

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики імені академіка І.М. Ліфшиця

«Допущено до захисту»
Зав. кафедри теоретичної
фізики
імені академіка І. М. Ліфшиця
проф. Рашба Г. І.
_____ 2024 р.

Оцінка « _____ »

Голова ЕК

_____ 2024 р.

Безсмольна Дарина Юріївна

**Методи алгебраїчної геометрії
у теорії гравітаційних лінз.**

Кваліфікаційна робота на здобуття
освітнього ступеня «Бакалавр»
за спеціальністю 104 – «Фізика та Астрономія»
освітньо-професійна програма «Фізика»

(підпис студента)

Науковий керівник: доцент кафедри
теоретичної фізики імені академіка
І. М. Ліфшиця, к.ф.-м.н., Котвицький А.Т.

(підпис керівника)

Рецензент: професор кафедри
астрономії та космічної інформатики,
доктор фіз.-мат. наук, Баннікова О. Ю.

(підпис рецензента)

Харків - 2024

АНОТАЦІЯ

Безсмольна Д.Ю. Методи алгебраїчної геометрії у теорії гравітаційних лінз.

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня «Бакалавр» за спеціальністю 104 – «Фізика та Астрономія». Харків: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2024.-63 с. - Табл.1. Іл. 40.

Дипломна робота присвячена аналізу методів алгебраїчної геометрії в контексті теорії гравітаційного линзування. Дослідження охоплює N -точкові гравітаційні лінзи, а саме одноточкову та бінарну одноплощинні лінзи. Для детального виведення кута відхилення світлових променів у гравітаційному полі використовується метрика Шварцшильда.

Був зроблений акцент на детальному теоретичному поясненні та виведенні різноманітних формул, які кількісно описують складні взаємодії світлових променів із гравітаційними полями масивних космічних об'єктів. Зокрема, робота містить виведення рівнянь для N -точкової одноплощинної гравітаційної лінзи у координатному, векторному та безрозмірному вигляді.

У цьому дослідженні проведено аналіз побудови зображень колових та еліптичних джерел у одноточковій та бінарній лінзах за допомогою аналітичного методу виключення. Цей метод алгебраїчної геометрії дозволяє точніше відтворювати розміри та вивчати координати розташування астрономічних об'єктів, що важливо для вимірювання їхніх характеристик, таких як яскравість і маса. Для порівняння з аналітичним методом, також наведені теоретичні аспекти числового методу трасування.

За допомогою програми *Wolfram Mathematica*, у якості прикладу, розглянуто алгоритм побудови зображень у випадку довільного розташування центру джерела у одноточковій та бінарній лінзах, що дає можливість порівняти ефективність та точність обох методів.

Ключові слова: гравітаційні лінзи, N -точкова гравітаційна лінза, метод трасування, методи алгебраїчної геометрії, метод виключення, матриця Сільвестра, результат, колове джерело, еліптичне джерело.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 Гравітаційні лінзи	5
1.1 Історія спостереження та теоретичного опису гравітаційних лінз	5
1.2 Рівняння Ейнштейна	6
1.2.1 Історія створення	6
1.2.2 Виведення рівняння Ейнштейна з принципу найменшої дії	7
1.3 Кут відхилення променя світла в полі Шварцшильда	13
1.3.1 Загальний випадок	13
1.3.2 Наближення слабкого поля в метриці Шварцшильда	16
1.4 Одноточкова гравітаційна лінза	18
1.4.1 Рівняння одноточнової гравітаційної лінзи	18
1.4.2 Рівняння гравітаційної лінзи у безрозмірних змінних	20
1.4.3 Рівняння гравітаційної лінзи у векторному вигляді	21
1.5 N -точкова гравітаційна лінза	23
1.5.1 Рівняння N -точкової одноплощинної гравітаційної лінзи	23
1.5.2 Визначення критичної кривої та каустики	27
2 Методи побудови зображень джерел світлових променів у гравітаційних лінзах	28
2.1 Метод трасування	29
2.2 Метод виключення	34
2.2.1 Загальна характеристика теорії виключення	35
2.2.2 Раціональна параметризація	39
2.2.3 Випадок одноточнової лінзи	41
2.2.4 Випадок бінарної лінзи	46
3 Побудова зображення еліптичного джерела у одноточковій гравітаційній лінзі	52
ВИСНОВКИ	57
ДОДАТКИ	58
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	63

ВСТУП

Метою дипломної роботи є поглиблене вивчення гравітаційних лінз; удосконалення методу алгебраїчної геометрії, а саме методу виключення; побудова зображення еліптичного джерела у одноточковій гравітаційній лінзі.

Для досягнення поставленої в роботі мети були поставлені такі *завдання дослідження*:

- теоретичний опис N -точкових гравітаційних лінз;
- розгляд та порівняння методу трасування та методу виключення;
- побудова зображення колового та еліптичного джерела методом виключення у випадку одноточкової та бінарної лінзи.

Об'єктом дослідження є одноточкова та бінарна гравітаційна лінза.

Предметом дослідження є математичні методи і теоретичні моделі, що використовуються для опису та аналізу гравітаційного мікролінзування, зокрема, методи трасування та виключення, а також їх застосування для побудови зображень джерел у гравітаційних лінзах.

Достовірність результатів дослідження забезпечується використанням математичних методів, що підтверджені попередніми дослідженнями, а також порівнянням отриманих результатів з даними спостережень і чисельними експериментами.

У чому ж полягає *важливість нашого дослідження*?

За останні десятиліття гравітаційні лінзи із теоретичних об'єктів перетворилися на реальний астрофізичний інструмент та окрему область астрофізики - гравітаційне лінзування. Коли гравітаційне поле масивного об'єкта викривляє простір навколо себе, спостерігається відхилення траєкторії променів світла, що проходять поруч, і це відхилення може призвести до формування кільцеподібного зображення випромінювання далеких галактик, до посилення зображення фонового джерела, або до появи кратних зображень у площині спостерігача.

Кут заломлення променів залежить від маси лінзи, і кратні зображення можуть спостерігатися лише тоді, коли гравітаційними лінзами є галактики. У тому випадку, коли зірки є лінзами, кратні зображення не будуть спостерігатися, оскільки тоді між зображеннями буде занадто малий кут, а отже відбудеться їх злиття в єдину криву.

Одним з головних аспектів дослідження гравітаційних лінз можна вважати їх використання для вимірювання маси та розподілу матерії у космічному просторі. Це важливо для розуміння формування галактик, казарів та великих кластерів. Наприклад, за допомогою гравітаційних лінз можна визначити розподіл темної матерії, яка не випромінює світло, але впливає на рух і викривлення світла у космосі.

Дослідження гравітаційних лінз також має важливе значення для визначення космологічних параметрів, таких як поширення Всесвіту та склад його енергетичного вмісту. Це дозволяє встановити параметри темної енергії, яка вважається відповідальною за прискорення розширення Всесвіту.

У сучасних дослідженнях гравітаційних лінз широко використовуються телескопи, які спроможні проводити спостереження у різних діапазонах довжин хвиль електромагнітного випромінювання, враховуючи оптичний, інфрачервоний, радіо- та мікрохвильовий діапазони. Великі сучасні обсерваторії, такі як Hubble Space Telescope, Chandra X-ray Observatory, та Atacama Large Millimeter Array (ALMA), використовуються для знаходження та спостереження гравітаційних лінз. Вони забезпечують великий обсяг числових даних для аналізу утворених гравітаційними лінзами зображень різних астрономічних джерел світла.

Отже, комп'ютерне моделювання побудови зображення довільного еліптичного джерела методом виключення дозволить точніше відновлювати реальні розміри та розташування різних астрономічних об'єктів, а також розуміти їх важливі, базові характеристики: яскравість, спектральний склад, маса, вік, температура, швидкість руху та інші параметри. Це дозволяє глибше досліджувати та розуміти природу космічних об'єктів, їх взаємодію та еволюцію, що в свою чергу сприяє розвитку астрофізичних теорій та наукових парадигм.

Розділ 1

Гравітаційні лінзи

1.1 Історія спостереження та теоретичного опису гравітаційних лінз

Найпершою відомою згадкою про відхилення світла масивними об'єктами є перше риторичне запитання, що міститься в виданні "Оптика" Ньютона 1704 року [1] на с. 132: "Чи не діють тіла на світло на відстані і чи не викривляють його промені своєю дією; і чи не є ця дія найсильнішою на найменшій відстані?"

У 1783 році британський астроном Джон Мічелл припустив, що якщо напівдіаметр сфери тієї ж щільності, що й Сонце, перевищував би діаметр Сонця у 500 разів, то тіло, що падає з безмежної висоти, досягло б на поверхні більшої швидкості, ніж світло. Таким чином, світло, яке притягується до такого тіла, не могло б його покинути через його власну гравітацію. Джон Мічелл також припустив, що такі "чорні" тіла можна було б виявити, спостерігаючи за зірками, наближеними до них. На основі думок Джона Мічелла, як записав у своїй оглядовій статті Елліс Р.С. [2], англійський фізик Генрі Кавендіш близько 1784 року розрахував відхилення світла тілом, використовуючи корпускулярну теорію світла і закон гравітації, сформульований Ісааком Ньютоном.

У 1796 році, незалежно від Генрі Кавендіша, французький математик П'єр Сімон Лаплас теоретично обчислив, що сила тяжіння небесного тіла може бути настільки великою, що світло не зможе його покинути.

Вперше у 1801 році німецький астроном Йохан Георг фон Зольднер подав на публікацію статтю про відхилення променя світла в гравітаційному полі зірки на кут α , в якій було виведено наступну формулу:

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2 R},$$

де R - радіус зірки, M - її маса, G - гравітаційна стала, а c - швидкість світла.

Таким чином, було закладено фундамент теоретичного формалізму впливу гравітації на світлові промені. Приблизно у 1912 році, працюючи над елементами загальної теорії відносності, до визначального формулювання загальної теорії відносності, фізик Альберт Ейнштейн записав у своєму зошиті стислий опис одного з найважливіших наслідків відхилення світла - можливості існування гравітаційної лінзи. Така лінза складається з маси M , яка відхиляє світло від далекого джерела світла S таким чином, що світло досягає спостерігача O двома різними шляхами. Як наслідок, O побачить два різних зображення S . Виведення Ейнштейном відхилення світла в гравітаційному полі Сонця і узгодження кількісного передбачення цього відхилення, заснованого на його загальній теорії відносності, і експериментальних даних, які були отримані в експедиції по спостереженням за сонячними затемненнями під керівництвом Артура Стенлі Еддінгтона, є одним з найвідоміших епізодів в історії загальної теорії відносності. Дослідники стали свідками того, що Сонце викривляє світло фонових зірок на величину, передбачену Ейнштейном.

У 1936 році чеський інженер-електрик Руді В. Мандл висунув ідею про те, що зірка діє як гравітаційна лінза. Відповідні записи він надав Альберту Ейнштейну і просив опублікувати статтю про гравітаційне лінзування. Після довгих суперечок врешті-решт стаття Ейнштейна [3] зі згадуванням відповідних ідей Мандла була опублікована в журналі «Science», 1936 року.

Таким чином, у цій невеликій статті були вперше представлені формули оптичних властивостей гравітаційних лінз, а сама стаття викликала жвавий інтерес і стала стартовою зачіпкою довіри до концепції гравітаційного лінзування і її подальшого розвитку.

В 1979 році Денніс Уолш, Роберт Ф. Карсвелл і Рей Вейман спостерігали подвійний квазар Twin Quasar, або QSO 0957+561, (див. Рис.1.1), розташований на відстані 1 мегапарсека від Землі. Але ця система виявилася подвійни зображенням одного і того ж далекого квазара, створене масивною галактикою YGKOW G1, яка і стала першою в історії спостережуваною гравітаційною лінзою. Оpubлікована у цьому ж році стаття [4] містить деталі їхніх спостережень та вимірювань спектру випромінювання квазару.

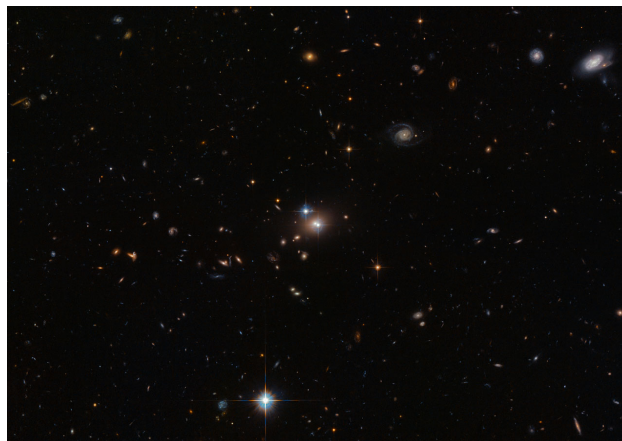


Рис. 1.1: Знімок подвійного квазару QSO 0957+561 з телескопа Хаббла, опублікований на офіційному сайті ESA/Hubble & NASA [5]

Отже, саме з цього моменту гравітаційні лінзи з теорій на аркуші паперу перетворилися на реальні астрофізичні інструменти.

У 2017 році за допомогою штучного інтелекту астрономи зареєстрували 56 кандидатів у гравітаційні лінзи. А на початку 2021 року ця цифра вже сягала 1200 різних об'єктів.

У сучасному світі гравітаційне лінзування є достатньо активною галуззю астрофізичних досліджень. Після ідентифікації великої кількості різних лінзових систем (від мікролінз до макрогалактичних лінз), гравітаційне лінзування все частіше використовується для спостережень, які розширюють розуміння як космологічних питань (наприклад, якісні та кількісні оцінки параметрів Великого вибуху, параметрів співвідношення світла та темної матерії), так і питань, пов'язаних з геометрією галактик, кластерів, квазарів та їх різноманітних скупчень, що дозволяє знайти якомога точніші відстані до цих об'єктів.

1.2 Рівняння Ейнштейна

1.2.1 Історія створення

У 1913 році Альберт Ейнштейн сформулював основні принципи релятивістської теорії гравітації, які нині відомі як загальна теорія відносності (ЗТВ). При цьому Ейнштейн уявляв рівняння гравітаційного поля у вигляді:

$$D_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}), \quad (1.1)$$

де κ - постійна, $D_{\mu\nu}$ - коваріатний тензор другого рангу, утворений із похідних фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$.

Ейнштейн гадав, що це рівняння має задовольняти обов'язкової для релятивістської теорії гравітації вимозі, а саме: тензори енергії-імпульсу гравітаційного поля і звичайної баріонної матерії є джерелом гравітаційного поля. Але вже восени 1915 року А. Ейнштейну вдалося наблизитися до розв'язання поставленої задачі. Одно-

значно відмовившись від закону збереження енергії-імпульсу, вчений пропонує коваріантне рівняння гравітаційного поля для порожнього простору:

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (1.2)$$

де $R_{\mu\nu}$ - тензор Річчі.

Через деякий час за допомогою рівняння (1.2) Ейнштейну вдається знайти правильне значення повороту перигелію Меркурія. Цей результат показав, що врахування малої густини енергії гравітаційного поля не суттєве. І взимку, у наступній статті, німецький фізик записує сучасне рівняння, назване згодом на честь нього рівнянням Ейнштейна, у вигляді:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \quad (1.3)$$

У порожньому просторі рівняння (1.3) переходить у рівняння (1.2). При цьому закон збереження енергії матерії і поля для замкнутих систем забезпечує введення псевдотензора $t_{\mu\nu}$. Для порівняння, у виразі (1.1) закон збереження впливає безпосередньо з рівняння.

Закон збереження звичайної баріонної речовини та гравітаційного поля не впливає із рівняння Ейнштейна, а забезпечується введенням у теорію псевдотензора гравітаційного поля, елементи якого асоціювалися із густинами енергії-імпульсу і напруженнями гравітаційного поля. Однозначний доказ закону збереження енергії-імпульсу існує тільки для замкнених систем. Отже, теорія гравітації є незакінченою через відсутність повного закону збереження, який, очевидно, впливає з рівняння поля.

1.2.2 Виведення рівняння Ейнштейна з принципу найменшої дії

Виведення рівнянь Ейнштейна з принципу найменшої дії було розроблено Давидом Гільбертом. У 1915 році, майже одночасно з Альбертом Ейнштейном, Гільберт представив свій підхід до виведення рівнянь загальної теорії відносності, базуючись на варіаційному принципі. Він сформулював еквівалентну теорію за допомогою лагранжіана, що включав кривизну простору-часу, згодом виведена дія стала відомою як дія Гільберта-Ейнштейна.

У цьому пункті ми розглянемо більш детально виведення рівняння Ейнштейна, яке було зроблено у Ландау й Ліфшиця [6] на сторінках 273-275, отже згадаємо, що повна дія складається із суми дії для гравітаційного поля S_g та дії для матерії S_m . Відомо, що варіація дії дорівнює нулю:

$$\delta(S_g + S_m) = 0. \quad (1.4)$$

Гільберт використовував концепцію, у якій дія для гравітаційного поля є інтегралом скалярної кривизни R по всьому простору-часу. Цей інтеграл має вигляд:

$$S = \int R \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.5)$$

де R — скалярна кривизна (скаляр Річчі), g — детермінант метричного тензора $g_{\mu\nu}$, а d^4x — елемент чотиривимірного об'єму.

Отже, розглянемо варіацію виразу:

$$\int R \sqrt{-g} d^4x = \int g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.6)$$

За визначенням тензор Річчі дорівнює:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^k}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^p \Gamma_{pk}^k - \Gamma_{\mu k}^p \Gamma_{p\nu}^k, \quad (1.7)$$

де $\Gamma_{\mu\nu}^k, \Gamma_{\mu k}^k, \Gamma_{\mu\nu}^p, \Gamma_{pk}^k, \Gamma_{\mu k}^p, \Gamma_{p\nu}^k$ - коефіцієнти зв'язності або символи Крістоффеля.

Підставимо останній вираз у формулу (1.6):

$$\int \sqrt{-g} d^4x \left[g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}}{\partial x^{\tau}} - g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\tau}^{\tau}}{\partial x^{\nu}} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\rho}^{\rho} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\tau}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\tau} \right]. \quad (1.8)$$

Вносимо множник $\sqrt{-g}$ у квадратні дужки:

$$\int d^4x \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}}{\partial x^{\tau}} - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\tau}^{\tau}}{\partial x^{\nu}} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\rho}^{\rho} - \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\tau}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\tau} \right]. \quad (1.9)$$

Перший $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}}{\partial x^{\tau}}$ та другий $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\tau}^{\tau}}{\partial x^{\nu}}$ доданки можна отримати після знаходження частинних похідних $\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}$ та $\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$ відповідно від виразів $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}$, $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\tau}^{\tau}$:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\tau}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}) = g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}}{\partial x^{\tau}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^{\tau}}; \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\tau}^{\tau}) = \Gamma_{\mu\tau}^{\tau} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^{\nu}} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\tau}^{\tau}}{\partial x^{\nu}}. \quad (1.11)$$

Тоді ми можемо переписати інтеграл (1.8) у вигляді:

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \left[\frac{\partial}{\partial x^{\tau}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^{\tau}} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\tau}^{\tau}) + \Gamma_{\mu\tau}^{\tau} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^{\nu}} + \right. \\ \left. + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\tau}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\tau}) \right]. \quad (1.12) \end{aligned}$$

У записаній формулі (1.12) перший та третій доданок є дивергенціями та при інтегруванні за чотири-об'ємом переходять у інтеграли за замкненою три-поверхнею, які не мають внесоку за варіації дії, тому ними можна знехтувати.

Отже, інтеграл (1.12) буде еквівалентним записаному нижче інтегралу:

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \left[\Gamma_{\mu\tau}^{\tau} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^{\tau}} + \right. \\ \left. + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\tau}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\tau}) \right]. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Другий множник в другому доданку у останній формулі (1.13), розглянемо детальніше:

$$\frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^{\tau}} = g^{\mu\nu} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\tau}} + \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\tau}}. \quad (1.14)$$

Вводимо наступний символ Крістоффеля:

$$\Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\tau}} \quad (1.15)$$

із представленого виразу витікає, що

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\tau}} = \sqrt{-g} \Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma}. \quad (1.16)$$

Враховуючи формулу (1.16) вираз (1.14) буде виглядати таким чином:

$$\frac{\partial (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^{\tau}} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma} + \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\tau}}. \quad (1.17)$$

Із курсу тензорного аналізу ми знаємо, що коваріантна похідна від метричного тензора дорівнює нулю. Запишемо цю властивість:

$$g^{\mu\nu}{}_{;\tau} = g^{\mu\nu}{}_{,\tau} + \Gamma_{\sigma\tau}^{\mu} g^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} g^{\mu\sigma} = 0, \quad (1.18)$$

тоді

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\tau}} = -\Gamma_{\sigma\tau}^{\mu} g^{\sigma\nu} - \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} g^{\mu\sigma}. \quad (1.19)$$

Підставимо отриману частинну похідну від метричного тензору $g^{\mu\nu}$ у вираз(1.17):

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})}{\partial x^{\tau}} = \sqrt{-g} (\Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma} g^{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\tau}^{\mu} g^{\sigma\nu} - \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} g^{\mu\sigma}). \quad (1.20)$$

Розглянемо другий множник першого доданку у формулі (1.13). Враховуючи вигляд щойно отриманого виразу (1.20), його можна записати так:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})}{\partial x^{\nu}} = \sqrt{-g} \left(\Gamma_{\nu\sigma}^{\sigma} g^{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} g^{\sigma\nu} - \underbrace{\Gamma_{\sigma\nu}^{\nu} g^{\mu\sigma}}_{\sigma \rightleftharpoons \nu} \right), \quad (1.21)$$

замінюючи у останньому доданку індекси $\sigma \rightleftharpoons \nu$ можна побачити, що перший та третій доданки взаємознищуються.

Отримаємо,

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})}{\partial x^{\nu}} = -\sqrt{-g} \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} g^{\sigma\nu}. \quad (1.22)$$

Тепер підставимо знайдені формули (1.20) та (1.22) у інтеграл (1.13):

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[-\Gamma_{\mu\tau}^{\tau} \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} g^{\sigma\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} (\Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma} g^{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\tau}^{\mu} g^{\sigma\nu} - \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} g^{\mu\sigma}) + \right. \\ \left. + g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\tau}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\tau}) \right]. \quad (1.23)$$

Розкриємо дужки та проведемо відповідну переіндексацію:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[-\underbrace{\Gamma_{\mu\tau}^{\tau} \Gamma_{\sigma\nu}^{\mu} g^{\sigma\nu}}_{\mu \rightleftharpoons \sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma} g^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\sigma\tau}^{\mu} g^{\sigma\nu} + \underbrace{\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} g^{\mu\sigma}}_{\mu \rightleftharpoons \nu} + \right. \\ \left. + g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\rho}^{\rho} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\tau}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\tau} \right]. \quad (1.24)$$

Отже,

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[-\Gamma_{\sigma\tau}^{\tau} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} g^{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma} g^{\mu\nu} + \underline{\underline{\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\sigma\tau}^{\mu} g^{\sigma\nu}}} + \underline{\underline{\Gamma_{\nu\mu}^{\tau} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} g^{\mu\sigma}}} + \right. \\ \left. + g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\rho}^{\rho} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\tau}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\tau} \right]. \quad (1.25)$$

Отримаємо дві пари тотожних між собою доданків (вони підкреслені однією чи двома рисками у формулі (1.25)). Спростуємо вираз, здійснюючи зведення подібних, а також робимо заміну індексів:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[-2\Gamma_{\sigma\tau}^{\tau} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} g^{\mu\nu} + 2\underbrace{\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\sigma\tau}^{\mu} g^{\sigma\nu}}_{\mu \rightleftharpoons \sigma} + \underbrace{g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\rho}^{\rho}}_{\rho \rightarrow \sigma} - \underbrace{g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\tau}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\tau}}_{\rho \rightarrow \sigma} \right], \quad (1.26)$$

тоді,

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[-2\Gamma_{\sigma\tau}^{\tau} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} g^{\mu\nu} + 2\Gamma_{\sigma\nu}^{\tau} \Gamma_{\mu\tau}^{\sigma} g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} \Gamma_{\tau\sigma}^{\sigma} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\tau}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\tau} \right]. \quad (1.27)$$

Зробимо заміну індексів $\tau \rightleftharpoons \sigma$ у першому доданку:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[-2 \Gamma_{\tau\sigma}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\tau g^{\mu\nu} + 2 \Gamma_{\sigma\nu}^\tau \Gamma_{\mu\tau}^\sigma g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\tau \Gamma_{\tau\sigma}^\sigma - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\tau}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\tau \right]. \quad (1.28)$$

Знову підкреслюємо тотожні доданки у формулі (1.28), зводимо подібні та отримаємо:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x g^{\mu\nu} \left[\Gamma_{\sigma\nu}^\tau \Gamma_{\mu\tau}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\tau \Gamma_{\tau\sigma}^\sigma \right]. \quad (1.29)$$

Таким чином, маємо:

$$\int R \sqrt{-g} d^4x = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[\Gamma_{\sigma\nu}^\tau \Gamma_{\mu\tau}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\tau \Gamma_{\tau\sigma}^\sigma \right]. \quad (1.30)$$

Запишемо попередній вираз інакше:

$$\int R \sqrt{-g} d^4x = \int \sqrt{-g} d^4x \tilde{M} + \text{surface terms}, \quad (1.31)$$

де \tilde{M} - функція, яка складається з перших похідних від $g_{\mu\nu}$, а *surface terms* - поверхневі доданки.

Треба також враховувати, що похідні другого порядку переходять у поверхневі доданки та при варьованні ці члени зникають, так як ми вважаємо, що на границях поля задані, тобто фіксовані.

Перехід у формулі (1.31) базується на застосуванні узагальненої теореми Стокса, що дозволяє перетворювати інтеграли від диференціальних форм на відповідні поверхневі інтеграли,

Рівняння руху у нашому випадку мають похідні другого порядку. Тобто можна записати, що:

$$\delta \int R \sqrt{-g} d^4x = \delta \int \tilde{M} \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.32)$$

Розглянемо наступну варіацію:

$$\begin{aligned} \delta \int R \sqrt{-g} d^4x &= \delta \int R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \\ &= \int d^4x (R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Окремо варіація $\delta \sqrt{-g}$ дорівнює:

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta(-g) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g. \quad (1.34)$$

Враховуючи властивість метричного тензора

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}, \quad (1.35)$$

можна записати:

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (1.36)$$

Відомо, що $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$, тоді

$$\delta (g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) = \delta (g_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.37)$$

Враховуючи останню формулу (1.37) перепишемо (1.36) у вигляді:

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.38)$$

Підставимо отриманий вираз (1.38) у (1.34) та маємо:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{g}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.39)$$

Результат перетворення (1.39) треба знову підставити у підінтегральний вираз (1.33) та переписати наступним чином:

$$\begin{aligned} & \int d^4x (R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + R \delta \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu}) = \\ & = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Розрахуємо значення $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ у формулі (1.40). Згадаємо, що в локально-інерціальній системі відліку $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = 0$, $g_{,\rho}^{\mu\nu} = 0$ при цьому похідні від символів Крістоффеля не дорівнюють нулю, тоді тензор Річчі має вигляд:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}}{\partial x^{\tau}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\tau}^{\nu}}{\partial x^{\nu}}. \quad (1.41)$$

Звідси знаходимо:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\tau})}{\partial x^{\tau}} - \frac{\partial(\delta\Gamma_{\mu\tau}^{\nu})}{\partial x^{\nu}} \right] = g^{\mu\nu} \frac{\partial(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\tau})}{\partial x^{\tau}} - \underbrace{g^{\mu\nu} \frac{\partial(\delta\Gamma_{\mu\tau}^{\nu})}{\partial x^{\nu}}}_{\nu \Rightarrow \tau}. \quad (1.42)$$

Замінімо німі індекси $\nu \Rightarrow \tau$ та внесемо $g^{\mu\nu}$ під дію диференціального оператора. Отже, маємо

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\tau}} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} - g^{\mu\tau} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) = \frac{\partial B^{\tau}}{\partial x^{\tau}}, \quad (1.43)$$

де

$$B^{\tau} = g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} - g^{\mu\tau} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}. \quad (1.44)$$

Як ми знаємо, різниця зв'язностей - це тензор, а тому варіація $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}$ також буде тензором. Звідки робимо висновок, що B^{τ} - вектор. Отже, у локально-інерціальній системі відліку:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial B^{\tau}}{\partial x^{\tau}} = B^{\tau}_{;\tau}. \quad (1.45)$$

Вираз зліва є тензором у будь-якій системі відліку, тому і вираз праворуч повинен бути тензорним у будь-якому випадку. Тому, в довільній системі відліку справедливим є вираз:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = B^{\tau}_{;\tau}, \quad (1.46)$$

де замість частинної похідної (випадок локально-інерціальної системи відліку), була записана коваріантна похідна.

Але тоді маємо, що

$$\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x = \int B^{\tau}_{;\tau} \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.47)$$

Замінімо коваріантну дивергенцію на частинну та отримаємо для (1.47) наступний вираз:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (B^{\tau} \sqrt{-g})}{\partial x^{\tau}} \sqrt{-g} d^4x = \int \frac{\partial (B^{\tau} \sqrt{-g})}{\partial x^{\tau}} d^4x = 0, \quad (1.48)$$

де було враховано, що інтегрування за 4-об'ємом від 4-дивергенції може бути зведено до інтегрування за замкненою 3-поверхнею, яка охоплює 4-об'єм повністю, тобто знаходиться на нескінченості, де, за визначенням, всі поля відсутні.

Тоді у формулі для варіації

$$\delta \int R\sqrt{-g}d^4x \quad (1.49)$$

зникає доданок

$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x, \quad (1.50)$$

у результаті

$$\delta \int R\sqrt{-g}d^4x = \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (1.51)$$

Запишемо визначення гравітаційної дії:

$$S_g = \alpha \int R\sqrt{-g}d^4x, \quad (1.52)$$

де α - незмінна величина.

Варіація дії (1.52) дорівнює:

$$\delta S_g = \alpha \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (1.53)$$

Тепер запишемо визначення для дії матерії:

$$S_m = \frac{1}{c} \int L\sqrt{-g}d^4x, \quad (1.54)$$

де L – густина функції Лагранжа.

Варіація дії матерії:

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}d^4x. \quad (1.55)$$

На початку цього підрозділу вже було згадано, що повна дія дорівнює сумі гравітаційної дії та дії для матерії:

$$S_{total} = S_g + S_m, \quad (1.56)$$

тоді варіація повної дії дорівнює:

$$\delta S_{total} = \int \left[\alpha R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\alpha Rg_{\mu\nu} + \frac{1}{2c}T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}d^4x \quad (1.57)$$

або

$$\delta S_{total} = \alpha \int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha c}T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}d^4x. \quad (1.58)$$

Ми шукаємо рівняння поля відносно $g_{\mu\nu}$, тому $\delta g_{\mu\nu}$ вважаємо довільним. У результаті рівняння мають вигляд:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\alpha c}T_{\mu\nu}. \quad (1.59)$$

Константу α можна знайти, розглядаючи границю слабких полів та невеликих швидкостей ($v \ll c$), за яких рівняння загальної теорії відносності збігалися б з рівняннями Ньютона для гравітаційного поля:

$$-\frac{1}{2c\alpha} = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (1.60)$$

відповідно $\alpha = -\frac{c^3}{16\pi G}$.

Підставляючи константу α у (1.59), знаходимо рівняння Ейнштейна для гравітаційного поля:

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}}_{G_{\mu\nu}} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.61)$$

де $G_{\mu\nu}$ - тензор Ейнштейна.

Остаточо,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.62)$$

Аналізуючи отримане рівняння Ейнштейна, легко побачити, що воно встановлює зв'язок між геометричними властивостями простору-часу, матерією та її рухом. Ліва частина рівняння, в загальному вигляді представлена тензором Ейнштейна $G_{\mu\nu}$: він описує геометрію простору-часу. Права частина рівняння, представлена тензором енергії-імпульсу, описує розподіл матерії та енергії.

Сутність рівняння (1.62) можна виразити так: простір-час задає параметри руху матерії, а матерія спричинює викривлення простору-часу.

Також одним із ключових аспектів рівнянь Ейнштейна є їхня нелінійність щодо компонент метричного тензора. Ця нелінійність викликає значні труднощі при спробах квантування рівнянь гравітаційного поля.

1.3 Кут відхилення променя світла в полі Шварцшильда

1.3.1 Загальний випадок

У загальній теорії відносності силою гравітаційної взаємодії є кривизна 4-вимірного простору-часу. Рух у гравітаційному полі є рухом у викривленому неевклідовому просторі. Згідно з *"Математичною теорією чорних дір"* Субраманьяна Чандрасекара [7], варіюванням наступного лагранжіана

$$L = \frac{mc^2}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}, \quad (1.63)$$

може бути отримане рівняння геодезичної лінії. Саме рух по геодезичній описує рух пробної частинки в гравітаційному полі та є аналогом руху за інерцією в евклідовому просторі, а тому із цього рівняння може бути виведений кути відхилення променя світла. Але у нашому випадку, зручніше використовувати лагранжів формалізм.

Афінним параметром вздовж геодезичної оберемо інтервал s , що дорівнює:

$$s = c\tau, \quad (1.64)$$

де τ - власний час.

Як ми вже знаємо, у лютому 1916 року була опублікована друга стаття Карла Шварцшильда з першим точним розв'язком рівняння Ейнштейна - метрикою Шварцшильда. Ця метрика описує найпростіший випадок: статичне гравітаційне поле, яке створюється у вакуумі нерухомим сферично симетричним тілом з масою M . У цій статті також вперше був введений у явному вигляді гравітаційний (шварцшильдівський) радіус r_g . Йому відповідає значення критичного радіуса тіла, який дорівнює:

$$r_g = \frac{2MG}{c^2}. \quad (1.65)$$

де M - маса тіла, G - гравітаційна стала та c - швидкість світла.

В сильному полі тяжіння, коли радіус тіла наближається до гравітаційного радіусу r_g , поблизу тіла спостерігаються істотні ефекти загальної теорії відносності, а саме: сповільнення часу та викривлення простору.

Запишемо сферично-симетричний інтервал для метрики Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{(dx^1)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (dx^2)^2 - r^2 \sin^2\vartheta (dx^3)^2, \quad (1.66)$$

де $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$, t - координатний час.

Отже,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) d(ct)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (1.67)$$

Для подальших розрахунків нам буде зручно ввести наступні функції: $A(r) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$ та $B(r) = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}$,

тоді

$$ds^2 = A(r)d(ct)^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (1.68)$$

Враховуючи компоненти метричного тензора

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (1.69)$$

перепишемо формулу (1.63) в такому вигляді:

$$\frac{2L}{mc^2} = g_{00} \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} + g_{11} \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^1}{ds} + g_{22} \frac{dx^2}{ds} \frac{dx^2}{ds} + g_{33} \frac{dx^3}{ds} \frac{dx^3}{ds}, \quad (1.70)$$

а тому:

$$\frac{2L}{mc^2} = A(r) \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 - B(r) \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2. \quad (1.71)$$

Так як x^0 і φ циклічні координати (вони відсутні у лагранжіані), будуть зберігатися відповідні узагальнені імпульси:

$$P_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = mc^2 A(r) \dot{x}^0 = const_1, \quad (1.72)$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -mc^2 r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi} = const_2, \quad (1.73)$$

де крапка означає похідну за інтервалом s , тобто $\frac{dx^0}{ds} = \dot{x}^0$. Розглядаючи у радіальній площині $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, введемо наступні позначення:

$$E \equiv mc^2 A(r) \dot{x}^0, \quad (1.74)$$

$$c \cdot J \equiv mc^2 r^2 \frac{d\varphi}{ds}, \quad (1.75)$$

де E , J - енергія та момент імпульсу відповідно.

Введемо також відповідні їм безрозмірну енергію $\varepsilon = \frac{E}{mc^2}$ та момент імпульсу $j = \frac{J}{mc}$ з розмірністю $[j] = \text{довжина}$. Тобто $\varepsilon = A(r) \dot{x}^0$ і $j = r^2 \frac{d\varphi}{ds}$.

Для ізотропних геодезичних виконується така рівність: $u^\mu u_\mu = 0$, відповідно, $2L = 0$, отже:

$$A(r) \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 - B(r) \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0. \quad (1.76)$$

Враховуючи введені константи маємо:

$$\frac{\varepsilon^2}{A(r)} - B(r) \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{j^2}{r^2} = 0. \quad (1.77)$$

Так як

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{j}{r^2}, \quad (1.78)$$

отримаємо:

$$\frac{\varepsilon^2}{A(r)} - B(r) \frac{j^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - \frac{j^2}{r^2} = 0, \quad (1.79)$$

введемо нову змінну $b = \frac{j}{\varepsilon}$, вона є прицільним параметром. Перепишемо останнє рівняння наступним чином:

$$\frac{1}{A(r)} - B(r) \frac{b^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - \frac{b^2}{r^2} = 0, \quad (1.80)$$

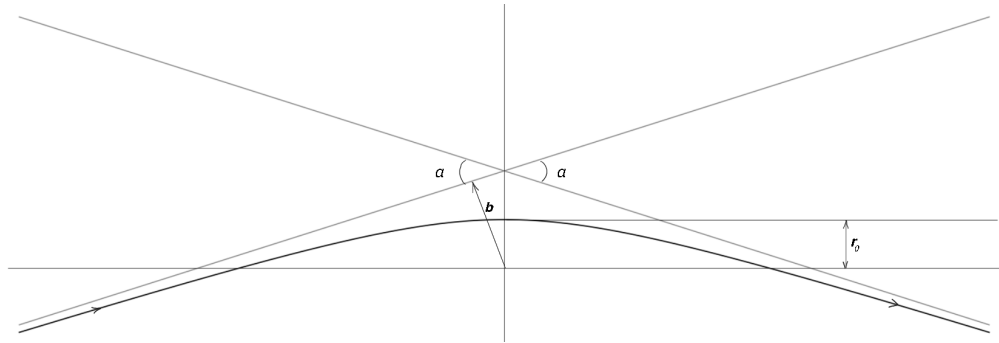


Рис. 1.2: Викривлення траєкторії променя світла

Отже,

$$1 - A(r) \frac{b^2}{r^2} = A(r) B(r) \frac{b^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \quad (1.81)$$

Поділимо обидві частини останнього рівняння на $A(r) B(r) \frac{b^2}{r^4}$, тоді зліва запишемо квадрат похідної:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{r^4}{A(r) B(r) b^2} \left(1 - A(r) \frac{b^2}{r^2} \right), \quad (1.82)$$

У точці $r = r_0$ промінь світла наближається на мінімальну відстань до центру тяжіння (Рис. 1.2), тоді похідна $\frac{dr_0}{d\varphi}$ від сталої r_0 дорівнюватиме 0.

Отримаємо:

$$\frac{r^4}{A(r) B(r) b^2} \left(1 - A(r) \frac{b^2}{r^2} \right) = 0. \quad (1.83)$$

Прирівнюємо другий множник до 0:

$$A(r_0) \frac{b^2}{r_0^2} = 1. \quad (1.84)$$

Згадаємо, що для поля Шварцшильда функція $A(r)$ має такий вигляд:

$$A(r) = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad (1.85)$$

та залежність прицільного параметра b від мінімальної відстані r_0 має вигляд:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r_0} \right) \frac{b^2}{r_0^2} = 1. \quad (1.86)$$

Для прицільного параметру b маємо такий вираз:

$$b^2 = \frac{r_0^2}{1 - \frac{r_g}{r_0}}. \quad (1.87)$$

Очевидно, якщо $r_g \rightarrow 0$, то, відповідно, $b \rightarrow r_0$. Із формули (1.83) знаходимо:

$$d\varphi = \pm \frac{b\sqrt{A(r)B(r)}}{r^2\sqrt{1 - A(r) \cdot \frac{b^2}{r^2}}} dr. \quad (1.88)$$

Під час руху променя із нескінченості до точки $r = r_0$ та відповідному вибору позитивного напрямку повороту кута радіус-вектор променя повернеться на кут:

$$\varphi(r_0) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{b\sqrt{A(r)B(r)}}{r^2\sqrt{1 - A(r) \cdot \frac{b^2}{r^2}}} dr. \quad (1.89)$$

Вводимо нову змінну $u = b\sqrt{\frac{A(r)}{r}}$, тоді при $r = r_0$ змінна $u = 1$, а при $r \rightarrow \infty$, u наближатиметься до 0. Отримаємо для кута відхилення:

$$\varphi(r_0) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\sqrt{A(r)B(r)}}{\sqrt{1 - A(r) \cdot \frac{b^2}{r^2}}} d\left(-\frac{b}{r}\right) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\sqrt{A(r)B(r)}}{\sqrt{1 - A(r) \cdot \frac{b^2}{r^2}}} d\left(\frac{b}{r}\right), \quad (1.90)$$

тому

$$\varphi(r_0) = \int_0^1 \frac{\sqrt{A \cdot B}}{\sqrt{1 - u^2}} d\left(\frac{u}{\sqrt{A}}\right) \quad (1.91)$$

1.3.2 Наближення слабкого поля в метриці Шварцшильда

Для звичайних небесних тіл масою M та радіусом R виконується умова $r_g \ll r$, де $R \leq r < \infty$. Її називають наближенням слабкого поля, адже саме за такої умови поля тяжіння є ньютонівськими.

Пригадаємо, що у полі Шварцшильда функції $A(r)$ та $B(r)$ дорівнюють:

$$A(r) = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad B(r) = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad (1.92)$$

отже, маємо $\sqrt{A \cdot B} = 1$.

Враховуючи те, що доданок $\frac{r_g}{r} \ll 1$, можемо скористатися формулою Маклорена для розкладання елементарної функції $B(r)$ з точністю до першого порядку по r .

В загальному випадку розкладання бінома у біноміальний ряд виглядає таким чином:

$$(1 + q)^p = 1 + pq + \frac{p(p-1)}{2!}q^2 + \dots + \frac{p(p-1) \cdot \dots \cdot (p-n+1)}{n!}q^n + \dots, \quad (1.93)$$

де $|q| \leq 1$.

Якщо підставимо в останню формулу значення $p = -1$, отримаємо для $B(r)$ таке наближення:

$$B(r) = \left(1 + \left(-\frac{r_g}{r}\right)\right)^{-1} \approx 1 - 1 \cdot \left(-\frac{r_g}{r}\right) = 1 + \frac{r_g}{r}. \quad (1.94)$$

Перетворимо формулу (1.91), а саме запишемо наближене значення для виразу під диференціалом:

$$d\left(\frac{u}{\sqrt{A}}\right) = d\left(\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}\right), \quad (1.95)$$

у формулу Маклорена (1.93) підставимо $p = \frac{1}{2}$, тоді знаменник виглядатиме таким чином:

$$\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \approx \frac{u}{1 - \frac{r_g}{2r}}, \quad (1.96)$$

де $r = \frac{b\sqrt{A(r)}}{u}$, а тому можна продовжити перетворення формули (1.95):

$$d\left(\frac{u}{1 - \frac{r_g u}{2b\sqrt{A}}}\right) = d\left(\frac{u}{1 - \frac{r_g u}{2b}}\right) \approx d\left[u\left(1 + \frac{r_g u}{2b}\right)\right] = \quad (1.97)$$

$$= d\left[u + \frac{r_g u^2}{2b}\right] = du + \frac{r_g u}{b} du = \left(1 + \frac{r_g u}{b}\right) du, \quad (1.98)$$

отже,

$$d\left(\frac{u}{\sqrt{A}}\right) = \left(1 + \frac{r_g u}{b}\right) du. \quad (1.99)$$

Формулу шуканого кута відхилення (1.91) у наближенні слабкого поля, враховуючи вище зроблені перетворення можна записати так:

$$\begin{aligned} \varphi(r_0) &= \int_0^1 \frac{d(u/\sqrt{A})}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^1 \left(1 + \frac{r_g u}{b}\right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{r_g}{2b} \int_0^1 \frac{d(1-u^2)}{\sqrt{1-u^2}} = \\ &= \arcsin u \Big|_0^1 - \frac{r_g}{2b} \frac{(1-u^2)^{1/2}}{1/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{r_g}{b}. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Для того, щоб знайти повний кут відхилення, подвоїмо отриманий результат:

$$\Delta\varphi = 2\varphi(r_0) = \pi + 2\frac{r_g}{b}. \quad (1.101)$$

Змінимо позначення $\Delta\varphi$ на α , відкинемо доданок π та запишемо кінцевий результат - *формулу Ейнштейна* для кута відхилення променя світла:

$$\alpha = 2\frac{r_g}{b} = \frac{4GM}{bc^2}. \quad (1.102)$$

Розглянемо класичний приклад відхилення променя в гравітаційному полі *Сонця* ($M_\odot = 1.988 \cdot 10^{30}$ кг, $R_\odot = 0.696 \cdot 10^9$ м).

Для променя, який проходить поблизу нашої зірки ($b \approx R$) отримаємо таке значення кута відхилення:

$$\alpha = \frac{4GM_\odot}{R_\odot c^2}, \quad (1.103)$$

отже,

$$\alpha = \frac{4 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{M^3}{\text{кг} \cdot c^2} \cdot 1.988 \cdot 10^{30} \text{ кг}}{0.696 \cdot 10^9 \text{ м} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \frac{M^2}{c^2}} = 8.467 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 1.75''. \quad (1.104)$$

1.4 Одноточкова гравітаційна лінза

1.4.1 Рівняння одноточкової гравітаційної лінзи

Почнемо розгляд теоретичного опису гравітаційних лінз з найпростішого прикладу: *ідеальної точкової гравітаційної лінзи* або лінзи Шварцшильда.

Запишемо параметри цієї фізичної моделі та деякі припущення, які допоможуть спростити рівняння:

- світло рухається по асимптотах кривих, близьких до *гіпербол*;
- гравітаційна лінза є *ахроматичною* (нехтуємо всіма ефектами, пов'язаними з кольором світла, яскравістю та їх нерівномірністю);
- розмірами джерела світла та спостерігача можна знехтувати (на рисунку 1.3 вони зображені як матеріальні точки).

Отже, нехай S - джерело світла, що знаходиться у площині джерела, L - точкова лінза, що знаходиться у площині лінзи, O - точка положення спостерігача, що знаходиться у площині спостерігача. Всі згадані вище площини паралельні одна одній та перпендикулярні *головній вісі* лінзи, якій також належать точки L та O .

Тепер позначимо відстані на нашій схемі: D_s - відстань між джерелом та спостерігачем, D_d - відстань між гравітаційною лінзою та спостерігачем, D_{ds} - відстань між гравітаційною лінзою та джерелом.

Згідно з традицією, введемо позначення ξ - мінімальну відстань, на яку світло наближається до точкової маси. Реальні кути відхилення світла дуже малі, тож величину ξ вважатимемо прицільним параметром b , яка також наближено дорівнює r_0 .

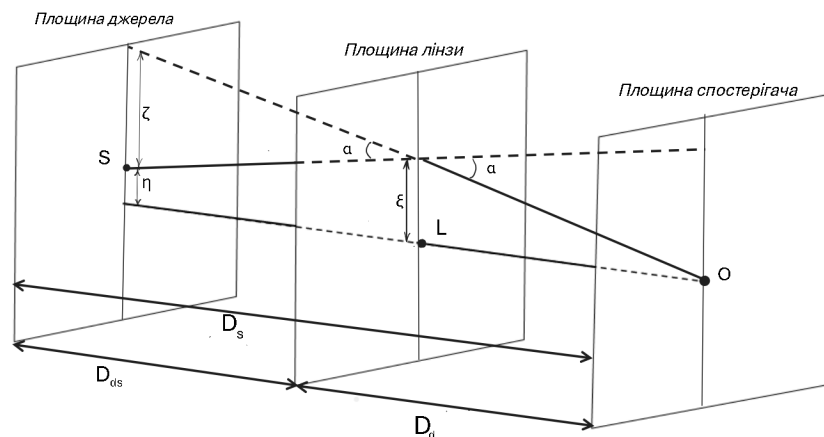


Рис. 1.3: Відхилення променів світла від точкового джерела у лінзі Шварцшильда

Згідно з загальною теорією відносності Ейнштейна, кут відхилення променя світла α в гравітаційному полі точкової маси M визначається наступним виразом:

$$\alpha = \frac{2r_g}{\xi}, \quad (1.105)$$

де r_g - гравітаційний радіус, G - гравітаційна стала, c - швидкість світла у вакуумі.

Враховуючи визначення гравітаційного радіуса, перепишемо формулу (1.105) наступним чином:

$$\alpha = \frac{2}{\xi} \cdot \frac{2GM}{c^2} = \frac{4GM}{c^2 \xi}. \quad (1.106)$$

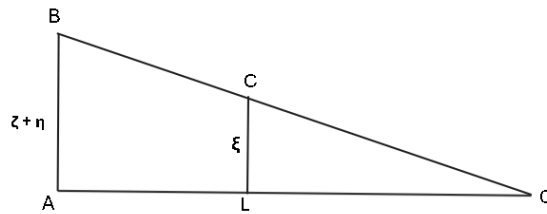


Рис. 1.4: Трикутник BAO з катетом $AB = \zeta + \eta$ та паралельним йому відрізком $CL = \xi$

Із рисунка (1.4) видно, що прямокутні трикутники CLO та BAO подібні за двома спільними сторонами й кутом між ними, а отже справедлива така рівність:

$$\frac{\xi}{LO} = \frac{\zeta + \eta}{AO}, \quad \frac{\xi}{D_d} = \frac{\zeta + \eta}{D_s} \quad (1.107)$$

За малих значеннях кута α отримаємо:

$$\zeta = D_{ds}\alpha, \quad (1.108)$$

враховуючи значення α (формула (1.105)), запишемо:

$$\zeta = D_{ds} \frac{2r_g}{\xi}, \quad (1.109)$$

та

$$\frac{\xi}{D_d} = \frac{\frac{2r_g D_{ds}}{\xi} + \eta}{D_s}, \quad (1.110)$$

або

$$\eta + \frac{2r_g D_{ds}}{\xi} = \frac{D_s}{D_d} \xi. \quad (1.111)$$

Отже, запишемо рівняння точкової гравітаційної лінзи:

$$\eta = \frac{D_s}{D_d} \xi - \frac{2r_g D_{ds}}{\xi}. \quad (1.112)$$

Але у нашому випадку, спостерігач знаходиться на одній прямій (на головній вісі) з джерелом світла, тому $\eta = 0$, таким чином:

$$\frac{D_s}{D_d} \xi_0 - \frac{2r_g D_{ds}}{\xi_0} = 0. \quad (1.113)$$

Розв'яжемо це рівняння відносно ξ_0 (враховуючи, що $\xi_0 \neq 0$). Для цього домножимо обидві його частини на ξ_0 :

$$\frac{D_s}{D_d} \xi_0^2 - 2r_g D_{ds} = 0, \quad (1.114)$$

та

$$\frac{D_s}{D_d} \xi_0^2 = 2r_g D_{ds}. \quad (1.115)$$

Отже, запишемо корені рівняння:

$$\xi_0 = \pm \sqrt{\frac{2r_g D_{ds} D_d}{D_s}}. \quad (1.116)$$

На рисунку 1.5 видно, що отримана система має осьову симетрію ζO , тож спостерігач побачить коло радіуса

$$\xi_0 = \pm \sqrt{\frac{4GM \cdot D_{ds} \cdot D_d}{c^2 \cdot D_s}}. \quad (1.117)$$

Таке коло називається кільцем Ейнштейна, а ξ_0 - радіусом Ейнштейна-Хвольсона, тоді кут α_0 - кут Ейнштейна-Хвольсона, який дорівнює:

$$\alpha_0 = \frac{\xi_0}{D_d}. \quad (1.118)$$

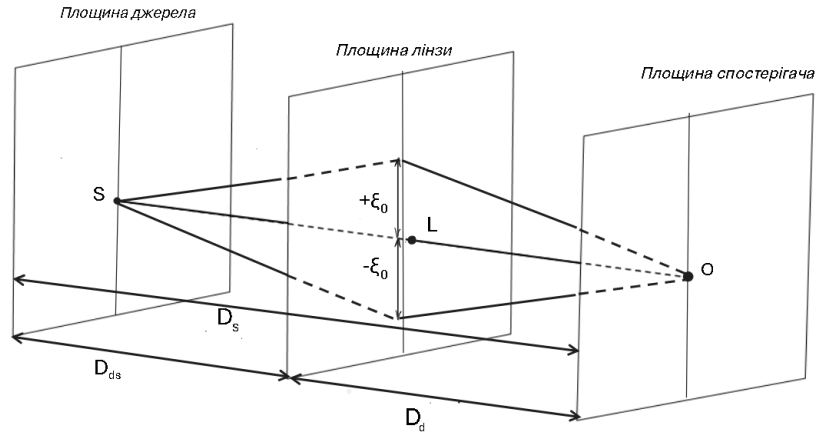


Рис. 1.5: Осьова симетрія ζO системи

1.4.2 Рівняння гравітаційної лінзи у безрозмірних змінних

Враховуючи результати попереднього пункту, перепишемо рівняння гравітаційної лінзи (1.116). Для цього введемо нормовані на кут Ейнштейна-Хвольсона безрозмірні координати:

$$x = \frac{\xi}{\xi_0}, y = \frac{D_d}{D_s} \frac{\eta}{\xi_0}. \quad (1.119)$$

Тоді

$$\frac{\eta}{\xi_0} = \frac{D_s}{D_d} \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{2r_g D_{ds}}{\xi_0 \cdot \xi_0^2}. \quad (1.120)$$

Помножимо обидві частини останнього рівняння на $\frac{D_d}{D_s}$, врахуємо також, що $\xi_0^2 = 2r_g \frac{D_{ds} D_d}{D_s}$:

$$\frac{D_d}{D_s} \frac{\eta}{\xi_0} = \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{2r_g \frac{D_{ds} D_d}{D_s}}{\xi_0 \cdot \xi_0^2}, \quad (1.121)$$

Застосуємо для отриманого рівняння нові координати (1.119):

$$y = x - \frac{1}{x}. \quad (1.122)$$

Розв'яжемо рівняння: для цього помножимо на x ліву та праву частину (врахуємо, що $x \neq 0$):

$$x^2 - yx - 1 = 0. \quad (1.123)$$

Знайдені корені мають вигляд:

$$x_{\pm} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}. \quad (1.124)$$

Тоді очевидно, що $x_+ > 0$ та $x_- < 0$.

При гравітаційному лінзуванні спостерігається подвоєння зображення на точковій лінзі (Рис.1.6), тобто одна точка джерела y переходить у дві точки зображення.

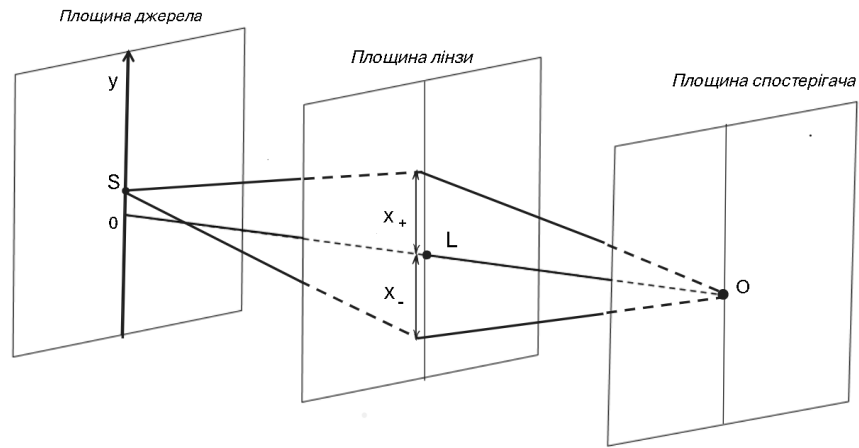


Рис. 1.6: Схема подвоєння зображення джерела на точковій лінзі

1.4.3 Рівняння гравітаційної лінзи у векторному вигляді

До цього моменту, ми розглядали розповсюдження променів світла в межах однієї площини, але, насправді, промені розповсюджуються у тривимірному просторі, тому буде зручно перейти від скалярних змінних до векторних величин у рівнянні гравітаційної лінзи.

Вводимо векторні кути:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\zeta}}{D_{ds}}, \vec{\beta} = \frac{\vec{\xi}}{D_d}, \vec{\gamma} = \frac{\vec{\eta}}{D_s}. \quad (1.125)$$

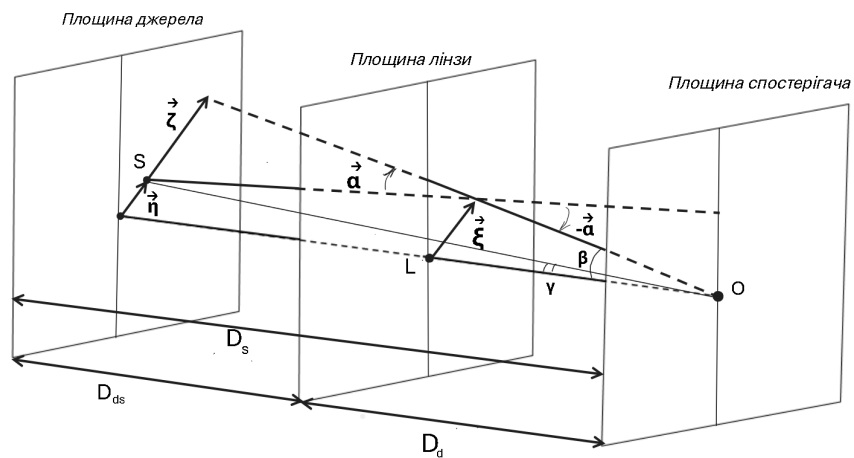


Рис. 1.7: Відхилення променів світла від точкового джерела (векторна побудова)

Спостерігач знаходиться у точці O (рис.1.7), тому можна записати різницю відповідних кутів β та γ :

$$\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \frac{\vec{\xi}}{D_d} - \frac{\vec{\eta}}{D_s} = \frac{\vec{\zeta}}{D_s}, \quad (1.126)$$

та

$$\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \frac{\vec{\zeta}}{D_s}. \quad (1.127)$$

Із визначення (1.125) векторного кута відхилення світла $\vec{\alpha}$ запишемо вираз для вектора $\vec{\zeta}$:

$$\vec{\zeta} = \vec{\alpha} \cdot D_{ds}, \quad (1.128)$$

тоді перепишемо рівняння (1.127), враховуючи останню формулу:

$$\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \frac{D_{ds}}{D_s}, \quad (1.129)$$

звідки кут $\vec{\gamma}$ дорівнює

$$\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \frac{D_{ds}}{D_s}. \quad (1.130)$$

Тепер перепишемо формулу (1.106) для кута відхилення променя світла у векторному вигляді. Для цього вводимо одиничний вектор $\frac{\vec{\xi}}{\xi}$, який співпадає з напрямком вектора $\vec{\alpha}$:

$$\vec{\alpha} = \frac{2r_g}{\xi} \frac{\vec{\xi}}{\xi} = \frac{4GM}{c^2 \xi} \frac{\vec{\xi}}{\xi} = \frac{4GM}{c^2 \xi^2} \vec{\xi}. \quad (1.131)$$

Рівняння точкової гравітаційної лінзи у векторному вигляді буде таким:

$$\vec{\eta} = \frac{D_s}{D_d} \vec{\xi} - D_{ds} \frac{4GM}{c^2 \xi^2} \vec{\xi}. \quad (1.132)$$

Помножимо на $\frac{D_d}{D_s}$ обидві частини рівняння:

$$\frac{D_d}{D_s} \vec{\eta} = \vec{\xi} - D_{ds} \frac{4GM \cdot D_d}{c^2 \xi^2 \cdot D_s} \vec{\xi}. \quad (1.133)$$

Для того, щоб записати останнє рівняння у безрозмірних координатах, пригадаємо формули (1.125) та перетворимо їх, змінивши скалярні змінні на векторні:

$$\vec{x} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}, \vec{y} = \frac{D_d}{D_s} \frac{\vec{\eta}}{\xi_0}. \quad (1.134)$$

Поділимо на ξ_0 рівняння (1.133), враховуючи, що $\xi_0^2 = 2r_g \frac{D_{ds} D_d}{D_s}$ або $\xi_0^2 = \frac{4GM \cdot D_{ds} D_d}{c^2 \cdot D_s}$, тому

$$\frac{D_d}{D_s} \frac{\vec{\eta}}{\xi_0} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_0} - \frac{4GM D_{ds} D_d}{c^2 \xi_0^2 D_s} \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}. \quad (1.135)$$

У результаті, векторне рівняння у безрозмірних координатах для гравітаційної точкової лінзи:

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{\vec{x}}{x^2}. \quad (1.136)$$

Для того, щоб розв'язати отримане рівняння, введемо скалярні добутки $x^2 = (\vec{x}, \vec{x})$ та $y^2 = (\vec{y}, \vec{y})$ та помножимо скалярно обидві його частини на \vec{x} .

Отримаємо,

$$(\vec{y}, \vec{x}) = (\vec{x}, \vec{x}) - \frac{(\vec{x}, \vec{x})}{x^2}. \quad (1.137)$$

Доданок $\frac{(\vec{x}, \vec{x})}{x^2}$ дорівнює 1, тому рівняння знає таких перетворень:

$$(\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{y}, \vec{x}) - 1 = 0, \quad (1.138)$$

яке умовно запишемо так:

$$\vec{x}^2 - \vec{y}\vec{x} - 1 = 0. \quad (1.139)$$

Для того, щоб знайти корені векторного рівняння, знайдемо спочатку корені відповідного скалярного рівняння:

$$x^2 - yx - 1 = 0. \quad (1.140)$$

Дискримінант $D = y^2 + 4$, тому:

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}, \quad (1.141)$$

винесемо із кореня y :

$$x_{1,2} = \frac{y}{2} \pm \frac{y\sqrt{1 + \frac{4}{y^2}}}{2} = y \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{y^2}} \right). \quad (1.142)$$

Остаточно отримаємо корені векторного рівняння:

$$\vec{x}_{1,2} = \vec{y} \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{y^2}} \right), \quad (1.143)$$

де вектори \vec{x} та \vec{y} належать відповідно площині гравітаційної лінзи і площині спостерігача.

1.5 N -точкова гравітаційна лінза

До цього моменту, ми розглядали найпростіший приклад об'єкту гравітаційного лінзування - одноточкову гравітаційну лінзу. Однак у Всесвіті, зазвичай, зустрічаються не тільки поодинокі масивні тіла (зірки, квазари чи галактики), які спричиняють викривлення простору-часу і, в наслідок цього, відхилення найближчих променів світла. У багатьох реальних випадках, зафіксованих астрофізиками, у гравітаційному лінзуванні приймають участь скупчення двох, трьох або більше небесних тіл.

Отже, метою цього підрозділу буде узагальнення рівняння одноточкової гравітаційної лінзи до рівняння N -точкової, як сукупності N масивних точок, які належать одній площині.

Хоча теоретичний опис довільної N -точкової гравітаційної лінзи може бути складною аналітичною задачею, ми введемо та скористаємося деякими апроксимаціями під час її детального розв'язання зручними методами.

1.5.1 Рівняння N -точкової одноплощинної гравітаційної лінзи

Неперервний розподіл мас

Згадаємо, що у векторній формі кут відхилення для одноточкової лінзи дорівнює:

$$\vec{\alpha} = \frac{4GM}{c^2\xi^2} \vec{\xi}. \quad (1.144)$$

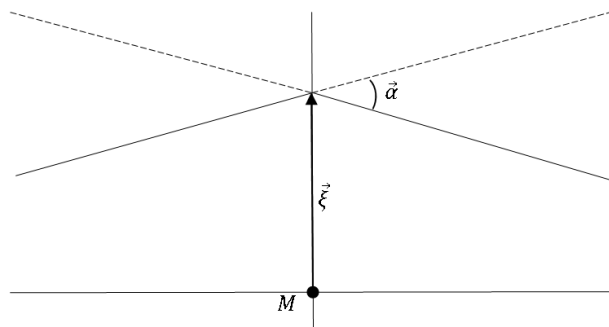


Рис. 1.8: Видгляд радіус-вектора $\vec{\xi}$ та побудова кута відхилення у векторній формі для одноточкової лінзи

Тут радіус-вектор $\vec{\xi}$ дорівнює відстані від точкової маси до точки заломлення променя. Однак далі, змінимо його геометричний зміст: тепер модуль вектора $\vec{\xi}$ дорівнює відстані між центром тяжіння та точкою заломлення променя світла. (Рис.1.9).

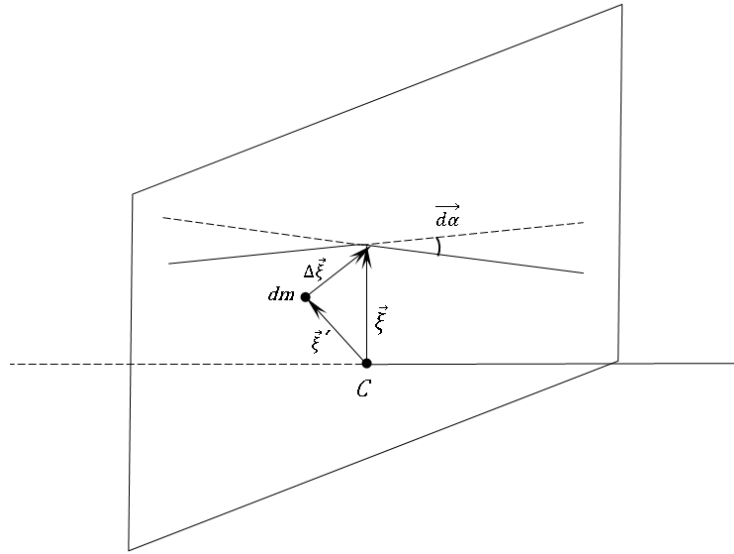


Рис. 1.9: N -точкова гравітаційна лінза: розташування на площині нескінчено малої маси dm відносно точки C - центру тяжіння

Елементарна маса dm з радіус-вектором $\vec{\xi}'$ спричиняє відхилення променя світла на елементарний кут $d\vec{\alpha}$. За неперервного розподілу, розрахуємо повну масу гравітуючої області простору:

$$M = \int dm \quad (1.145)$$

Введемо різницю векторів $\vec{\xi} - \vec{\xi}'$, яка дорівнює $\Delta\vec{\xi}$. Тоді величина $\Delta\vec{\xi}$ - це радіус-вектор, який визначає положення точки заломлення променя, відносно маси dm .

Отже, елементарний кут відхилення дорівнює:

$$d\vec{\alpha} = \frac{4G}{c^2} dm \cdot \frac{\Delta\vec{\xi}}{|\Delta\vec{\xi}|^2} = \frac{4G}{c^2} dm \cdot \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}, \quad (1.146)$$

та

$$d\vec{\alpha} = \frac{4G}{c^2} dm \cdot \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}. \quad (1.147)$$

Тоді векторна сума всіх елементарних кутів буде дорівнювати повному куту відхилення $\vec{\alpha}$ променів світла у N -точковій гравітаційній лінзі. Проінтегруємо останній вираз:

$$\vec{\alpha} = \int d\vec{\alpha}, \quad (1.148)$$

отримаємо

$$\vec{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \int dm \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}. \quad (1.149)$$

Так як ми розглядаємо випадок одноплосинної гравітаційної лінзи, можемо записати елементарну масу таким чином:

$$dm = \rho(\vec{\xi}') d^2\xi', \quad (1.150)$$

де $\rho(\xi')$ - поверхнева густина маси гравітаційної лінзи.

Отже, повний векторний кут відхилення променя світла для N -точкової гравітаційної лінзи дорівнює:

$$\vec{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \int \rho(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi'. \quad (1.151)$$

Маємо узагальний випадок. Для перевірки останньої формули можемо перейти до граничного випадку виникнення N -точкової лінзи у одноточкову, тобто коли $\vec{\xi}' \rightarrow 0$. Маса всіх точок маси dm буде зосереджена у одній точці простору та дорівнюватиме M , для цього перетворимо формулу (1.149):

$$\vec{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \underbrace{\int dm}_M \frac{\vec{\xi} - 0}{|\vec{\xi} - 0|^2} = \frac{4GM}{c^2 \xi^2} \vec{\xi}. \quad (1.152)$$

У результаті отримали формулу кута відхилення у векторному вигляді, яка була до цього виведена у пункті 1.4 для одноточкової гравітаційної лінзи.

Згадаємо рівняння одноточкової гравітаційної лінзи у звичайних координатах:

$$\vec{\eta} = \frac{D_s}{D_d} \vec{\xi} - D_{ds} \vec{\alpha}. \quad (1.153)$$

Помножимо праву та ліву частини рівняння на $\frac{D_d}{D_s}$:

$$\frac{D_d}{D_s} \vec{\eta} = \vec{\xi} - \frac{D_{ds} D_d}{D_s} \vec{\alpha}, \quad (1.154)$$

враховуючи формулу для кута відхилення (1.151) у випадку N -точкової лінзи маємо:

$$\frac{D_d}{D_s} \vec{\eta} = \vec{\xi} - \frac{D_{ds} D_d}{D_s} \cdot \frac{4G}{c^2} \int \rho(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi'. \quad (1.155)$$

Введемо нові змінні:

$$\vec{x} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}, \vec{y} = \frac{D_d}{D_s} \frac{\vec{\eta}}{\xi_0} \quad (1.156)$$

$$\text{де } \xi_0^2 = \frac{4GM \cdot D_{ds} D_d}{c^2 \cdot D_s}.$$

У результаті перетворень маємо такі вирази

$$\vec{\xi} = \xi_0 \vec{x}, \vec{\xi}' = \xi_0 \vec{x}', \quad (1.157)$$

тому диференціал від нової змінної

$$d^2\xi' = \xi_0^2 d^2x'. \quad (1.158)$$

Отже, рівняння N -точкової гравітаційної лінзи у безрозмірних величинах:

$$\begin{aligned} \xi_0 \vec{y} &= \xi_0 \vec{x} - \frac{4G D_{ds} D_d}{c^2 D_d} \int \rho(\xi_0 \vec{x}') \cdot \frac{\xi_0 \vec{x} - \xi_0 \vec{x}'}{|\xi_0 \vec{x} - \xi_0 \vec{x}'|^2} \cdot \xi_0^2 d^2x' = \\ &= \xi_0 \vec{x} - \frac{4G D_{ds} D_s}{c^2 D_d} \int \rho(\xi_0 \vec{x}') \cdot \frac{\xi_0}{\xi_0^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \cdot \xi_0^2 d^2x'. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Поділимо ліву та праву частину рівняння на ξ_0 , а коефіцієнт біля інтегралу $\frac{4G D_{ds} D_s}{c^2 D_d}$ помножимо та поділимо одночасно на π :

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{\pi \cdot 4G D_{ds} D_s}{\pi \cdot c^2 D_d} \int \rho(\xi_0 \vec{x}') \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} d^2x'. \quad (1.160)$$

Введемо поняття критичної густини ρ_{cr} . За П. Шнайдером [8], ця величина буде дорівнювати:

$$\rho_{cr} \equiv \frac{M}{\pi \xi_0^2}. \quad (1.161)$$

Підставимо у знаменник вираз для ξ_0^2 :

$$\rho_{cr} \equiv \frac{M}{\pi \cdot \frac{4GM \cdot D_{ds} D_d}{c^2 \cdot D_s}} = \frac{c^2 \cdot D_s}{4\pi G D_{ds} D_d}. \quad (1.162)$$

Піставимо отриманий вираз для критичної густини у формулу (1.160):

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{1}{\pi} \int d^2 x' \underbrace{\frac{\rho(\xi_0 \vec{x}')}{\rho_{cr}}}_{\varkappa} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}, \quad (1.163)$$

де $\varkappa(\vec{x}')$ - безрозмірна поверхнева густина.

Остаточню,

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{1}{\pi} \int d^2 x' \varkappa(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}. \quad (1.164)$$

Ми вже розглядали випадок неймовірно малих відстаней між точковими масами. Для іншого граничного випадку, коли всі точки знаходяться на дуже великих відстанях одна від одної, та їх поля не взаємодіють, ми отримаємо систему із N незалежних одноточкових лінз.

Дискретний розподіл мас

Уявимо та розглянемо тепер наступну теоретичну модель: в одній площині знаходяться N точок з масами M_i таким чином, що вони (кожна з них є одноточковою лінзою) разом утворюють одну N -точкову гравітаційну лінзу. Загальну масу всіх точок позначимо M .

У цьому випадку, поля N одноточкових лінз знаходяться на таких відстанях, що вони перетинаються у просторі та між ними помітна гравітаційна взаємодія. А тому, знайдена у розділі 1.4 формула кута відхилення променя світла для одноточкової лінзи потребує змін, пов'язаних у цьому випадку із наявністю суперпозиції N -ої кількості полів.

Використовуючи вже записане у пункті 1.4.3 рівняння у векторному вигляді для гравітаційної лінзи у звичайних координатах (1.132) та безрозмірних (1.135), виведемо подібне рівняння для узагальненого випадка N -точкової лінзи. Важливою складовою шуканого рівняння системи є задання положення всіх її точок на одній площині, яке визначається радіус-векторами $\vec{\xi}_i'$.

Тому кожна точкова маса M_i з радіус-вектором $\vec{\xi}_i'$ спричиняє відхилення променя світла на кут $\vec{\alpha}_i$. За аналогією формул (1.147) для неперервного розподілу маси, запишемо вираз для кута відхилення, що спричинює одна з i -тих точкових лінз:

$$\vec{\alpha}_i = \frac{4G}{c^2} M_i \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_i'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_i'|^2}. \quad (1.165)$$

Запишемо через суму повний кут відхилення:

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^N \vec{\alpha}_i \quad (1.166)$$

Підставимо у записану суму вираз (1.165) та повний кут відхилення для N -точкової гравітаційної лінзи буде дорівнювати:

$$\vec{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \cdot \sum_{i=1}^N M_i \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}_i')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_i'|^2}. \quad (1.167)$$

Запишемо вже отримане нами раніше векторне рівняння гравітаційної лінзи у координатах векторів $\vec{\xi}, \vec{\eta}$:

$$\frac{D_d}{D_s} \vec{\eta} = \vec{\xi} - \frac{D_{ds} D_d}{D_s} \vec{\alpha}. \quad (1.168)$$

Підставимо кут відхилення (1.167) у формулу (1.168):

$$\frac{D_d}{D_s} \vec{\eta} = \vec{\xi} - \frac{D_{ds} D_d}{D_s} \frac{4G}{c^2} \cdot \sum_{i=1}^N M_i \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}'_i)}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'_i|^2}. \quad (1.169)$$

Для зручності, у подальших розрахунках будемо завжди використовувати безрозмірну величину мас точок $m_i = \frac{M_i}{M}$, враховуючи, що

$$\sum_{i=1}^N m_i = 1. \quad (1.170)$$

Також згадаємо безрозмірні координати (1.156), підставимо їх у (1.169), та після нескладних перетворень, аналогічних перетворенням у попередньому пункті 1.5.1, запишемо шукане рівняння гравітаційної лінзи із N точок у наступному вигляді:

$$\vec{y} = \vec{x} - \sum_{i=1}^N m_i \frac{\vec{x} - \vec{x}'_i}{|\vec{x} - \vec{x}'_i|^2}. \quad (1.171)$$

1.5.2 Визначення критичної кривої та каустики

Важливим поняттям у гравітаційному лінзуванні є розташування, форма критичних кривих та каустики, а також коефіцієнт підсилення.

Для того, щоб записати рівняння критичної кривої, спочатку за Шнайдером [8] введемо матрицю A_{ij} :

$$A_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad (1.172)$$

та детермінант Якобі $\det[A_{ij}]$.

Тоді коефіцієнт посилення μ гравітаційної лінзи характеризує кількісну оцінку збільшення площі \vec{x} зображення у $\frac{1}{\det[A_{ij}]}$ разів на небесній сфері порівнянно з площею \vec{y} джерела променів.

Критичною кривою, C_{crit} , називається геометричне місце точок на площині зображення, в яких коефіцієнт підсилення стає нескінченним. Запишемо рівняння цієї кривої:

$$\det[A_{ij}] \equiv \det \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (1.173)$$

Кожне рішення цього рівняння визначає положення деякої точки у просторі відносно лінзи з певним потенціалом та розподілом маси, і сукупність цих рішень утворює критичну криву.

Каустикою називається прообраз критичної кривої у площині джерела. У випадку, коли точкове джерело променів перетинає критичну криву, коефіцієнт підсилення швидко зростає до нескінченності.

Наприклад, у випадку односточкового джерела ми отримаємо критичну криву у вигляді кільця Ейнштейна, а каустикою буде точка, розташована на початку координат.

Розділ 2

Методи побудови зображень джерел світлових променів у гравітаційних лінзах

У цьому розділі ми опишемо та порівняємо два базових методи побудови зображень у гравітаційних лінзах: метод трасування та метод виключення. Для цього розглянемо бінарну лінзу, тобто найпростіший випадок N -точкової лінзи, коли $N = 2$ (Рис. 2.1).

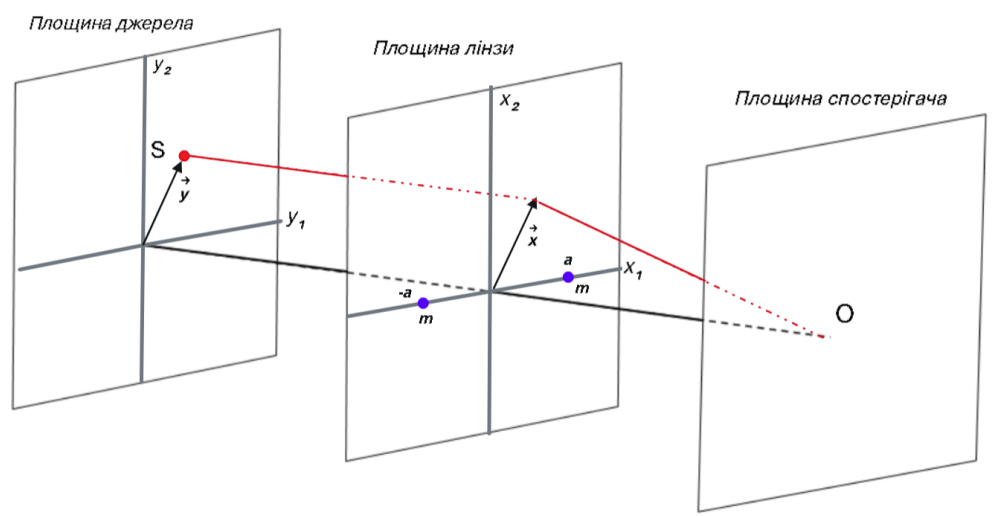


Рис. 2.1: Бінарна гравітаційна лінза

У реальних випадках, під час спостережень, нерідко зустрічається подвійна зірка з поділом приблизно на радіус Ейнштейна. Така система зірок також може бути гравітаційною лінзою, для якої картина збільшення джерела складніша, ніж у лінзах одиночної зірки. Зазвичай, утворюється три зображення, коли лінза перебуває на відстані від джерела, однак існує діапазон вирівнювання - каустики, за яких створюються два додаткові зображення.

Отже, в наближенні точкового джерела, збільшення джерела буде умовно нескінчене. Джерелу світла потрібен певний обмежений час, щоб перетнути каустику. Якщо цей час перетину каустики t_S можна виміряти, а також, якщо відомий радіус Ейнштейна-Хвольсона джерела ξ_0 , то можна визначити кут Ейнштейна α_0 . Ці величини ми вже знаходили раніше:

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{4GM \cdot D_{ds} D_d}{c^2 \cdot D_s}}, \alpha_0 = \frac{\xi_0}{D_d}. \quad (2.1)$$

Подібно випадку одноточкової лінзи, коли збільшення джерела формально нескінченне, бінарні лінзи, які перетинають каустику, будуть збільшувати різні частини джерела в різний час.

2.1 Метод трасування

Метод трасування є поширеним, класичним методом розрахунку траєкторії руху електромагнітних, звукових хвиль або частинок у різних однорідних та неоднорідних, стаціонарних та нестаціонарних полях, в яких змінюється їх швидкість та напрямок. Його використовують у різних випадках гравітаційного лінзування. Наприклад,

1) Сильне лінзування: моделювання систем, де масивні лінзи створюють множинні зображення віддалених джерел, таких як галактичні скупчення.

2) Мікролінзування: вивчення невеликих масивних об'єктів, таких як екзопланети чи окремі зорі. Метод трасування дозволяє визначити параметри таких об'єктів за допомогою аналізу тимчасових змін у яскравості джерела.

Отже, продемонструємо цей метод на прикладі вже розглянутої раніше бінарної лінзи.

Для початку запишемо векторне рівняння N -точкової гравітаційної лінзи (1.171) у координатному вигляді:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \sum_{i=1}^N m_i \frac{x_1 - a_i}{(x_1 - a_i)^2 + (x_1 - b_i)^2}, \\ y_2 = x_2 - \sum_{i=1}^N m_i \frac{x_2 - b_i}{(x_1 - a_i)^2 + (x_1 - b_i)^2}, \end{cases} \quad (2.2)$$

де a_i, b_i координати безрозмірних радіус-векторів $\vec{x}_i = \frac{\vec{\xi}_i}{\xi_0}$, тоді

$$\vec{x}_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

У нашому випадку $N = 2$, отже система рівнянь виглядатиме таким чином:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - m_1 \frac{x_1 - a_1}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - b_1)^2} + m_2 \frac{x_1 - a_2}{(x_1 - a_2)^2 + (x_2 - b_2)^2}, \\ y_2 = x_2 - m_1 \frac{x_2 - b_1}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - b_1)^2} + m_2 \frac{x_2 - b_2}{(x_1 - a_2)^2 + (x_2 - b_2)^2}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Нехай дві точкові однакові маси m лежать на вісі x на однаковій відстані a від початку координат (Рис. 2.1), тоді система (2.4) буде такою (врахуємо також, що $b_i = 0$):

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - m \frac{x_1 - a}{(x_1 - a)^2 + (x_2 - 0)^2} - m \frac{x_1 - a}{(x_1 - a)^2 + (x_2 - 0)^2}, \\ y_2 = x_2 - m \frac{x_2 - 0}{(x_1 - a)^2 + (x_2 - 0)^2} - m \frac{x_2 - 0}{(x_1 - a)^2 + (x_2 - 0)^2}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Для зручності оберемо наступне числове значення маси $m = \frac{1}{2}$, а отже перепишемо остаточно:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{1}{2} \frac{x_1 - a}{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - \frac{1}{2} \frac{x_1 + a}{(x_1 - a)^2 + x_2^2}, \\ y_2 = x_2 - \frac{1}{2} \frac{x_2}{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - \frac{1}{2} \frac{x_2}{(x_1 - a)^2 + x_2^2}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Тепер адаптуємо рівняння (2.6) для їх розв'язання у програмі *Wolfram Mathematica*, а саме введемо проміжки зміни параметрів (змінних) x_1, x_2, a .

Відстань a від початку координат до кожної із точкових лінз належить проміжку чисел від 0 до 3.5, а тому між лінзами відстань дорівнює $l = 2a$ та $l \in [0, 7]$.

У площині лінзи (x_1, x_2) виділяємо прямокутник, якому будуть належати дві точкові маси. Запишемо координати його вершин:

$$x_{imin} = -L, x_{imax} = L. \quad (2.7)$$

Нехай $L = 3$, отримаємо

$$x_{imin} = -3, x_{imax} = 3. \quad (2.8)$$

Гравітаційне поле у виділеній прямокутній області неоднакове у різних точках, тому для детального аналізу гравітаційної взаємодії точкових мас з променями світла джерела розіб'ємо прямокутник розмірами $x_1 \times x_2$ на $(NN \times NN)$ -ту кількість комірок, при цьому їх границя не повинна проходити через початок координат ($NN \neq 10n, n \in \mathbb{N}$). Одразу запишемо для окремого випадку бінарної лінзи, коли відстань від центру координат a дорівнює 0.5.

```

NN=237;
L=3;
a=0.5;

x1min=-L;
x1max=L;
x2min=-L;
x2max=L;

Δ1=(x1max-x1min)/NN;
Δ2=(x2max-x2min)/NN;
x1[i_]:=x1min+(i-1)*Δ1;
x2[j_]:=x2min+(j-1)*Δ2;

```

Рис. 2.2: Перша частина коду у *Wolfram Mathematica*, де $x_1[i_]$, $x_2[j_]$ - функції, що пробігають по вузлах сітки.

Масив відображень рівнянь гравітаційної лінзи (2.6) із площини лінзи (x_1, x_2) у площину джерела (y_1, y_2) :

```

y1=Table[x1[i]-1/2*(x1[i]-a)/((x1[i]-a)^2+x2[j]^2)-1/2*(x1[i]+a)/((x1[i]+a)^2+x2[j]^2),
{i,NN+1},{j,NN+1}];
y2=Table[x2[j]-1/2*x2[j]/((x1[i]-a)^2+x2[j]^2)-1/2*x2[j]/((x1[i]+a)^2+x2[j]^2),
{i,NN+1},{j,NN+1}];

```

Рис. 2.3: Друга частина коду у *Wolfram Mathematica*.

Побудуємо відповідний графік:

```

Lens=ListPlot[{{-a,0},{a,0}},PlotMarkers->{Graphics[{Cyan,Disk[]}],0.025},
PlotLegends->{"Гравітаційні лінзи"}];
CausticGraph=Graphics[{Line[Table[{y1[[k,m]],y2[[k,m]]},{m,NN+1},{k,NN+1}]}],Frame->True,
PlotRange->{{x1min,x1max},{x2min,x2max}}];
Show[CausticGraph,Lens,AspectRatio->1]

```

Рис. 2.4: Третя частина коду у *Wolfram Mathematica*.

В площині джерела зобразимо бінарну лінзу, яка складається з двох дисків блакитного кольору.

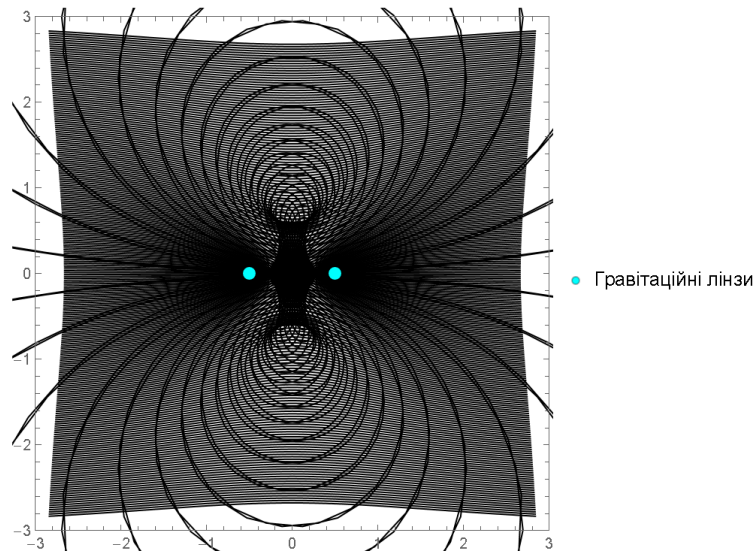


Рис. 2.5: Бінарна лінза із заданими параметрами

Зображення джерела мають координати (x_{1Img}, x_{2Img}) , саме їх нам треба знайти. Задаємо координати (y_{1S}, y_{2S}) джерела променів та використовуючи розраховані двовимірні масиви $y_1[[i, j]]$, $y_2[[i, j]]$ знаходимо індекси k та m , які відповідають точці (y_1, y_2) . Відстань між цими точками повинна бути меншою за визначену величину $q * \Delta_1$, де q - чутливість побудови зображення.

```
q = 1.5;
y1S = 0.;
y2S = 0.5;
plotSource = ListPlot[{{y1S, y2S}},
  PlotStyle -> Directive[PointSize[Large], Red],
  PlotLegends -> {"Джерело"}];
x1Img = {};
x2Img = {};
```

Рис. 2.6: Четверта частина коду у *Wolfram Mathematica*.

Тепер додаємо у порожні масиви x_{1Img} , x_{2Img} координати зображень.

```
Do[
  If[
    And[Abs[y1[[k, m]] - y1S] < q*Δ1,
      Abs[y2[[k, m]] - y2S] < q*Δ2],
    {x1Img = Append[x1Img, -L + k*Δ1],
      x2Img = Append[x2Img, -L + m*Δ2]}],
  {k, NN+1}, {m, NN+1};
```

Рис. 2.7: П'ята частина коду у *Wolfram Mathematica*.

Побудуємо тепер на одному графіку дві точкові гравітаційні лінзи (блакитні диски), джерело променів (червоний диск) та зображення джерела (зелені точки).

```
plotImg =
ListPlot[Table[{x1Img[[k]], x2Img[[k]]}, {k, Length[x2Img]}],
  PlotStyle -> {Green, Opacity[0.75], PointSize[Small]},
  PlotLegends -> {"Зображення, знайдені
методом трасування"}];
Show[plotSource, plotImg, Lens,
  PlotRange -> {{x1min, x1max}, {x2min, x2max}}, AspectRatio -> 1]
```

Рис. 2.8: Шоста частина коду у *Wolfram Mathematica*.

Отже, отримаємо такий результат:

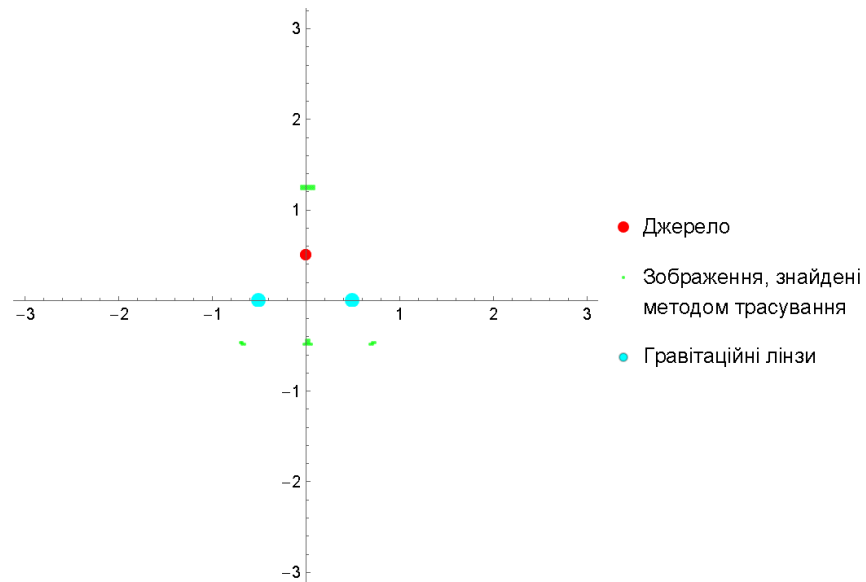


Рис. 2.9: Дві точкові лінзи, джерело та його зображення, побудовані методом трасування спроектовані на одну площину.

Оцінити точність методу трасування нам допоможе аналітичний (прямий) розрахунок координат зображень, а тому використовуючи ті ж самі числові значення параметрів, запишемо наступний код у програмі *Wolfram Mathematica*:

```
x=Solve[{y1S==xx1-1/2*(xx1-a)/((xx1-a)^2+xx2^2)-1/2*(xx1+a)/((xx1+a)^2+xx2^2),
y2S==xx2-1/2*xx2/((xx1-a)^2+xx2^2)-1/2*xx2/((xx1+a)^2+xx2^2)},{xx1,xx2},Reals];
xx=xx1/. x;
xy=xx2/. x;

AnalyticalImage=ListPlot[Table[{xx[[m]],xy[[m]]},{m,Length[xx]}],
PlotStyle->{Blue,PointSize[Large]},
PlotMarkers->{"♦"},PlotLegends->{"Зображення, знайдені
аналітичним методом"}];
Show[AnalyticalImage,PlotRange->{{x1min,x1max},{x2min,x2max}},
AxesOrigin->{0,0},Frame->True,AspectRatio->1/1]
```

Рис. 2.10: Аналітичний розв'язок системи рівнянь для бінарної гравітаційної лінзи у програмі *Wolfram Mathematica*.

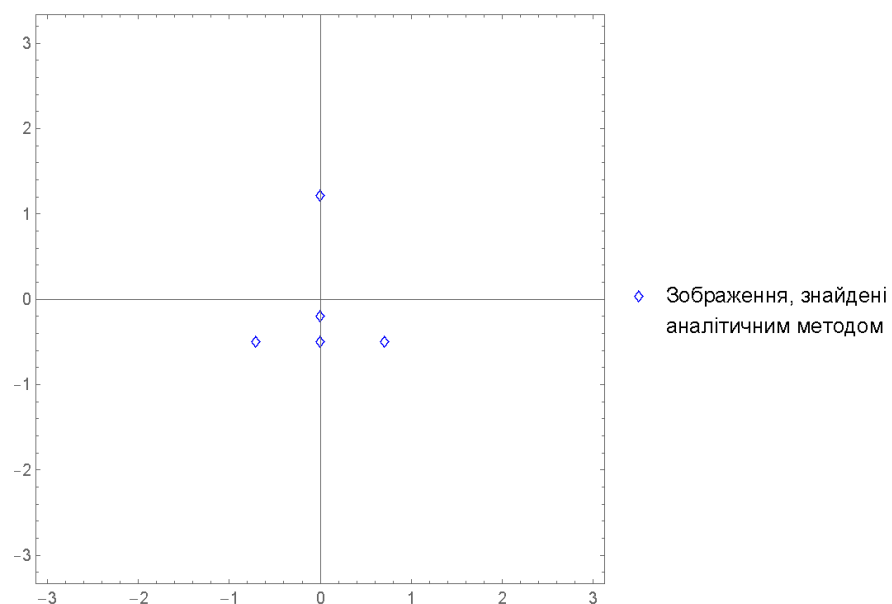


Рис. 2.11: Зображення джерела у бінарній лінзі (прямий метод).

Тепер на одному графіку зіставимо отримані обома методами зображення за допомогою функції `Show[Graphic1, C`

```
Show[AnalyticalImage, plotSource, plotImg, Lens,
PlotRange->{{x1min, x1max}, {x2min, x2max}},
AxesOrigin->{0,0}, Frame->True, AspectRatio->1]
```

Рис. 2.12: Побудова зображень джерела, отриманого чисельним та аналітичним методами на одному графіку у програмі *Wolfram Mathematica*.

Результатом виконання останньої частини коду у *Wolfram Mathematica* буде порівняння розглянутих нами методів на спільному графіку, на якому можна візуально оцінити точність методу трасування.

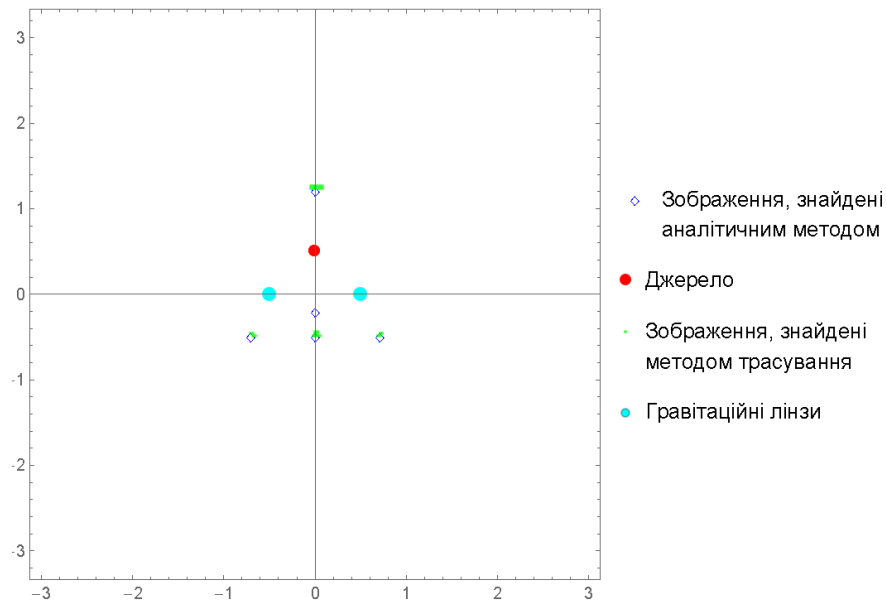


Рис. 2.13: Порівняння координат зображень джерела світла, отриманих аналітичним методом та методом трасування

Тепер знайдемо відносну похибку розрахунку координат зображень джерела методом трасування, при цьому еталонними координатами вважатимемо ті значення x_1 та x_2 , що були знайдені прямим методом.

Отже, запишемо координати, знайдені методом трасування $(x_1, x_2) = (x1Image, x2Image)$. Для цього подрібно змінити 5 частину коду (Рис. 2.7) так, щоб усі точки були виведені на екран, а саме:

```
Do[If[Abs[y1[[k,m]]-y1Source]<q &1&&Abs[y2[[k,m]]-y2Source]<q &2,
x1Image=Append[x1Image,x1[k]];x2Image=Append[x2Image,x2[m]];
Print["(",N[x1[k]],",", " ",N[x2[m]],",")"],{k,NN+1},{m,NN+1}]
```

Рис. 2.14: Виведення масиву координат точкових зображень (метод трасування).

Тепер запишемо знайдені у програмі *Wolfram Mathematica* точки:

```
(-0.721519, -0.493671); (-0.0126582, -0.518987);
(-0.696203, -0.518987); (-0.0126582, -0.493671);
(-0.696203, -0.493671); (-0.0126582, -0.468354);
(-0.670886, -0.518987); (-0.0126582, 1.20253);
(-0.0632911, 1.20253); (-0.0126582, 1.22785);
(-0.0632911, 1.22785); (0.0126582, -0.518987);
(-0.0379747, -0.518987); (0.0126582, -0.493671);
(-0.0379747, 1.20253); (0.0126582, -0.468354);
(-0.0379747, 1.22785); (0.0126582, 1.20253);
```

$$\begin{aligned}
&(-0.0379747, -0.518987); & (0.0126582, 1.22785); \\
&(0.0379747, -0.518987); & (0.0379747, 1.20253); \\
&(0.0379747, 1.22785); & (0.0632911, 1.20253); \\
&(0.0632911, 1.22785); & (0.670886, -0.518987); \\
&(0.696203, -0.518987); & (0.696203, -0.493671); \\
&(0.696203, -0.493671); & (0.721519, -0.493671).
\end{aligned}$$

За допомогою коду (Рис. 2.10) можемо отримати аналітичні розв'язки $(x_1, x_2) = (xx1, xx2)$:

$$\begin{aligned}
&(-0.7071068, -0.50); \\
&(0, -0.50); \\
&(0, -0.2071068); \\
&(0, 1.207107); \\
&(0.7071068, -0.50).
\end{aligned}$$

Середню абсолютну похибку для кожної з координат x_1 та x_2 розрахуємо за формулою:

$$\overline{\Delta(x_1, x_2)} = \left(\underbrace{|xx1 - x1Image|}_{\Delta_1}, \underbrace{|xx2 - x2Image|}_{\Delta_2} \right) = (\overline{\Delta_1}, \overline{\Delta_2}). \quad (2.9)$$

Оберемо чотири максимально близьких до аналітичних розв'язків точок, які ми отримали методом трасування та побудуємо наступну таблицю даних:

(xx1, xx2)	(x1Image, x2Image)	(1, 2)
(-0.7071068, -0.50)	(-0.696203, -0.493671)	(0.0109038, 0.006329)
(0, -0.50)	(0.0126582, -0.493671)	(0.0126582, 0.006329)
(0, 1.207107)	(0.0126582, 1.20253)	(0.0126582, 0.004577)
(0.7071068, -0.50)	(0.696203, -0.493671)	(0.0109038, 0.006329)

Таблиця 2.1: Координати точок зображень та абсолютні похибки розрахунку методом трасування

Знайдемо середнє значення похибки $\overline{\Delta(x_1, x_2)}$:

$$\overline{\Delta(x_1, x_2)} = \frac{(0.0109038 \cdot 2 + 0.0126582 \cdot 2, 0.006329 \cdot 3 + 0.004577)}{4}, \quad (2.10)$$

та

$$\overline{\Delta(x_1, x_2)} = (0.011781, 0.005891). \quad (2.11)$$

Отже, як бачимо, точність методу трасування лише один знак після коми, тобто це нижче порівняно з аналітичними розрахунками, але все ж таки цей метод є корисним інструментом для моделювання та візуалізації гравітаційного лінзування в складних системах, де аналітичні розв'язки є важкодоступними. Також слід враховувати, що у випадку більш складних систем розходження з дійсними координатами зображень джерела можуть бути дійсно вагомими.

Також зауважимо, що ефективність і точність розрахунків можуть бути підвищені шляхом ретельного вибору числових параметрів. Наприклад, можна обрати більшу кількість комірок NN , через які проходять та заломлюються промені джерела світла.

2.2 Метод виключення

У цьому розділі буде здійснено аналіз перспективного і, головне, ефективного аналітичного методу алгебраїчної геометрії, а саме - *методу виключення*.

Точність досліджуваного далі методу значно перевищує точність розглянутого у попередньому розділі методу трасування променів. Особливо, при використанні чисельних методів, ускладнення системи (напри-

клад, збільшення кількості взаємодіючих точкових лінз), потребує більшої розрахункової потужності комп'ютера для здійснення великої кількості ітерацій, та, унаслідок чого, значно збільшується час знаходження шуканих координат зображень.

Кількість коренів системи, яку ми розглядаємо, також не відома. Тому деякі з розв'язків можуть бути втрачені, що, безумовно, нас не влаштовує.

Почнемо з короткого опису розділу вищої математики - алгебраїчної геометрії.

Алгебраїчна геометрія є перетином багатьох дисциплін, таких як: абстрактна алгебра, теорія чисел, топологія, математична та теоретична фізика, диференціальна геометрія, комплексний аналіз, комп'ютерна алгебра та ін.

Головним об'єктом вивчення алгебраїчної геометрії є системи поліноміальних рівнянь та множини їх розв'язків, які називаються алгебраїчними многовидами. Наприклад, многовиди розмірності $n = 1$, називаються алгебраїчними кривими, а при $n = 2$ многовиди називаються алгебраїчними поверхнями.

У нашій роботі ми зупинимось на алгебраїчних кривих. Нашим головним завданням буде знайти відображення кривої, яка характеризує форму джерела (коло, еліпс). Таким чином, треба визначити координати точок, в які будуть переходити точки кривої джерела. Отримана множина координат точок буде шуканою множиною зображень.

Особливою перевагою методу виключення є його наочність. Опишемо тепер базові положення теорії виключення, необхідні для розгляду систем гравітаційних лінз, як це показано на сторінках 24-30 В. Биковим [9].

2.2.1 Загальна характеристика теорії виключення

Для початку розглянемо два полінома, залежні лише від однієї змінної x :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}, \quad g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^{m-j}, \quad (2.12)$$

де n та m відповідно степені многочленів $f(x)$ і $g(x)$. При цьому $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

Тоді можемо скласти квадратну матрицю порядку $(m + n)$:

$$S(f, g) = [s_{ij}] = \left[\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & \cdots & a_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \vphantom{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\} m \\ \left. \begin{array}{l} \vphantom{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}} \right\} n \end{array} \right\} , \quad (2.13)$$

яка має назву матриці Сільвестра.

Наприклад, якщо ми оберемо ступені поліномів $m = 3$ для $f(x)$ та $n = 4$ для $g(x)$:

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \quad (2.14)$$

$$g(x) = b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4, \quad (2.15)$$

то матриця Сільвестра буде мати вигляд:

$$S(f, g) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Легко переконатись, що всі елементи, що містяться під a_0 та b_0 , а також над a_0 та b_0 нульові. Введемо такий термін, як *результант* $R(f, g)$ поліномів $f(x)$ і $g(x)$. Тоді у формі Сільвестра:

$$R(f, g) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det S. \quad (2.17)$$

Іншими словами, результат є визначником матриці Сільвестра $\det S$, або ж поліномом, який складається з коефіцієнтів, організованих певним чином.

Тепер виведемо формулу для результанта $R(f, g)$, використовуючи матрицю та визначник Вандермонда. У загальному вигляді, визначник Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & v_1 & \cdots & v_1^{k-1} \\ 1 & v_2 & \cdots & v_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & v_k & \cdots & v_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq k} (v_i - v_j). \quad (2.18)$$

Він дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли існує хоч одна пара (v_i, v_j) така, що $v_i = v_j, i \neq j$.

Нехай тоді $k = m + n$, α_i - корені поліному $f(x)$, а β_j - корені поліному $g(x)$, та серед них немає тих, що повторюються. У такому випадку визначник Вандермонда буде дорівнювати добутку всіх можливих комбінацій коренів f і g . Тому для нашої системи модифікована матриця Вандермонда (тобто визначена з точністю до інверсії рядків і стовпців) V має розмірність $(m + n)$ та виглядає таким чином:

$$V = [v_{ij}] = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1^{(m+n)-1} & \beta_2^{(m+n)-1} & \cdots & \beta_m^{(m+n)-1} \\ \beta_2^{(m+n)-2} & \beta_2^{(m+n)-2} & \cdots & \beta_m^{(m+n)-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_n \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1^{(m+n)-1} & \cdots & \alpha_n^{(m+n)-1} \\ \alpha_1^{(m+n)-2} & \cdots & \alpha_n^{(m+n)-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_m. \quad (2.19)$$

Знайдемо добуток двох матриць $P = S \cdot V$:

$$P = [s_{ij}] \cdot [v_{ij}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_1^{m-1} f(\beta_1) & \cdots & \beta_m^{m-1} f(\beta_m) & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1^{m-2} f(\beta_1) & \cdots & \beta_m^{m-2} f(\beta_m) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(\beta_1) & \cdots & f(\beta_m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g(\alpha_1) & \cdots & g(\alpha_n) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 g(\alpha_1) & \cdots & \alpha_n g(\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{n-1} g(\alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-1} g(\alpha_n) \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Тому,

$$\det S \cdot \det V = \det P. \quad (2.21)$$

Знайдемо визначники $\det V$ і $\det P$.

$$\det V = \left[\prod_{1 \leq P < K \leq m} (\beta_K - \beta_P) \right] \left[\prod_{1 \leq p < k \leq n} (\alpha_k - \alpha_p) \right] \left[\prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n (\beta_k - \alpha_j) \right]. \quad (2.22)$$

Детермінант матриці P можна знайти, враховуючи, що вона блочно-діагонального типу, та спільний визначник буде розділений на добуток $\det [P_{f(\beta_m)}]$ та $\det [P_{f(\alpha_n)}]$:

$$\begin{aligned} \det P &= \begin{vmatrix} \beta_1^{m-1} f(\beta_1) & \cdots & \beta_m^{m-1} f(\beta_m) \\ \beta_1^{m-2} f(\beta_1) & \cdots & \beta_m^{m-2} f(\beta_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(\beta_1) & \cdots & f(\beta_m) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g(\alpha_1) & \cdots & g(\alpha_n) \\ \alpha_1 g(\alpha_1) & \cdots & \alpha_n g(\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} g(\alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-1} g(\alpha_n) \end{vmatrix} = \\ &= f(\beta_1) \cdots f(\beta_m) \cdot \begin{vmatrix} \beta_1^{m-1} & \cdots & \beta_m^{m-1} \\ \beta_1^{m-2} & \cdots & \beta_m^{m-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot g(\alpha_1) \cdots g(\alpha_n) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \\ &= - \left[\prod_{1 \leq P < K \leq m} (\beta_K - \beta_P) \right] \cdot \left[\prod_{1 \leq p < k \leq n} (\alpha_k - \alpha_p) \right] \cdot f(\beta_1) \cdots f(\beta_m) \cdot g(\alpha_1) \cdots g(\alpha_n). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Повернемося до виразу (2.21) та підставимо (2.22) і (2.23):

$$\begin{aligned} \underbrace{\det S}_{R(f,g)} \cdot \left[\prod_{1 \leq P < K \leq m} (\beta_K - \beta_P) \right] \cdot \left[\prod_{1 \leq p < k \leq n} (\alpha_k - \alpha_p) \right] \cdot \left[\prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n (\beta_k - \alpha_j) \right] = \\ = - \left[\prod_{1 \leq P < K \leq m} (\beta_K - \beta_P) \right] \cdot \left[\prod_{1 \leq p < k \leq n} (\alpha_k - \alpha_p) \right] \cdot f(\beta_1) \cdots g(\alpha_n). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Тоді, з точністю до знаку \pm при заміні $\det S$ на $R(f, g)$, рівність (2.24) буде вірною.

Коли $R(f, g) = 0$, хоча б одне із значень $f(\beta_1), \dots, f(\beta_m), g(\alpha_1), \dots, g(\alpha_m)$ має дорівнювати 0 ($\alpha_k \neq \alpha_p, \beta_k \neq \beta_p$).

Скорочуючи тепер однакові множники в рівнянні (2.24) та замінюючи індекси $k \rightarrow j, j \rightarrow i$, отримаємо:

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j). \quad (2.25)$$

Необхідно зазначити, що результат $R(f, g)$ визначає відстань між множинами коренів α_i, β_j поліномів $f(x)$ та $g(x)$ відповідно.

В підсумку, можна зробити висновок про те, що $f(x)$ та $g(x)$ мають спільні розв'язки лише за виконання необхідної ($\det P = 0$) і достатньої умови $R(f, g) = 0$.

Переходимо тепер до поліномів, залежних від двох змінних x та y , так як в рівнянні N -точкової гравітаційної лінзи міститься саме така кількість аргументів.

Введемо многочлени $A(x, y)$ та $B(x, y)$:

$$A(x, y) = \sum_{i,j=0}^{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j, \quad (2.26)$$

$$B(x, y) = \sum_{i,j=0}^{0 \leq i+j \leq m} b_{ij} x^i y^j, \quad (2.27)$$

де $a_{n0} \neq 0, a_{0n} \neq 0, b_{m0} \neq 0, b_{0m} \neq 0$.

Нулі записаних поліномів мають наступний геометричний сенс - це точки, розташовані на алгебраїчній кривій n -го порядку, яка задана рівнянням:

$$A(x, y) = 0 \text{ або } B(x, y) = 0. \quad (2.28)$$

Координати (α, β) будуть розв'язком (2.28) за умови існування спільного кореня $y = \beta$ для поліномів $A(x, y)$ та $B(x, y)$ і, відповідно:

$$R(A(\alpha, y), B(\alpha, y)) = 0. \quad (2.29)$$

За допомогою матриці Сільвестра (2.13) і розкладання поліномів $A(x, y)$ та $B(x, y)$ за спадними ступенями y :

$$A(x, y) = A_0 y^n + A_1(x) y^{n-1} + \dots + A_n(x), \quad (2.30)$$

$$B(x, y) = B_0 y^m + B_1(x) y^{m-1} + \dots + B_m(x), \quad (2.31)$$

можна тепер розрахувати визначник Сільвестра:

$$X(\alpha) = \begin{vmatrix} A_0 & A_1(\alpha) & \dots & A_n(\alpha) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_0 & A_1(\alpha) & \dots & A_n(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_0 & A_1(\alpha) & \dots & A_n(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_0 & B_1(\alpha) & \dots & B_m(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & B_0 & B_1(\alpha) & \dots & B_m(\alpha) & 0 & \dots & 0 \\ B_0 & B_1(\alpha) & \dots & B_m(\alpha) & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.32)$$

де $X(\alpha)$ — поліном за α .

Для того, щоб рівність (2.29) була правильна, необхідно і достатньо, щоб хоча б одне із значень α задовільняло рівнянню $X(\alpha) = 0$.

Результант $A(x, y)$ та $B(x, y)$ - це поліном $X(x)$, який назвають *елімінантою* системи (2.28) за x :

$$X(x) = R_y(A(x, y), B(x, y)). \quad (2.33)$$

Аналогічно, для елімінанти за y :

$$Y(y) = R_x(A(x, y), B(x, y)). \quad (2.34)$$

Розв'язок системи (2.28) може бути зведений до розв'язання рівняння однієї змінної, в той час як інша була виключена із системи рівнянь:

$$\begin{aligned} X(x) = 0 \text{ або } Y(y) = 0, \\ R_x(A(x, y), B(x, y)) \cdot R_y(A(x, y), B(x, y)) = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.2.2 Раціональна параметризація

I. Коло

Припустимо, що ми маємо звичайне одиничне коло, розташоване в центрі координатної площини, яке задано рівнянням:

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (2.36)$$

Проведемо пряму через точку $(-1, 0)$. Рівняння цієї прямої має вигляд:

$$y = t(x + 1), \quad (2.37)$$

де t — параметр, який визначає нахил прямої.

Щоб знайти точки перетину цієї прямої з колом, підставимо вираз $y = t(x + 1)$ в рівняння кола:

$$x^2 + (t(x + 1))^2 = 1. \quad (2.38)$$

Розкриваємо дужки:

$$\begin{aligned} x^2 + t^2(x + 1)^2 &= 1, \\ x^2 + t^2(x^2 + 2x + 1) &= 1, \\ x^2 + t^2x^2 + 2t^2x + t^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Збираємо подібні члени:

$$(1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0. \quad (2.40)$$

Це квадратне рівняння відносно x . Розв'яжемо його, використовуючи дискримінант:

$$D = 4t^4 - 4(1 + t^2)(t^2 - 1) = 4t^4 - 4t^4 + 4 = 4. \quad (2.41)$$

Отже, дискримінант $D = 4$, і рівняння має два розв'язки:

$$x = \frac{-2t^2 \pm 2}{2(1 + t^2)} = \frac{-t^2 \pm 1}{1 + t^2}, \quad (2.42)$$

це дає нам два розв'язки для x :

$$x_1 = -1 \quad \text{та} \quad x_2 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad (2.43)$$

Для цих x -координат знайдемо відповідні y -координати. Підставимо x_2 в рівняння прямої:

$$\begin{aligned} y &= t(x + 1) = t \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1 \right) = \\ &= t \left(\frac{1 - t^2 + 1 + t^2}{1 + t^2} \right) = \frac{2t}{1 + t^2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Таким чином, ми отримали параметризацію кола, використовуючи параметр t , де:

$$\begin{cases} x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \\ y = \frac{2t}{1 + t^2}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Це і є поліноміальна параметризація проєктивної кривої. Раціональні функції (відношення двох многочленів) задають ізоморфізм комплексної проєктивної прямої $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ на коніку в проєктивній площині $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Отже, враховуючи довільне розташування кола у площині джерела, для нашої системи, раціональна параметризація колового джерела:

$$\begin{cases} y_1 = y_{10} + r_s \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y_2 = y_{20} + r_s \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad (2.46)$$

де y_{10}, y_{20} — координати центра джерела, r_s — радіус джерела, $t \in [-\infty, +\infty]$ — параметр.

II. Еліпс розтягнутий вздовж вісей y_1 та y_2

Розглянемо тепер канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (2.47)$$

де (x_0, y_0) — координати центра еліпса, a і b — півосі еліпса.

Для цього еліпса, як і у М.Коррала [10], можемо використовувати параметризацію аналогічну до кола. Нехай:

$$x = a \cos(\theta), y = b \sin(\theta). \quad (2.48)$$

Використаємо раціональні тригонометричні функції:

$$\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2}. \quad (2.49)$$

Підставимо ці вирази в параметризацію:

$$x = a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, y = b \frac{2t}{1 + t^2}. \quad (2.50)$$

Для цього еліпса у наших координатах для площини джерела раціональна параметризація буде мати вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = y_{10} + a_s \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y_2 = y_{20} + b_s \frac{2t}{1+t^2}, \end{cases} \quad (2.51)$$

де (y_{10}, y_{20}) - центр еліптичного джерела, з півосями a_s і b_s в площині джерела.

III. Довільний еліпс, нахилений відносно осей y_1 та y_2

Розглянемо еліпс з рівнянням:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad (2.52)$$

де (x', y') — координати у системі, нахилений на кут θ відносно початкової системи координат.

Після повороту координат на кут θ , нові координати можна записати через старі таким чином:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos(\theta) + (y - y_0) \sin(\theta), \\ y' = -(x - x_0) \sin(\theta) + (y - y_0) \cos(\theta). \end{cases} \quad (2.53)$$

Для стандартного еліпса з центром в початку координат $(0, 0)$:

$$\begin{cases} x' = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y' = b \frac{2t}{1+t^2}. \end{cases} \quad (2.54)$$

Тепер, підставимо вирази для x' та y' в рівняння повороту координат:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta), \\ y = y_0 + x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta). \end{cases} \quad (2.55)$$

Підставимо параметризацію x' та y' :

$$\begin{cases} x' = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y' = b \frac{2t}{1+t^2}. \end{cases} \quad (2.56)$$

Отримуємо у наших звичайних позначеннях:

$$\begin{cases} y_1 = y_{10} + a_s \frac{1-t^2}{1+t^2} \cos(\theta) - b_s \frac{2t}{1+t^2} \sin(\theta), \\ y_2 = y_{20} + a_s \frac{1-t^2}{1+t^2} \sin(\theta) + b_s \frac{2t}{1+t^2} \cos(\theta), \end{cases} \quad (2.57)$$

де (y_{10}, y_{20}) - центр еліптичного джерела променів, з півосями a_s і b_s , нахиленого на кут θ відносно осей координат в площині джерела.

Підставлення (2.46), (2.51) або (2.57) у рівняння для гравітаційної лінзи (2.2) і подальше спрощення дозволяє перейти до поліноміальної форми системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, t) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, t) = 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

Наступним етапом є перетворення функцій F_1 та F_2 та застосування формули для результанта (2.17) та вже визначеною матрицею Сільвестра (2.13) для виключення змінної t .

Отриманий вираз визначає прообраз джерела в площині лінзи, тобто відповідає зображенню, створеному гравітаційною лінзою, коли джерело є коловим або еліптичним. Результатом перелічених операцій є додаткові розв'язки у отриманому виразі, що відповідають нулям знаменника у рівнянні (2.2).

Отже, після проведених розрахунків, необхідно виявити та видалити ці додаткові корені.

2.2.3 Випадок одноточкової лінзи

Запишемо векторне рівняння N -точкової гравітаційної лінзи (1.171) у координатному вигляді для випадку $N = 1$:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - m \frac{x_1 - a}{(x_1 - a)^2 + (x_1 - b)^2}, \\ y_2 = x_2 - m \frac{x_2 - b}{(x_1 - a)^2 + (x_1 - b)^2}, \end{cases} \quad (2.59)$$

де a, b координати безрозмірного радіус-вектора $\vec{x}_1 = \frac{\vec{\xi}_1}{\xi_0}$ точкової маси $m = 1$, що знаходиться в початку координат площини лінзи, тому:

$$\vec{x}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

Отже, маємо наступну систему рівнянь для одноточкової лінзи:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ y_2 = x_2 - \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \end{cases} \quad (2.61)$$

Запишемо із пункту 2.2.2 раціональну параметризацію колового джерела для довільного розташування кола:

$$\begin{cases} y_1 = y_{10} + r_s \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y_2 = y_{20} + r_s \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad (2.62)$$

де y_{10}, y_{20} — координати центра джерела, r_s — радіус джерела, $t \in [-\infty, +\infty]$ — параметр.

Підставимо тепер вирази y_1 та y_2 із (2.62) у систему рівнянь (2.61):

$$\begin{cases} y_{10} + r_s \frac{1-t^2}{1+t^2} = x_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ y_{20} + r_s \frac{2t}{1+t^2} = x_2 - \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \end{cases} \quad (2.63)$$

Перетворимо окремо перше рівняння системи:

$$y_{10} + r_s \frac{1-t^2}{1+t^2} = x_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (2.64)$$

помножимо ліву та праву частину рівняння на $(1+t^2)(x_1^2 + x_2^2)$, враховуючи, що ці множники не дорівнюють 0, та отримаємо:

$$\begin{aligned} (1+t^2)(x_1^2 + x_2^2)y_{10} + r_s(x_1^2 + x_2^2)(1-t^2) = \\ = (1+t^2)(x_1^2 + x_2^2)x_1 - (1+t^2)x_1. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Розкриємо дужки та переносимо всі доданки в ліву частину:

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2)y_{10} + t^2(x_1^2 + x_2^2)y_{10} + r_s(x_1^2 + x_2^2) - r_s t^2(x_1^2 + x_2^2) - \\ - (x_1^2 + x_2^2)x_1 - t^2(x_1^2 + x_2^2)x_1 + x_1 + t^2 x_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Групуємо за ступенями t :

$$\begin{aligned} t^2 [(x_1^2 + x_2^2)y_{10} - r_s(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)x_1 + x_1] + \\ + [(x_1^2 + x_2^2)y_{10} + r_s(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)x_1 + x_1] = 0, \end{aligned} \quad (2.67)$$

спрощуємо вирази в дужках та помножимо все рівняння на (-1) :

$$\begin{aligned} t^2 \underbrace{[x_1^3 + x_1^2(r_s - y_{10}) + x_1(x_2^2 - 1) + x_2^2(r_s - y_{10})]}_{A_{11}} + \\ + \underbrace{[x_1^3 - x_1^2(r_s + y_{10}) + x_1(x_2^2 - 1) - x_2^2(r_s + y_{10})]}_{C_{11}} = 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Отже, з коефіцієнтами A_{11} та C_{11} рівняння (2.64) перетворюється на поліном другого ступеня $A(t)$

$$A(t) = A_{11}t^2 + C_{11}, \quad (2.69)$$

який прирівнюємо до 0:

$$A_{11}t^2 + C_{11} = 0. \quad (2.70)$$

Аналогічно перетворимо друге рівняння системи:

$$y_{20} + r_s \frac{2t}{1+t^2} = x_2 - \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (2.71)$$

Помножимо обидві частини рівняння на $(1+t^2)(x_1^2 + x_2^2)$, враховуючи, що ці множники не дорівнюють 0, та отримаємо:

$$\begin{aligned} (1+t^2)(x_1^2 + x_2^2)y_{20} + 2tr_s(x_1^2 + x_2^2) = \\ = (1+t^2)(x_1^2 + x_2^2)x_2 - (1+t^2)x_2. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Розкриваємо дужки та переносимо всі доданки в ліву частину:

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2)y_{20} + t^2(x_1^2 + x_2^2)y_{20} + 2tr_s(x_1^2 + x_2^2) - \\ - (x_1^2 + x_2^2)x_2 - t^2(x_1^2 + x_2^2)x_2 + x_2 + t^2 x_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Згрупуємо всі доданки за степенями t :

$$t^2 [(x_1^2 + x_2^2)y_{20} - (x_1^2 + x_2^2)x_2 + x_2] + t [2r_s(x_1^2 + x_2^2)] + [(x_1^2 + x_2^2)y_{20} - (x_1^2 + x_2^2)x_2 + x_2] = 0, \quad (2.74)$$

перетворимо вирази в дужках та помножимо обидві частини рівняння на (-1) :

$$t^2 \underbrace{[x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - (x_1^2 + x_2^2)y_{20}]}_{A_{12}} + t \underbrace{[-2r_s(x_1^2 + x_2^2)]}_{B_{12}} + \underbrace{[x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - (x_1^2 + x_2^2)y_{20}]}_{C_{12}} = 0. \quad (2.75)$$

Отже, з коефіцієнтами A_{12} , B_{12} та C_{12} рівняння (2.71) перетворюється на поліном другого ступеня $B(t)$

$$A(t) = A_{12}t^2 + B_{12}t + C_{12}, \quad (2.76)$$

який прирівнюємо до 0:

$$A_{12}t^2 + B_{12}t + C_{12} = 0. \quad (2.77)$$

Остаточно,

$$\begin{cases} A_{11}t^2 + C_{11} = 0, \\ A_{12}t^2 + B_{12}t + C_{12} = 0, \end{cases} \quad (2.78)$$

де коефіцієнти A_{11} , C_{11} , A_{12} , B_{12} , C_{12} визначаються таким чином:

$$\begin{cases} A_{11} = x_1^3 + x_1^2(r_s - y_{10}) + x_1(x_2^2 - 1) + x_2^2(r_s - y_{10}), \\ C_{11} = x_1^3 - x_1^2(r_s + y_{10}) + x_1(x_2^2 - 1) - x_2^2(r_s + y_{10}), \\ A_{12} = x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - (x_1^2 + x_2^2)y_{20}, \\ B_{12} = -2r_s(x_1^2 + x_2^2), \\ C_{12} = x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - (x_1^2 + x_2^2)y_{20}. \end{cases} \quad (2.79)$$

Також необхідно зазначити, що у знайдених поліноміальних коефіцієнтах, перший індекс вказує на випадок $N = 1$ (одноточкова гравітаційна лінза), а другий - позначає номер рівняння вихідної (2.63) та нової (2.78) систем.

Наступний етап розв'язання потребує складання матриці Сільвестра за її визначенням (2.13). Для поліномів другого ступеня $A(t)$ та $B(t)$, утворена матриця буде мати розміри 2×2 , отже:

$$S_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 & C_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & B_{12} & C_{12} \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

де у випадку одноточкової лінзи, для наочності, ми додали індекс 1 у позначенні матриці S .

Знайдемо детермінант записаної матриці Сільвестра, розкладаючи за першим рядком кожен з визначників, які будемо отримувати:

$$\begin{aligned}
\det S_1 &= \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 & C_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & B_{12} & C_{12} \end{vmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & C_{11} \\ B_{12} & C_{12} & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} \end{vmatrix} + C_{11} \begin{vmatrix} 0 & A_{11} & C_{11} \\ A_{12} & B_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & C_{12} \end{vmatrix} = \\
&= A_{11}^2 \begin{vmatrix} C_{12} & 0 \\ B_{12} & C_{12} \end{vmatrix} + A_{11} C_{11} \begin{vmatrix} B_{12} & C_{12} \\ A_{12} & B_{12} \end{vmatrix} - A_{11} C_{11} \begin{vmatrix} A_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} \end{vmatrix} + C_{11}^2 \begin{vmatrix} A_{12} & B_{12} \\ 0 & A_{12} \end{vmatrix} = \\
&= A_{11}^2 C_{12}^2 + A_{11} C_{11} (B_{12}^2 - A_{12} C_{12}) - A_{11} A_{12} C_{11} C_{12} + A_{12}^2 C_{11}^2 = \\
&= A_{11}^2 C_{12}^2 + A_{11} B_{12}^2 C_{11} - A_{11} A_{12} C_{11} C_{12} - A_{11} A_{12} C_{11} C_{12} + A_{12}^2 C_{11}^2 = \\
&= A_{11}^2 C_{12}^2 + A_{11} B_{12}^2 C_{11} - 2 A_{11} A_{12} C_{11} C_{12} + A_{12}^2 C_{11}^2 = \\
&= (A_{11} C_{12} - A_{12} C_{11})^2 + A_{11} B_{12}^2 C_{11}.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Підставимо тепер у вираз (2.81) коефіцієнти, визначені у (2.79):

$$\begin{aligned}
&(A_{11} C_{12} - A_{12} C_{11})^2 + A_{11} B_{12}^2 C_{11} = \\
&= ((x_1^3 + x_1^2(r_s - y_{10}) + x_1(x_2^2 - 1) + x_2^2(r_s - y_{10}))) \cdot \\
&\quad \cdot (x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - (x_1^2 + x_2^2)y_{20}) - \\
&-(x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - (x_1^2 + x_2^2)y_{20})^2 + (x_1^3 + x_1^2(r_s - y_{10}) + \\
&\quad + x_1(x_2^2 - 1) + x_2^2(r_s - y_{10}))(-2r_s(x_1^2 + x_2^2))^2 \cdot \\
&\quad \cdot (x_1^3 + x_1^2(r_s - y_{10}) + x_1(x_2^2 - 1) + x_2^2(r_s - y_{10})) \cdot \\
&\quad \cdot (x_1^3 - x_1^2(r_s + y_{10}) + x_1(x_2^2 - 1) - x_2^2(r_s + y_{10})).
\end{aligned} \tag{2.82}$$

За допомогою програми *Wolfram Mathematica* спростуємо вираз (Рис. 2.15)

```

A11 = x1^3 + x1^2 (rs - y10) + x1 (x2^2 - 1) + x2^2 (rs - y10);
A12 = x2 (x1^2 + x2^2 - 1) - (x1^2 + x2^2) y20;
C11 = x1^3 - x1^2 (rs + y10) + x1 (x2^2 - 1) - x2^2 (rs + y10);
C12 = x2 (x1^2 + x2^2 - 1) - (x1^2 + x2^2) y20;
B12 = -2 rs (x1^2 + x2^2);

expr = (A11 C12 - A12 C11)^2 + A11 B12^2 C11;
exprSimplified = FullSimplify[expr]

```

Рис. 2.15: Код спрощення виразу визначника у *Wolfram Mathematica*

та отримаємо:

$$\begin{aligned}
&(A_{11} C_{12} - A_{12} C_{11})^2 + A_{11} B_{12}^2 C_{11} = \\
&= 4r_s^2 (x_1^2 + x_2^2)^3 (1 - x_1^2 r_s^2 - x_2^2 r_s^2 - 2x_1^3 y_{10} + x_1^2 y_{10}^2 + x_2^2 y_{20}^2 - \\
&\quad 2x_2 x_1^2 y_{20} - 2x_2^2 x_1 y_{10} + 2x_1 y_{10} + x_2^2 y_{10}^2 + x_2^2 y_{20}^2 - \\
&\quad 2x_2^3 y_{20} + 2x_2 y_{20} + x_1^4 + 2x_2^2 x_1^2 - 2x_1^2 + x_2^4 - 2x_2^2).
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Згадаємо, що рівняння (2.78) мають спільні розв'язки лише за виконання необхідної ($\det P = 0$) і достатньої умови $R(f, g) = 0$. Тому знайдений визначник є результатом, який ми прирівнюємо до нуля:

$$\begin{aligned}
R(A(x), B(x)) &= 4r_s^2 (x_1^2 + x_2^2)^3 (1 - x_1^2 r_s^2 - x_2^2 r_s^2 - 2x_1^3 y_{10} + \\
&\quad + x_1^2 y_{10}^2 + x_2^2 y_{20}^2 - 2x_2 x_1^2 y_{20} - 2x_2^2 x_1 y_{10} + 2x_1 y_{10} + x_2^2 y_{10}^2 + \\
&\quad + x_2^2 y_{20}^2 - 2x_2^3 y_{20} + 2x_2 y_{20} + x_1^4 + 2x_2^2 x_1^2 - 2x_1^2 + x_2^4 - 2x_2^2) = 0.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Множник $4r_s^2 (x_1^2 + x_2^2)^3$ можна скоротити, адже 4 - це константа, $(x_1^2 + x_2^2)^3$ як знаменник не може дорівнювати нулю, а нульовий квадрат радіуса джерела r_s^2 буде утворювати одиничне коло.

Отже, рівняння, за яким можна знайти зображення колового джерела променів в загальному вигляді, запишемо так:

$$\begin{aligned}
&x_1^4 - 2x_1^3 y_{10} + x_1^2 (2x_2^2 + y_{10}^2 + y_{20}^2 - 2x_2 y_{20} - 2 - r_s^2) + \\
&+ x_2^2 ((x_2 - y_{20})^2 + y_{10}^2 - 2 - r_s^2) - 2(x_2^2 - 1)x_1 y_{10} + 2x_2 y_{20} + 1 = 0.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

або

$$\begin{aligned}
& x_1^4 - 2x_1^3y_{10} + 2x_1^2x_2^2 + x_1^2y_{10}^2 + x_1^2y_{20}^2 - 2x_1^2x_2y_{20} - \\
& - 2x_1^2 - r_s^2x_1^2 + x_2^2y_{20}^2 + 2x_2^2y_{20} + x_2^4 - 2x_2^2 - 2x_2^3y_{20} + \\
& + x_2^2y_{10}^2 - x_2^2r_s^2 - 2x_2^2x_1y_{10} + 2x_1y_{10} + 2x_2y_{20} + 1 = 0.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Розглянемо тепер різні варіанти роташування центру колового джерела променів.

Випадок I. Колове джерело розміщується у початку координат

Підставимо у рівняння (2.86) наступні значення координат точки центру координат $(y_{10}; y_{20}) = (0; 0)$:

$$x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2 - r_s^2x_1^2 + x_2^4 - 2x_2^2 - x_2^2r_s^2 + 1 = 0. \tag{2.87}$$

Перепишемо вираз у вигляді суми квадратів та їх комбінацій. Для цього введемо позначення $z = x_1^2 + x_2^2$, тоді:

$$z^2 - (2 + r_s^2)z + 1 = 0. \tag{2.88}$$

Дискримінант цього квадратного рівняння:

$$D = (2 + r_s^2)^2 - 4 = 4r_s^2 + r_s^4 - 4 = r_s^2(r_s^2 + 4), \tag{2.89}$$

тому корені рівняння будуть дорівнювати:

$$z_{1,2} = \frac{(2 + r_s^2) \pm \sqrt{(2 + r_s^2)^2 - 4}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(4 + 2r_s^2 \pm r_s \sqrt{r_s^2 + 4} \right), \tag{2.90}$$

тому

$$z_{1,2} = \frac{1}{4} (\sqrt{r_s^2 + 4} \pm r_s)^2. \tag{2.91}$$

Тоді початкове рівняння (2.87) можна розкласти на множники:

$$(x_1^2 + x_2^2 - z_1)(x_1^2 + x_2^2 - z_2) = 0 \tag{2.92}$$

Введемо нові позначення $r_{1,2}^2 = z_{1,2}$, та відповідно маємо таке рівняння:

$$(x_1^2 + x_2^2 - r_1^2)(x_1^2 + x_2^2 - r_2^2) = 0, \tag{2.93}$$

та отримуємо рівняння двох кіл з радіусами r_1, r_2 відповідно:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = r_1^2 \\ x_1^2 + x_2^2 = r_2^2. \end{cases} \tag{2.94}$$

Для прикладу, припустимо, що радіус джерела r_s дорівнює 0.2. На першому графіку на Рис.2.16 зображено джерело, коло одиничного радіуса, сине та аквамаринове кільця Ейнштейна (шукані зображення джерела), шириною $\Delta r = r_2 - r_1 = r_s$.

Випадок II. Колове джерело дотикається до початку координат

Припустимо тепер, що координати центру джерела $(y_{10}; y_{20}) = (0; r_s)$, тоді перетворимо рівняння (2.86) таким чином:

$$\begin{aligned}
& x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2r_s - 2x_1^2 + 2x_2^2r_s + \\
& + x_2^4 - 2x_2^2 - 2x_2^3r_s + 2x_2r_s + 1 = 0.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Розкладаємо вираз на множники:

$$(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 - 2x_2r_s(x_1^2 - 2x_2^2 + 1) = 0. \tag{2.96}$$

На другому графіку на Рис.2.16 маємо джерело ($r_s = 0.2$) та зображення джерела: сіне одиничне коло радіусу $r_1 = 1$, а також аквамаринове коло, з радіусом $\sqrt{r_s^2 + 1}$. Треба помітити, що центр обох цих кіл знаходиться на початку координат.

Випадок III. Довільно розташоване колове джерело

Припустимо тепер, що центр колового джерела знаходиться у довільній точці й розглянемо два випадки.

Точка центру джерела має координати $(y_{10}; y_{20})$:

a) $(0.15; 0.3)$;

b) $(-0.4; -0.4)$.

При цьому, як і в попередніх випадках, радіус джерела світла $r_s = 0.2$. Враховуючи довільне розташування джерела, будемо використовувати загальний вигляд рівняння (2.86).

Отже, як видно на третьому та четвертому графіках Рис.2.16, ми отримали криві-зображення (розплючені поблизу границі одиничного кола). Для випадку *IIIa* - джерело розташоване у першому квадранті, а у випадку *IIIb* - у третьому квадранті координатної площини.

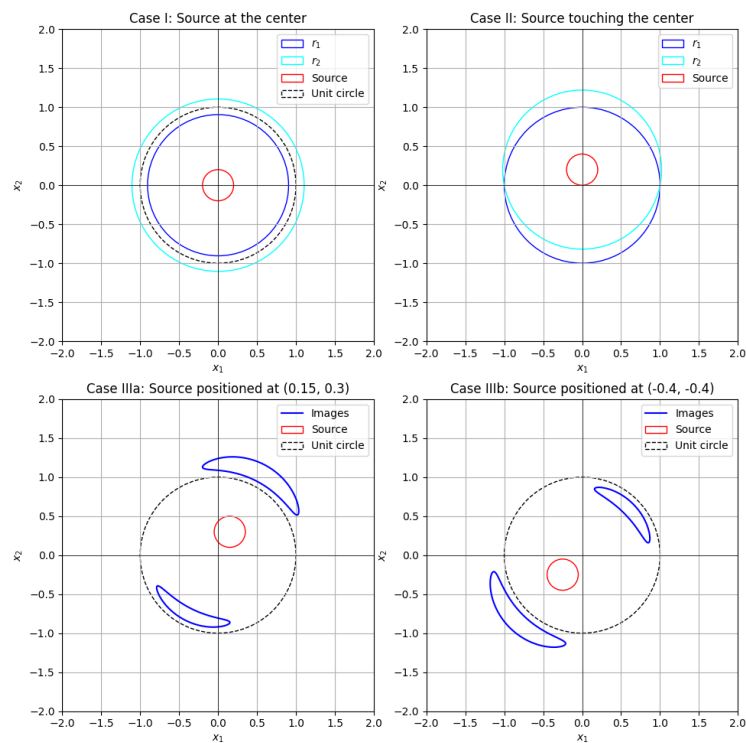


Рис. 2.16: Зображення колового джерела радіуса r_s в одноквотній гравітаційній лінзі. Випадок *I*: джерело, зображене червоним колом, розміщується в початку координат, а межі зображення представлені синіми колами з радіусами r_1 і r_2 ; випадок *II*: джерело торкається центру координат, а межі зображення представлені синіми та аквамариновими колами з радіусами r_1 і r_2 відповідно; випадки *IIIa* і *IIIb*: центр джерела розміщений в точках $(0.15, 0.3)$ та $(-0.4, -0.4)$ відповідно, а межі зображення представлені синіми замкненими кривими.

У Додатку №1 розміщений код побудови знайдених зображень колового джерела для різних випадків його розташування у площині джерела Рис. 2.16 на мові програмування *Python*.

2.2.4 Випадок бінарної лінзи

Бінарну лінзу Рис.2.1 ми детально розглядали у пункті 2.1, отже запишемо деякі результати, отримані раніше для випадку $N = 2$.

Запишемо систему рівнянь для бінарної гравітаційної лінзи:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - m_1 \frac{x_1 - a_1}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - b_1)^2} + m_2 \frac{x_1 - a_2}{(x_1 - a_2)^2 + (x_2 - b_2)^2}, \\ y_2 = x_2 - m_2 \frac{x_2 - b_1}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - b_1)^2} + m_2 \frac{x_1 - b_2}{(x_1 - a_2)^2 + (x_2 - b_2)^2}. \end{cases} \quad (2.97)$$

Дві точкові маси m_1 та m_2 лежать на вісі x_1 на однаковій відстані a від початку координат ($b_i = 0$). Для зручності розташуємо центр ваги лінзи в початку координат:

$$m_{1,2} = \pm \frac{a_{2,1}}{a_2 - a_1}. \quad (2.98)$$

У випадку симетричної лінзи відстані $a_1 = a_2 = a$, а тому маси дорівнюватимуть $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$.

У загальному випадку розташування двох точкових лінз система рівнянь (2.97) з визначеними за формулою (2.98) масами запишемо так:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{a_2(x_1 - a_1)}{(a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)} + \frac{a_1(x_1 - a_2)}{(a_2 - a_1)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)}, \\ y_2 = x_2 - \frac{a_2 x_2}{(a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)} + \frac{a_1 x_2}{(a_2 - a_1)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)}. \end{cases} \quad (2.99)$$

Рациональну параметризацію (2.46) у випадку довільно розташованого колового джерела підставимо у виведене рівняння (2.99):

$$\begin{cases} y_{10} + r_s \frac{1-t^2}{1+t^2} = x_1 - \frac{a_2(x_1 - a_1)}{(a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)} + \frac{a_1(x_1 - a_2)}{(a_2 - a_1)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)}, \\ y_{20} + r_s \frac{2t}{1+t^2} = x_2 - \frac{a_2 x_2}{(a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)} + \frac{a_1 x_2}{(a_2 - a_1)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)}. \end{cases} \quad (2.100)$$

Перетворимо спочатку окремо перше рівняння системи:

$$y_{10} + r_s \frac{1-t^2}{1+t^2} = x_1 - \frac{1}{(a_2 - a_1)} \cdot \left(\frac{a_2(x_1 - a_1)}{((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)} - \frac{a_1(x_1 - a_2)}{((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)} \right), \quad (2.101)$$

помножимо обидві частини рівняння на $(1+t^2)$, $(a_2 - a_1)$, $((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)$, $((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)$, враховуючи, що ці множники не дорівнюють 0, тому маємо:

$$\begin{aligned} & y_{10}(1+t^2)(a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) + \\ & + r_s(1-t^2)(a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) - \\ & - x_1(1+t^2)(a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) + \\ & + (1+t^2)(a_2(x_1 - a_1)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) - \\ & - a_1(x_1 - a_2)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)) = 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Групування за степенями t :

$$\begin{aligned} & t^2((a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)(y_{10} - r_s - x_1) + \\ & + a_2(x_1 - a_1)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) - a_1(x_1 - a_2)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)) + \\ & + ((a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)(y_{10} + r_s - x_1) + \\ & + a_2(x_1 - a_1)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) - a_1(x_1 - a_2)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)) = 0 \end{aligned} \quad (2.103)$$

Вираз помножений на t^2 дорівнює коефіцієнту A_{21} , та вільний член, що залишився, буде коефіцієнтом C_{21} , де перший індекс 2 позначає те, що ми розглядаємо бінарну лінзу.

Аналогічно зводимо друге рівняння системи до полінома другого ступеня:

$$y_{20} + r_s \frac{2t}{1+t^2} = x_2 - \frac{x_2}{(a_2 - a_1)} \cdot \left(\frac{a_2}{((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)} - \frac{a_1}{((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)} \right), \quad (2.104)$$

помножимо обидві частини рівняння на $(1+t^2)$, $(a_2 - a_1)$, $((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)$, $((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)$, враховуючи, що ці множники не дорівнюють 0, тому маємо:

$$y_{20}((1+t^2)(a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)) + 2tr_s(a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) - x_2(a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) + x_2(a_2((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) - a_1((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)) = 0. \quad (2.105)$$

Спростимо отриманий вираз та згрупуємо за степенями t :

$$t^2 y_{20} (a_2 - a_1) \left((x_1 - a_1)^2 + x_2^2 \right) \left((x_1 - a_2)^2 + x_2^2 \right) + 2tr_s (a_2 - a_1) \left((x_1 - a_1)^2 + x_2^2 \right) \left((x_1 - a_2)^2 + x_2^2 \right) + \left[(a_2 - a_1) \left((x_1 - a_1)^2 + x_2^2 \right) \left((x_1 - a_2)^2 + x_2^2 \right) y_{20} - x_2 (a_2 - a_1) \left((x_1 - a_1)^2 + x_2^2 \right) \left((x_1 - a_2)^2 + x_2^2 \right) + x_2 \left(a_2 \left((x_1 - a_2)^2 + x_2^2 \right) - a_1 \left((x_1 - a_1)^2 + x_2^2 \right) \right) \right] = 0. \quad (2.106)$$

Вираз помножений на t^2 дорівнює коефіцієнту A_{22} , множник при t є коефіцієнтом B_{22} , а вільний член буде дорівнювати C_{22} .

Тобто маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_{21}t^2 + C_{21} = 0, \\ A_{22}t^2 + B_{22}t + C_{22} = 0, \end{cases} \quad (2.107)$$

де коефіцієнти A_{21} , C_{21} , A_{22} , B_{22} , C_{22} можуть бути записані таким чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{21} = (a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)(y_{10} - r_s - x_1) + \\ \quad + a_2(x_1 - a_1)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) - a_1(x_1 - a_2)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2), \\ C_{21} = (a_2 - a_1)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2)(y_{10} + r_s - x_1) + \\ \quad + a_2(x_1 - a_1)((x_1 - a_2)^2 + x_2^2) - a_1(x_1 - a_2)((x_1 - a_1)^2 + x_2^2), \\ A_{22} = y_{20} (a_2 - a_1) \left((x_1 - a_1)^2 + x_2^2 \right) \left((x_1 - a_2)^2 + x_2^2 \right), \\ B_{22} = 2r_s (a_2 - a_1) \left((x_1 - a_1)^2 + x_2^2 \right) \left((x_1 - a_2)^2 + x_2^2 \right), \\ C_{22} = (a_2 - a_1) \left((x_1 - a_1)^2 + x_2^2 \right) \left((x_1 - a_2)^2 + x_2^2 \right) y_{20} - \\ \quad - x_2 (a_2 - a_1) \left((x_1 - a_1)^2 + x_2^2 \right) \left((x_1 - a_2)^2 + x_2^2 \right) + \\ \quad + x_2 \left(a_2 \left((x_1 - a_2)^2 + x_2^2 \right) - a_1 \left((x_1 - a_1)^2 + x_2^2 \right) \right). \end{array} \right. \quad (2.108)$$

Запишемо тепер матрицю Сільвестра за формулою (2.13). Для поліномів другого ступеня $A(t)$ та $B(t)$, утворена матриця буде мати розміри 2×2 , отже:

$$S_2 = \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & C_{21} & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & C_{21} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} & 0 \\ 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$

де у випадку бінарної лінзи, для наочності, ми додали індекс 2 у позначенні матриці S .

Знайдемо детермінант записаної матриці Сільвестра, розкладаючи за першим рядком кожен з визначників, які будемо отримувати:

$$\begin{aligned}
\det S_2 &= \begin{vmatrix} A_{21} & 0 & C_{21} & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & C_{21} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} & 0 \\ 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} \end{vmatrix} = A_{21} \begin{vmatrix} A_{21} & 0 & C_{21} \\ B_{22} & C_{22} & 0 \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} \end{vmatrix} + C_{21} \begin{vmatrix} 0 & A_{21} & C_{21} \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & A_{22} & C_{22} \end{vmatrix} = \\
&= A_{21}^2 \begin{vmatrix} C_{22} & 0 \\ B_{22} & C_{22} \end{vmatrix} + A_{21} C_{21} \begin{vmatrix} B_{22} & C_{22} \\ A_{22} & B_{22} \end{vmatrix} - A_{21} C_{21} \begin{vmatrix} A_{22} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{vmatrix} + C_{21}^2 \begin{vmatrix} A_{22} & B_{22} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = \\
&= A_{21}^2 C_{22}^2 + A_{21} C_{21} (B_{22}^2 - A_{22} C_{22}) - A_{21} A_{22} C_{21} C_{22} + A_{21}^2 C_{21}^2 = \\
&= A_{21}^2 C_{22}^2 + A_{21} B_{22}^2 C_{21} - A_{21} A_{22} C_{21} C_{22} - A_{21} A_{22} C_{21} C_{22} + A_{21}^2 C_{21}^2 = \\
&= A_{21}^2 C_{22}^2 + A_{21} B_{22}^2 C_{21} - 2A_{21} A_{22} C_{1} C_{22} + A_{21}^2 C_{21}^2 = \\
&= (A_{21} C_{22} - A_{22} C_{21})^2 + A_{21} B_{22}^2 C_{21}.
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Підставимо тепер у кінцеву формулу (2.110) коефіцієнти, визначені у (2.108), проведемо процес спрощення й групування у програмі *Wolfram Mathematica*. У Додатку №2 наведено код програми для спрощення результату R_2 .

$$\begin{aligned}
R_2 &= (4(a_1 - a_2)^2 r_s^2 ((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)^2 ((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)^2 (-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + \\
&\quad + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) \cdot \\
&\quad \cdot (-r_s - x_1 + y_{10}))(-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + \\
&\quad + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(r_s - x_1 + y_{10})) + ((-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) \cdot \\
&\quad \cdot ((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + \\
&\quad + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(r_s - x_1 + y_{10}))y_{20} - \\
&\quad - (-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + \\
&\quad + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(-r_s - x_1 + y_{10})) \cdot \\
&\quad \cdot (-((-a_1 + a_2)x_2((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)) + x_2(-a_1((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + \\
&\quad + a_2((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)) + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)y_{20})^2.
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Можемо розбити отриманий складний вираз на добуток декількох множників та віднести кожен з них до одного з двох результатів R_1 чи R_2 :

$$R_2 = R_{21} \cdot R_{22}, \tag{2.112}$$

де результати визначені наступним чином:

$$R_{21} = 4(a_1 - a_2)^2 r_s^2 ((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)^2 ((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)^2 \tag{2.113}$$

та

$$\begin{aligned}
R_{22} &= (-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + \\
&\quad + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(-r_s - x_1 + y_{10})) \cdot \\
&\quad \cdot (-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + \\
&\quad + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(r_s - x_1 + y_{10})) + \\
&\quad + ((-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) \cdot \\
&\quad \cdot (-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + \\
&\quad + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(r_s - x_1 + y_{10}))y_{20} - \\
&\quad - (-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + \\
&\quad + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(-r_s - x_1 + y_{10})) \cdot \\
&\quad \cdot [-((-a_1 + a_2)x_2((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)) + \\
&\quad + x_2(-a_1((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)) + \\
&\quad + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)y_{20})^2.
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Як зазначено у статті [11] А.Т. Котвицького та Š. Pařimucha: ”Перший множник R_{21} не утворює зображень джерела, а відповідає побічним, не фізичним, ров’язкам розглянутих поліномів...”.

Отже, рівняння, яке описує зображення колового джерела у бінарній гравітаційній лінзі виглядатиме таким чином:

$$R_{22} = 0. \quad (2.115)$$

або

$$\begin{aligned} & (-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + \\ & + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(-r_s - x_1 + y_{10})) \cdot \\ & \cdot (-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + \\ & + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(r_s - x_1 + y_{10})) + \\ & + ((-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)) \cdot \\ & \cdot (-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + \\ & + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(r_s - x_1 + y_{10})) y_{20} - \\ & - (-a_1(-a_2 + x_1)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2(-a_1 + x_1)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2) + \\ & + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)(-r_s - x_1 + y_{10})) \cdot \\ & \cdot [-((-a_1 + a_2)x_2((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)) + \\ & + x_2(-a_1((a_1 - x_1)^2 + x_2^2) + a_2((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)) + \\ & + (-a_1 + a_2)((a_1 - x_1)^2 + x_2^2)((a_2 - x_1)^2 + x_2^2)y_{20})^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Побудуємо бінарну гравітаційну лінзу з визначеними параметрами:

$$a_1 = -a, a_2 = 1.5a, \quad (2.117)$$

де a - це відстань від початку координат до маси m_1 . Тоді оберемо значення $a = 0.5$, а радіус джерела $r_s = 0.15$.

За рівняннями (2.98), (2.117) та вже обраними значеннями параметру a , ми можемо знайти безрозмірні маси:

$$m_1 = \frac{3}{5}, m_2 = \frac{2}{5}. \quad (2.118)$$

Розглянемо чотири випадки розташування джерела променів і, залежно від цього, вивчимо кількість одержуваних зображень.

Випадок I. Центр джерела знаходиться у точці $(0;0)$ та повністю всередині каустики.

Для такого розташування колового джерела характерно утворення п’яти зображень, які мають вигляд замкнених кривих. На першому графіку (Рис. 2.17, *Case I*) видно, що для трьох зображень, віссю симетрії є вісь x_1 , а ще два - перетинають вісь x_2 у симетричних відносно вісі абсцис точках.

Випадок II. Центр джерела знаходиться у точці $(0.75; 0)$ поза межами каустики.

За такого вибору координат центру джерела (Рис. 2.17, *Case II*), коли джерело ззовні каустики, і не перетинає її, то ми побачимо три зображення, які належатимуть координатній вісі x_1 - їх вісі симетрії.

Випадок III. Центр джерела знаходиться у точці $(0.05; -0.45)$ і перетинає каустику в 2 точках.

Коли центр джерела перетинає каустику та наближається ззовні (Рис. 2.17, *Case III*), ми спостерігаємо появу чотирьох зображень. І лише одне з них, разом із коловим джерелом, перетинає координатну вісь x_2 . Якщо ми будемо віддаляти джерело від каустики, то четверте зображення зникне та ми отримаємо три зображення.

Випадок IV. Центр джерела знаходиться у точці $(-0.25; 0.25)$ і перетинає каустику в трьох внутрішніх точках кола.

Розглянуте у поданому випадку розташування колового джерела відповідає трьом зображенням, які мають вигляд замкнених кривих. На четвертому графіку (Рис. 2.17, *Case IV*) легко побачити, що одне з цих зображень (синя крива у третьому та четвертому квадранті) буде розщеплене на два, коли червоне джерело доторкнеться до каустики ззовні.

За допомогою програми *Wolfram Mathematica*, код можна знайти у Додатку №3, підставляємо параметри у загальне рівняння бінарної гравітаційної лінзи (2.116) та будуємо відповідні графіки (див. Рис. 2.17).

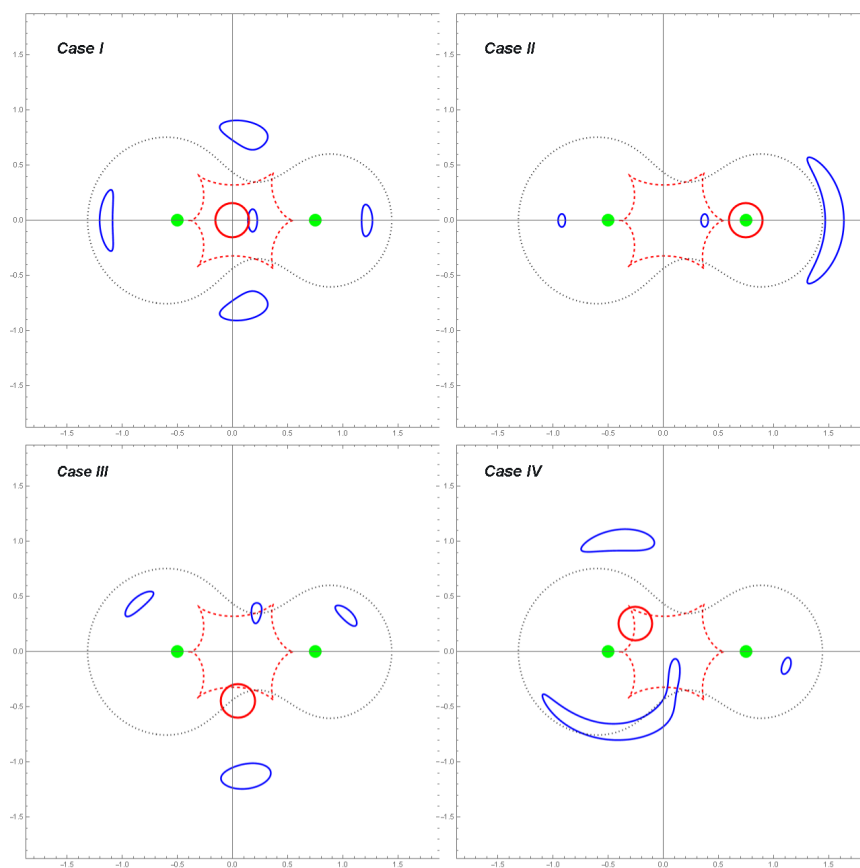


Рис. 2.17: Зображення колового джерела у бінарній гравітаційній лінзі, яка складається з двох салатових точкових мас $m_1 = \frac{3}{5}$, $m_2 = \frac{2}{5}$. Червоне коло зображує джерело, пунктирна червона та чорна криві — це каустика і критична крива відповідно. В залежності від розташування джерела, кількість синіх замкнених кривих зображень варюється від 3 до 5.

У Додатку №3 розміщений код побудови знайдених зображень колового джерела у бінарній гравітаційній лінзі для різних випадків його розташування у площині джерела Рис. 2.17 у програмі *Wolfram Mathematica*.

Розділ 3

Побудова зображення еліптичного джерела у одноточковій гравітаційній лінзі

У новому розділі узагальнемо вже описаний нами метод виключення та розглянемо джерело променів еліптичної форми (Рис.3.1). Для цього використаємо раціональну параметризацію (2.57) для довільного еліпсу, вісі симетрії якого нахилені на кут θ відносно осей x_1, x_2 та співпадають з осями x'_1, x'_2 штрихованої системи координат.

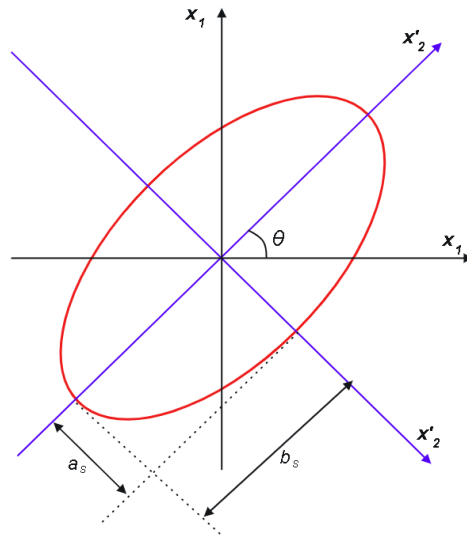


Рис. 3.1: Довільно розташоване еліптичне джерело з півосями a_s, b_s у звичайній (x_1, x_2) та штрихованій системі координат (x'_1, x'_2)

Підставимо параметризацію (2.57) у координатне рівняння одноточкової гравітаційної лінзи (2.61) та отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_{10} + a_s \frac{1-t^2}{1+t^2} \cos \theta - b_s \frac{2t}{1+t^2} \sin \theta = x_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ y_{20} + a_s \frac{1-t^2}{1+t^2} \sin \theta + b_s \frac{2t}{1+t^2} \cos \theta = x_2 - \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Помножимо обидві частини рівнянь на $(1 + t^2)$ і $(x_1^2 + x_2^2)$, щоб позбутися знаменників. Врахуємо також, що ці множники не дорівнюють нулю, отже:

$$\begin{cases} \left(y_{10} + a_s \frac{1-t^2}{1+t^2} \cos \theta - b_s \frac{2t}{1+t^2} \sin \theta \right) (1+t^2)(x_1^2 + x_2^2) - \\ - x_1 \left(1 - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) (1+t^2)(x_1^2 + x_2^2) = 0, \\ \left(y_{20} + a_s \frac{1-t^2}{1+t^2} \sin \theta + b_s \frac{2t}{1+t^2} \cos \theta \right) (1+t^2)(x_1^2 + x_2^2) - \\ - x_2 \left(1 - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \right) (1+t^2)(x_1^2 + x_2^2) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Спростуємо кожне рівняння:

$$\begin{cases} \left(y_{10}(1+t^2) + a_s(1-t^2) \cos \theta - 2b_s t \sin \theta \right) (x_1^2 + x_2^2) - \\ - x_1 \left((x_1^2 + x_2^2) - 1 \right) (1+t^2) = 0, \\ \left(y_{20}(1+t^2) + a_s(1-t^2) \sin \theta + 2b_s t \cos \theta \right) (x_1^2 + x_2^2) - \\ - x_2 \left((x_1^2 + x_2^2) - 1 \right) (1+t^2) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Групуємо члени за степенями t :

$$\begin{cases} t^2(y_{10} - a_s \cos \theta - x_1((x_1^2 + x_2^2) - 1))(x_1^2 + x_2^2) - \\ - 2b_s t \sin \theta (x_1^2 + x_2^2) + (y_{10} + a_s \cos \theta - x_1((x_1^2 + x_2^2) - 1)) = 0, \\ t^2(y_{20} - a_s \sin \theta - x_2((x_1^2 + x_2^2) - 1))(x_1^2 + x_2^2) + \\ + 2b_s t \cos \theta (x_1^2 + x_2^2) + (y_{20} + a_s \sin \theta - x_2((x_1^2 + x_2^2) - 1)) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Остаточно, система поліномальних рівнянь $A(t) = 0$ і $B(t) = 0$ буде такою:

$$\begin{cases} A_{11}t^2 + B_{11}t + C_{11} = 0, \\ A_{12}t^2 + B_{12}t + C_{12} = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

де коефіцієнти поліномів дорівнюють:

$$\begin{cases} A_{11} = (y_{10} - a_s \cos \theta)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^3 - x_1(x_2^2 - 1), \\ B_{11} = -2b_s \sin \theta (x_1^2 + x_2^2), \\ C_{11} = (a_s \cos \theta + y_{10})(x_1^2 + x_2^2) - x_1^3 - x_1(x_2^2 - 1), \\ A_{12} = (y_{20} - a_s \sin \theta)(x_1^2 + x_2^2) - x_2^3 - x_2(x_1^2 - 1), \\ B_{12} = 2b_s \cos \theta (x_1^2 + x_2^2), \\ C_{12} = (a_s \sin \theta + y_{20})(x_1^2 + x_2^2) - x_2^3 - x_2(x_1^2 - 1). \end{cases} \quad (3.6)$$

Перший індекс, як і для колового джерела, відповідає випадку одноточкової лінзи $N = 1$.

Не складно побачити, що матриця Сільвестра у випадку еліптичного джерела має вигляд:

$$S_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & 0 \\ 0 & A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & B_{12} & C_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Знайдемо детермінант записаної матриці Сільвестра:

$$\begin{aligned}
 \det S_1 &= \begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & 0 \\ 0 & A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & B_{12} & C_{12} \end{vmatrix} = \\
 &= A_{11} \begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ B_{12} & C_{12} & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} \end{vmatrix} + B_{11} \begin{vmatrix} 0 & B_{11} & C_{11} \\ A_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & B_{12} & C_{12} \end{vmatrix} + C_{11} \begin{vmatrix} 0 & A_{11} & C_{11} \\ A_{12} & B_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & C_{12} \end{vmatrix} = \\
 &= (A_{11}C_{12} - A_{12}C_{11})^2 - B_{11}B_{12}(A_{11}C_{12} + A_{12}C_{11}) + \\
 &\quad + A_{11}B_{12}^2C_{11} + A_{12}B_{11}^2C_{12}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Підставимо тепер у многочлен (3.8) коефіцієнти, визначені у (3.6), та отримаємо вираз для результанту R_1 :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 4(x_1^2 + x_2^2)^2(b_s^2 \cos^2 \theta((x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{10})^2 - \\
 &\quad - a_s^2(x_1^2 + x_2^2)^2 \cos^2 \theta) + \\
 &\quad + a_s^2((-x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)y_{20}) \cos \theta + \\
 &\quad + (x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{10}) \sin \theta)^2 + \\
 &\quad + b_s^2 \sin^2 \theta((x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{20})^2 - \\
 &\quad - a_s^2(x_1^2 + x_2^2)^2 \sin^2 \theta) + \\
 &\quad + b_s^2 \cos \theta \sin \theta(2(x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{10}) \cdot \\
 &\quad \cdot (x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{20}) - a_s^2(x_1^2 + x_2^2)^2 \sin(2\theta)))
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

та прирівнюємо його до 0:

$$\begin{aligned}
 &4(x_1^2 + x_2^2)^2(b_s^2 \cos^2 \theta((x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{10})^2 - \\
 &\quad - a_s^2(x_1^2 + x_2^2)^2 \cos^2 \theta) + \\
 &\quad + a_s^2((-x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)y_{20}) \cos \theta + \\
 &\quad + (x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{10}) \sin \theta)^2 + \\
 &\quad + b_s^2 \sin^2 \theta((x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{20})^2 - \\
 &\quad - a_s^2(x_1^2 + x_2^2)^2 \sin^2 \theta) + \\
 &\quad + b_s^2 \cos \theta \sin \theta(2(x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{10}) \cdot \\
 &\quad \cdot (x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{20}) - a_s^2(x_1^2 + x_2^2)^2 \sin(2\theta))) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Перший множник не впливає на побудову зображення, отже його можна скоротити:

$$\begin{aligned}
 &b_s^2 \cos^2 \theta((x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{10})^2 - \\
 &\quad - a_s^2(x_1^2 + x_2^2)^2 \cos^2 \theta) + \\
 &\quad + a_s^2((-x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)y_{20}) \cos \theta + \\
 &\quad + (x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{10}) \sin \theta)^2 + \\
 &\quad + b_s^2 \sin^2 \theta((x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{20})^2 - \\
 &\quad - a_s^2(x_1^2 + x_2^2)^2 \sin^2 \theta) + \\
 &\quad + b_s^2 \cos \theta \sin \theta(2(x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{10}) \cdot \\
 &\quad \cdot (x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{20}) - a_s^2(x_1^2 + x_2^2)^2 \sin(2\theta))) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Розглянемо тепер різні варіації роташування центру еліптичного джерела $(y_{10}; y_{20})$ та нахилу його осей симетрії на кут θ відносно головних осей x_1, x_2 .

Випадки I(a,b,c). Еліптичне джерело розміщується вздовж осей x_1, x_2 , тому $\theta = 0$

Підставимо у рівняння (3.11) $\theta = 0$:

$$(b_s^2((x_1(-1 + x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)y_{10})^2 - a_s^2(x_1^2 + x_2^2)^2) + a_s^2((-x_2(-1 + x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)y_{20})^2) = 0. \quad (3.12)$$

Ia. Джерело є канонічним еліпсом, центр якого знаходиться у точці $(y_{10}; y_{20}) = (0; 0)$

У цьому випадку, рівняння (3.12) значно спрощується та виглядає наступним чином:

$$b_s^2(x_1^2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 - a_s^2(x_1^2 + x_2^2)^2) + a_s^2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 x_2^2 = 0, \quad (3.13)$$

або

$$\left(\frac{x_2^2}{a_s^2} + \frac{x_1^2}{b_s}\right) \left(1 - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 = 1. \quad (3.14)$$

У якості прикладу, припустимо, що півосі джерела a_s, b_s дорівнюють тепер 0.4 та 0.2 відповідно (див. Рис.3.2, випадок Ia).

Ib. Джерело є еліпсом, центр якого знаходиться у точці $(y_{10}; y_{20}) = (0; 0.7)$

Тепер припустимо, що півосі джерела a_s, b_s дорівнюють 0.35 та 0.7 відповідно. На другому графіку (див. Рис.3.2) зображено червоне еліптичне джерело та аквамаринові криві, які й будуть шуканими зображеннями.

Ic. Джерело є еліпсом, центр якого знаходиться у точці $(y_{10}; y_{20}) = (0; 0)$

На третьому графіку (див. Рис.3.2) зображено червоне еліптичне джерело з півосями $a_s = 0.05, b_s = 0.5$, сильно притиснуте до вісі x_1 , та аквамаринові криві-зображення.

Випадки II(a,b). Довільно розташоване еліптичне джерело, нахилене на кут $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Припустимо, що центр еліптичного джерела знаходиться у довільній точці й розглянемо два випадки.

Точка центру джерела має координати $(y_{10}; y_{20})$:

a) (0; 1);

b) (0; -0.5).

Тепер припустимо, що півосі джерела a_s, b_s дорівнюють 0.15 та 0.5 відповідно. Маємо характерні зображення (див. Рис.3.3).

Випадок III(a,b). Довільно розташоване еліптичне джерело, нахилене на кут $\theta = \frac{\pi}{3}$

Припустимо, що центр еліптичного джерела знаходиться у довільній точці й розглянемо два випадки.

Точка центру джерела має координати $(y_{10}; y_{20})$:

a) (-0.2; 0.2); b) (0.5; -0.5).

При цьому, півосі джерела a_s, b_s дорівнюють 0.5 та 0.2 відповідно. Враховуючи довільне розташування джерела, будемо використовувати загальний вигляд рівняння (3.11). Маємо характерні аквамаринові зображення (див. Рис.3.4).

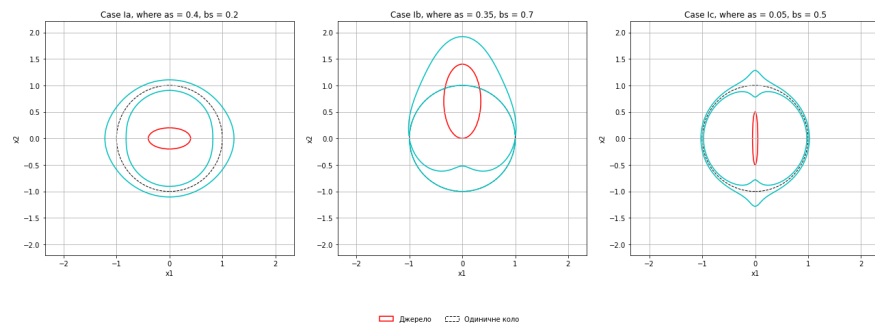


Рис. 3.2: Зображення еліптичного джерела, розміщеного вздовж осей x_1, x_2 ($\theta = 0$), з півосями a_s та b_s в однократковій гравітаційній лінзі у випадках I(a, b, c). Зображення представлені двома аквамариновими кривими.

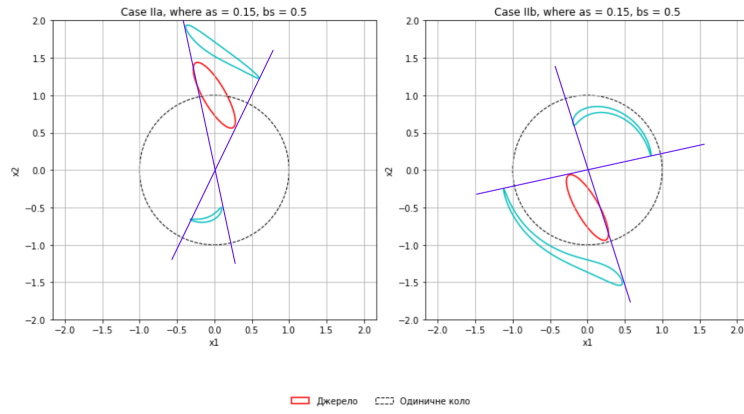


Рис. 3.3: Зображення еліптичного джерела з півсями $a_s = 0.15$ та $b_s = 0.5$, нахиленого на кут $\theta = \frac{5\pi}{6}$, в одноточковій гравітаційній лінзі у випадках $II(a, b)$. Зображення представлені двома аквамариновими кривими.

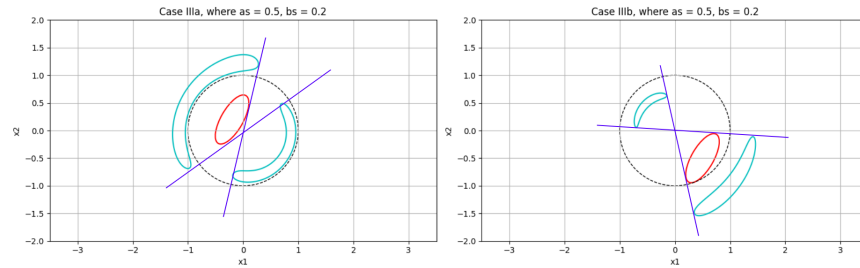


Рис. 3.4: Зображення еліптичного джерела з півсями $a_s = 0.5$ та $b_s = 0.2$, нахиленого на кут $\theta = \frac{\pi}{3}$, в одноточковій гравітаційній лінзі у випадках $III(a, b)$. Зображення будуть двома аквамариновими кривими.

У Додатку №4 розміщений код побудови знайдених зображень еліптичного джерела на прикладі I випадку його розташування у площині джерела (див. Рис. 3.2) на мові програмування *Python*.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження в галузі теоретичної фізики, а саме в теорії гравітаційного мікролінзування сприяло покращенню розуміння особливостей гравітаційних лінз та їх застосування в астрофізичних дослідженнях. Систематизуємо головні наукові здобутки дипломної роботи наступним чином.

По-перше, впровадження методу алгебраїчної геометрії - методу виключення, дозволило досягти більш точного математичного опису поведінки світла в гравітаційному полі масивних астрофізичних об'єктів. Цей підхід дав змогу побудувати за допомогою комп'ютерного моделювання якісні зображення колових та еліптичних джерел у одноквовій (для обох видів джерел) та бінарній гравітаційній лінзі (для довільно розташованого колового джерела). У результаті чого вдалося значно уточнити результати традиційного числового методу трасування променів. Новаторством є використання методу виключення у теорії гравітаційного лізування, завдяки якому вдалося враховувати складні геометричні аспекти джерел світла, а саме довільних еліпсів, що істотно розширює можливості астрофізичного моделювання більш складних кривих, або їх сукупностей.

В рамках дослідження було розглянуто теоретичний опис N -точкових гравітаційних одноплосинних лінз, що дозволило створити нові моделі для вивчення гравітаційного лізування. Такі моделі дозволяють точніше описати вплив гравітації на світло, що проходить поруч з масивними об'єктами.

Порівнюючи метод трасування та методу виключення, можна зробити однозначний висновок про те, що метод аналітичної геометрії має значну перевагу у точності та ефективності обчислень. Метод трасування променів, що базується на прямому інтегруванні траєкторій світлових променів через гравітаційне поле, залежить від багатьох параметрів та, як і кожен числовий метод, призводить до наближених розв'язків, або зовсім може привести до помилкових коренів при розгляді складних випадків конфігурацій лінз. Ще одним недоліком є вимога до значних обчислювальних потужностей. У свою чергу, метод виключення, заснований на аналітичних розв'язках алгебраїчних рівнянь, дозволяє уникнути багатьох числових неточностей і забезпечує швидке й надійне отримання результатів. Але навіть у випадку виникнення побічних коренів не фізичної природи, їх можна вчасно відкинути, скоротивши відповідний множник у результаті, й остаточно отримати потрібне рівняння двох змінних x_1, x_2 . Оскільки це рівняння також має декілька параметрів, таких як: маса лінз, їх положення відносно початку координат, координати центру джерела, радіус r_s (або, у випадку еліпса, півосі a_s, b_s) джерела, для побудових зображень, які є різноманітними замкненими кривими, необхідно задати певні числові значення, такі, щоб можна було розібрати усі варіанти розташування, форми та кратності цих зображень на отриманих графіках.

Дослідження гравітаційних лінз є актуальним не тільки для теоретичної фізики, але й для практичної астрофізики. Гравітаційні лінзи використовуються для вимірювання маси та розподілу матерії у Всесвіті, включаючи темну матерію, яка не випромінює світло, але впливає на рух і викривлення світла в космосі. Це важливо для розуміння процесів формування галактик та галактичних кластерів, а також для визначення космологічних параметрів, таких як швидкість розширення Всесвіту та характеристики темної енергії.

У роботі також було проведено числові експерименти з використанням комп'ютерного моделювання для побудови зображень колових та еліптичних джерел за допомогою методу виключення. Ці експерименти підтвердили високу точність та ефективність запропонованого методу.

Таким чином, проведене дослідження підтвердило важливість і актуальність вивчення гравітаційних лінз, а також розвинуло методи розв'язання складних задач астрофізики. Удосконалення методів алгебраїчної геометрії може значно покращити точність та ефективність обчислень. Порівняння числового методу трасування з методом виключення показало, що останній має значний потенціал для подальшого розвитку та застосування у різних наукових дослідженнях.

Зауважимо, що результати роботи можуть бути вдосконалені, розширені на випадок більшої кількості точкових лінз та використані для більш точного моделювання астрофізичних об'єктів, їхніх розмірів, форми та розташування, що має важливе значення для подальших досліджень і практичних застосувань у загальній астрономії. І це, безумовно, сприятиме подальшому розвитку теорії гравітаційного лізування, розширенню меж нашого розуміння Всесвіту та підвищенню точності астрофізичних моделей.

ДОДАТКИ

Додаток №1

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Функція для побудови кола
def plot_circle(ax, radius, center=(0, 0), color='blue', linestyle='-', label=None):
    circle = plt.Circle(center, radius, color=color, fill=False, linestyle=linestyle, label=label)
    ax.add_artist(circle)

# Функція для побудови зображень лінз
def plot_lens_images(ax, y10, y20, rs, title, include_unit_circle=True):

    # Визначення різних конфігурацій лінз
    if y10 == 0 and y20 == 0:
        r1 = 0.5 * (np.sqrt(rs**2 + 4) - rs)
        r2 = 0.5 * (np.sqrt(rs**2 + 4) + rs)
        plot_circle(ax, r1, color='blue', linestyle='-', label=f'$r_{1}$')
        plot_circle(ax, r2, color='aqua', linestyle='-', label=f'$r_{2}$')
    elif y10 == 0 and y20 == rs:
        r1 = 1
        r2 = np.sqrt(rs**2 + 1)
        plot_circle(ax, r1, color='blue', linestyle='-', label=f'$r_{1}$')
        plot_circle(ax, r2, center=(0, rs), color='aqua', linestyle='-', label=f'$r_{2}$')
    else:
        # Обчислення значень x та y
        x = np.linspace(-2, 2, 400)
        y = np.linspace(-2, 2, 400)
        X, Y = np.meshgrid(x, y)

        # Обчислення функції для визначення зображень
        Z = (X**2 * (2 * Y**2 + y10**2 + y20**2 - 2 * rs**2 - 2 * Y * y20) +
            Y**2 * ((Y - y20)**2 + y10**2 - 2 * rs**2) -
            2 * X**2 * y10 - 2 * (Y**2 - 1) * X * y10 + 2 * Y * y20 +
            X**2 + 1)


```

Рис. 3.5: Перша частина коду побудови зображень колового джерела на мові програмування Python

```

# Побудова кривих рівняння
CS = ax.contour(X, Y, Z, levels=[0], colors='blue')
h1, _ = CS.legend_elements()
ax.plot([], [], 'blue', label='Images')

# Побудова джерела та об'єктів лінзи
plot_circle(ax, rs, center=(y10, y20), color='red', linestyle='-', label='Source')

if include_unit_circle:
    plot_circle(ax, 1, color='black', linestyle='--', label='Unit circle')

# Налаштування осей та відношення сторін
ax.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
ax.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
ax.set_aspect('equal', 'box')
ax.set_xlim(-2, 2)
ax.set_ylim(-2, 2)
ax.set_xlabel('$x_{1}$')
ax.set_ylabel('$x_{2}$')
ax.set_title(title)
ax.grid(True)

```

Рис. 3.6: Друга частина коду побудови зображень колового джерела на мові програмування Python

```

# Створення 4 графіків на одному листі
fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(12, 12))

# Визначення різних конфігурацій лінз
plot_lens_images(axs[0, 0], 0, 0, 0.2, 'Case I: Source at the center')
plot_lens_images(axs[0, 1], 0, 0.2, 0.2, 'Case II: Source touching the center', include_unit_circle=False)
plot_lens_images(axs[1, 0], 0.15, 0.3, 0.2, 'Case IIIa: Source positioned at (0.15, 0.3)')
plot_lens_images(axs[1, 1], -0.25, -0.25, 0.2, 'Case IIIb: Source positioned at (-0.4, -0.4)')

plt.tight_layout()

for ax in axs.flatten():
    handles, labels = ax.get_legend_handles_labels()
    if handles:
        ax.legend(handles, labels, loc='upper right')

plt.show()

```

Рис. 3.7: Третя частина коду побудови зображень колового джерела на мові програмування Python

Додаток №2

```

(*Задаємо параметри*)
a1 = a1;
a2 = a2;
x1 = x1;
x2 = x2;
y10 = y10;
y20 = y20;
rs = rs;

(*Обчислення A21*)
A21 = (a2 - a1) ((x1 - a1)^2 + x2^2) ((x1 - a2)^2 + x2^2) (y10 - rs - x1) +
      a2 (x1 - a1) ((x1 - a2)^2 + x2^2) - a1 (x1 - a2) ((x1 - a1)^2 + x2^2);

(*Обчислення C21*)
C21 = (a2 - a1) ((x1 - a1)^2 + x2^2) ((x1 - a2)^2 + x2^2) (y10 + rs - x1) +
      a2 (x1 - a1) ((x1 - a2)^2 + x2^2) - a1 (x1 - a2) ((x1 - a1)^2 + x2^2);

(*Обчислення A22*)
A22 = y20 (a2 - a1) ((x1 - a1)^2 + x2^2) ((x1 - a2)^2 + x2^2);

(*Обчислення B22*)
B22 = 2 rs (a2 - a1) ((x1 - a1)^2 + x2^2) ((x1 - a2)^2 + x2^2);

(*Обчислення C22*)
C22 = (a2 - a1) ((x1 - a1)^2 + x2^2) ((x1 - a2)^2 + x2^2) y20 - x2 (a2 - a1) ((x1 - a1)^2 + x2^2)
      ((x1 - a2)^2 + x2^2) + x2 (a2 ((x1 - a2)^2 + x2^2) - a1 ((x1 - a1)^2 + x2^2));

(*Обчислення остаточного виразу*)
eq1 = Simplify[A21 + C22 - A22 + C21]^2];
      |спростити
eq2 = Simplify[A21 + B22^2 + C21];
      |спростити
R2 = FullSimplify[eq1 + eq2];
      |спростити в повному обсязі

```

Рис. 3.8: Код для здійснення підстановки поліноміальних коефіцієнтів та спрощення отриманого виразу для результанту R_2 у програмі *Wolfram Mathematica*

Додаток №3

```

L = 1.8;
La = 1.8;
r_s = 0.15;
a = 0.5;
a1 = -a;
a2 = 1.5 a;
y_20 = 0.0;
y_20 = 0.0;

fImages = -a1^2 - 2 a1 a2 - a2^2 + a1^2 a2^2 r_s^2 + 2 a1 x1 + 2 a2 x1 - 2 a1^2 a2 x1 - 2 a1 a2^2 x1 - 2 a1 a2^2 r_s^2 x1 - x1^2 +
2 a1^2 x1^2 + 6 a1 a2 x1^2 + 2 a2^2 x1^2 - a1^2 a2^2 x1^2 + a1^2 r_s^2 x1^2 + 4 a1 a2 r_s^2 x1^2 + a2^2 r_s^2 x1^2 - 4 a1 x1^3 - 4 a2 x1^3 + 2 a1 a2^2 x1^3 -
2 a1 r_s^2 x1^3 - 2 a2 r_s^2 x1^3 + 2 x1^4 - a1^2 x1^4 - 4 a1 a2 x1^4 - a2^2 x1^4 + r_s^2 x1^4 + 2 a1 x1^5 + 2 a2 x1^5 - x1^6 - x2^2 + 2 a1^2 x2^2 + 2 a1 a2 x2^2 + 2 a2^2 x2^2 -
a1^2 a2^2 x2^2 + a1^2 r_s^2 x2^2 + a2^2 r_s^2 x2^2 - 4 a1 x1 x2^2 - 4 a2 x1 x2^2 + 2 a1^2 a2 x1 x2^2 + 2 a1 a2^2 x1 x2^2 - 2 a1 r_s^2 x1 x2^2 - 2 a2 r_s^2 x1 x2^2 + 4 x1^2 x2^2 -
2 a1^2 x1^2 x2^2 - 4 a1 a2 x1^2 x2^2 - 2 a2^2 x1^2 x2^2 + 2 r_s^2 x1^2 x2^2 + 4 a1 x1^3 x2^2 + 4 a2 x1^3 x2^2 - 3 x1^4 x2^2 + 2 x2^4 - a1^2 x2^4 - a2^2 x2^4 + r_s^2 x2^4 + 2 a1 x1 x2^4 +
2 a2 x1 x2^4 - 3 x1^2 x2^4 - x2^5 + 2 a1^2 a2 y_20 + 2 a1 a2^2 y_20 - 2 a1^2 x1 y_20 - 6 a1 a2 x1 y_20 - 2 a2^2 x1 y_20 + 2 a1^2 a2^2 x1 y_20 + 4 a1 x1^2 y_20 +
4 a2 x1^2 y_20 - 4 a1^2 a2 x1^2 y_20 - 4 a1 a2^2 x1^2 y_20 - 2 x1^3 y_20 + 2 a1^2 x1^3 y_20 + 8 a1 a2 x1^3 y_20 + 2 a2^2 x1^3 y_20 - 4 a1 x1^4 y_20 - 4 a2 x1^4 y_20 +
2 x1^5 y_20 - 2 x1 x2^2 y_20 + 2 a1^2 x1 x2^2 y_20 + 2 a2^2 x1 x2^2 y_20 - 4 a1 x1^2 x2^2 y_20 - 4 a2 x1^2 x2^2 y_20 + 2 x1 x2^2 y_20 - a1^2 a2^2 y_20^2 +
2 a1^2 a2 x1 y_20^2 + 2 a1 a2^2 x1 y_20^2 - a1^2 x1^2 y_20^2 - 4 a1 a2 x1^2 y_20^2 - a2^2 x1^2 y_20^2 + 2 a1 x1^3 y_20^2 + 2 a2 x1^3 y_20^2 - x1^4 y_20^2 - a1^2 x2^2 y_20^2 -
a2^2 x2^2 y_20^2 + 2 a1 x1 x2^2 y_20^2 + 2 a2 x1 x2^2 y_20^2 - 2 x1^2 x2^2 y_20^2 - x2^3 y_20^2 - 2 a1^2 x2 y_20 - 2 a1 a2 x2 y_20 - 2 a2^2 x2 y_20 + 2 a1^2 a2^2 x2 y_20 +
4 a1 x1 x2 y_20 + 4 a2 x1 x2 y_20 - 4 a1^2 a2 x1 x2 y_20 - 4 a1 a2^2 x1 x2 y_20 - 2 x1^2 x2 y_20 + 2 a1^2 x1^2 x2 y_20 + 8 a1 a2 x1^2 x2 y_20 +
2 a2^2 x1^2 x2 y_20 - 4 a1 x1^3 x2 y_20 - 4 a2 x1^3 x2 y_20 - 2 x1^4 x2 y_20 + 2 a1^2 x2^2 y_20 + 2 a1^2 x2^2 y_20 - 4 a1 x1 x2^2 y_20 -
4 a2 x1 x2^2 y_20 + 4 x1^2 x2^2 y_20 + 2 x2^3 y_20 - a1^2 a2^2 y_20^2 + 2 a1^2 a2 x1 y_20^2 + 2 a1 a2^2 x1 y_20^2 - a1^2 x1^2 y_20^2 - 4 a1 a2 x1^2 y_20^2 - a2^2 x1^2 y_20^2 +
2 a1 x1^3 y_20^2 + 2 a2 x1^3 y_20^2 - x1^4 y_20^2 - a1^2 x2^2 y_20^2 - a2^2 x2^2 y_20^2 + 2 a1 x1 x2^2 y_20^2 + 2 a2 x1 x2^2 y_20^2 - 2 x1^2 x2^2 y_20^2 - x2^3 y_20^2;

PlotCritical = ContourPlot [K == 0, {x1, -L, L}, {x2, -L, L}, PlotPoints -> 100, ContourStyle -> {Black, Dotted}]
PlotCaustic = ContourPlot [Caustic == 0, {y1, -L, L}, {y2, -L, L}, PlotPoints -> 100, ContourStyle -> {Red, Dashed}]
plotImages1 = ContourPlot [fImages == 0, {x1, -L, L}, {x2, -L, L}, PlotPoints -> 200, ContourStyle -> {Blue, Thickness [0.004]}];
plotSource = Graphics [ {Red, Thickness [0.005], Circle [ {y_20, y_20}, r_s ] } ];
PlotLens = Graphics [ {Green, PointSize [0.03], Point [ { {a1, 0}, {a2, 0} } ] } ];
Show [plotImages1, plotSource, PlotLens, PlotCaustic, PlotCritical,
Axes -> True, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> { {-La, La}, {-La, La} } ]

```

Рис. 3.9: Код для побудови зображень колового джерела у бінарній гравітаційній лінії (випадок I) у програмі *Wolfram Mathematica*

```

L = 1.8;
La = 1.8;
r_s = 0.15;
a = 0.5;
a1 = -a;
a2 = 1.5 a;
y_20 = 0.75;
y_20 = 0.0;

fImages = -a1^2 - 2 a1 a2 - a2^2 + a1^2 a2^2 r_s^2 + 2 a1 x1 + 2 a2 x1 - 2 a1^2 a2 x1 - 2 a1 a2^2 x1 - 2 a1 a2^2 r_s^2 x1 - x1^2 +
2 a1^2 x1^2 + 6 a1 a2 x1^2 + 2 a2^2 x1^2 - a1^2 a2^2 x1^2 + a1^2 r_s^2 x1^2 + 4 a1 a2 r_s^2 x1^2 + a2^2 r_s^2 x1^2 - 4 a1 x1^3 - 4 a2 x1^3 + 2 a1 a2^2 x1^3 -
2 a1 r_s^2 x1^3 - 2 a2 r_s^2 x1^3 + 2 x1^4 - a1^2 x1^4 - 4 a1 a2 x1^4 - a2^2 x1^4 + r_s^2 x1^4 + 2 a1 x1^5 + 2 a2 x1^5 - x1^6 - x2^2 + 2 a1^2 x2^2 + 2 a1 a2 x2^2 + 2 a2^2 x2^2 -
a1^2 a2^2 x2^2 + a1^2 r_s^2 x2^2 + a2^2 r_s^2 x2^2 - 4 a1 x1 x2^2 - 4 a2 x1 x2^2 + 2 a1^2 a2 x1 x2^2 + 2 a1 a2^2 x1 x2^2 - 2 a1 r_s^2 x1 x2^2 - 2 a2 r_s^2 x1 x2^2 + 4 x1^2 x2^2 -
2 a1^2 x1^2 x2^2 - 4 a1 a2 x1^2 x2^2 - 2 a2^2 x1^2 x2^2 + 2 r_s^2 x1^2 x2^2 + 4 a1 x1^3 x2^2 + 4 a2 x1^3 x2^2 - 3 x1^4 x2^2 + 2 x2^4 - a1^2 x2^4 - a2^2 x2^4 + r_s^2 x2^4 + 2 a1 x1 x2^4 +
2 a2 x1 x2^4 - 3 x1^2 x2^4 - x2^5 + 2 a1^2 a2 y_20 + 2 a1 a2^2 y_20 - 2 a1^2 x1 y_20 - 6 a1 a2 x1 y_20 - 2 a2^2 x1 y_20 + 2 a1^2 a2^2 x1 y_20 + 4 a1 x1^2 y_20 +
4 a2 x1^2 y_20 - 4 a1^2 a2 x1^2 y_20 - 4 a1 a2^2 x1^2 y_20 - 2 x1^3 y_20 + 2 a1^2 x1^3 y_20 + 8 a1 a2 x1^3 y_20 + 2 a2^2 x1^3 y_20 - 4 a1 x1^4 y_20 - 4 a2 x1^4 y_20 +
2 x1^5 y_20 - 2 x1 x2^2 y_20 + 2 a1^2 x1 x2^2 y_20 + 2 a2^2 x1 x2^2 y_20 - 4 a1 x1^2 x2^2 y_20 - 4 a2 x1^2 x2^2 y_20 + 2 x1 x2^2 y_20 - a1^2 a2^2 y_20^2 +
2 a1^2 a2 x1 y_20^2 + 2 a1 a2^2 x1 y_20^2 - a1^2 x1^2 y_20^2 - 4 a1 a2 x1^2 y_20^2 - a2^2 x1^2 y_20^2 + 2 a1 x1^3 y_20^2 + 2 a2 x1^3 y_20^2 - x1^4 y_20^2 - a1^2 x2^2 y_20^2 -
a2^2 x2^2 y_20^2 + 2 a1 x1 x2^2 y_20^2 + 2 a2 x1 x2^2 y_20^2 - 2 x1^2 x2^2 y_20^2 - x2^3 y_20^2 - 2 a1^2 x2 y_20 - 2 a1 a2 x2 y_20 - 2 a2^2 x2 y_20 + 2 a1^2 a2^2 x2 y_20 +
4 a1 x1 x2 y_20 + 4 a2 x1 x2 y_20 - 4 a1^2 a2 x1 x2 y_20 - 4 a1 a2^2 x1 x2 y_20 - 2 x1^2 x2 y_20 + 2 a1^2 x1^2 x2 y_20 + 8 a1 a2 x1^2 x2 y_20 +
2 a2^2 x1^2 x2 y_20 - 4 a1 x1^3 x2 y_20 - 4 a2 x1^3 x2 y_20 - 2 x1^4 x2 y_20 + 2 a1^2 x2^2 y_20 + 2 a1^2 x2^2 y_20 - 4 a1 x1 x2^2 y_20 -
4 a2 x1 x2^2 y_20 + 4 x1^2 x2^2 y_20 + 2 x2^3 y_20 - a1^2 a2^2 y_20^2 + 2 a1^2 a2 x1 y_20^2 + 2 a1 a2^2 x1 y_20^2 - a1^2 x1^2 y_20^2 - 4 a1 a2 x1^2 y_20^2 - a2^2 x1^2 y_20^2 +
2 a1 x1^3 y_20^2 + 2 a2 x1^3 y_20^2 - x1^4 y_20^2 - a1^2 x2^2 y_20^2 - a2^2 x2^2 y_20^2 + 2 a1 x1 x2^2 y_20^2 + 2 a2 x1 x2^2 y_20^2 - 2 x1^2 x2^2 y_20^2 - x2^3 y_20^2;

plotImages2 = ContourPlot [fImages == 0, {x1, -L, L}, {x2, -L, L}, PlotPoints -> 200, ContourStyle -> {Blue, Thickness [0.004]}];
plotSource = Graphics [ {Red, Thickness [0.005], Circle [ {y_20, y_20}, r_s ] } ];
PlotLens = Graphics [ {Green, PointSize [0.03], Point [ { {a1, 0}, {a2, 0} } ] } ];
Show [plotImages2, plotSource, PlotLens, PlotCaustic, PlotCritical,
Axes -> True, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> { {-La, La}, {-La, La} } ]

```

Рис. 3.10: Код для побудови зображень колового джерела у бінарній гравітаційній лінії (II) у програмі *Wolfram Mathematica*

```

L = 1.8;
La = 1.8;
r_s = 0.15;
a = 0.5;
a1 = -a;
a2 = 1.5 a;
y_20 = 0.05;
y_20 = -0.45;

fImages = -a1^2 - 2 a1 a2 - a2^2 + a1^2 a2^2 r_s^2 + 2 a1 x1 + 2 a2 x1 - 2 a1^2 a2 x1 - 2 a1^2 a2 r_s^2 x1 - 2 a1 a2^2 r_s^2 x1 - x1^4 +
2 a1^2 x1^3 + 6 a1 a2 x1^2 + 2 a2^2 x1^2 - a1^2 a2^2 x1^2 + a1^2 r_s^2 x1^2 + 4 a1 a2 r_s^2 x1^2 + a2^2 r_s^2 x1^2 - 4 a1 x1^3 - 4 a2 x1^3 + 2 a1^2 a2 x1^2 + 2 a1 a2^2 x1^2 -
2 a1 r_s^2 x1^3 - 2 a2 r_s^2 x1^3 + 2 x1^4 - a1^2 x1^4 - 4 a1 a2 x1^4 - a2^2 x1^4 + 2 a1 x1^3 + 2 a2 x1^3 - x1^5 - x1^5 + 2 a1^2 x1^2 + 2 a1 a2 x1^2 + 2 a2^2 x1^2 -
a1^2 a2^2 x1^2 + a1^2 r_s^2 x1^2 + a2^2 r_s^2 x1^2 - 4 a1 x1 x1^2 - 4 a2 x1 x1^2 + 2 a1^2 a2 x1 x1^2 + 2 a1 a2^2 x1 x1^2 - 2 a1 r_s^2 x1 x1^2 - 2 a2 r_s^2 x1 x1^2 + 4 x1^2 x1^2 -
2 a1^2 x1^2 x1^2 - 4 a1 a2 x1^2 x1^2 - 2 a2^2 x1^2 x1^2 + 2 r_s^2 x1^2 x1^2 + 4 a1 x1^2 x1^2 + 4 a2 x1^2 x1^2 - 3 x1^2 x1^2 + 2 x1^2 - a1^2 x1^2 - a2^2 x1^2 + r_s^2 x1^2 + 2 a1 x1 x1^2 +
2 a2 x1 x1^2 - 3 x1^2 x1^2 - x1^6 + 2 a1^2 a2 y_20 + 2 a1 a2^2 y_20 - 2 a1^2 x1 y_20 - 6 a1 a2 x1 y_20 - 2 a2^2 x1 y_20 + 2 a1^2 a2^2 x1 y_20 + 4 a1 x1^2 y_20 +
4 a2 x1^2 y_20 - 4 a1^2 a2 x1^2 y_20 - 4 a1 a2^2 x1^2 y_20 - 2 x1^3 y_20 + 2 a1^2 x1^3 y_20 + 8 a1 a2 x1^3 y_20 + 2 a2^2 x1^3 y_20 - 4 a1 x1^2 y_20 - 4 a2 x1^2 y_20 +
2 x1^2 y_20 - 2 x1 x1^2 y_20 + 2 a1^2 x1 x1^2 y_20 + 2 a2^2 x1 x1^2 y_20 - 4 a1 x1^2 x1^2 y_20 + 4 a2 x1^2 x1^2 y_20 + 2 x1 x1^2 y_20 - a1^2 a2^2 y_20^2 +
2 a1^2 a2 x1 y_20^2 + 2 a1 a2^2 x1 y_20^2 - a1^2 x1^2 y_20^2 - 4 a1 a2 x1^2 y_20^2 - a2^2 x1^2 y_20^2 + 2 a1 x1^3 y_20^2 + 2 a2 x1^3 y_20^2 - x1^4 y_20^2 -
4 a2^2 x1^2 y_20^2 + 2 a1 x1 x1^2 y_20^2 + 2 a2 x1 x1^2 y_20^2 - 2 x1^2 x1^2 y_20^2 - 2 a1^2 x1^2 y_20^2 - 2 a1 a2 x1^2 y_20^2 - 2 a2^2 x1^2 y_20^2 + 2 a1^2 a2^2 x1^2 y_20^2 +
4 a1 x1 x1 y_20 + 4 a2 x1 x1 y_20 - 4 a1^2 a2 x1 x1 y_20 - 4 a1 a2^2 x1 x1 y_20 - 2 x1^2 x1 y_20 + 2 a1^2 x1^2 x1 y_20 + 8 a1 a2 x1^2 x1 y_20 +
2 a2^2 x1^2 x1 y_20 - 4 a1 x1^3 x1 y_20 - 4 a2 x1^3 x1 y_20 + 2 x1^4 x1 y_20 - 2 x1^2 x1 y_20 + 2 a1^2 x1^2 y_20 + 2 a2^2 x1^2 y_20 - 4 a1 x1 x1^3 y_20 -
4 a2 x1 x1^3 y_20 + 4 x1^2 x1^3 y_20 + 2 x1^2 y_20 - a1^2 a2^2 y_20^2 + 2 a1^2 a2 x1 y_20^2 + 2 a1 a2^2 x1 y_20^2 - a1^2 x1^2 y_20^2 - 4 a1 a2 x1^2 y_20^2 - a2^2 x1^2 y_20^2 +
2 a1 x1^3 y_20^2 + 2 a2 x1^3 y_20^2 - x1^4 y_20^2 - a1^2 x1^2 y_20^2 - a2^2 x1^2 y_20^2 + 2 a1 x1 x1^2 y_20^2 + 2 a2 x1 x1^2 y_20^2 - 2 x1^2 x1^2 y_20^2 - x1^2 y_20^2;

plotImages3 = ContourPlot[fImages == 0, {x1, -L, L}, {x2, -L, L}, PlotPoints -> 200, ContourStyle -> {Blue, Thickness[0.004]}];
plotSource = Graphics[{Red, Thickness[0.005], Circle[{y_20, y_20}, r_s]}];
PlotLens = Graphics[{Green, PointSize[0.03], Point[{(a1, 0), (a2, 0)}]}];

Show[plotImages3, plotSource, PlotLens, PlotCaustic, PlotCritical,
Axes -> True, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{-La, La}, {-La, La}}]

```

Рис. 3.11: Код для побудови зображень колового джерела у бінарній гравітаційній лінзі (III) у програмі *Wolfram Mathematica*

```

L = 1.8;
La = 1.8;
r_s = 0.15;
a = 0.5;
a1 = -a;
a2 = 1.5 a;
y_20 = 0.05;
y_20 = -0.45;

fImages = -a1^2 - 2 a1 a2 - a2^2 + a1^2 a2^2 r_s^2 + 2 a1 x1 + 2 a2 x1 - 2 a1^2 a2 x1 - 2 a1^2 a2 r_s^2 x1 - 2 a1 a2^2 r_s^2 x1 - x1^4 +
2 a1^2 x1^3 + 6 a1 a2 x1^2 + 2 a2^2 x1^2 - a1^2 a2^2 x1^2 + a1^2 r_s^2 x1^2 + 4 a1 a2 r_s^2 x1^2 + a2^2 r_s^2 x1^2 - 4 a1 x1^3 - 4 a2 x1^3 + 2 a1^2 a2 x1^2 + 2 a1 a2^2 x1^2 -
2 a1 r_s^2 x1^3 - 2 a2 r_s^2 x1^3 + 2 x1^4 - a1^2 x1^4 - 4 a1 a2 x1^4 - a2^2 x1^4 + 2 a1 x1^3 + 2 a2 x1^3 - x1^5 - x1^5 + 2 a1^2 x1^2 + 2 a1 a2 x1^2 + 2 a2^2 x1^2 -
a1^2 a2^2 x1^2 + a1^2 r_s^2 x1^2 + a2^2 r_s^2 x1^2 - 4 a1 x1 x1^2 - 4 a2 x1 x1^2 + 2 a1^2 a2 x1 x1^2 + 2 a1 a2^2 x1 x1^2 - 2 a1 r_s^2 x1 x1^2 - 2 a2 r_s^2 x1 x1^2 + 4 x1^2 x1^2 -
2 a1^2 x1^2 x1^2 - 4 a1 a2 x1^2 x1^2 - 2 a2^2 x1^2 x1^2 + 2 r_s^2 x1^2 x1^2 + 4 a1 x1^2 x1^2 + 4 a2 x1^2 x1^2 - 3 x1^2 x1^2 + 2 x1^2 - a1^2 x1^2 - a2^2 x1^2 + r_s^2 x1^2 + 2 a1 x1 x1^2 +
2 a2 x1 x1^2 - 3 x1^2 x1^2 - x1^6 + 2 a1^2 a2 y_20 + 2 a1 a2^2 y_20 - 2 a1^2 x1 y_20 - 6 a1 a2 x1 y_20 - 2 a2^2 x1 y_20 + 2 a1^2 a2^2 x1 y_20 + 4 a1 x1^2 y_20 +
4 a2 x1^2 y_20 - 4 a1^2 a2 x1^2 y_20 - 4 a1 a2^2 x1^2 y_20 - 2 x1^3 y_20 + 2 a1^2 x1^3 y_20 + 8 a1 a2 x1^3 y_20 + 2 a2^2 x1^3 y_20 - 4 a1 x1^2 y_20 - 4 a2 x1^2 y_20 +
2 x1^2 y_20 - 2 x1 x1^2 y_20 + 2 a1^2 x1 x1^2 y_20 + 2 a2^2 x1 x1^2 y_20 - 4 a1 x1^2 x1^2 y_20 + 4 a2 x1^2 x1^2 y_20 + 2 x1 x1^2 y_20 - a1^2 a2^2 y_20^2 +
2 a1^2 a2 x1 y_20^2 + 2 a1 a2^2 x1 y_20^2 - a1^2 x1^2 y_20^2 - 4 a1 a2 x1^2 y_20^2 - a2^2 x1^2 y_20^2 + 2 a1 x1^3 y_20^2 + 2 a2 x1^3 y_20^2 - x1^4 y_20^2 -
4 a2^2 x1^2 y_20^2 + 2 a1 x1 x1^2 y_20^2 + 2 a2 x1 x1^2 y_20^2 - 2 x1^2 x1^2 y_20^2 - 2 a1^2 x1^2 y_20^2 - 2 a1 a2 x1^2 y_20^2 - 2 a2^2 x1^2 y_20^2 + 2 a1^2 a2^2 x1^2 y_20^2 +
4 a1 x1 x1 y_20 + 4 a2 x1 x1 y_20 - 4 a1^2 a2 x1 x1 y_20 - 4 a1 a2^2 x1 x1 y_20 - 2 x1^2 x1 y_20 + 2 a1^2 x1^2 x1 y_20 + 8 a1 a2 x1^2 x1 y_20 +
2 a2^2 x1^2 x1 y_20 - 4 a1 x1^3 x1 y_20 - 4 a2 x1^3 x1 y_20 + 2 x1^4 x1 y_20 - 2 x1^2 x1 y_20 + 2 a1^2 x1^2 y_20 + 2 a2^2 x1^2 y_20 - 4 a1 x1 x1^3 y_20 -
4 a2 x1 x1^3 y_20 + 4 x1^2 x1^3 y_20 + 2 x1^2 y_20 - a1^2 a2^2 y_20^2 + 2 a1^2 a2 x1 y_20^2 + 2 a1 a2^2 x1 y_20^2 - a1^2 x1^2 y_20^2 - 4 a1 a2 x1^2 y_20^2 - a2^2 x1^2 y_20^2 +
2 a1 x1^3 y_20^2 + 2 a2 x1^3 y_20^2 - x1^4 y_20^2 - a1^2 x1^2 y_20^2 - a2^2 x1^2 y_20^2 + 2 a1 x1 x1^2 y_20^2 + 2 a2 x1 x1^2 y_20^2 - 2 x1^2 x1^2 y_20^2 - x1^2 y_20^2;

plotImages3 = ContourPlot[fImages == 0, {x1, -L, L}, {x2, -L, L}, PlotPoints -> 200, ContourStyle -> {Blue, Thickness[0.004]}];
plotSource = Graphics[{Red, Thickness[0.005], Circle[{y_20, y_20}, r_s]}];
PlotLens = Graphics[{Green, PointSize[0.03], Point[{(a1, 0), (a2, 0)}]}];

Show[plotImages3, plotSource, PlotLens, PlotCaustic, PlotCritical,
Axes -> True, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{-La, La}, {-La, La}}]

```

Рис. 3.12: Код для побудови зображень колового джерела у бінарній гравітаційній лінзі (IV) у програмі *Wolfram Mathematica*

Додаток №4

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Ellipse, Circle

# Значення параметрів
a_s_values = [0.4, 0.35, 0.05]
b_s_values = [0.2, 0.7, 0.8]
y10 = [0, 0.3, 0]
y20 = [0, 0.5, 0]
theta = [0, 0, 0]

# Створення сітки точок для x1 та x2
x1 = np.linspace(-2, 2, 400)
x2 = np.linspace(-2, 2, 400)
X1, X2 = np.meshgrid(x1, x2)

# Створення окремих графіків
fig, axes = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 5))

for i, (a_s, b_s, y10_val, y20_val, theta_val) in enumerate(zip(a_s_values, b_s_values, y10, y20, theta)):
    # Обчислення значення функції для кожної точки сітки
    Z = (b_s ** 2 * np.cos(theta_val) ** 2 * ((X1 + (1 - X1 ** 2 - X2 ** 2) - (X1 ** 2 + X2 ** 2) * y10_val) ** 2 -
        a_s ** 2 * (X1 ** 2 + X2 ** 2) ** 2 * np.cos(theta_val) ** 2) +
        a_s ** 2 * ((-X2 * (1 - X1 ** 2 - X2 ** 2) + (X1 ** 2 + X2 ** 2) * y20_val) * np.cos(theta_val) +
        (X1 * (1 - X1 ** 2 - X2 ** 2) - (X1 ** 2 + X2 ** 2) * y10_val) * np.sin(theta_val)) ** 2 +
        b_s ** 2 * np.sin(theta_val) ** 2 * ((X2 * (1 - X1 ** 2 - X2 ** 2) - (X1 ** 2 + X2 ** 2) * y20_val) ** 2 -
        a_s ** 2 * (X1 ** 2 + X2 ** 2) ** 2 * np.sin(theta_val) ** 2) +
        b_s ** 2 * np.cos(theta_val) * np.sin(theta_val) * (2 * (X1 * (1 - X1 ** 2 - X2 ** 2) -
        (X1 ** 2 + X2 ** 2) * y10_val) * (X2 * (1 - X1 ** 2 - X2 ** 2) - (X1 ** 2 + X2 ** 2) * y20_val) -
        a_s ** 2 * (X1 ** 2 + X2 ** 2) ** 2 * np.sin(2 * theta_val)))

    # Побудова графіка функції
    levels = [0]
    colors = ['c', 'b']
    contour = axes[i].contour(X1, X2, Z, levels=levels, colors=colors)

```

Рис. 3.13: Перша частина коду для побудови зображень еліптичного джерела (випадки I(a,b,c)) на мові програмування Python

```

# Створення еліпса
ellipse = Ellipse(xy=(y10[i], y20[i]), width=2 * a_s, height=2 * b_s, angle=np.degrees(theta_val),
    edgecolor='red', lw=1.5, label='Джерело', fill=False)

# Побудова одиничного кола
circle = Circle((0, 0), 1, edgecolor='black', linestyle='--', label='Одиничне коло', fill=False)

# Додавання еліпса та кола на графік
axes[i].add_patch(ellipse)
axes[i].add_patch(circle)

axes[i].set_xlabel('x1')
axes[i].set_ylabel('x2')
axes[i].set_title(f'Case I{chr(97 + i)}, where as = {a_s}, bs = {b_s}')
axes[i].grid(True)
axes[i].axis('equal') # Однакові масштаби по осях x та y

# Додавання легенди
handles, labels = axes[0].get_legend_handles_labels()
handles.extend([contour.collections[0], circle])

fig.legend(handles, labels, loc='lower center', ncol=3, bbox_to_anchor=(0.5, -0.15), frameon=False)

plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.95])
plt.show()

```

Рис. 3.14: Друга частина коду для побудови зображень еліптичного джерела (випадки I(a,b,c)) на мові програмування Python

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Newton, I. A Treatise of Opticks / I. Newton // Collection opensource. – 1704. – с. 132.
- [2] Ellis, R.S. Gravitational lensing: a unique probe of dark matter and dark energy / R.S. Ellis // Phil. Trans. R. Soc. A. – 2010. – P. 967–987.
- [3] Einstein, Albert. Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field / Albert Einstein // Science. – 1936. – Vol. 84, No. 2188. – P. 506–507.
- [4] Walsh, D.; Carswell, R. F.; Weymann, R. J. 0957 + 561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens? / D. Walsh, R. F. Carswell, R. J. Weymann // Nature. – 1979. – P. 381-384.
- [5] ESA/Hubble. Hubble’s Hidden Treasures - Image of the Week. – 2014. – URL: <https://esahubble.org/images/potw1403a/>.
- [6] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. The classical theory of field. Course of Theoretical Physics / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. – Vol II. Third English edition. – Pergamon Press Ltd., 1971. – 374 c.
- [7] Chandrasekhar, S. The Mathematical Theory of Black Holes / S. Chandrasekhar. – Oxford University Press, New York, 1983.
- [8] Schneider, P.; Ehlers, J.; Falco, E.E. Gravitational Lenses / P. Schneider, J. Ehlers, E.E. Falco. – Second edition. – New York, 1992. – 560 c.
- [9] Bykov, V.; Kytmanov, A.M.; Lazman, M.; Passare, M. Elimination Methods in Polynomial Computer Algebra / V. Bykov, A.M. Kytmanov, M. Lazman, M. Passare. – Springer Science & Business Media, 1998. – 237 c.
- [10] M. Corral. Elementary Calculus: Parametric Equations. LibreTexts, 2020. <http://surl.li/undmf>
- [11] Kotvytskiy, A., Parimucha, Š. Elimination method for construction of images for N-point gravitational lenses for a circular source / A. Kotvytskiy, Š. Parimucha // Astrophysics and Space Science. – 2023. – Vol. 368, No. 11. – P. 100.