

Відгук отримано
11.09.2020 р.
Третьякова спеціалізованої
вченої ради ДФ64.051.003
СВ (Світлана Іванівна)

ВІДГУК

опонента, доцента кафедри математичного аналізу факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, доктора фізико-математичних наук Карлової Олени Олексіївни на дисертаційну роботу Заварзіної Олеси Олегівни "Ізометрії та стискання підмножин банахового простору", подану на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – Математика та статистика за спеціальністю 111 – Математика

Елегантний результат Фройденталя і Гуревича 1936 року про пластичність цілком обмеженого метричного простору імплікує нескладні за формулюванням проблеми, багато з яких ще й досі до кінця не розв'язані (що свідчить про актуальність вибору теми дисертанткою), і природно завдяки цьому став призвідником початку досліджень авторки даної дисертаційної роботи на цю та споріднену тематику. У дисертаційній роботі обговорюються наступні питання і задачі:

- в яких банахових просторах одиничні кулі пластичні?
- знайти характеристикацію пластичних опуклих обмежених замкнених підмножин гільбертового простору;
- чи можна продовжити ізометрію між одиничними сферами двох банахових просторів до лінійної бієкції між цими просторами?

Дисертація складається зі вступу та чотирьох розділів. Перший розділ містить огляд літератури і результатів дисертації, мотивацію обрання тематики, та зв'язок результатів здобувачки з уже відомими результатами.

В другому розділі "Пластичність одиничних куль банахових просторів та пов'язані питання" досліджується питання:

чи кожна нерозтягуюча бієкція між одиничними кулями банахових просторів X та Y є ізометрією? (*)

За допомогою того факту, що BnE -відображення F є ізометрією, якщо воно є бієкцією між одиничними сферами S_X та S_Y і, крім того, задовольняє умову $F(ax) = aF(x)$ для всіх $x \in S_X$ і $a \in \{-1\} \cup (0, 1)$, доводяться теореми 2.9 і 2.10. А саме, показано, що нерозтягуюча бієкція між одиничними кулями двох банахових просторів є ізометрією у випадку, якщо хоча б один з цих просторів строго опуклий.

Інший підхід, що використовує принцип Брауера інваріантності відкритої області, застосований авторкою дисертації в теоремах 2.20 і 2.23, дозволяє звести загальний випадок до теореми про пластичність цілком обмеженого простору, що дає позитивну відповідь на питання (*) для скінченновимірного простору Y та для випадку $Y = \ell_1$. Загальний результат, що базується на попередніх ідеях, теорема 2.28, дає відповідь на питання (*), якщо Y – це ℓ_1 -сума строго опуклих банахових просторів.

Ще одна ствердна відповідь на питання (*) отримана авторкою дисертації в теоремі 2.38 для простору Y , одинична сфера якого є об'єднанням своїх скінченновимірних крайніх підмножин.

Цікавим є те, що векторна структура простору є важливою. Якщо задатися питанням, чи кожна нерозтягуюча бієкція (фактично, нерозтягуючий гомеоморфізм) між зв'язними компактними підмножинами однакового діаметру в скінченновимірному просторі є ізометрією, то відповідь негативна: функція $f : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \frac{x}{2}$, є нерозтягуючим гомеоморфізмом між просторами $[0, 2]$ і $[0, 1]$, наділеними метрикою $d(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$, але не є ізометрією.

У третьому розділі "Пластичність еліпсоїдів" узагальнюється приклад непластичного еліпсоїда зі статті Б. Каскалеса, В. Кадеця, Х. Оріуели та Е. Вінглера, а також встановлюються необхідні та достатні умови лінійної пластичності еліпсоїдів у сепарабельному гільбертовому просторі, залишаючи при цьому відкритим питання характеристики пластичності еліпсоїдів.

Четвертий розділ "GL-простори" дотикається проблеми Тінглі в тому розумінні, що ця проблема була позитивно розв'язана для класу узагальнено-пукких (GL) просторів, тому природним бажанням є більш глибоке вивчення властивостей таких просторів. Авторкою дисертації доведено, що одинична куля скінченновимірного GL-простору є багатогранником з пуккими гранями, а також наведена характеристика двовимірних GL-просторів.

Дисертаційна робота написана дуже акуратно та ґрунтовно і справляє гарне та приємне враження. Дисертація містить досить незначну кількість технічних недоліків та друкарських помилок, перелік яких наводиться нижче. Крім того, в доведенні деяких тверджень (Лема 2.13, Лема 2.37) варто було б детальніше викласти пояснення (хоч вони й нескладні, але полегшили б читання роботи).

- 1) По всьому тексту дисертації варто було б узгодити переклад терміну "non-expansive", оскільки зустрічається як "нестискальний" так і "нестискаючий"; теж саме стосується термінів "розтягувальний" – "розтягуючий", "пишний" – "пуккий", "співнаправлені" – "співнапрямлені";
- 2) стор. 34⁸: замість "позитивно-однорідне" краще вживати "додатно-однорідне";
- 3) стор. 35₁: замість "ліпшицева" має бути "ліпшицевого";
- 4) стор. 42⁶: повинно бути "відображеннями"; те саме на сторінці 45⁵;
- 5) стор. 46₆: слово "добута" краще змінити на "випливає";
- 6) стор. 47₈: варто пояснити (або додати відповідне посилання), чому множина W є щільною в S_E ;
- 7) по всьому тексту термін "restriction" замість "обмеження відображення" слід перекладати як "звуження відображення";
- 8) стор. 51₅: має бути "множина";
- 9) стор. 55₅: краще казати "індукцією по N ", ніж "індукцією за N ";
- 10) стор. 56²: термін "positive" краще перекладати як "додатний", ніж "позитивний";
- 11) стор. 60: замість терміну "сума просторів по ℓ_1 " краще вживати термін " ℓ_1 -сума";

- 12) доведення леми 2.34 не узгоджується з означенням n -крайньої точки, наведеним на сторінці 70;
- 13) в доведенні теореми 2.35 на мою думку неперервність відображення H в усіх ненульових точках легко випливає з того, що це відображення є композицією неперервних, а от як раз неперервність в нулі варто було б перевірити;
- 14) стор. 86₁₁: має бути "банахових";
- 15) стор. 86₇: має бути "спостереження";
- 16) стор. 92¹³: має бути "Оскільки $b < \tau$, то ...";
- 17) стор. 97¹²: замість "формує" краще сказати "утворює";
- 18) стор. 97₂: замість "витікає" краще сказати "впливає"; те саме на сторінці 99⁷;
- 19) стор. 101₁: теоретично неважко здогадатися, що означає позначення $\text{vol}_m(K)$, але варто це вказати перед теоремою 4.10;
- 20) стор. 109₁₁: "Знайдемо $b, \dots$, яке послуговується..." краще замінити на "Знайдемо b згідно з означенням 4.17...".

Дисертація виконана на високому науковому рівні. Всі отримані в дисертаційній роботі результати є новими і належать безпосередньо авторці, а результати інших авторів наведені з відповідними посиланнями, що відповідає вимогам академічної доброчесності. Всі основні результати дисертації наведені з повними доведеннями і є чітко обґрунтованими.

Результати дисертації в повному обсязі опубліковані у 6 статтях (серед яких 1 стаття – у науковому фаховому виданні України, 1 – у науковому виданні України, що входить до міжнародної наукометричної бази Scopus, 4 статті – у зарубіжних спеціалізованих виданнях, що входять до міжнародної наукометричної бази Scopus) згідно з чинним законодавством, і у 8 тезах доповідей міжнародних конференцій та наукових шкіл. Результати також доповідались на багатьох наукових семінарах.

Вважаю, що дисертаційна робота Олеси Олегівни Заварзіної "Ізометрії та стискання підмножин банахового простору" задовольняє всім вимогам, що передбачені наказом Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертацій» та постановою Кабінету Міністрів України від 06.03.2019 р. № 167 «Порядок проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії», а її авторка заслуговує на присудження ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – Математика та статистика за спеціальністю 111 – Математика.

Доктор фізико-математичних наук,
доцент кафедри математичного аналізу
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича



О.О. Карлова

