричного поля був орієнтований паралельно більшим граням хвильоводу [2].

Особливості поширення електромагнітних хвиль у ДХ обумовлює й специфічний характер втрат у них. У закритих металевих хвильоводах

загальні втрати складаються з омичних втрат у металевих поверхнях, що утворюють хвилевід, і втрат у матеріалі, що заповнює хвилевід. У ДХ загальні втрати є сума втрат у масі діелектрика, що **утворює** хвилевід і втрат на випромінювання.

Відомо, що втрати в металі швидко зростають із ростом частоти. Через це, у практичних реалізаціях зустрічаються труднощі із застосуванням металевих хвелеводів уже в міліметровому діапазоні хвиль. Експериментально та теоретично показане, що в сантиметровому діапазоні втрати в прямокутних металевих хвелеводах та ДХ приблизно рівні між собою. При підвищенні частоти ДХ виграють і стають єдиною можливим типом ліній передачі при переході в субміліметровий діапазон хвиль.

Зазначені переваги ДХ сприяють застосуванню їх як елементної бази інтегральних схем (ІС) міліметрового діапазону. У ДХ є ціла низка недоліків:

1. низька завадостійкість, можливість взаємного впливу елементів ІС один на одного;
2. труднощі стикування ІС із дискретними НВЧ елементами;
3. проблема опор (лінія опору викликає випромінювання);
4. механічна міцність.

Перераховані недоліки частково вдається усунути в металеводіелектричних хвелеводах. Металево-діелектричні лінії являють собою великий клас ліній передачі, що містять хвилеведучі елементи з металу та діелектрику. Найбільше поширення із цього класу ліній передачі одержали дзеркальний діелектричний хвилевід (ДЗДХ) і ізолюваний дзеркальний діелектричний хвилевід (ІЗДХ). Схематичне зображення цих хвилеведучих структур представлено на рис. 1.1.

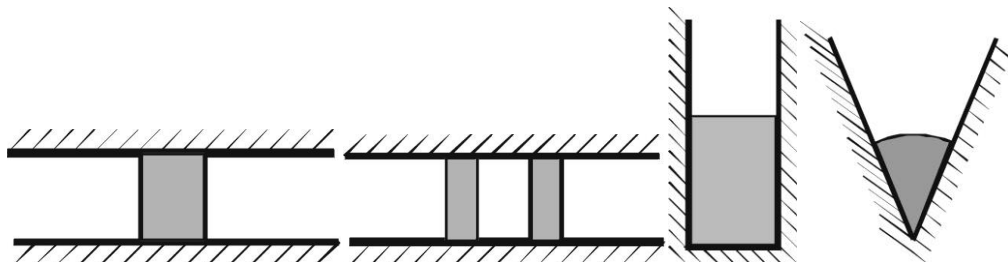


Рис. 1.1. Схематичне зображення металево-діелектричних структур як різновид діелектричного хвилеводу.

Дзеркальні лінії мають наступні переваги перед звичайними діелектричними стрижневими хвилеводами: вищі типи хвиль виникають при більших розмірах діелектричного хвилеводу та при більшому вповільненні основного робочого типу хвиль. Отже, можливі або менші радіуси кривизни, або розширення робочого діапазону однохвильового режиму роботи у порівнянні з діелектричним хвилеводом без металевої підкладки. У якості основної хвилі вибирають тип хвилі, поляризований перпендикулярно екрану. Відносна смуга частот робочої хвилі збільшується на 10% при квадратному перерезі діелектричного хвилеводу. Крім того, введення металевої підкладки усуває частину вищих типів хвиль у діелектричному хвилеводі.

Дослідження, проведені в низці робіт [3-5], показують, що вертикальний розмір діелектричного хвилеводу на металевій підкладці може бути обраний удвічі менше, чим у звичайного діелектричного хвилеводу за тих самих умов експлуатації. Однак, за рахунок введення металевої площини, крім втрат на випромінювання в масі діелектрику, з'являється додаткове джерело втрат у металі. Загальне загасання електромагнітної енергії в діапазоні частот 50-150 ГГц не перевищує 2-4 дБ/м. Подібні значення загасання сприяють застосуванню дзеркальних ліній для побудови ІС НВЧ.

Хоча металево-діелектричні структури й вільні від низки недоліків, однак, параметри ДЗДХ істотно залежать від мікропроміжку між металевою підкладкою і діелектриком. Знизити рівень втрат і виключити фактор впливу мікропроміжку дозволили ІДЗДХ, у яких між діелектричним стрижнем і металевою підкладкою введений допоміжний тонкий діелектричний шар з малою діелектричною проникністю. Така конструкція дозволяє уникнути недоліків, характерних для ДЗЛ при збереженні переваг ДЗЛ (можливість роботи в одномодовому режимі, широкий діапазон робочих частот, низькі радіаційні втрати на вигинах). Геометрія лінії передачі дозволяє сформувати

таку структуру електромагнітного поля, для якого суттєво знижуються інтегральні теплові втрати через струми провідності в металевому екрані. Варіація товщини діелектричного підшару дозволяє ефективно збуджувати в ньому поверхневу хвилю, локалізовану поблизу діелектричного стрижня. При цьому вдається використовувати методи тонкоплівкової технології для виготовлення таких конструкцій.

Аналогічну структуру мають гребневій (рис. 1.2а) і смужковій (рис.1.2.б) ДХ, вони представлені на рис. 1.2. В цих структурах електромагнітне поле зосереджене, в основному, у підкладці, а діелектричний стрижень із діелектричною проникністю, меншої або рівної проникності підкладки, створює обмеження поля в горизонтальному напрямку. Така геометрія дозволяє знизити вимоги до якості обробки поверхні діелектричного бруска в порівнянні із дзеркальними й ізовольованими ДХ.

Необхідно вказати ще на деякі різновиди діелектричних структур - “смужкові ДХ”. Назва “смужкові ДХ” застосовується до структур, отриманих наклеюванням або упресовуванням діелектричного стрижня в товсту полімерну пластину. Такі ДХ дозволяють успішно вирішувати проблеми мініатюризації, підвищення механічної міцності й інтегрального виконання пристроїв короткохвильової частини міліметрового діапазону.

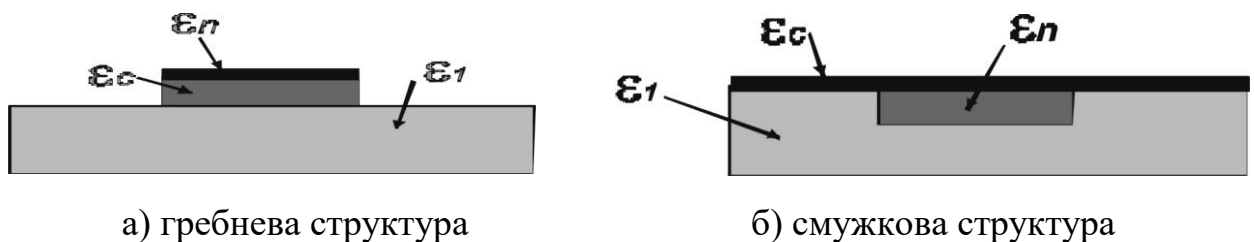


Рис. 1.2. Різновиди смужкових діелектричних структур.

1.2. Функціональні елементи на основі гібридних структур

Конструювання багатофункціональної апаратури в будь-якому частотному діапазоні (а особливо, в НВЧ та КВЧ діапазонах) пов'язано з необхідністю рішення важливих задач: збудження та керування спектральним складом власних хвиль або коливань, формування у далекій зоні необхідного просторового розподілу полів, здійснення частотно-поляризаційної селекції сигналів, вирішення «вічної» задачі узгодження з зовнішніми колами. Значна кількість з цих задач знаходить своє рішення шляхом використання складних електродинамічних структур, які мають у своєму складі періодичні об'єкти. Такі об'єкти, як правило, мають у своєму складі ті чи інші субструктури зі своїми особливостями властивостей та розташуванням елементів на періоді. Суттєвим питанням є питання о відповідності властивостей реального об'єкту з обмеженим набором елементів з «періодичним» розташуванням та властивостей структури, за допомогою якої проводиться аналіз характеристик (як правило, це нескінченні періодичні структури).

Широке використання періодичних структур при конструюванні функціональних НВЧ та КВЧ пристроїв обумовлено наявністю двох цікавих особливостей. Перша особливість – це різниця у величинах фазових швидкостей поширення електромагнітних хвиль у вільному просторі та в структурі: вона є суттєво меншою. Друга полягає в тому, у амплітудно-частотних характеристиках (дисперсійних) можна спостерігати смуги проходження та смуги запирання. Ці властивості є підставою для використання періодичних структур різного типу в складнокомпозиційних функціональних елементах, що працюють у одне- та багатомовному режимах. Можливість одержання значних коефіцієнтів уповільнення є основою для конструювання сповільнюваних систем [6,7]. Крім того, ця властивість дозволяє значно мініатюризувати пристрої в цілому.

Ще одна властивість цих структур, а саме багатомодовість спектра власних хвиль, складає основу при проектуванні частотно-селективних

елементів [8,9]. Для досягнення добрих характеристик частотно-селективних елементів необхідно виконувати умови так званого фазового синхронізму збуджених власних хвиль (іноді, коливань). Якщо є суттєва різниця у величинах фазових швидкостей в пристроях, елементи яких мають електромагнітний зв'язок (наприклад, зв'язані мікросмужкові, копланарні лінії), то в амплітудно-частотних характеристиках (як і в дисперсійних) можлива поява паразитних смуг пропускання, що, як правило, призводить до погіршення сумарних характеристик [10]. З літературних джерел відомі приклади зміни навіть типів амплітудно-частотних характеристик при наявності виродження деяких типів коливань у резонуючих системах.

В роботі [11] показано, що за рахунок «керуванням» умовами синхронізму або розсинхронізму вдається створювати частотно-селективні пристрої з унікальними параметрами. Використання цього принципу керування дозволило створити смуго-загороджуючи та смуго-пропускаючи фільтри з сверхширокими робочими смугами [12], багатоканальні частотно-залежні дільники потужності [13], керовані фільтри [14]. Ще однією областю використання періодичних структур є конструювання спрямованих відгалуджувачів [15]. Особливе місце тут займають так звані спрямовані відгалуджувачі зі слабким зв'язком. Відомо, що при ослабленні зв'язку спостерігається зменшення величини спрямованості. Але, виконання області зв'язку у вигляді періодичних структур різної топології [16] за рахунок підбору умов фазового синхронізму вдається компенсувати ці ефекти. В роботі [17] представлені результати досліджень ще одного специфічного класу електродинамічних структур – багатопровідних багатосмужкових ліній. Показано, що на основі таких ліній можливе конструювання пристроїв для спрямованого відгалуджування потужності з коефіцієнтом зв'язку більшим, ніж 10 дБ. Особливості конструкції та способів збудження таких об'єктів дозволяють реалізовувати специфічну структуру поля. Багатосмужкове розміщення провідників дозволяє поміщувати провідники (які беруть участь у формуванні зв'язку) в областях заданих

значень полів. Слабке спрямоване відгалуджування потужності буде гарантоване, оскільки ці пристрої виконуються за планарною технологією та працюють за рахунок бічного зв'язку.

Ще однією важливою задачею є задача конструювання НВЧ елементів, хвильовий опір яких має слабкодисперсну характеристику. Бажано щоб діапазон змінного опору охоплював діапазон від одиниць Ом до значень сотент Ом. Таки можливості надають багатоелемнтні періодичні структури. За рахунок зміни параметрів структури можливі зміни хвильового опору, що дозволяє узгоджувати такий пристій з базовим збуджуючим трактом. Крім того, є можливість використання таких пристроїв у якості перехідних узгоджуючих елементів при переходах від трактів з одним значенням опору до іншого.

Розділ 2

ОГЛЯД МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧИ ПОШИРЕННЯ ВЛАСНИХ ХВИЛЬ У МЕТАЛЕВО-ДИЕЛЕКТРИЧНИХ СТРУКТУРАХ

2.1. Задача по визначенню постійних поширення власних хвиль і методи її розв'язку

Діелектричні хвилевідні структури знаходять широке застосування при створенні антенних систем, систем зв'язку, резонаторних структур і різних інтегральних схем НВЧ діапазону [1-4]. Вони досліджуються досить давно з використанням широкого набору методів.

Синтез тривимірних структур може ґрунтуватися на використанні різних типів ліній передачі й елементів. Основою таких конструкцій можуть бути діелектричні хвилеводи, на одній з поверхонь яких розташовуються функціональні елементи [5]. У роботі [6] представлена можливість застосування діелектричних хвилеводів для створення антен для мобільних телефонів. У роботі [7], використовуючи метод інтегральних рівнянь і метод моментів, розглядається широкосмугова антена хвилі, що впливає, містить лише металеву смужку на діелектричній підложці без заземленої площини. Представлений спосіб збудження EH_{01} -хвилі в такій структурі. У роботі [8] розглядається мікросмужкова лінія передачі. Нескінченна в поздовжньому напрямку металева смужка містить щілини та лежить на діелектричній підкладці. При дослідженні використаний метод поперечної резонансної дифракції (transverse resonance diffraction).

Однією з актуальних задач синтезу різних багатоелементних структур НВЧ діапазону є задача про спектр власних коливань основних компонентів таких структур.

Відзначимо, що більшість методів, які застосовуються при розв'язанні лінійних задач дифракції на неоднорідностях, також застосовуються й при визначенні постійних поширення власних хвиль. При застосуванні методів, як правило, виникає рівняння вигляду

$$A \cdot x = B,$$

де A – якийсь лінійний оператор певного (відомого) вигляду, x – невідома функція або вектор, що визначає розсіяне поле, B – відома функція або вектор, обумовлена падаючим полем. Тоді постійні поширення γ власних хвиль можна визначити, поклавши $B \equiv 0$, $A = A^1(\gamma)$ з рівняння

$$\det(A^1(\gamma)) = 0,$$

де $A^1(\gamma)$ – матриця, що відповідає операторові $A(\gamma)$.

Зупинимося більш докладно на декількох методах, які можна застосовувати при розв'язанні задач по визначенню власних хвиль. Серед них необхідно згадати числено-аналітичні методи: метод задачі Рімана-Гільберта [9], метод часткових областей [10], [11], метод сингулярних інтегральних рівнянь [12], а також чисельні методи, такі як метод сіток [1], [3], [13], [14].

2.1.1. Метод задачі Рімана-Гільберта

Розглянемо наступну систему рівнянь:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\varphi} = 0, \quad \delta < |\varphi| < \pi \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n |n| e^{in\varphi} = ab_0 + f(e^{i\varphi}), \quad |\varphi| < \delta, \quad (2.2)$$

де $\delta = \frac{\pi d}{l}$, константа a та функція

$$f(e^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi}. \quad (2.3)$$

вважаються заданими.

Диференціюючи рівняння (2.2) і вважаючи, що $b_n n = x_n$, одержимо

$$\sum_{n \neq 0} x_n e^{in\varphi} = 0, \delta < |\varphi| \leq \pi, \quad (2.4)$$

$$\sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = ab_0 + f(e^{i\varphi}), |\varphi| < \delta. \quad (2.5)$$

До цих двох рівнянь потрібно ще додати рівність

$$\sum_{n \neq 0} (-1)^n \frac{x_n}{n} = -b_0, \quad (2.6)$$

яке виходить із (2.2) при підстановці $\varphi = \pi$.

Пари рівнянь (2.4) і (2.5) утворюють задачу Рімана – Гільберта.

Розглянемо одиничне коло з дугами L_1 та L_2 . Введемо функції:

$$x^+(z) = \sum_{n>0} x_n z^n, \quad x^-(z) = \sum_{n<0} x_n z^n,$$

голоморфні відповідно у середині та поза окружністю $|z|=1$. Тоді

$$x^+(e^{i\varphi}) - x^-(e^{i\varphi}) = \sum_{n \neq 0} x_n e^{in\varphi} \quad (2.20)$$

звідки, згідно (2.5), випливає, що функція $x^+(z)$ й $x^-(z)$ збігаються на дузі L_2 , т.т вони аналітично тривають через дугу L_2 одна в іншу і є, таким чином, однієї й тієї ж аналітичною функцією $x(z)$:

$$x(z) = \begin{cases} x^+(z), & |z| < 1 \\ x^-(z), & |z| > 1. \end{cases}$$

На додатковій дузі L_1 в силу рівняння (2.5) маємо:

$$x^+(e^{i\varphi}) + x^-(e^{i\varphi}) = ab_0 + f(e^{i\varphi}), \quad (2.21)$$

причому, відповідно попередньому $x^+(e^{i\varphi})$ й $x^-(e^{i\varphi})$ можна розглядати як граничні значення на дузі L_1 однієї й тієї ж аналітичної функції (відповідно зсередини й ззовні одиничного кола).

Отже, задача полягає в тому, щоб по сумі граничних значень аналітичної функції на дузі L_1 відновити саму аналітичну функцію. Це і є задача Рімана-Гільберта.

Проведемо в площині комплексної змінної розріз уздовж дуги L_1 . У розрізаній площині шукана функція $x(z)$, функція $\sqrt{(z-a)(z-\bar{a})}$, ($a = e^{i\sigma}, \bar{a} = e^{-i\sigma}$), а отже, і їхній добуток голоморфні й однозначні, при $|z| \rightarrow \infty$ одержимо:

$$x(z)\sqrt{(z-a)(z-\bar{a})} = \frac{1}{2\pi i} \oint_T \frac{x(\xi)\sqrt{(\xi-a)(\xi-\bar{a})}}{\xi-z} d\xi + C,$$

де контур T охоплює розмір L_1 , а константа C вийшла за рахунок відрахування в нескінченно ввіддаленій точці.

Стягнемо тепер контур T до дузі L_1 , яка двічі пробігається. Враховуючи, що граничні значення кореня на дузі мають різні знаки, а граничні значення $x(\xi)$ рівні $x^+(\xi)$ (зсередини) і $x^-(\xi)$ (ззовні), будемо мати

$$x(z)\sqrt{(z-a)(z-\bar{a})} = \frac{1}{2\pi i} \oint_T \frac{x^+(\xi) + x^-(\xi)\sqrt{(\xi-a)(\xi-\bar{a})}}{\xi-z} d\xi + C,$$

де під знаком інтеграла слід обрати граничні значення кореня на дузі L_1 зсередини одиничного кола. Ця формула дає розв'язок завдання Рімана.

Але нам потрібно знайти функцію $x^+(e^{i\varphi}) - x^-(e^{i\varphi})$, точніше її коефіцієнти Фур'є x_n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

За допомогою формул Сохоцького, що дають граничні значення функцій, представлених інтегралами типу Коші, і враховуючи знаки кореня по різні сторони дуги L_1 , знаходимо, що

$$\left[x^+(\xi_0) - x^-(\xi_0) \right] \sqrt{(\xi_0 - \alpha)(\xi_0 - \bar{\alpha})} = \frac{1}{\pi i} \oint_{L_1} \frac{\left[x^+(\xi) + x^-(\xi) \right] \sqrt{(\xi - \alpha)(\xi - \bar{\alpha})}}{\xi - \xi_0} d\xi + 2C, \quad (2.22)$$

де ξ_0 лежить на L_1 , а інтеграл розуміється в змісті головного значення.

З формул (2.2) і (2.4) випливає далі, що на дузі L_2 (тобто в точках $\xi_0 \in l_2$ маємо $[x^+(\xi_0) - x^-(\xi_0)] = 0$ та $[x^+(\xi) + x^-(\xi)] = f(\xi)$ для $\xi_0 \in l_1$).

Тому, ввівши функцію

$$R(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\xi - \bar{\alpha})}} & \text{на дузі } L_1, \text{ на дузі } L_2, \end{cases} \quad (2.23)$$

і підставляючи в (2.21) замість $[x^+(\xi) + x^-(\xi)]$ у праву частину рівності (2.20) одержимо формулу:

$$\left[x^+(\xi_0) - x^-(\xi_0) \right] = \frac{R(\xi_0)}{\pi i} \oint_{L_1} \frac{ab_0}{\xi - \xi_0} d\xi \sqrt{(\xi_0 - \alpha)(\xi_0 - \bar{\alpha})} + 2CR(\xi_0), \quad (2.24)$$

вірну для усіх ξ_0 , що лежать на окружності $|\xi_0| = 1$.

Введемо тепер наступні позначення:

$$\begin{aligned} V_n(\xi_0) &= \frac{1}{\pi i} \oint_{L_1} \frac{\xi_n}{\xi - \xi_0} \sqrt{(\xi - \alpha)(\xi - \bar{\alpha})} d\xi, \quad (\xi_0 \in l_1) \\ V_m^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_n(e^{i\varphi}) R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi \\ R_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi \\ R_\sigma &= \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{R_m}{m}, \quad V_\sigma^n = \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{V_m^n}{m} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Помітимо, що величини R_σ та V_σ^n можна також представити формулами

$$R_\sigma = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi R(e^{i\varphi}) d\varphi; \quad V_\sigma^n = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi V_n(e^{i\varphi}) R(e^{i\varphi}) d\varphi \quad (2.26)$$

Для того, щоб у цьому переконатися, необхідно замість функцій $R(e^{i\varphi})$ і $V_n(e^{i\varphi})R(e^{i\varphi})$ підставити їхні ряди Фур'є та зробити почленне інтегрування.

Переходячи в рівності (2.24) до коефіцієнтів Фур'є й використовуючи при цьому введені позначення (2.25), одержимо:

$$\begin{cases} x_m = ab_0 V_m^0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n V_m^n + 2CR_m \\ 0 = ab_0 V_0^0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n V_0^n + 2CR_0 \end{cases}, (m \neq 0) \quad (2.27)$$

Для визначення коефіцієнтів b_0 і C до цих рівностей приєднується (2.6).

Множачи обидві частини рівності (2.13) на $(-1)^m m^{-1}$ і підсумовуючись по всім $m \neq 0$, згідно (2.6) і (2.25), будемо мати:

$$-b_0 = ab_0 V_\sigma^0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n V_\sigma^n + 2CR_\sigma \quad (2.28)$$

Дорівнявши детермінант системи (2.27), (2.28) до нуля, ми зможемо визначити постійні поширення власних хвиль.

2.1.2. Метод часткових областей

Застосування методу часткових областей ми розглянемо на прикладі задачі про розсіяне поле ідеально провідної та нескінченно тонкою півплощиною в плоскому хвилеводі. Півплощина паралельна стінкам хвилеводу. Отримана при розв'язанні задачі парна система лінійних рівнянь є досить універсальною, тому що виникає й у багатьох інших задачах [11], наприклад у задачах по визначенню власних хвиль різних періодичних структур. Досліджувана структура розбивається на області так, щоб власні

області в кожній з підобластей були відомі. Позначимо a – розмір великого хвилеводу, b, z – розміри інших хвилевід, а A, B, Z – часткові області.

Представимо функцію однієї з компонентт поля у вигляді розкладання по власних хвилях у кожній із часткових областей. Використовуючи умову безперервності дотичних компонент електричного та магнітного полів на границях часткових областей, одержуємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \\ \gamma_{1a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_{na} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \gamma_{nb} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{c}(x-b)\right) \\ \gamma_{1a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_{na} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \gamma_{nc} \sin\left(\frac{n\pi}{c}(x-b)\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

(коефіцієнти C_n, B_n, A_n відповідають амплітудам Фур'є поля в кожній із часткових областей).

Скориставшись ортогональністю власних функцій, можна з (2.29) і (2.30) одержати систему рівнянь, що містить лише невідомі коефіцієнт Фур'є в одній області $\{A_n\}$.

Остаточно одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{na} - \gamma_{mb}} A'_n = \frac{A'}{\gamma_{1a} + \gamma_{mb}}, \quad (2.31)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{na} - \gamma_{mc}} A'_n = \frac{A'}{\gamma_{1a} + \gamma_{mc}}, \quad m=1, 2, 3, \quad (2.32)$$

де коефіцієнт A'_n рівний з точністю до константи коефіцієнту $A_n; \gamma_{na}, \gamma_{nc}, \gamma_{mb}$ - постійні поширення власних хвиль у кожній з областей.

Використовуючи знайдені коефіцієнти A'_n , можуть бути отримані вирази для коефіцієнтів амплітуд Фур'є поля у двох інших областях:

$$B_m = \frac{(-1)^m \pi}{b^2 \gamma_{mc}} \left(\frac{A'}{\gamma_{1a} - \gamma_{mb}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mb}} \right) \quad (2.33)$$

$$C_m = \frac{(-1)^m \pi}{c^2 \gamma_{mc}} \left(\frac{A'}{\gamma_{1a} - \gamma_{mc}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A'_n}{\gamma_{na} + \gamma_{mc}} \right), m=1, 2, 3, \dots \quad (2.34)$$

Систему рівнянь (2.33) і (2.34) можна розв'язувати методом відрахувань, методом прямого обернення й ін.

2.1.3. Метод сингулярних інтегральних рівнянь

Розглянемо застосування методу сингулярних інтегральних рівнянь до розв'язання парних інтегральних рівнянь вигляду

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{iky\xi} d\xi = 0, \quad y \in R \setminus L, \quad (2.35)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \frac{\gamma(\xi)}{1 - e^{2ikhy(\xi)}} e^{iky\xi} d\xi = -i \frac{\pi p}{2kh} e^{iky\beta_p}, \quad y \in L. \quad (2.36)$$

виникаючих у задачах дифракції з рівняння Гельмгольца при виконанні відповідних граничних умов, де $L = \bigcup_{q=1}^m (a_q, b_q)$.

Дотримуючись ідей роботи [12], позначимо

$$U(y) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{iky\xi} d\xi, \quad F(y) = U'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} ik\xi C(\xi) e^{iky\xi} d\xi. \quad (2.37)$$

З (2.35) випливає, що

$$F(y) = 0, \quad y \in CL. \quad (2.38)$$

З умови на ребрі випливає, що $F(y)$ належить простору інтегрованих по Лебегу функцій

$$F(y) \in L_p(L), \quad 1 \leq p < 2.$$

Застосовуючи зворотнє перетворення Фур'є до виразу (2.37), тому що

$$\int_L F(y) dy = 0, \text{ одержуємо}$$

$$C(\xi) = \frac{1}{2\pi i \xi} \int_L F(y) (e^{-ik\xi y} - 1) dy. \quad (2.39)$$

Введемо оператор $(HG)(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta$, $H: e^{ik\xi\zeta} \mapsto i \operatorname{sgn}(nk) e^{ik\xi y}$. Тут

інтеграл з особливістю $\frac{1}{x}$, $x \rightarrow 0$, розуміється в змісті головного значення по Коші.

Перепишемо рівняння (2.363) за умови, що $k > 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \xi i \frac{|\xi k|}{\xi k} C(\xi) e^{iky\xi} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{iky\xi} \left(i|\xi| - \frac{\gamma(\xi)}{1 - e^{2ikh\gamma(\xi)}} \right) d\xi = \\ = -i \frac{\pi p}{2kh} e^{iky\beta_p} \equiv g(y), \quad y \in L. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Тоді, застосовувавши до першого інтеграла в рівнянні (2.40) оператор H , використовуючи формули (2.37), (2.38), одержимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi i \frac{|\xi k|}{\xi k} C(\xi) e^{iky\xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi C(\xi) \int_L \frac{e^{ik\xi\zeta}}{\zeta - y} d\zeta d\xi = -\frac{i}{\pi k} \int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta.$$

Перетворимо другий інтеграл в (2.40)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{iky\xi} \left(i|\xi| - \frac{\gamma(\xi)}{1 - e^{2ikh\gamma(\xi)}} \right) d\xi = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_L \frac{1}{\xi} F(\zeta) (e^{-ik\xi\zeta} - 1) e^{ik\xi y} \left(i|\xi| - \frac{\gamma(\xi)}{1 - e^{2ikh\gamma(\xi)}} \right) d\xi d\zeta = \\ = \frac{k}{\pi} \int_L F(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{ik\xi(y-\zeta)} - e^{ik\xi y})}{2ik\xi} \left(i|\xi| - \frac{\gamma(\xi)}{1 - e^{2ikh\gamma(\xi)}} \right) d\xi d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_L F(\zeta) K_1(y - \zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Порядок інтегрування можна міняти по теоремі Фубіни, тому що

$$\left| \frac{1}{\xi} F(\zeta) (e^{-ik\xi\zeta} - 1) e^{ik\xi y} \left(i|\xi| - \frac{\gamma(\xi)}{1 - e^{2ikh\gamma(\xi)}} \right) \right| = O\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \zeta \in \text{компакту},$$

$$F(\zeta) \in L_p(L), \quad 1 \leq p < 2.$$

Тоді, позначивши $K(y - \zeta) = -ikK_1(y - \zeta)$, $f(y) = ikg(y)$, перепишемо (2.40) у вигляді

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F(\zeta)}{\zeta - y} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_L K(y - \zeta) F(\zeta) d\zeta = f(y), \quad y \in L. \quad (2.41)$$

Полюси слід обходити так, щоб виконувалася умова випромінювання. З рівняння (2.35) випливає, що

$$\int_{\alpha_q}^{\beta_q} F(\zeta) d\zeta = 0, \quad q = 1, \dots, m. \quad (2.42)$$

У результаті застосування методу дискретних особливостей [15] до сингулярного інтегрального рівняння з додатковими умовами (2.41), (2.42) може бути отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь. Значення γ , при яких визначник цієї системи рівнянь звертається в нуль, відповідають постійним поширення власних хвиль.

2.1.4. Метод сіток

Серед прямих методів зупинимося більш докладно на методі сіток, тому що він одержав досить широке поширення при розв'язанні диференціальних рівнянь, що виникають у задачах дифракції у відкритих і закритих структурах. Першими роботами із застосування методу сіток в електродинаміці є роботи [13], [14]. При застосуванні методу, похідна шуканої функції u в точці x_i представляється за допомогою кінцевої різниці, яка у випадку апроксимації першого порядку має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x},$$

Де $u_{i+1} = u(x_{i+1})$, $u_i = u(x_i)$, $u_{i-1} = u(x_{i-1})$, $\Delta x = x_i - x_{i-1}$. Однак, як показано в роботі [14], навіть в одномірному випадку для хвильового рівняння, кінцево-різницева схема може бути нестійкою.

У задачах з відкритими областями електромагнітне поле повинне задовольняти умові на нескінченності. У якості такої умови в методі сіток використовуються так звані absorbing або radiation boundary conditions (ABC або RBC). Ці умови можуть полягати в розташуванні поглинаючого матеріалу поза досліджуваною структурою, у побудові диференціального рівняння, якому повинна задовольняти шукана функція на деякій відстані від досліджуваної структури, в екстраполяції поля і т.п. Застосування цих умов, мабуть, вносить додаткову погрішність у розв'язок.

Розділ 3

ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ПРО СПЕКТР ВЛАСНИХ ХВИЛЬ ІНВЕРТОВАНОГО ДІЕЛЕКТРИЧНОГО ХВИЛЕВОДУ

3.1. Постановка задачі

Будемо розглядати задачу про спектр власних хвиль інвертованого діелектричного хвилеводу як базового елемента гібридної структури. Схематичне зображення хвилеводу презентовано на рис.3.1.

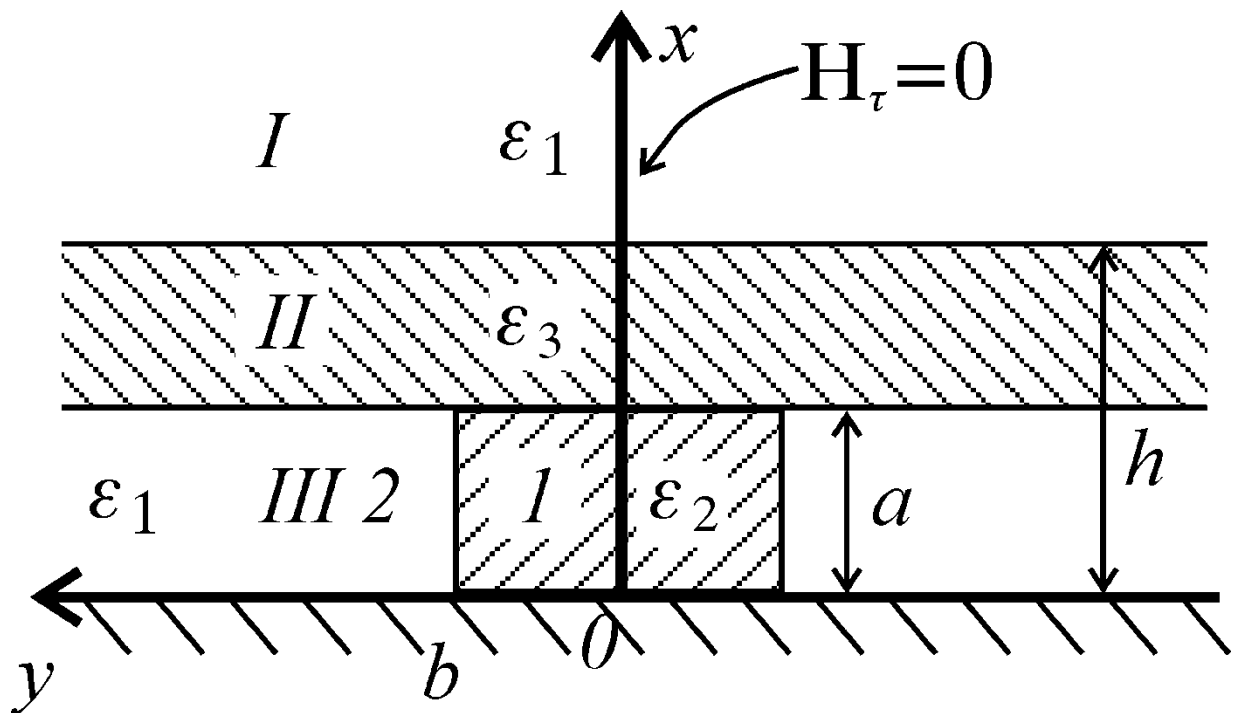


Рис. 3.1. Геометрія досліджуваної структури

Будемо припускати, що втрати в діелектриках відсутні, а метал є ідеально провідним. Структура однорідна уздовж осі Oz . При розв'язанні поставлено задачі поперечний переріз розглянутого інвертованого

діелектричного хвилеводу розіб'ємо на часткові області таким чином, що поле в кожній області можна представити у вигляді суперпозиції власних хвиль плоского діелектричного хвилеводу. Дорівнюючи дотичні компоненти електричного та магнітного полів на границях часткових областей, одержимо систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду щодо амплітуд цих хвиль.

3.1.1. Рівняння Максвелла для випадку TE - і TM - хвиль

Залежність від часу приймемо у вигляді $e^{-i\omega t}$. Тоді вектори електромагнітного поля рівні $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(y, z)e^{-i\omega t}$, $\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}(y, z)e^{-i\omega t}$. Вони задовольняють рівнянням Максвелла (у відсутності сторонніх струмів $\vec{j}_{CT} \equiv 0$):

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}, \text{rot}\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}, \\ \text{div}\vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тому що вільні заряди відсутні, то

$$\text{div}\vec{E} = 0.$$

В однорідному ізотропному середовищі вектори $\vec{E}$, $\vec{D}$ і $\vec{H}$, $\vec{B}$ зв'язані рівняннями:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}, \quad (3.2)$$

де $\varepsilon = \text{const}$ – діелектрична проникність середовища, $\mu = \text{const}$ – магнітна проникність середовища. Тоді Рівняння Максвелла (2.1), з урахуванням (2.2) приймають вигляд:

$$\text{rot}\vec{E} = i\omega\mu\vec{H}, \text{rot}\vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}. \quad (3.3)$$

Відомо [16], що поля у хвилнведучих структурах можна представити у вигляді суперпозиції або E - і H - хвиль, або суперпозиції LM - і LE - хвиль. Причому всі компоненти електромагнітного поля вдається виразити через дві скалярні функції – потенціали. Ми будемо розглядати другу групу хвиль.

Для представлення поля в кожній частковій області введемо два векторні потенціали, спрямованих уздовж осі Oy :

$$\vec{A} = (0, A, 0), \quad \vec{F} = (0, F, 0).$$

Тоді компоненти електричного та магнітного поля виражаються через потенціали в такий спосіб:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\text{rot } \vec{F}. \quad (3.4)$$

Представимо рівняння (3.3), (3.4) у розгорнутій формі:

- для потенціалу $\vec{A}$ (LM -хвилі):

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{\partial A_y}{\partial z} & E_x &= -\frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} \\ H_y &= 0 & E_y &= \frac{i}{\omega\epsilon} \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \\ H_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} & E_z &= -\frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\Delta A_y + k^2 A_y = 0, \quad (3.6)$$

- для потенціалу $\vec{F}$ (LE -хвилі):

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial F_y}{\partial z} & H_x &= -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} \\ E_y &= 0 & H_y &= \frac{i}{\omega\mu} \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right) \\ E_z &= -\frac{\partial F_y}{\partial x} & H_z &= -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial^2 F_y}{\partial y \partial z} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\Delta F_y + k^2 F_y = 0, \quad (3.8)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – лапласіан.

3.1.2. Крайові задачі для рівняння Гельмгольца у випадку LM - і LE - хвиль

Розглянемо ідеально провідний метал. Нехай Γ – поверхня металу. Тоді на Γ дотичний компонент вектора електричного поля дорівнює нулю

$$E_\tau|_\Gamma = E_\varphi|_\Gamma = E_z|_\Gamma = 0.$$

При переході через границю розділу середовищ повинне виконуватися умова безперервності дотичних компонентів електричного та магнітного полів, тобто

$$E_\tau^+|_\Gamma = E_\tau^-|_\Gamma, H_\tau^+|_\Gamma = H_\tau^-|_\Gamma,$$

де Γ – границя розділу середовищ, знак $+$ і $-$ означає, що компоненти поля беруться при прагненні до контуру Γ праворуч або ліворуч щодо напрямку нормалі до контуру.

Будемо вимагати, щоб електромагнітне поле задовольняло умові випромінювання, яка в цьому випадку звучить у такий спосіб: електромагнітне поле власних хвиль повинне поширюватися до нескінченності. У математичному записі ця умова полягає у виборі знака поперечних і поздовжньої постійних поширення.

Власні хвилі інвертованого діелектричного хвилеводу частоти ω , що поширюються по хвилеводу уздовж осі Oz , залежно від парності щодо площини $y=0$ можна розділити на дві незалежні групи. Першу групу, відповідну до магнітної стінки при $y=0$ ($H_t=0$), будемо називати симетричними хвилями. Другу групу, відповідну до металевої стінки при $y=0$ ($E_t=0$), будемо називати асиметричними хвилями. У даній роботі ми зупинимося на випадку симетричних хвиль.

Отже, у розглянутій задачі все компоненти електромагнітного поля виражаються через потенціали A та F , що відповідають LM - і LE - хвилям. Вони задовольняє рівнянню Гельмгольца (3.6), (3.8), відповідному до граничної умови на металі, умові безперервності поза металом при переході через границю розділу середовищ, умові випромінювання.

3.2. Рівняння Фредгольма

Поле власної хвилі, що поширюється по хвилеводу з постійної поширення γ , у кожній частковій області будемо представляти у вигляді інтеграла Фур'є. Позначимо $k = \omega/c$ – хвильове число, $\varepsilon_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{r,i}$, $\mu_i = \mu_0$, де ε_0 , μ_0 – діелектрична та магнітна постійна, $\varepsilon_{r,i}$ – відносна діелектрична проникність матеріалу, що заповнює область, i – номер області.

Помістимо в площину $y=0$ магнітну стінку. Розглянемо спочатку області I та II . Представимо потенціали в цих областях у вигляді:

$$A^I = \int_0^{\infty} [A_1(\xi) \exp\{i\alpha_I(x-h)\} + A_2(\xi) \exp\{-i\alpha_I(x-h)\}] \sin(\xi y) d\xi,$$

$$A^{II} = \int_0^{\infty} [A_3(\xi) \exp\{i\alpha_{II}(x-h)\} + A_4(\xi) \exp\{-i\alpha_{II}(x-h)\}] \sin(\xi y) d\xi,$$

$$F^I = \int_0^{\infty} [B_1(\xi) \exp\{i\beta_I(x-h)\} + B_2(\xi) \exp\{-i\beta_I(x-h)\}] \cos(\xi y) d\xi,$$

$$F^{II} = \int_0^{\infty} [B_3(\xi) \exp\{i\beta_{II}(x-h)\} + B_4(\xi) \exp\{-i\beta_{II}(x-h)\}] \cos(\xi y) d\xi,$$

де

$$\alpha_I = \sqrt{k^2 \varepsilon_1^r - \xi^2 - \gamma^2}, \alpha_{II} = \sqrt{k^2 \varepsilon_3^r - \xi^2 - \gamma^2},$$

$$\beta_I = \sqrt{k^2 \varepsilon_1^r - \xi^2 - \gamma^2}, \beta_{II} = \sqrt{k^2 \varepsilon_3^r - \xi^2 - \gamma^2}$$

– постійні поширення хвиль уздовж осі Ox . Умова убутання поля на нескінченності буде виконано, якщо $A_2 \equiv 0$ та $B_2 \equiv 0$. Дорівнявши x - і z -компоненти електричного та магнітного полів при $x = h$, одержимо співвідношення амплітуд:

$$A_1 = \frac{2\varepsilon_1 \alpha_{II} \exp[-i\alpha_{II}(h-a)]}{\varepsilon_3 \alpha_{II} - \varepsilon_1 \alpha_I} A_4,$$

$$A_3 = \frac{\varepsilon_3 \alpha_{II} + \varepsilon_1 \alpha_I}{\varepsilon_3 \alpha_{II} - \varepsilon_1 \alpha_I} \exp[-2i\alpha_{II}(h-a)] A_4 = A_3^1 A_4,$$

$$B_1 = \frac{2\beta_{II} \exp[-i\beta_{II}(h-a)]}{\varepsilon_3 \alpha_{II} - \varepsilon_1 \alpha_I} B_4,$$

$$B_3 = \frac{\beta_{II} + \beta_I}{\beta_{II} - \beta_I} \exp[-2i\beta_{II}(h-a)] B_4 = B_3^1 B_4.$$

Розглянемо в області III підобласти 1 та 2. Представимо потенціали в цих підобластях у вигляді:

$$A^{III,1} = \int_0^\infty A_5(\zeta) \sin(\alpha_{III,1} y) \sin(\zeta x) d\zeta,$$

$$A^{III,2} = \int_0^\infty [A_6(\zeta) \exp\{i\alpha_{III,2}(y-b)\} + A_7(\zeta) \exp\{-i\alpha_{III,2}(y-b)\}] \sin(\zeta x) d\zeta,$$

$$B^{III,1} = \int_0^\infty B_5(\zeta) \cos(\beta_{III,1} y) \cos(\zeta x) d\zeta,$$

$$B^{III,2} = \int_0^\infty [B_6(\zeta) \exp\{i\beta_{III,2}(y-b)\} + B_7(\zeta) \exp\{-i\beta_{III,2}(y-b)\}] \cos(\zeta x) d\zeta,$$

де

$$\alpha_{III,1} = \sqrt{k^2 \varepsilon_2^r - \zeta^2 - \gamma^2}, \alpha_{III,2} = \sqrt{k^2 \varepsilon_1^r - \zeta^2 - \gamma^2}, \quad (3.9)$$

$$\beta_{III,1} = \sqrt{k^2 \varepsilon_2^r - \zeta^2 - \gamma^2}, \beta_{III,2} = \sqrt{k^2 \varepsilon_1^r - \zeta^2 - \gamma^2} \quad (3.10)$$

– постійні поширення хвиль уздовж осі Oy . Помітимо, що для вповільнених хвиль при ζ дійсних, величини $\alpha_{III,2}$ та $\beta_{III,2}$ – чисто уявні.

Дорівнявши y - і z - компоненти електричного та магнітного полів при $y=b$ (3.5), (3.7), зажадавши виконання умови на нескінченності ($A_7 \equiv 0$, $B_7 \equiv 0$), одержимо співвідношення амплітуд:

$$A_6 = A_5 \sin(\alpha_{III,1} b),$$

$$B_6 = B_5 \cos(\beta_{III,1} b),$$

і дисперсійні рівняння

$$\frac{\alpha_{III,1}}{\alpha_{III,2}} = \frac{i\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{tg}(\alpha_{III,1} b), \quad (3.11)$$

$$\frac{\beta_{III,1}}{\beta_{III,2}} = -i \operatorname{ctg}(\beta_{III,1} b), \quad (3.12)$$

які в сукупності з рівностями (3.9), (3.10) дозволяють визначити безліч хвиль, відповідних до власних хвиль симетричного плоского діелектричного хвилеводу товщиною $2b$.

Запишемо дотичні компоненти поля при $x=a$. В області II :

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{i}{\omega\varepsilon_3} \int_0^\infty A_4(\xi)(\alpha_{II}^2 + \gamma^2)[A_3^1(\xi) + 1] \sin(\xi y) d\xi, \\ E_z &= \int_0^\infty \left[\frac{\gamma\xi}{\omega\varepsilon_3} A_4(\xi)\{A_3^1(\xi) + 1\} + i\beta_{II} B_4(\xi)\{B_3^1(\xi) - 1\} \right] \cos(\xi y) d\xi, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu_0} \int_0^\infty B_4(\xi)(\beta_{II}^2 + \gamma^2)[B_3^1(\xi) + 1] \cos(\xi y) d\xi,$$

$$H_z = \int_0^\infty \left[i\alpha_{II} A_4(\xi)\{A_3^1(\xi) - 1\} + \frac{\gamma\xi}{\omega\mu} B_4(\xi)\{B_3^1(\xi) + 1\} \right] \sin(\xi y) d\xi.$$

В області III :

$$\begin{aligned}
E_y &= \int_0^\infty A_5(\zeta) f_{E_y}(\zeta, y) d\zeta, \\
E_z &= \int_0^\infty [A_5(\zeta) f_{E_z}(\zeta, y) + B_5(\zeta) g_{E_z}(\zeta, y)] d\zeta, \\
H_y &= \int_0^\infty B_5(\zeta) g_{H_y}(\zeta, y) d\zeta, \\
H_z &= \int_0^\infty [A_5(\zeta) f_{H_z}(\zeta, y) + B_5(\zeta) g_{H_z}(\zeta, y)] d\zeta,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
f_{E_y}(\zeta, y) &= \begin{cases} -\frac{i}{\omega \varepsilon_2} (\zeta^2 + \gamma^2) \sin(\zeta a) \sin(\alpha_{III,1} y), & 0 < y < b, \\ -\frac{i}{\omega \varepsilon_1} (\zeta^2 + \gamma^2) \sin(\zeta a) \sin(\alpha_{III,1} b) \exp[i\alpha_{III,2}(y-b)], & b < y, \end{cases} \\
f_{E_z}(\zeta, y) &= \begin{cases} \frac{\gamma \alpha_{III,1}}{\omega \varepsilon_2} \sin(\zeta a) \cos(\alpha_{III,1} y), & 0 < y < b, \\ \frac{i \gamma \alpha_{III,2}}{\omega \varepsilon_1} \sin(\zeta a) \sin(\alpha_{III,1} b) \exp[i\alpha_{III,2}(y-b)], & b < y, \end{cases} \\
f_{H_z}(\zeta, y) &= \begin{cases} \zeta \cos(\zeta a) \sin(\alpha_{III,1} y), & 0 < y < b, \\ \zeta \cos(\zeta a) \sin(\alpha_{III,1} b) \exp[i\alpha_{III,2}(y-b)], & b < y, \end{cases} \\
g_{E_z}(\zeta, y) &= \begin{cases} \zeta \sin(\zeta a) \cos(\beta_{III,1} y), & 0 < y < b, \\ \zeta \sin(\zeta a) \cos(\beta_{III,1} b) \exp[i\beta_{III,2}(y-b)], & b < y, \end{cases} \\
g_{H_y}(\zeta, y) &= \begin{cases} -\frac{i}{\omega \mu} (\zeta^2 + \gamma^2) \cos(\zeta a) \cos(\beta_{III,1} y), & 0 < y < b, \\ -\frac{i}{\omega \mu} (\zeta^2 + \gamma^2) \cos(\zeta a) \cos(\beta_{III,1} b) \exp[i\beta_{III,2}(y-b)], & b < y, \end{cases} \\
g_{H_z}(\zeta, y) &= \begin{cases} -\frac{\gamma \beta_{III,1}}{\omega \mu} \cos(\zeta a) \sin(\beta_{III,1} y), & 0 < y < b, \\ \frac{i \gamma \beta_{III,2}}{\omega \mu} \cos(\zeta a) \cos(\beta_{III,1} b) \exp[i\beta_{III,2}(y-b)], & b < y. \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким чином, ми одержали вирази для полів в областях I, II, III через невідомі амплітуди A_4, B_4, A_5, B_5 , і дисперсійні рівняння (3.11), (3.12) для визначення невідомих поперечних постійних поширення.

Перейдемо тепер до отриманню інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Дорівнюємо E_y - і H_y - компоненти поля при $x = a$ та застосуємо зворотне перетворення Фур'є:

$$A_4 = \frac{i\omega\varepsilon_3}{(1+A_3^1)(k^2\varepsilon_3^r - \xi^2)} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty A_5(\zeta) f_{E_y}(\zeta, y) \cos(\xi y) dy d\zeta, \quad (3.14)$$

$$B_4 = \frac{i\omega\mu}{(1+B_3^1)(k^2\varepsilon_3^r - \xi^2)} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty B_5(\zeta) g_{H_y}(\zeta, y) \sin(\xi y) dy d\zeta.$$

Дорівнюємо E_z - і H_z - компоненти поля при $x = a$, застосуємо зворотне перетворення Фур'є й, використовуючи вирази (3.14), одержимо інтегральні рівняння:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty B_5(\zeta) \left[\frac{\omega\mu\beta_{II}(B_3^1-1)}{(B_3^1+1)(k^2\varepsilon_3^r - \xi^2)} G_{H_y}(\xi, \zeta) - G_{E_z}(\xi, \zeta) \right] d\zeta = \\ & = \int_0^\infty A_5(\zeta) \left[-\frac{i\gamma\xi}{k^2\varepsilon_3^r - \xi^2} F_{E_y}(\xi, \zeta) + F_{E_z}(\xi, \zeta) \right] d\zeta, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty A_5(\zeta) \left[\frac{\omega\varepsilon_3\alpha_{II}(A_3^1-1)}{(A_3^1+1)(k^2\varepsilon_3^r - \xi^2)} F_{E_y}(\xi, \zeta) + F_{H_z}(\xi, \zeta) \right] d\zeta = \\ & = -\int_0^\infty B_5(\zeta) \left[\frac{i\gamma\xi}{k^2\varepsilon_3^r - \xi^2} G_{H_y}(\xi, \zeta) - G_{H_z}(\xi, \zeta) \right] d\zeta, \quad \xi \geq 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

де

$$F_{E_y}(\xi, \zeta) = \int_0^\infty f_{E_y}(\zeta, y) \sin(\xi y) dy,$$

$$F_{E_z}(\xi, \zeta) = \int_0^\infty f_{E_z}(\zeta, y) \cos(\xi y) dy,$$

$$F_{H_z}(\xi, \zeta) = \int_0^\infty f_{H_z}(\zeta, y) \sin(\xi y) dy,$$

$$G_{E_z}(\xi, \zeta) = \int_0^\infty g_{E_z}(\zeta, y) \cos(\xi y) dy,$$

$$G_{H_y}(\xi, \zeta) = \int_0^\infty g_{H_y}(\zeta, y) \cos(\xi y) dy,$$

$$G_{H_z}(\xi, \zeta) = \int_0^\infty g_{H_z}(\zeta, y) \sin(\xi y) dy.$$

Помножимо рівняння (3.15) на $F_{H_z}(\xi, \zeta_{1,p})$, де $\zeta_{1,p}$ відповідають розв'язку рівнянь (3.9), (3.11), $\zeta_{1,p} < \zeta_{1,p+1}$, і проінтегруємо по ξ від 0 до ∞ . Помножимо рівняння (3.16) на $G_{E_z}(\xi, \zeta_{2,p})$, де $\zeta_{2,p}$ відповідають розв'язку рівнянь (3.10), (3.12), $\zeta_{2,p} < \zeta_{2,p+1}$, і проінтегруємо по ξ від 0 до ∞ . Використовуючи властивості інтегралів Фур'є, після алгебраїчних перетворень, одержуємо два інтегральні рівняння Фредгольма другого роду, які потрібно розв'язувати спільно:

$$\frac{i\gamma\pi}{2} I_1(\zeta_{1,p}) A_5(\zeta_{1,p}) + \int_0^\infty K_1(\zeta, \zeta_{1,p}) A_5(\zeta) d\zeta + \int_0^\infty K_2(\zeta, \zeta_{1,p}) B_5(\zeta) d\zeta = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{i\gamma\pi}{2} I_2(\zeta_{2,p}) B_5(\zeta_{2,p}) + \int_0^\infty K_3(\zeta, \zeta_{2,p}) B_5(\zeta) d\zeta + \int_0^\infty K_4(\zeta, \zeta_{2,p}) A_5(\zeta) d\zeta = 0, \quad (3.18)$$

$$p = 1, 2, \dots,$$

де

$$I_1(\zeta) = \int_0^\infty f_{E_y}(\zeta, y) f_{H_z}(\zeta, y) dy,$$

$$I_2(\zeta) = \int_0^\infty g_{H_y}(\zeta, y) g_{E_z}(\zeta, y) dy,$$

$$K_1(\zeta, \eta) = - \int_0^\infty \frac{k^2 \varepsilon_3^r - \xi^2}{\xi} F_{E_z}(\xi, \zeta) F_{H_z}(\xi, \eta) d\xi,$$

$$K_2(\zeta, \eta) = \int_0^\infty \left[\frac{\omega \mu \beta_{II} (B_3^1 - 1)}{\xi (B_3^1 + 1)} G_{H_y}(\xi, \zeta) - \frac{k^2 \varepsilon_3^r - \xi^2}{\xi} G_{E_z}(\xi, \zeta) \right] F_{H_z}(\xi, \eta) d\xi,$$

$$K_3(\zeta, \eta) = \int_0^\infty \frac{k^2 \varepsilon_3^r - \xi^2}{\xi} G_{H_z}(\xi, \zeta) G_{E_z}(\xi, \eta) d\xi,$$

$$K_4(\zeta, \eta) = \int_0^\infty \left[\frac{\omega \varepsilon_3 \alpha_{II} (A_3^1 - 1)}{\xi (A_3^1 + 1)} F_{E_y}(\xi, \zeta) + \frac{k^2 \varepsilon_3^r - \xi^2}{\xi} F_{E_z}(\xi, \zeta) \right] G_{E_z}(\xi, \eta) d\xi.$$

Подинтегральні функції у виразах для $K_2(\zeta, \eta)$ й $K_4(\zeta, \eta)$ можуть мати особливості в точках $\xi_{A,n}$ і $\xi_{B,n}$, $n = 1, 2, \dots$. Ці точки є коріннями рівнянь

$$B_3^1(\xi_{B,n}) = 0,$$

$$A_3^1(\xi_{A,n}) = 0.$$

Особливості подинтегральних функцій є полюсами першого роду. Для виключення особливостей застосуємо процедуру, описану в [18], у результаті якої одержимо:

$$\begin{aligned} K_2(\zeta, \eta) = & \int_C^\infty \left[\frac{\omega \mu \beta_{II} (B_3^1 - 1)}{\xi (B_3^1 + 1)} G_{H_y}(\xi, \zeta) - \frac{k^2 \varepsilon_3^r - \xi^2}{\xi} G_{E_z}(\xi, \zeta) \right] F_{H_z}(\xi, \eta) d\xi + \\ & + \int_0^C \left\{ \left[\frac{\omega \mu \beta_{II} (B_3^1 - 1)}{\xi (B_3^1 + 1)} G_{H_y}(\xi, \zeta) - \frac{k^2 \varepsilon_3^r - \xi^2}{\xi} G_{E_z}(\xi, \zeta) \right] F_{H_z}(\xi, \eta) - \right. \\ & \left. - \sum_n \left[\frac{\omega \mu \beta_{II} (\xi_{B,n}) (B_3^1(\xi_{B,n}) - 1)}{\xi_{B,n} (\xi - \xi_{B,n})} \frac{1}{[B_3^1(\xi)]'_{\xi=\xi_{B,n}}} G_{H_y}(\xi_{B,n}, \zeta) F_{H_z}(\xi_{B,n}, \eta) \right] \right\} d\xi + \\ & + \sum_n \left[\frac{\omega \mu \beta_{II} (\xi_{B,n}) (B_3^1(\xi_{B,n}) - 1)}{\xi_{B,n}} \frac{1}{[B_3^1(\xi)]'_{\xi=\xi_{B,n}}} \times \right. \\ & \left. \times G_{H_y}(\xi_{B,n}, \zeta) F_{H_z}(\xi_{B,n}, \eta) \left(\ln \left\{ \frac{C - \xi_{B,n}}{\xi_{B,n}} \right\} + \pi i \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_4(\zeta, \eta) = & \int_D^\infty \left[\frac{\omega \varepsilon_3 \alpha_{II} (A_3^1 - 1)}{\xi (A_3^1 + 1)} F_{E_y}(\xi, \zeta) + \frac{k^2 \varepsilon_3^r - \xi^2}{\xi} F_{E_z}(\xi, \zeta) \right] G_{E_z}(\xi, \eta) d\xi + \\
& + \int_0^D \left\{ \left[\frac{\omega \varepsilon_3 \alpha_{II} (A_3^1 - 1)}{\xi (A_3^1 + 1)} F_{E_y}(\xi, \zeta) + \frac{k^2 \varepsilon_3^r - \xi^2}{\xi} F_{E_z}(\xi, \zeta) \right] G_{E_z}(\xi, \eta) - \right. \\
& - \sum_n \left[\frac{\omega \varepsilon_3 \alpha_{II} (\xi_{A,n}) (A_3^1(\xi_{A,n}) - 1)}{\xi_{A,n} (\xi - \xi_{A,n})} \frac{1}{[A_3^1(\xi)]'_{\xi=\xi_{A,n}}} F_{E_y}(\xi_{A,n}, \zeta) G_{E_z}(\xi_{A,n}, \eta) \right] d\xi + \\
& + \sum_n \left[\frac{\omega \varepsilon_3 \alpha_{II} (\xi_{A,n}) (A_3^1(\xi_{A,n}) - 1)}{\xi_{A,n}} \frac{1}{[A_3^1(\xi)]'_{\xi=\xi_{A,n}}} \times \right. \\
& \left. \times F_{E_y}(\xi_{A,n}, \zeta) G_{E_z}(\xi_{A,n}, \eta) \left(\ln \left\{ \frac{C - \xi_{B,n}}{\xi_{B,n}} \right\} + \pi i \right) \right],
\end{aligned}$$

Де $\{\xi_{A,n}\}_n \subset (0, D)$, $\{\xi_{B,n}\}_n \subset (0, C)$. Для обчислення поля по формулах (3.13), контур інтегрування необхідно деформувати так, як показано на рис.3.2. Інтеграл по дузі окружності прагне до нуля при радіусі прагнучому до нескінченності в силу умов випромінювання, а інтеграл по інтервалу $(0; i \cdot \infty)$ дорівнює нулю в силу парності хвиль (i – уявна одиниця).

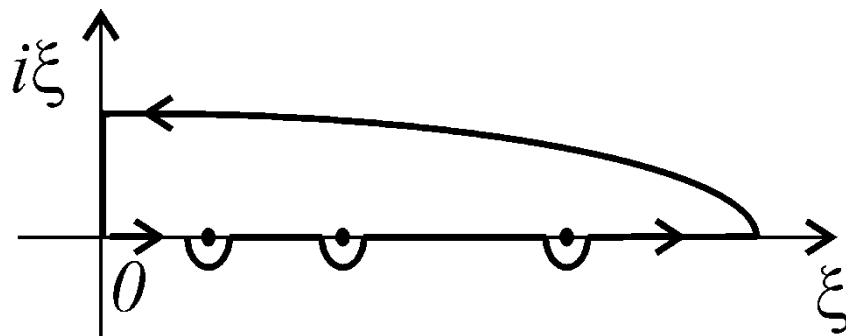


Рис. 3.2. Контур інтегрування

Помітимо, що при отриманні рівнянь (3.17), (3.18) ми виключили ті значення γ , при яких $F_{H_z}(\xi, \zeta_{1,p}) = 0$ або $G_{E_z}(\xi, \zeta_{2,p}) = 0$. Цим значенням γ

відповідають $\zeta_{1,p} = \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi n}{a}$ або $\zeta_{2,p} = \frac{\pi n}{a}$, $n = 0, 1, \dots$. У випадку якщо

$\zeta_{1,p} = \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi n}{a}$, те рівняння (3.15) слід множити на $F_{E_y}(\xi, \zeta_{1,p})$, а якщо

$\zeta_{2,p} = \frac{\pi n}{a}$, те рівняння (3.16) слід множити на $G_{H_y}(\xi, \zeta_{1,p})$.

Розділ 4

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Використовуючи розв'язки рівнянь (3.17), (3.18), побудовані дисперсійні криві та здійснене моделювання розподілу поля у інвертованому діелектричному хвилеводі.

На рис.4.1 представлені залежності постійної поширення γ власних хвиль прямокутного діелектричного хвилеводу ($\varepsilon_{r,3}=1$) від хвильового числа. Результати, отримані по формулах (3.17), (3.18), порівнюються з результатами, розрахованими по асимптотичним виразам (10а), (11а) з [10]. Збіг виявився досить гарним, що дозволяє судити про вірогідність побудованої математичної моделі, а відмінності в кривих, викликані погрішністю асимптотики в роботі [10], що виникає при малих значеннях

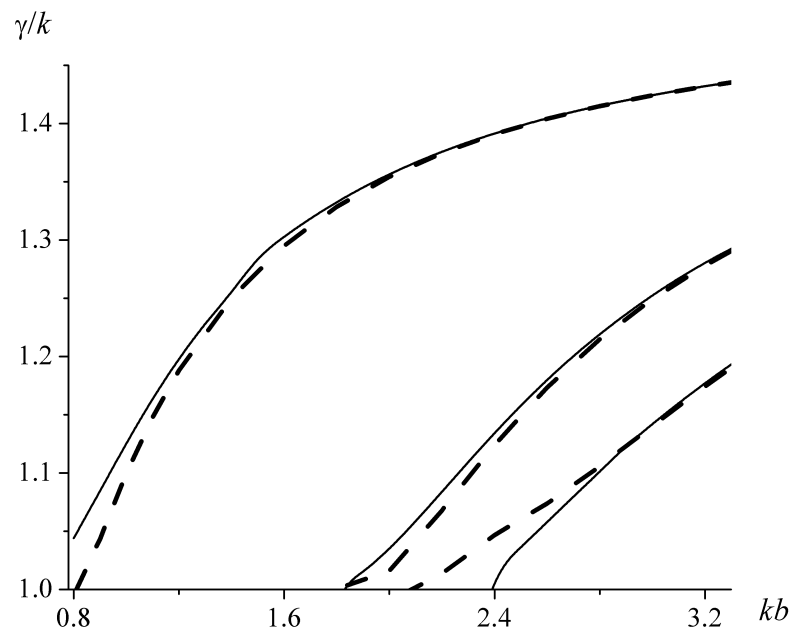


Рис. 3.1. Залежність постійної поширення γ від параметра kb при $a/b = 2$, $\varepsilon_{r,1} = 1$, $\varepsilon_{r,2} = 2,25$, $\varepsilon_{r,3} = 1$. Сплошні криві розраховані по (18), пунктирні – по (10а), (11а) из [10].

параметра kb .

На рис. 4.2 представлені залежності постійної поширення γ власних хвиль інвертованого діелектричного хвилеводу від хвильового числа для декількох перших хвиль при $\varepsilon_{r,2} = 9,6$, $\varepsilon_{r,3} = 2,25$. Як видно з рисунку, при такому виборі параметрів діелектрика в досліджуваному діапазоні частот виникають нижчі типи хвиль, що може утрудняти практичне застосування структури. Усі криві при збільшенні значення параметра kb прагнуть до деякого максимального значення $\gamma/k = 3$.

На рис. 4.3 представлені залежності постійної поширення γ власних хвиль оберненого діелектричного хвилеводу від хвильового числа у випадку

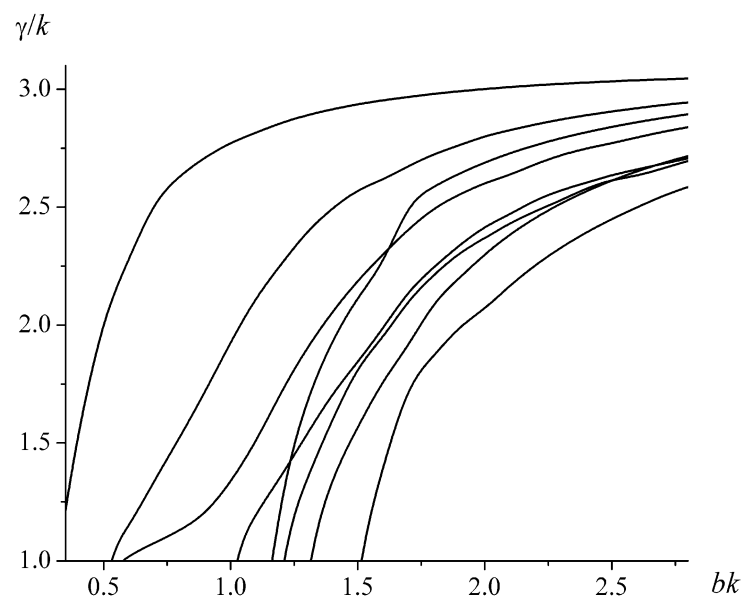
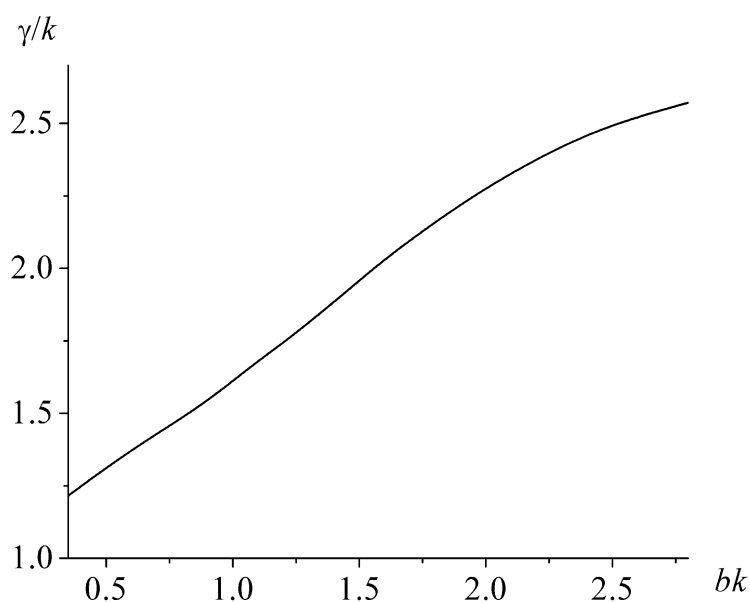
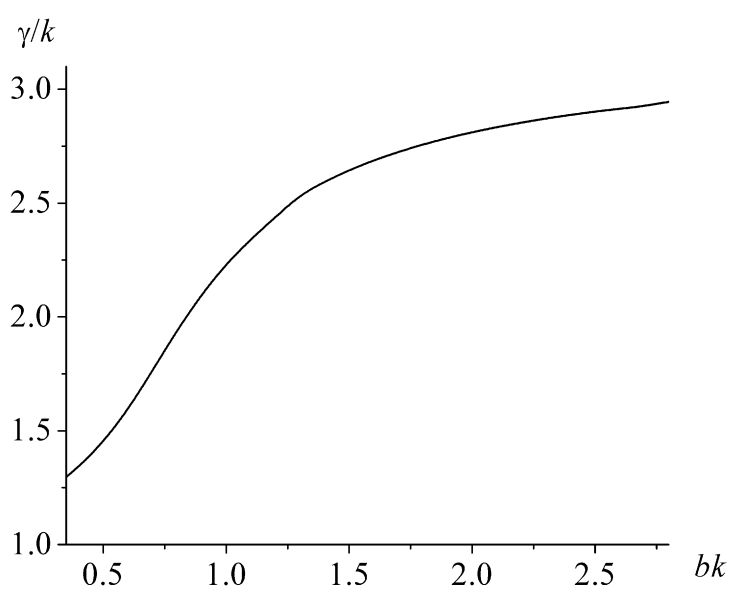


Рис. 4.2. Залежність постійної поширення γ від параметру kb при $a/b = 2$, $h/b = 3$, $\varepsilon_{r,1} = 1$, $\varepsilon_{r,2} = 9,6$, $\varepsilon_{r,3} = 2,25$. Випадок симетричних хвиль.

симетричних хвиль. Графіки побудовані для різних



a)



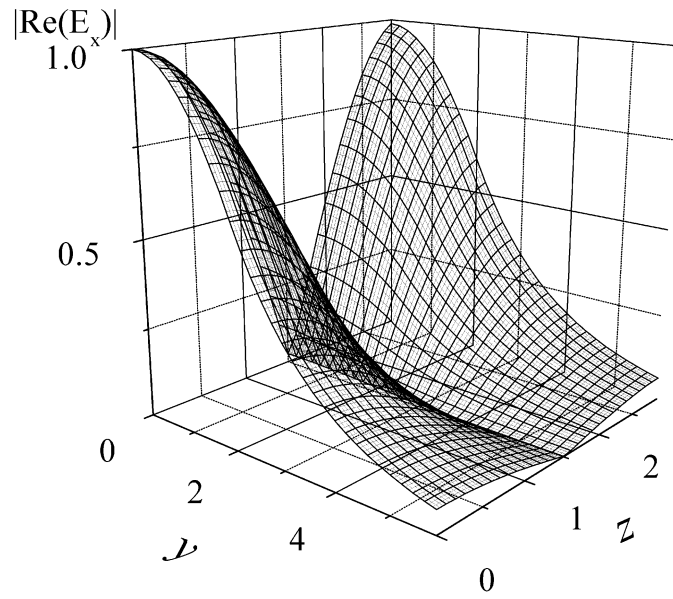
б)

Рис. 4.3. Зависимость постоянной распространения γ от параметра kb при $\varepsilon_{r,1}=1$, $\varepsilon_{r,2}=2,55$, $\varepsilon_{r,3}=9,6$.

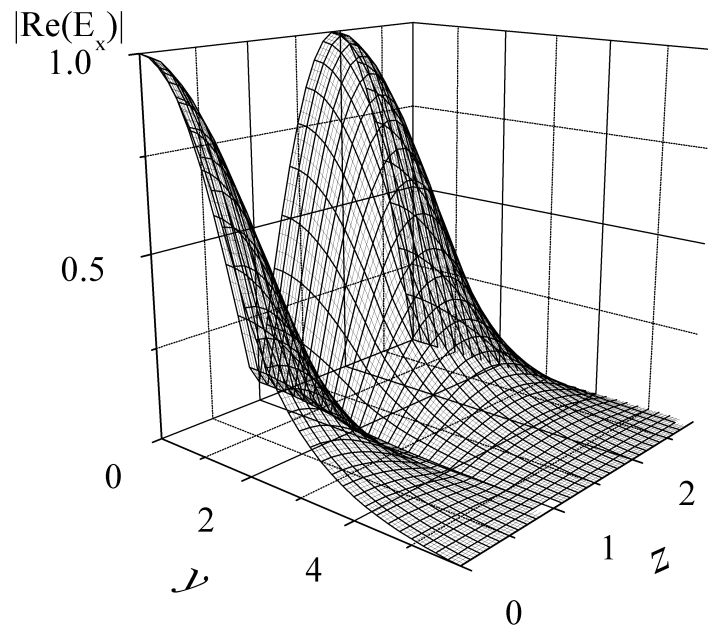
а) $a/b=1$; $h/b=1.5$; б) $h/b=1.5$; $h/b=3$.

значень параметра a/b при $\varepsilon_{r,2} = 2,25$, $\varepsilon_{r,3} = 9,6$. На відміну від випадку, представленого на рис.3.2, хвилевід працює в одномодовому режимі на всьому досліджуваному інтервалі зміни параметра kb .

На рис. 4.4 представлений модуль нормованого компонента E_x поля (розподіл поля) симетричної власної хвилі, що відповідає рис. 4.3 а), у площині $x = a/4$ для двох значень параметра k . При $kb = 1.2$, у прямокутному діелектричному хвилеводі не збуджується LM - хвиля, $A_5(\zeta) \equiv 0$. У такий спосіб власна хвиля є LE - хвилею. При $kb = 1.6$ $A_5(\zeta) \neq 0$, і може відбувається взаємне перетворення LM й LE хвиль. Однак, $|A_5(\zeta)| \ll |B_5(\zeta)|$, і власну хвилю також можна розглядати як квази LE -.



a)



б)

Рис. 4.4. Модуль нормованої компоненти E_x поля власної хвилі при $\varepsilon_{r,1}=1$, $\varepsilon_{r,2}=2,55$, $\varepsilon_{r,3}=9.6$, $a/b=1$; $h/b=1,5$.

ВИСНОВКИ

Таким чином, при виконанні кваліфікаційної роботи проведено:

- розгляд основних типів хвилеведучих структур діелектричного типу і їх властивостей;
- розгляд основних методів розв'язання граничних задач по визначенню спектра власних хвиль;
- розв'язано задачу про визначення постійних поширення власних хвиль інвертованого діелектричного хвилеводу шляхом зведення крайової задачі для рівняння Гельмгольца до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду;
- здійснене порівняння отриманих результатів з результатами, відомими з літературних джерел. Збіг чисельних результатів, отриманих описаним методом, з результатами, доступними з літератури, дозволяє судити про їхню вірогідність.

Моделювання властивостей такого роду структур дозволяє створювати функціональні елементи НВЧ діапазону з поліпшеними інтегральними характеристиками.

Література

1. Ponchak G. E., Dib N. I., Katehi L. P. B. Design and Analysis of Transitions from Rectangular Waveguide to Layered Ridge Dielectric Waveguide // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1996. – Vol. 44. – No. 7. – P. 1032-1040.
2. Itoh T., Hsu F.-J. Application of Inverted Strip Dielectric Waveguides for Measurement of the Dielectric Constant of Low-Loss Materials at Millimeter-Wave Frequencies// IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1979. – Vol. 27. – No. 10. – P. 841-844.
3. Bierwirth K., Schulz N., Arndt F. Finite-Difference Analysis of Rectangular Dielectric Waveguide Structures // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1986. – Vol. 34. – No. 11. – P. 1104-1114.
4. Katrich V. A., Maiboroda D. V., Pogarsky S. A., Pshenichnaya S. V., Sukhov V. N. Inverted strip dielectric waveguide with a metal plane // Abstracts of the 19th Crimean Conference ‘Microwave Engineering and Satellite Telecommunications Technologies’, Sevastopol. – 2009. – P. 515-516.
5. Gvozdev V. I., Nefedorov E. I. Volumetrische integrierte Schaltungen der Mikrowellenfrequenz – Elementbasis analoger und digitaler Funkgeräte. – Freiburg Wissenschaft, 1987. – 112 S.
6. Guo Y.-X., Chia M. Y. W., Chen Z. N. Miniature. Built-In Multiband Antennas for Mobile Handsets // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2004. – Vol. 52. – No. 8. – P. 1936-1944.
7. Hong W., Lin Y.-D. Single-Conductor Strip Leaky-Wave Antenna // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2004. – Vol. 52. – No. 7. – P. 1783-1789.
8. Rozzi T., Morini A., Gerini G. Analysis and Applications of “Microstrip-Loaded Inset Dielectric Waveguide” (Mig) // IEEE Transactions on

- Microwave Theory and Techniques. – 1992. – Vol. 40. – No. 2. – P. 272-278.
9. V.P. Shestopalov, Die Aufgabenmethode in der Theorie der Beugung und Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. Verlag der Universität Charkow 1971 – S. 10-13.
 10. Veselov G. I., Voronina G. G. Zur Berechnung eines offenen dielektrischen Wellenleiters mit rechteckigem Querschnitt // Izvestiya VUZov. Radiofizika. – 1971. – Band 14. – Nr. 2. – S. 1891-1901.
 10. R. Mittra. Analytical techniques in the theory of guided waves // N-Y: Macmillian, 1971, 325 p.
 11. Gandel Yu. V. Methode der paarweisen und singulären Integralgleichungen bei Beugungsproblemen auf begrenzten Gittern // Elektromagnetische Phänomene. – 1998. – Band 1. – Nr. 2. – S. 220–232.
 13. Yee K. S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Transactions on Antennas and Propagations. – 1966. – Vol. 14. – № 3. – P. 302-307.
 14. Peterson A. F., Ray S. L., Mittra R. Computational methods for electromagnetics. Institute of Electrical and Electronics Engineering, 1998. – 564 p.
 15. Gandel Yu. V., Eremenko S. V., Polyanskaya T. S. Mathematische Fragen der Methode der diskreten Ströme: Begründung der numerischen Methode der diskreten Eigenschaften der Lösung zweidimensionaler Probleme der Beugung elektromagnetischer Wellen. Teil 2 – Charkow: ChSU, 1992. – 145 S.
 16. Yegorov, Yu. V. Partially Filled Rectangular Waveguides. Springer, 1967. – 216 p.
 17. Litvinenko L. N., Prosvirnin S. L. Spectral scattering operators in wave diffraction problems on flat screens. – Kiev: Naukova Dumka, 1984. – pp. 226–228.

18. Wapne G.M., Glagolev B.S. Vielversprechende Übertragungsleitungen im EHF-Bereich. – Übersichten zur Elektronik. Serie 1. Mikrowellenelektronik. – 1986. – Ausgabe 11(1200). – S. 39–45.
19. Ryabov B.A. Untersuchung eines reflektierenden dielektrischen Wellenleiters für kleine Geräte und integrierte Schaltungen im Millimeterwellenbereich. - In: Entwurf von radioelektronischen Geräten/Arbeiten des MEI, 1978.- Ausgabe 360.- S. 39-44.
20. Knox R.M. Dielectric waveguide microwave integrated circuits. An Overview// IEEE Trans. MTT-24.- 1976.- No 9.- P.855-870.
21. Glagolev B.S., Lebed B.M. Untersuchung des Einflusses einiger konstruktiver Faktoren auf die Eigenschaften eines rechteckigen dielektrischen Wellenleiters // Abstracts der Allunionskonferenz „Probleme der integralen Elektronik SVCh“, 1984. – S. 176.
22. Crombach U. Wellentypen auf einzelnen und gekoppelten dielektrischen wellenleitern// Frequenz.- 1985.- B.39.- H.1-2.- S.26-33.
23. Yegorov, Yu. V. Partially Filled Rectangular Waveguides. Springer, 1967. – 216 p.
23. Sokolov G.E. Besonderheiten der Konvergenz der Teilbereichsmethode bei der Untersuchung der Wellenausbreitung in dielektrischen Wellenleitern // Izvestiya VUZov. Radiofizika. 1986. Nr. 6. S. 705–713.
24. Katsenelenbaum, B.Z. Theory of Irregular Waveguides with Slowly Changing Parameters. Springer Verlag, 1961. 216 pp.
25. Lerer A.M., Mikhalevsky V.S. Dispersion of electromagnetic waves in certain types of lines for microwave integrated circuits// Radio Engineering and Electronics.- 1981.- 26.- No. 3.- P. 470-475.
26. Pogarsky S.A. Diffraction of the intrinsic wave of an isolated mirror dielectric waveguide on a semi-infinite system of microstrip resonators // Radio Physics and Radio Astronomy. 1997. Vol. 2. No. 2. pp. 204–210.

29. Gassanov L.G., Zhitnyuk V.S., Malkov G.A. et al. Thin-film technology for integrated circuits in the millimetre wave range// Abstracts of reports from the All-Union Scientific Conference ‘Problems of Integrated Microwave Electronics’, 1984.- P.173.
30. Gelsthorpe R.V., Williams N., Dawey N.M. Dielectric waveguide: a low-cost technology for millimeter wave integrated circuits// The Radio and Electronic Engineer.- 1982.- Vol.52.- No 11/12.- P.522-528.
31. Toullos P.P., Knox R.M. Rectangular Dielectric Image Lines for Millimeter Integrated Circuits// Western Electronics Show and Convention, Los Angeles, USA.- 1970.- Vol.14.-P.1-10.
32. Shindo S., Itanami Low-loss Rectangular Dielectric Image Lines for Millimeter Wave Integrated Circuits// IEEE Trans. MTT-26.- 1978.- No 10.-P.747-750.
33. Katrich V.A., Pogarsky S.A., Saprykin I.I. et al. Radiating system based on an isolated mirror dielectric waveguide. / Abstracts of the report at the ‘9th International Crimean Conference KryMiKo – 2001’, 2001.-Volume 1.- P. 213-214.
34. Takashi A., Satoshi N., Junji Y. Numerical analysis of a tapered dielectric-rod antenna using the body-of-revolution FDTD method. The Proceedings of AMPC-2002 Conference, Kyoto, Japan, 2002. – P. 125-128.
35. K. Sakakibara, T. Watanabe, K. Sato, K., Nishikawa and K. Seo. Millimeter Wave Slotted Waveguide Array Antenna Manufactured by Metal Injection Molding for Automotive Radar Systems, Systems, IEICE Trans. Commun., 2001, Vol. E84-B, No. 9, pp. 2369-2376.

ДОДАТОК

Программа, реализующая описанный метод

В данном разделе представлены ключевые элементы программного кода, реализованного на языке C++.

```
void TfmMain::Gauss(void)
{
    int i,i1,j,k,num,NumOfElGauss=NumOfElG;
    complex <long double> max,d;
    long double MaxDif;
    /* LabelGauss->Visible = true;
    LabelGauss->Repaint();*/
    for (i = 0;i<= NumOfElGauss-1;i++){
        max = fA[i][i];
        num = i;
        for(j=i;j<=NumOfElGauss-1;j++){
            if (abs(max) < abs(fA[j][i])) { // нах. максимума
                max = fA[j][i];
                num = j;
            }
        }
        for (j = 0;j<= NumOfElGauss-1;j++){ // замена строк
            d = fA[i][j];
            fA[i][j] = fA[num][j];
            fA[num][j] = d;
            fA[i][j] = fA[i][j] / max;
        }
        d = B[i];
        B[i] = B[num];
        B[num] = d;
        B[i] = B[i] / max;
        for (j = 0;j<= NumOfElGauss-1;j++){ //вычитание
            if (j != i){
                d = fA[j][i];
                for (k = i;k<=NumOfElGauss-1;k++)
                    fA[j][k] = fA[j][k] - fA[i][k]*d;
                B[j] = B[j] - B[i]*d;
            }
        }
    }
    /* CGauge1->Progress = CGauge1->Progress+1;
    CGauge1->Repaint();

    LabelGauss->Visible = false;*/
}
```

```
complex <long double> TfmMain::K(int l,int k,long double t1,long double t2)
```

```
{
    complex <long double> res,res1,res2,res3,res4,res5, two =2;
    k=k-1;
    l=l-1;
    if (l==k){
        res = R(Phi(l,t1),Phi(k,t2))*(AB[1][l]-AB[0][l])/two;
    }
    else{
        res =(R(Phi(l,t1),Phi(k,t2))+1./(Phi(k,t2)-Phi(l,t1)))*(AB[1][l]-AB[0][l])/two;
    }
    return res;
}
```

```
long double TfmMain::Phi(int k, long double t)
```

```
{
    long double res;
    res=((AB[1][k]-AB[0][k])*t+AB[1][k]+AB[0][k])/2.;
    return res;
}
```

```
complex <long double> TfmMain::Func(long double x)
```

```
{
    complex <long double> res, PI = M_PI, two = 2,G,I(0,1);
    res=0;
    if (q2E>=0){
        if (1-coefXlM[(int)q2E]*coefXlM[(int)q2E]/KappaE/KappaE/aE/aE>=0)
            G=sqrtl(1-coefXlM[(int)q2E]*coefXlM[(int)q2E]/KappaE/KappaE/aE/aE);
        else G=I*sqrtl(coefXlM[(int)q2E]*coefXlM[(int)q2E]/KappaE/KappaE/aE/aE-1);
        res=-coefXlM[(int)q2E]/two/aE*BesselJ(0,coefXlM[(int)q2E])*exp(I*Kappa1E*x*G);
    }
    if (q1E>=0){
        if (1-coefXlP[(int)q1E]*coefXlP[(int)q1E]/KappaE/KappaE>=0)
            G=sqrtl(1-coefXlP[(int)q1E]*coefXlP[(int)q1E]/KappaE/KappaE);
        else G=I*sqrtl(coefXlP[(int)q1E]*coefXlP[(int)q1E]/KappaE/KappaE-1);
        res=res+coefXlP[(int)q1E]/two*GFunc(0,1,coefXlP[(int)q1E],aE)*exp(I*Kappa1E*x*G);
    }
    return res;
}
```

```
complex <long double> TfmMain::IntSinInf(long double x, long double a, long double pogrSin,
long double pogr)
```

```
{
    complex <long double> RC,I1C,I2C,S1C,S1PC,res=0,SUM,IC,I(0,1);
    long double PI=M_PI,buf,two=2;
    int l,q;
    long double R,I1,I2,I1r,I2r,Rr,S1,S1P, b,a1,b1,G;
    long double h,NumOfN2C,PhiBuf;
    int i,n;
    if (a<1){
        SUM = 0; // Вычитание особенностей
```

```

for (l = 1; l<= NumOfXlM; l++){
  lC = l;
  G=sqrtl(1-coefXlM[l-1]*coefXlM[l-1]/KappaE/KappaE/aE/aE);
  if (G>Mms/Kappa1E/x){
    SUM = SUM + DCoef[l]*sinl(Kappa1E*G*x)/G*(logl((Mms-G)/(G-a))+PI*I);
  }
}
for (l = 1; l<= NumOfXlP; l++){
  G=sqrtl(1-coefXlP[l-1]*coefXlP[l-1]/KappaE/KappaE);
  lC = l;
  if (G>Mms/Kappa1E/x){
    SUM = SUM + BCoef[l]*sinl(Kappa1E*G*x)/G*(logl((Mms-G)/(G-a))+PI*I);
  }
}
b=(Mms);

NumOfN2=5;
NumOfN2C=NumOfN2;
I1r=0;I2r=0;
for(q=1;q<=NumOfN2;q++){
  for(l=1;l<=NumOfLej1;l++){
    PhiBuf=PhiOp(q,l,a,b);
    I2r=I2r+
    (b-a)/two/NumOfN2C*LejC[l]*SinEC(PhiBuf,x);
  }
}
Rr=pogr1*10;
do{
  I1r=I2r;
  I2r=0;
  if (fabs(Rr/pogr1)>1e2) NumOfN2=NumOfN2*4; else NumOfN2=NumOfN2*2;
  NumOfN2C=NumOfN2;
  for(q=1;q<=NumOfN2;q++){
    for(l=1;l<=NumOfLej1;l++){
      PhiBuf=PhiOp(q,l,a,b);
      I2r=I2r+
      (b-a)/two/NumOfN2C*LejC[l]*SinEC(PhiBuf,x);
    }
  } Rr=I2r-I1r;
}while(fabs(Rr)>pogr1/2.);

a=Mms;
res=I2r+Rr+SUM;
}
else a=(Mms);

b=SinInterval;
h = (b-a)/2;
S1 = SinE((a+b)/2.,x);
I1 = h/3.*(SinE(a,x)+SinE(b,x)+4.*S1);
h = h/2.;
S1P = (SinE(a+h,x)+SinE(a+3*h,x));

```

```

I2 = 0.5*I1+h/3.*(-2*S1+4*S1P);

R = 1./15.*(I2-I1);
n = 8;
while (fabs(R)>pogr){
    I1 = I2;
    S1 = S1P;
    h = h/2.;
    S1P = 0;
    for (i=1; i<=n/2;i++)
        S1P = S1P + SinE(a+(2*i-1)*h, x);
    I2 = 1/2.*I1+h/3.*(-2*S1+4*S1P);
    n = n*2;
    R = (I2-I1)/15.;
}
return res+I2+R;
}

```