ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

О НАКЛОНАХ ПОДПРОСТРАНСТВ И СУЩЕСТВОВАНИИ ОРТОГОНАЛЬНОГО БАЗИСА В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

В. И. Гурарий

§ 1. Пусть P_1 и P_2 — подпространства вещественного банахова пространства B. Назовем наклоном P_1 к P_2 величину

$$(\widehat{P_1, P_2}) = \inf_{f_1 \in P_1,\ f_2 \in P_2,\ \|f_1\|=1} \| f_1 - f_2 \| ;$$

если при этом $(\widehat{P_1, P_2}) = 1$, то будем говорить, что P_1 ортогонально P_2.

Важность этого понятия видна из следующей переформулировки известного признака базиса М. М. Гринблюма [1].

Теорема 1. *Для того, чтобы полная в B последовательность $\{l_i\}$ $i = 1, 2, \ldots$ была базисом в B, необходимо и достаточно, чтобы наклоны любых двух подпространств, являющихся линейными оболочками $l_1, l_2, \ldots, l_n$ и $l_{n+1}, \ldots l_{n+m}$, были ограничены снизу некоторым $\delta > 0$, не зависящим от n и m.*

Точную верхнюю грань таких δ М. М. Гринблюм назвал [1] индексом последовательности $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$ и поставил задачу изучения индексов базисов в различных банаховых пространствах. Если индекс $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$ равен 1, то эта последовательность называется ортогональной ([2] и [3]).

М. З. Соломяк [3] доказал существование трехмерных пространств Банаха, не имеющих ортогонального базиса.

В этой работе применяется геометрический метод изучения наклонов подпространств банахова пространства. Из получаемых результатов вытекает существование пространств Банаха произвольной конечной размерности $n > 2$, не имеющих ортогонального базиса.

§ 2. Мы будем пользоваться следующей терминологией и обозначениями:

1. T^B — открытый единичный шар в B, то есть множество элементов f, $\| f \| < 1$, S^B — единичная сфера в B, то есть множество элементов $\| f \| = 1$. Кроме того, для любого множества $F \subset B : S_B^F = F \cap S^B$.

2. Плоскостью $h + P$ в B будем называть множество элементов $\{h + f\}$, где h — фиксированный элемент B, а f — пробегает подпространство $P \subset B$; если P — одномерное пространство $\{\tau f\}$ $f \in B$; $-\infty < \tau < \infty$, то будем называть $h + P$ прямой в B и обозначать $h + \{\tau f\}$. Если P — ортогональное дополнение в гильбертовом пространстве H к элементу $h \in H$, то будем обозначать гиперплоскость $h + P$ через P^h, а множество элементов $\{g + \tau h\}$, где g пробегает P, а τ — интервал $(-1, 1)$, будем называть *гиперслоем* и обозначать T^h. Очевидно, T^h — открытое множество с границей $P^{\pm h}$.

3. Пусть множество M элементов B принадлежит множеству граничных точек некоторого открытого множества $T \subset B$. Будем называть *цилиндрическим множеством* и обозначать C_M^f совокупность элементов $\{g + \tau f\}$, где g пробегает M, τ — интервал $(-\infty, \infty)$, а f — фиксирован-

ный элемент B. Если при этом C_M^f не имеет общих элементов с T, то будем называть его опорным к T.

4. Систему элементов $f_1, f_2, \ldots, f_N$ будем называть *n-независимой*, $n \leqslant N$, если любые n элементов этой системы линейно независимы.

5. Совокупность m-мерных плоскостей $R_1, \ldots, R_N$ в n-мерном эвклидовом пространстве E^n $(m < n)$ будем называть *тотальной* *, если для любого $(n-m)$-мерного подпространства $Q \subset E^n$ найдется хотя бы одно R_i, пересечение которого с Q состоит не более чем из одного элемента. Очевидно, если совокупность подпространств $P_1, P_2, \ldots, P_N$ тотальна, то совокупность плоскостей $h_1 + P_1, h_2 + P_2, \ldots, h_N + P_N$ для любой совокупности элементов $h_1, h_2, \ldots, h_N$ также тотальна.

§ 3. Нетрудно устанавливается следующий геометрический критерий ортогональности подпространств.

Теорема 2. *Для того чтобы подпространство $F_1 \subset B$ было ортогонально подпространству $F_2 \subset B$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $f_2 \in F_2$ цилиндрическое множество $C_{S_B^{F_1}}^{f_2}$ было опорным к T^B.*

Доказательство необходимости. Пусть F_1 ортогонально к F_2, тогда для любых $g \in S_B^{F_1}$ и $f \in F_2$:

$$\| g + \tau f \| \geqslant \| g \| = 1$$

при всех $\tau \in (-\infty, \infty)$; поэтому каждая образующая $g + \{\tau f\}$ цилиндрической поверхности $C_{S_B^{F_1}}^{f}$ не имеет с T^B ни одного общего элемента.

Доказательство достаточности получается проведением тех же рассуждений в обратном порядке.

Для теоремы, которая приводится ниже, нам понадобится лемма, доказательство которой можно получить с помощью элементарных средств теории определителей. Обозначим $\{f^{\varepsilon}\}$ ε-окрестность элемента f в n-мерном эвклидовом пространстве E^n, и $D(f_1, \ldots, f_m)$ — ортогональное дополнение в E^n к линейной оболочке элементов $f_1, \ldots, f_m$.

Лемма. *Для совокупности элементов $\{f_i\}_{i=1}^N$, $N \geqslant 2n(n-1)$ n-мерного эвклидова пространства E^n $(n > 2)$ и данного $\varepsilon > 0$ найдется совокупность $\{f_i'\}$, $f_i' \in \{f_i^{\varepsilon}\}$ $i = 1, 2, \ldots, N$, удовлетворяющая условиям:*

1. Система $f_1', f_2', \ldots, f_N'$ n-независима.

2. Система любых $n(n-1)$ подпространств

$$D(f'_{p_1}, f'_{q_1}),\ D(f'_{p_2}, f'_{q_2}),\ \ldots,\ D(f'_{p_{n(n-1)}}, f'_{q_{n(n-1)}}),$$

$(p_1, p_2, \ldots, p_{n(n-1)}, q_1, q_2, \ldots, q_{n(n-1)}$ — $2n(n-1)$ попарно различных индексов, выбранных из чисел $1, 2, \ldots, N)$ тотальна.

Теорема 3. *Существуют банаховы пространства произвольной конечной размерности $n > 2$, в которых для любых двух подпространств P и Q, где P отлично от одномерного пространства, имеет место соотношение $(\widehat{P, Q}) < 1$.*

Доказательство. Для $\delta = 1/8n^3$ рассмотрим на единичной сфере S^{E^n} n-мерного эвклидова пространства E^n δ-сеть $\{f_i\}_{i=1}^N$, $N > 2n(n-1)$.

По лемме найдется система элементов $\{h_i\}$, $\|h_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$, такая, что $h_i \in \{f_i^{\delta/2}\}$ и выполнены условия:

I. Система $\{h_i\}$ n-независима.

* Обычно этот термин употребляется для других объектов: совокупностей линейных функционалов.

II. Любая система из $n(n-1)$ $(n-2)$-мерных плоскостей

$$\{P^{(\pm)hp_k} \cap P^{(\pm)hq_k}\}$$

$(p_1, p_2, \ldots, p_{n(n-1)}, q_1, q_2, \ldots, q_{n(n-1)}$ — $2n(n-1)$ — попарно различных индексов, выбранных из чисел $1, 2, \ldots, N$) тотальна (символ $(\pm)$ означает, что нужно взять один из этих двух знаков).

Из совокупности гиперслоев $\{T^{h_i}\}$ образуем тело $T^{\{h_i\}} = \bigcap_{i=1}^{N} T^{h_i}$ и обозначим множество его граничных точек $S^{\{h_i\}}$. Так как $\|h_i\| = 1$, то $T^{\{h_i\}}$ содержит внутри себя единичный шар $\|f\| < 1$. Поскольку элементы $\{h_i\}$ образуют 2δ-сеть на S^{E^n}, то, как нетрудно показать, $T^{\{h_i\}}$ лежит внутри шара $\|f\| < (1-4\delta^2)^{-1/2}$; таким образом, если $s \in S^{\{h_i\}}$, то

$$1 \leqslant \|s\| < (1-4\delta^2)^{-1/2}. \tag{1}$$

Любой элемент $s \in S^{\{h_i\}}$ принадлежит по крайней мере одному из $P^{(\pm)h_i}$. С помощью (1) устанавливаем, что если $s_1 \in S^{\{h_i\}}$, $s_2 \in S^{\{h_i\}}$, $s_1 \in P^{h_l}$, $S_2 \in P^{h_l}$ (или $s_1 \in P^{-h_l}$, $s_2 \in P^{-h_l}$), то

$$\|s_1 - s_2\| < 6\delta. \tag{2}$$

Если в E^n ввести новую норму, приняв $T^{\{h_i\}}$ за единичный шар, то новое пространство $E^{\{h_i\}}$ в силу выпуклости, центральной симметрии $T^{\{h_i\}}$, и соотношения (1) есть n-мерное пространство Банаха.

Пусть P — двумерное подпространство в $E^{\{h_i\}}$. Его единичная сфера есть выпуклый многоугольник $S^P_{E^{\{h_i\}}} = P \cap S^{\{h_i\}}$, объемлющий на основании (1) единичный (по эвклидовой норме) круг.

Из (1), (2) и условия II вытекает существование по крайней мере n элементов $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \ldots, \tilde{s}_n$, $\tilde{s}_k \in S^P_{E^{\{h_i\}}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, таких, что $\tilde{s}_k \in P^{(\pm)h_j}$ лишь при одном значении $j = j_k$ индекса j, причём все индексы j_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ различны.

Предположим теперь, что существует подпространство $Q \subset E^{\{h_i\}}$, к которому P ортогонально по новой норме, то есть $(\widehat{P, Q}) = 1$. Тогда для произвольного элемента $f \in Q$, $f \neq \theta$ цилиндрическое множество $C^f_{S^P}$ будет опорным к $T^{\{h_i\}}$. В силу n-независимости $\{h_i\}_{i=1}^N$ система n элементов $\{h_{j_k}\}_{k=1}^n$ полна в E^n. Поэтому найдется $h_{j_{k_0}}$, для которого $(h_{j_{k_0}}, f) \neq 0$ $(1 \leqslant k_0 \leqslant n)$.

Но тогда прямая $\tilde{s}_{k_0} + \{\tau f\}$ имеет общие элементы с $T^{h_{j_{k_0}}}$ и, следовательно, с $T^{\{h_i\}}$, а это противоречит тому, что $C^f_{S^P_{E^{\{h_i\}}}}$ опорно к $T^{\{h_i\}}$.

Таким образом, для любого двумерного подпространства $P \subset E^{\{h_i\}}$ и любого подпространства $Q \subset E^{\{h_i\}}$ имеем $(\widehat{P, Q}) < 1$. Отсюда легко следует, что для любого подпространства $R \subset E^{\{h_i\}}$, размерность которого больше двух, имеем $(\widehat{R, Q}) < 1$. Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 сразу вытекает следующее обобщение упомянутого результата М. З. Соломяка.

Теорема 4. *Существуют банаховы пространства B^n произвольной конечной размерности $n > 2$, в которых никакое подпространство размерности больше двух (в частности само B^n) не имеет ортогонального базиса.*

В ряде работ ([4], [5]) и др.) применялось понятие минимального угла между подпространствами $R_1 \subset B$ и $R_2 \subset B$, определяемого как наименьшая из величин: $\arcsin(\widehat{R_1, R_2})$ и $\arcsin(\widehat{R_2, R_1})$. Из теоремы 3 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Существуют банаховы пространства произвольной конечной размерности $n > 2$, в которых минимальные углы между любыми двумя подпространствами, отличными от одномерных, меньше $\frac{\pi}{2}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Гринблюм. Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа (B) «Докл. АН СССР», **31**, № 5, 428—432 (1941).
2. R. S. James. A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. Proceedings, N. A. S., **37**, 174—177 (1951).
3. М. З. Соломяк. Об ортогональном базисе в пространстве Банаха. «Вестн. Ленинградск. ун-та, серия матем., механики, астрономии», 1957, № 1, стр. 27—36.
4. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Д. П. Мильман. О дефектных числах линейных операторов в B и о некоторых геометрических вопросах. «Сб. трудов ин-та Матем. АН УССР», № 11 (1948), стр. 97—112.
5. И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус. Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства. «Усп. матем. наук», **14**, вып. 5, 135—140 (1959).