

О КРИТЕРИЯХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧНОСТИ

В. В. Жиков

Пусть $f(t)$ — равномерно непрерывная на всей числовой оси функция. Через $H(f)$ обозначим множество функций $\hat{f}(t)$, являющихся предельной последовательностью типа $f(t + \alpha_n)$ в смысле равномерной сходимости в каждом конечном отрезке. Положим $\hat{f}(t) = M_\alpha f$, если $\hat{f}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \alpha_n)$. С. Бохнер получил [1] следующий любопытный результат: если для всяких последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \alpha_n) = M_\alpha f \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \beta_n) = M_\beta f$$

справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \alpha_n + \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f(t + \alpha_n + \beta_m),$$

то $f(t)$ есть почти-периодическая функция Бора (п. п. ф. Бора). Коротко эту теорему можно сформулировать так: если $M_\alpha M_\beta f = M_{\alpha+\beta} f$, то $f(t)$ есть п. п. ф. Бора. С. Бохнером выделен класс функций, для которых $M_{-\alpha} M_\alpha f = f$. Эти функции названы им почти-автоморфными. Почти-автоморфные функции были детально изучены в работе [2], где доказано, что если все функции семейства $H(f)$ почти-автоморфны, то они почти-периодичны по Бору. Отметим без доказательства, что класс почти-автоморфных функций совпадает с классом равномерно непрерывных N -почти-периодических функций Левитана.

Цель настоящей заметки — выяснить алгебраическую природу теоремы Вича и получить некоторые новые критерии почти-периодичности. Наши рассуждения связаны с рассмотрением так называемых дистальных динамических систем* [3].

Пусть X — компактное метрическое пространство и $S(t)$ — абелева группа гомеоморфизмов X в X . Предположим, что динамическая система $S(t)$ транзитивна, т. е. существует элемент $x_0 \in X$, такой, что траектория $S(t)x_0$ плотна в X . Обозначим через Y множество всех отображений X в X , наделенное слабой (тихоновской) топологией, и пусть T есть замыкание множества $S(t)$ в Y . Обозначим через $w = u \circ v$ композицию отображений u и v ($w(x) = u(v(x))$ для всякого $x \in X$). Легко проверяется, что T есть полугруппа относительно композиций, причем композиция $u \circ v$ непрерывна по u при любом v и непрерывна по v , если $u \in S(t)$.

* Динамическая система $S(t)$ в метрическом пространстве X называется дистальной, если для любых различных точек $p, q \in X$ $\inf_p(S(t)p, S(t)q) > 0 \rightarrow \infty$ $\angle t \angle \infty$.

Лемма 1. Если T есть коммутативная группа, то $S(t)x$ есть п. п. функция для всякого $x \in X$.

Доказательство. Отображение $\Phi: T \rightarrow X$, где $\Phi(u) = u(x_0)$ непрерывно. Так как T и X есть компактные пространства и множество $S(t)x_0$ плотно в X , то $\Phi(T) = X$. Покажем, что отображение Φ взаимно однозначно. Предполагая противное, найдем элементы u_1 и u_2 , такие, что $u_1(x_0) = u_2(x_0)$. Пусть x — произвольный элемент пространства X и $u_x(x_0) = x$. Тогда $u_x(u_1(x_0)) = u_1(x) = u_2(x)$. Это означает, что $u_1 = u_2$. Итак, T есть метрическое пространство, наделенное структурой коммутативной группы. Тогда операция умножения $u \cdot v$ в T непрерывна по совокупности переменных u и v , т. е. T есть топологическая группа (см. [3, 4]). Так как функция $F(t) = S(t)x$ продолжается до непрерывной функции на T , то $F(t)$ есть п. п. ф. Лемма доказана.

Пусть $f(t)$ — числовая функция, равномерно непрерывная на всей оси. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $M_- M_\alpha \varphi = \varphi$ для всякой функции $\varphi(t) \in H(f)$;
- 2) функция $f(t)$ рекуррентна* и

$$M_\alpha M_\beta \varphi = M_\beta M_\alpha \varphi$$

для всякой функции $\varphi \in H(f)$, то $f(t)$ есть п. п. ф. Бора.

Доказательство. Множество $H(f)$, наделенное топологией равномерной сходимости в каждом конечном отрезке, есть метрическое пространство. В $H(f)$ естественным образом определена группа сдвигов $S(t)$. Пусть выполнено условие 2). Из рекуррентности $f(t)$ следует, что динамическая система $S(t)$ транзитивна. Чтобы применить лемму 1, нужно доказать, что множество T есть коммутативная группа. Из условия 2) непосредственно следует, что T есть коммутативная полугруппа. Остается показать, что T есть группа. Повторяя рассуждения леммы 1, получим, что пространства T и $H(f)$ гомеоморфны. Если v^{-1} не существует, то множество $T_1 = vT \neq T$. Очевидно, T — замкнутое подмножество T и $S(t)u \in T_1$, если $u \in T_1$. Но тогда $\Phi(T_1)$ есть замкнутое подмножество $H(f)$, инвариантное относительно сдвигов $S(t)$, что противоречит тому, что $f(t)$ — рекуррентная функция. Итак, в случае условия 2) теорема доказана. Если условие 2) означает коммутативность полугруппы T , то условие 1) означает непрерывность обратного элемента в T . Из условия 1) также легко следует, что T есть коммутативная группа. Теорема 1 доказана.

Функцию $f(t)$ назовем дистальной, если динамическая система сдвигов является дистальной в пространстве $H(f)$. Это означает, что если $g(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in H(f)$, то ни из какой последовательности вида $g(t + \alpha_n)$ нельзя выделить подпоследовательности, сходящейся равномерно в каждом конечном отрезке к нулю. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если функция $f(t)$ дистальна и есть п. п. ф. Безиковича, то она есть п. п. ф. Бора.

Предварительно докажем следующую очевидную лемму.

* Функция $f(t)$ называется рекуррентной, если для всякой последовательности $\{\alpha_n\}$, такой, что при любом t $f(t + \alpha_n) \rightarrow f(t)$ найдется последовательность $\{\beta_n\}$, такая, что $f(t + \beta_n) \rightarrow f(t)$ при любом t .

Лемма 2. Пусть функция $\varphi(t)$ такова, что пределы

$$\psi(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(t) \overline{\varphi(t-x)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dL(\lambda)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T+\omega} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt = a(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

достигаются равномерно по x в каждом конечном отрезке и равномерно по ω на $[-\infty, \infty]$, и $L(\lambda)$ есть функция скачков, то $\varphi(t)$ есть п. п. ф. Безикевича.

Доказательство. Если $L(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} c_k$, то $|a(\lambda_k)|^2 = c_k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Если N — достаточно большое число, то $\sum_{k=1}^N c_k \leq \varepsilon$ и непосредственная проверка дает, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\varphi(t) - \sum_{k=1}^N a(\lambda_k) e^{i\lambda_k t}|^2 dt < \varepsilon$. Это доказывает лемму.

Доказательство теоремы 2. Как замечено И. У. Бронштейном [5], из условия дистальности функции $f(t)$ вытекает, что динамическая система $S(t)$ является эргодической. Это означает, в частности, что предел $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\varphi(t+x)|^2 dt$ существует равномерно по x для всякой $\varphi(t) \in H(f)$. Отсюда ясно, что если $f(t + \alpha_n) \rightarrow f_1(t)$ равномерно в каждом конечном отрезке, то

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t + \alpha_n)|^2 dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Если

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{f(t-x)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dV_1(\lambda)$$

и

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) \overline{f(t-x)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dV_2,$$

то (1) означает, что $\int_{-\infty}^{\infty} dV_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dV_2$. Пусть $l(x)$ есть преобразование Фурье достаточно гладкой финитной функции $m(x)$. Легко проверяется,

что функция $f_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) l(x) dx$ дистальна. Согласно одной теореме Н. Винера [7, стр. 233] имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |m(\lambda)|^2 dV_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |m(\lambda)|^2 dV_2,$$

откуда следует, что $V_1 = V_2$.

Из дистальности функции $f(t)$, по-видимому, не следует дистальность функции $g(t) = e^{i\lambda t} f(t)$. Однако предел $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t + \alpha) dt$ существует равномерно по α . В самом деле, в пространстве $H_1 = H(f) \times H(e)^{i\lambda t}$ сдвиги образуют дистальную динамическую систему $S_1(t)$. Но $g(t)$, очевидно, может быть продолжена до непрерывной функции на H_1 . Поэтому нужное нам утверждение следует из эргодичности системы $S_1(t)$ (см. [5, 6]). Лемма 2 дает тогда, что все функции семейства $H(f)$ почти-периодичны по Безиковичу. Покажем теперь, что если $f(t + \alpha_n) \rightarrow f_1(t)$ равномерно в каждом конечном отрезке, то $f(t + \alpha_n) \rightarrow f_1(t)$ в метрике Безиковича. Ввиду (1) достаточно установить слабую сходимость, т. е. доказать, что при любом вещественном λ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t + \alpha_n) e^{i\lambda t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) e^{i\lambda t} dt.$$

Пусть для некоторой подпоследовательности $\{\alpha'_n\}$ будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t + \alpha'_n) e^{i\lambda t} dt \neq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) e^{i\lambda t} dt. \quad (2)$$

Подпоследовательность $\{\alpha'_n\}$ можно считать выбранной таким образом, что последовательность $\{e^{i\lambda \alpha'_n}\}$ сходится ($\lim_{n \rightarrow \infty} e^{i\lambda \alpha'_n} = \gamma$). Так как предел

$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t + x) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t + x) e^{i\lambda(t+x)} dt$ достигается равномерно по x , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t + \alpha'_n) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g_1(t) dt.$$

Но

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g_1(t) dt = \gamma \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_1(t) e^{i\lambda t} dt$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t + \alpha'_n) dt = \frac{1}{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t + \alpha'_n) dt,$$

что противоречит (2).

Итак, мы показали, что если $f(t + \alpha_n) \rightarrow f_1(t)$ в метрике $H(f)$, то $f(t + \alpha_n) \rightarrow f_1(t)$ в метрике Безиковича. Иначе говоря, в пространстве $H(f)$ исходная метрика и метрика Безиковича эквивалентны. Отсюда ясно, что условия теоремы 1 выполнены. Этим доказывается теорема 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bochner. A new approach to almost periodicity, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 45 (1962), p. 2039—2043.
2. W. A. Veech. Almost automorphic function on groups, Amer. J. Nat., 87, № 3, p. 719—751, 1965.
3. P. Ellis. Distal transformation groups. Pacific J. Math., 8, № 3 (1958), p. 401—405.
4. W. H. Gottshalk. Transitivity and equicontinuity, Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948), p. 982—284.
5. И. У. Бронштейн. Об эргодичности дистальных минимальных множеств. «Изв. АН Молд. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук», № 7, 90—93, 1965.
6. Д. Окстоби. Эргодические множества. «Усп. матем. наук», т. VIII, вып. 3 (55), 1953, 75—97.
7. Н. Винер. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. Физматгиз. М., 1963.

Поступила 12 апреля 1966 г.