

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

В. М. Горбач, І. А. Таранова

**ПРАКТИКУМ З РОЗВ'ЯЗАННЯ
ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ. МЕХАНІКА
ЧАСТИНА І**

Навчальний посібник для студентів хімічного факультету

Харків – 2014

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.2я73
Г 67

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Харківської національної академії міського господарства **А. М. Петченко**;

доктор технічних наук, професор, професор кафедри експериментальної фізики фізичного факультету ХНУ імені В. Н. Каразіна **В. П. Пойда**;

доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної та експериментальної фізики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» **А. О. Мамалуй**.

*Затверджено до друку рішенням Вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № від 15.02.2013 р).*

Горбач В. М.

Г 67 Практикум з розв'язання фізичних задач. Механіка : навчальний посібник для студентів хімічного факультету / В. М. Горбач, І. А. Таранова. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2014. – 245 с.

У посібнику підібраний матеріал для проведення практичних занять з механіки. Опис кожного заняття починається з основних теоретичних положень і формул, знання яких необхідне для розв'язування задач, і містить вказівки щодо їх практичного застосування. Далі надано задачі з даної теми, які супроводжуються аналізом їх фізичного змісту і докладним розв'язанням, а також наведені 4 варіанти завдань різного рівня складності для самостійної роботи студентів.

Методичний посібник призначений для студентів хімічного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, а також може використовуватися як допоміжний матеріал студентами, які навчаються за напрямом підготовки «Фізика».

УДК 531/534075.8
ББК 22.2я73

©Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2014
©Горбач В. М., Таранова І. А., 2014

ЗМІСТ

Вступ

Практичне заняття 1. *Кінематика матеріальної точки (пряма задача кінематики)*

Завдання для самостійної роботи

Практичне заняття 2. *Кінематика матеріальної точки (обернена задача кінематики)*

Завдання для самостійної роботи

Практичне заняття 3. *Динаміка матеріальної точки. Закони Ньютона*

Завдання для самостійної роботи

Додаток. Математичні поняття і формули

Список використаної літератури

Вступ

Практичні заняття із фізики, разом із лабораторним практикумом і лекціями, є невід'ємною частиною навчального процесу з освоєння відповідних розділів фізики. Лекції – найважливіша частина навчального процесу – дають загальне уявлення про основні фізичні явища, поняття, ідеї і закони; знайомлять з математичними моделями фізичних явищ і методами їх теоретичного опису. Лабораторний практикум вводить студента в світ експериментальної фізики. Її методи дозволяють зрозуміти і пояснити, а у багатьох випадках і відкрити нові закони. Розв'язання ж конкретних фізичних задач дозволяє закріпити теоретичний матеріал, сприяє глибшому осмисленню і розумінню фізичних явищ і законів. Це свого роду «теоретичний лабораторний практикум».

Звичайно, навчитися розв'язувати задачі з фізики непросто. Можна непогано розбиратися в теорії і не вміти розв'язувати задачі. Адже задачі вимагають для свого розв'язання певних зусиль і роздумів, аналізу і розуміння суті фізичних явищ, уміння виділяти істотне і відкидати другорядне, вільного володіння математичним апаратом. І не варто йти легким шляхом: шукати розв'язок задачі в Інтернеті, списувати у товариша і так далі (мотивуючи це, наприклад, браком часу). Адже мета розв'язання задач – виробити творчий підхід до будь-якої фізичної (і не тільки фізичної) проблеми, розвинути фізичне мислення, навчитися думати і розмірковувати. Тому якщо задача не виходить, то краще відкласти її на деякий час, перечитати теорію, проглянути розв'язані на практичних заняттях задачі, зайнятися іншими справами, а потім знову повернутися до нерозв'язаної задачі.

Даний посібник являє собою набір задач з механіки, підібраних за темами відповідно до програми курсу загальної фізики для природничих факультетів з розширеною програмою вивчення фізики. Умови задач в основному взяті з навчальних посібників: Чортов А. Р., Воробйов А. А. Задачник з фізики (М.,

1981) [1]; Іродов І. Є. Задачі з загальної фізики (М., 1988) [2]; Збірка задач із загального курсу фізики /За ред. Яковлєва І. А. (М., 1977) [3].

Кожна тема (заняття) навчального посібника включає короткі теоретичні відомості, задачі з докладними розв'язаннями і чотири варіанти наборів задач для самостійної роботи з відповідями. Для розв'язання задач необхідні не тільки хороші знання фізичних законів, але й навички методичного підходу до задач. Тому мета тієї частини теми, де наведені приклади розв'язання задач, – замінити якоюсь мірою викладача, який проводить практичні заняття: на прикладі великої кількості розв'язаних задач показати, як послідовно підходити до конкретної задачі і як обирати метод її розв'язання.

Наприкінці посібника подаються основні математичні поняття й формули.

Загальні рекомендації до розв'язання задач

1. Перш ніж розпочати розв'язання задачі, обов'язково уважно прочитайте методичні вказівки (теоретичну частину) стосовно даної теми. Методичні вказівки, як правило, містять вже відомий студенту матеріал у концентрованому вигляді, зручному для глибшого розуміння фізичних законів і понять, а також для практичного використання при розв'язанні задач. Спробуйте самостійно розв'язати задачі, наведені як приклад. Порівняйте свій розв'язок із розв'язанням прикладу. Якщо задача не вийшла або не знаєте, як до неї підступитися, розберіть наведене розв'язання задачі. Потім знову спробуйте розв'язати задачу, уявляючи, що ви пояснюєте хід її розв'язання комусь.

2. Розв'язуючи задачі із завдання для самостійної роботи, уважно вивчіть умову задачі і зробіть попередній фізичний аналіз: запишіть і осмисліть дані і шукані величини; з'ясуйте, яким законам підкоряється описуваний в задачі фізичний процес; встановіть, чи всі дані, необхідні для розв'язання задачі, відомі. Відсутні дані можна знайти в таблицях фізичних величин. Фізичні закони пов'язують між собою різні фізичні величини, зокрема дані і шукані величини.

На основі цих законів необхідно скласти замкнуту систему рівнянь, вирішення якої дозволить розв'язати задачу.

3. Якщо дозволяє характер задачі, обов'язково зробіть схематичний малюнок, що пояснює її суть. У багатьох випадках малюнок значно полегшує як пошук розв'язання, так і саме розв'язання.

4. Розв'язувати задачу слід, як правило, в загальному вигляді. Розв'язання в загальному вигляді дозволяє, з одного боку, встановити функціональну залежність шуканої величини від заданих величин, з іншого боку, з розмірності судити про правильність розв'язання.

5. Перш ніж проводити числові розрахунки, переведіть всі дані величини в одну систему одиниць. Отримавши числову відповідь, оцініть її правдоподібність.

Практичне заняття 1

Кінематика матеріальної точки (пряма задача кінематики)

Перелік основних визначень і формул

Кінематичне рівняння руху матеріальної точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ у векторній формі запису}$$

або

$$x = x(t), y(t), z(t) \text{ – в координатній формі запису,}$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, що визначає положення матеріальної точки; x, y, z – координати матеріальної точки; $\vec{r}(t), x(t), y(t), z(t)$ – деякі функції часу.

Кінематичні рівняння рівномірного руху: $\vec{v} = \text{const}, \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t)$;

$$\text{рівноприскореного руху: } \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}, \quad \vec{a} = \text{const.} \quad (1.1)$$

Миттєва швидкість матеріальної точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (1.2)$$

де v_x, v_y, v_z – проекції миттєвої швидкості на осі координат;

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.3)$$

$$\text{Абсолютне значення швидкості } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.4)$$

Миттєве прискорення матеріальної точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad (1.5)$$

де a_x, a_y, a_z – проекції вектора миттєвого прискорення $\vec{a}$ на осі координат;

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

$$\text{Абсолютне значення вектора повного прискорення } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.6)$$

Вектор тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$ матеріальної точки:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau},$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, направлений по дотичній до траєкторії в даній точці.

Вектор нормального прискорення $\vec{a}_n$ матеріальної точки:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}, \quad (1.7)$$

де R – радіус кривизни траєкторії; $\vec{n}$ – одиничний вектор, направлений по нормалі до дотичної до траєкторії в даній точці (до центра кривизни).

Вектор повного прискорення матеріальної точки:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}.$$

Модуль повного прискорення:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (1.8)$$

Середні вектори швидкості і прискорення точки:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

де $\Delta \vec{r}$ – переміщення (приріст радіуса-вектора) за час Δt .

Вектор миттєвої кутової швидкості обертального руху:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (1.9)$$

де $d\vec{\varphi}$ – вектор нескінченно малого кутового переміщення, що відбулося за проміжок часу dt ; модуль вектора дорівнює куту повороту, напрям співпадає з віссю обертання і відповідає правилу правого гвинта.

Вектор миттєвого кутового прискорення обертального руху:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.10)$$

Зв'язок між кінематичними характеристиками при русі матеріальної точки по колу:

$$v = \omega R, a_\tau = \beta R, a_n = \omega^2 R, \quad (1.11)$$

де v – лінійна швидкість; ω – кутова швидкість; R – радіус кола; a_τ і a_n – тангенціальне і нормальне прискорення; β – кутове прискорення.

Зв'язок між кутовою швидкістю, періодом T і частотою ν при русі матеріальної точки по колу:

$$\omega = 2\pi/T, \nu = 1/T, \omega = 2\pi\nu.$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Матеріальна точка рухається в площині xy згідно із законом $x = At, y = B/t$, де A і B – додатні сталі. Визначити вектори і модулі швидкості і прискорення залежно від часу. Записати рівняння траєкторії.

Розв'язок

В умові задачі задані залежності координат точки від часу (тобто відомий закон руху точки), тому можна простим диференціюванням знайти проекції вектора швидкості на координатні осі (див. (1.2), (1.3)), і отже, сам вектор швидкості у будь-який момент часу:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A, v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{B}{t^2},$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = A\vec{i} - \frac{B}{t^2} \vec{j}.$$

Модуль вектора швидкості визначимо за формулою (1.4):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{t^4}} = \frac{1}{t^2} \sqrt{A^2 t^4 + B^2}.$$

Продиференціювавши вираз для вектора швидкості за часом, визначимо вектор повного прискорення та його модуль (див. (1.5), (1.6)):

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{2B}{t^3} \vec{j}; \quad a(t) = \frac{2B}{t^3}.$$

Знаючи як змінюються координати точки з часом (функціональні залежності координат точки від часу вже є рівнянням траєкторії в параметричному вигляді, де параметром є час t), отримаємо рівняння траєкторії:

$$y = \frac{AB}{x}.$$

Приклад 2. Радіус-вектор частинки змінюється з часом t згідно із законом $\vec{r} = \vec{b}t(1 - \alpha t)$, де $\vec{b}$ – постійний вектор, α – додатна стала. Знайти: а) швидкість $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$ частинки залежно від часу; б) проміжок часу, після закінчення якого частинка повернеться у вихідну точку, а також шлях s , який вона пройде при цьому.

Розв'язок

а) Згідно з визначенням швидкості (див. (1.2)), вираз для вектора швидкості знайдемо, продиференціювавши співвідношення для $\vec{r}(t)$ за часом:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{b}(1 - 2\alpha t).$$

Продиференціювавши отриманий вираз для вектора швидкості за часом, визначимо вектор повного прискорення (див. (1.5)):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\alpha\vec{b}.$$

б) Для визначення пройденого шляху і часу, необхідного для повернення частинки в початкову точку, проаналізуємо отримані формули та умову задачі. Із залежності радіуса-вектора від часу видно, що частинка рухалася прямолінійно: при $\alpha t < 1$ частинка рухалася рівноуповільнено уздовж прямої у напрямі вектора, потім ($\alpha t > 1$) рівноприскорено у зворотному напрямі уздовж тієї ж прямої і з тим же прискоренням. У початковий момент часу частинка знаходилася у початку координат. Звідси випливає, що шлях буде рівний подвоєній довжині радіус-вектора частинки для моменту часу t_0 , коли її швидкість дорівнюватиме нулю. Час t_0 визначимо з умови, що в точці повороту швидкість дорівнює нулю:

$$v = b(1 - 2\alpha t_0) = 0.$$

Звідси

$$t_0 = \frac{1}{2\alpha}.$$

Довжина радіуса-вектора для цього моменту часу дорівнює

$$r = b \cdot \frac{1}{2\alpha} \left(1 - \alpha \cdot \frac{1}{2\alpha} \right) = \frac{b}{4\alpha}.$$

Шлях, пройдений частинкою за проміжок часу від початкового моменту до повернення у вихідну точку, дорівнюватиме:

$$s = 2 \cdot \frac{b}{4\alpha} = \frac{b}{2\alpha}.$$

У початковій точці радіус-вектор дорівнює нулю. З цієї умови визначимо моменти часу, коли частинка знаходилася в цій точці:

$$r = bt(1 - \alpha t) = 0,$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{\alpha}.$$

Перше рішення ($t_1 = 0$) відповідає початковому моменту часу, друге рішення ($t_2 = \frac{1}{\alpha}$) відповідає часу повернення у вихідну точку.

Таким чином, проміжок часу, після закінчення якого частинка повернулася в початкову точку, дорівнює:

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha}.$$

Приклад 3. Тіло кинули з поверхні Землі під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 .

Нехтуючи опором повітря, знайти:

а) час руху;

б) максимальну висоту підйому і

горизонтальну дальність польоту;

в) рівняння траєкторії $y(x)$, де y та x – переміщення тіла по вертикалі і горизонталі відповідно.

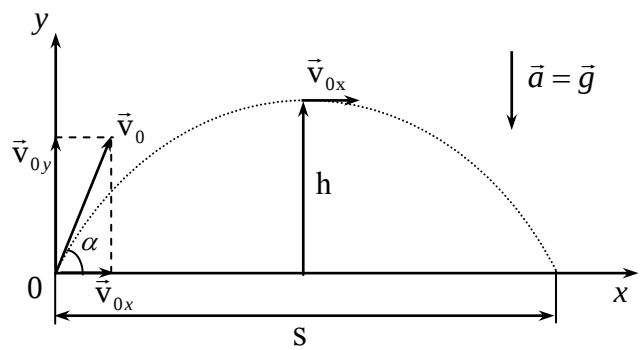


Рис. 1.1

Розв'язок

а) Оберемо систему координат, як показано на рис. 1.1. Запишемо залежності координат тіла від часу в загальному вигляді (див. (1.1)):

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Перепишемо ці рівняння для даної системи координат з урахуванням умов задачі та тієї обставини, що під час польоту тіла на нього діяла тільки сила тяжіння, яка надає прискорення : $\vec{g}$

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (1.12)$$

Ці рівняння дозволяють визначити координати тіла у будь-який момент часу в обраній нами системі координат. У момент падіння ($t = t_0$) координати тіла дорівнюють:

$$x = s, \quad y = 0.$$

Звідси:

$$\begin{cases} s = v_0 \cos \alpha \cdot t_0 \\ 0 = v_0 \sin \alpha \cdot t_0 - \frac{gt_0^2}{2} \end{cases} \quad (1.13)$$

Визначимо коріння другого рівняння:

$$t_{01} = 0, \quad t_{02} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Перше рішення дає час початку руху тіла, друге – час приземлення тіла. Таким чином, час руху тіла дорівнює:

$$t_0 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

б) Горизонтальну дальність польоту визначимо з першого рівняння системи (1.13):

$$s = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Для визначення максимальної висоти підйому необхідно знати час підльоту до цієї точки траєкторії. Час підльоту можна знайти з умови, що в цій точці вертикальна складова швидкості (див. рис. 1.1) дорівнює нулю:

$$\begin{cases} h = v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2} \\ 0 = v_0 \sin \alpha - gt_1 \end{cases}.$$

Вирішуючи спільно цю систему рівнянь відносно h , отримаємо, що максимальна висота підйому тіла дорівнює: $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

в) Для знаходження рівняння траєкторії скористаємося записаними нами кінематичними рівняннями руху тіла (1.12). Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Приклад 4. Під яким кутом до горизонту треба кинути кульку, щоб:

а) радіус кривизни початку її траєкторії був в $\eta = 8,0$ разів більше, ніж у вершині;

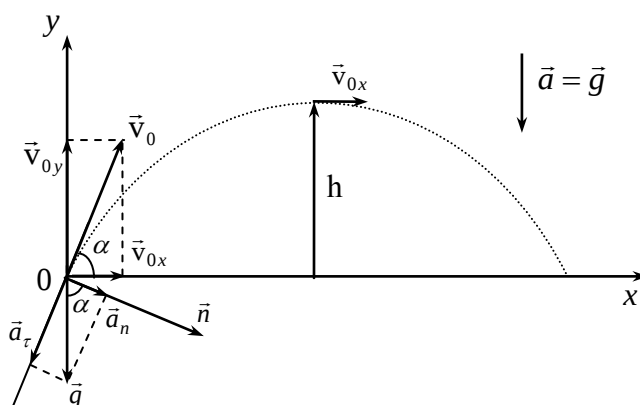
б) центр кривизни вершини траєкторії знаходився на земній поверхні?

Розв'язок

а) Радіус кривизни траєкторії пов'язаний з нормальним прискоренням тіла (див. (1.7)), яке є проекцією повного прискорення на напрям нормалі до дотичної до траєкторії в даній точці (див. рис. 1.2). Під час руху кульки на неї діяла тільки сила тяжіння, тому її повне прискорення дорівнює $\vec{g}$.

На початку траєкторії нормальне прискорення кульки дорівнює (див. рис. 1.2):

$$a_n = g \cos \alpha.$$



З іншого боку, нормальне прискорення, згідно з (1.7), дорівнює:

Рис. 1.2

$$a_n = \frac{v_0^2}{R_1},$$

де R_1 – радіус кривизни траєкторії на її початку.

Вирішуючи спільно ці рівняння, отримаємо вираз для радіусу кривизни на початку траєкторії:

$$R_1 = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}.$$

У вершині траєкторії вектор швидкості має тільки горизонтальну складову, яка дорівнює:

$$V_{ox} = V_0 \cos \alpha .$$

Тому нормальне прискорення в даному випадку буде дорівнювати повному прискоренню. Таким чином:

$$\begin{cases} a_n = g \\ a_n = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{R_2} \end{cases}$$

де R_2 – радіус кривизни у вершині траєкторії.

Вирішуючи систему рівнянь відносно R_2 , отримаємо:

$$R_2 = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g} .$$

Тепер визначимо кут, при якому радіус кривизни початку траєкторії буде в η раз більше, ніж радіус у вершині траєкторії.

$$\eta = \frac{R_1}{R_2} = \frac{V_0^2}{g \cos \alpha} \cdot \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^3 \alpha} .$$

Звідси:

$$\alpha = \arccos \left(\sqrt[3]{\frac{1}{\eta}} \right) = 60^\circ .$$

б) Визначимо максимальну висоту траєкторії кульки. Для цього скористаємося кінематичним рівнянням руху кульки уздовж ординати (див. (1.1)):

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Врахуємо, що для нашої системи координат (див. рис. 1.2):

$$y_0 = 0, v_{0y} = v_0 \sin \alpha, a_y = -g.$$

Таким чином, максимальна висота траєкторії дорівнюватиме:

$$y_{\text{макс}} = h = v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2},$$

де t_1 – час підльоту до даної точки траєкторії.

Час підльоту кульки до даної точки визначимо з умови, що вертикальна складова швидкості кульки в цій точці (див. (1.3), рис. 1.2) дорівнює нулю:

$$0 = v_0 \sin \alpha - gt_1.$$

Вирішуючи спільно ці рівняння, отримаємо:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Тепер визначимо кут, під яким необхідно кинути кульку, щоб центр кривизни вершини її траєкторії знаходився на земній поверхні. З умови $R_2 = h$ отримаємо:

$$\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 54,7^\circ.$$

Приклад 5. Диск обертається навколо нерухомої осі так, що залежність кута повороту радіусу диска від часу задається рівнянням $\varphi = \alpha t^2$, де $\alpha = 0,1 \text{ рад/с}^2$. Визначити повне прискорення точки А на ободі диска до кінця другої секунди руху, якщо її лінійна швидкість у цей момент $v = 0,40 \text{ м/с}$.

Розв'язок

Повне прискорення матеріальної точки в загальному випадку може бути визначене як векторна сума складових прискорень: тангенціального $\vec{a}_\tau$ і нормального $\vec{a}_n$ (див. рис. 1.3):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

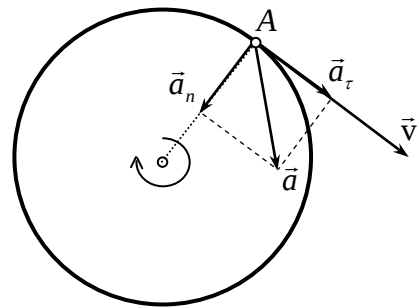


Рис. 1.3

Модуль повного прискорення визначається через модулі складових векторів a_τ та a_n таким чином (див. (1.8)):

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

У свою чергу тангенціальне і нормальне прискорення деякої точки тіла, що обертається, можна виразити через кутові характеристики його руху - кутову швидкість і кутове прискорення (див. 1.11):

$$a_{\tau} = \beta r, \quad a_n = \omega^2 r,$$

де r – відстань від осі обертання до даної точки.

В умові задачі задана залежність кута повороту диска від часу. Це дає можливість визначити всі кутові характеристики диска і потім, використовуючи наведені вище формули, визначити повне прискорення точки А.

Таким чином, величину кутової швидкості ω диска визначимо за формулою (1.9):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2\alpha t.$$

Кутове прискорення визначимо за формулою (1.10):

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = 2\alpha.$$

Використовуючи зв'язок між лінійною і кутовою швидкостями (див. (1.11)), знайдемо радіус диска:

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{v}{2\alpha t}.$$

Підставляючи отримані вирази у формулу для повного прискорення, знайдемо остаточно:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{(\beta r)^2 + (\omega^2 r)^2} = \sqrt{\left(\frac{v}{t}\right)^2 + (2\alpha t v)^2} = \frac{v}{t} \sqrt{1 + 4\alpha^2 t^4}.$$

Таким чином, до кінця другої секунди руху точка А матиме повне прискорення,

яке дорівнює:

$$a = \frac{0,4}{2} \sqrt{1 + 4 \cdot 0,01 \cdot 16} = 0,26 \text{ м/с}^2.$$

Завдання для самостійної роботи

Варіант 1

1. Точка пройшла половину шляху зі швидкістю v_0 . На частині шляху, що залишилася, вона половину часу рухалася зі швидкістю v_1 , а останню ділянку пройшла зі швидкістю v_2 . Знайти середню за час руху швидкість точки.

Відповідь: $\langle v \rangle = \frac{2v_0(v_1 + v_2)}{2v_0 + v_1 + v_2}.$

2. Кінематичне рівняння руху матеріальної точки має вигляд: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + 1,5t^2\vec{j} + 5\vec{k}$ (м). Визначити: а) швидкість $\vec{v}$ та прискорення $\vec{a}$ матеріальної точки; б) модуль швидкості і модуль прискорення у момент часу $t = 3$ с; в) модуль переміщення матеріальної точки за проміжок часу $\Delta t = 10$ с; г) шлях, пройдений матеріальною точкою за той самий час. **Відповідь:** а) $\vec{v} = 4t\vec{i} + 3t\vec{j}$ (м/с); $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ (м/с²); б) 15 м/с; 5 м/с²; в) 250 м; г) 250 м.

3. З вежі одночасно кинуто два тіла з однаковою за модулем початковою швидкістю v_0 : одне – вертикально вгору, інше – вертикально вниз. Як із часом змінюватиметься відстань між цими тілами? Чому вона дорівнюватиме у момент часу τ , коли перше тіло досягне найвищої точки свого руху? **Відповідь:** $\ell(t) = 2v_0t$; $\ell(\tau) = 2v_0^2/g$.

4. Кулька падає з нульовою початковою швидкістю на гладку похилу площину, яка складає кут α з горизонтом. Пролетівши відстань h , вона пружно відбивається від площини. На якій відстані від місця падіння кулька відіб'ється другий раз? **Відповідь:** $\ell = 8h \sin \alpha$.

5. З вершини гори кинуто тіло в горизонтальному напрямі із швидкістю 19,6 м/с. Визначити тангенціальне і нормальне прискорення тіла через 2,0 с після початку руху. Який кут утворює вектор повного прискорення з вектором

швидкості? **Відповідь:** $a_\tau = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = 6,9 \text{ м/с}^2$; $a_n = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = 6,9 \text{ м/с}^2$;

$\alpha = 45^\circ$.

6. Колесо радіусом 10 см обертається з постійним кутовим прискоренням 3.14 рад/с^2 . Знайти для точок на ободі колеса до кінця першої секунди після початку руху тангенціальне, нормальне і повне прискорення; кут, що складає напрям повного прискорення з радіусом колеса.

Відповідь: $0,314 \text{ м/с}^2$; $0,986 \text{ м/с}^2$; $1,03 \text{ м/с}^2$; $17^\circ 46'$.

Варіант 2

1. Два підводні човни плывуть назустріч один одному, кожен зі швидкістю v . З першого човна був посланий ультразвуковий сигнал, який, відбившись від другого човна, повернувся назад через час t . Швидкість сигналу u . На якій відстані знаходилися човни в той момент, коли був посланий сигнал? **Відповідь:**

$$s = (u + v)^2 t / 2u.$$

2. Матеріальна точка рухається прямолінійно. Рівняння руху має вигляд $x = At + Bt^3$, де $A = 3 \text{ м/с}$; $B = 0,06 \text{ м/с}^3$. Знайти швидкість і прискорення точки в моменти часу $t_1 = 0$ і $t_2 = 3 \text{ с}$. Чому дорівнюють середні значення швидкості і прискорення за перші три секунди руху? **Відповідь:** 3 м/с ; $4,62 \text{ м/с}$; 0 м/с^2 ; $1,08 \text{ м/с}^2$; $3,54 \text{ м/с}$; $0,54 \text{ м/с}^2$.

3. З поверхні землі вертикально вгору кинуто тіло А з початковою швидкістю v_0 . У той же момент часу з висоти h почало падати без початкової швидкості тіло В. Нехтуючи опором повітря, знайти залежність відстані між тілами від часу. Чому дорівнює ця відстань у момент часу τ , коли тіло В впало

на землю? **Відповідь:** $\ell(t) = h - v_0 t$, $\ell(\tau) = h - v_0 \sqrt{2h/g}$.

4. З висоти h кинули камінь в горизонтальному напрямі зі швидкістю v_0 . Нехтуючи опором повітря, знайти: а) рівняння траєкторії руху каменя; б) швидкість падіння каменя на землю і кут між вектором швидкості та горизонтом у цей момент часу; в) відстань, яку пролетить камінь по горизонталі. **Відповідь:**

а) $y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$; б) $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$, $\varphi = \arctg \sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}}$; в) $\ell = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

5. Снаряд вилетів із гармати під кутом 45° до горизонту з початковою швидкістю $v_0 = 500$ м/с. Через $\tau = 20$ с після початку руху, нехтуючи опором повітря, знайти: а) модуль швидкості снаряда; б) кут, який складатиме вектор швидкості з горизонтом; в) модулі нормального і тангенціального прискорень снаряда; г) радіус кривизни траєкторії в точці, що відповідає цьому моменту часу. **Відповідь:** а) $v = 384$ м/с; б) $\varphi = 24^\circ$, в) $a_n = 8,95$ м/с², $a_\tau = 3,92$ м/с²; г) $R = 12,8$ м.

6. Матеріальна точка рухається по колу радіусом $R = 5$ м. У деякий момент часу нормальне прискорення точки дорівнює $a_n = 3,2$ м/с², у цей момент вектори повного і нормального прискорень утворюють кут $\varphi = 60^\circ$. Знайти модулі швидкості та тангенціального прискорення точки для цього моменту часу. **Відповідь:** $v = \sqrt{a_n R} = 4$ м/с, $a_\tau = a_n \operatorname{tg} \varphi = 5,54$ м/с².

Варіант 3

1. Від бакена, який знаходиться на середині широкої річки, відійшли два човни, А і В. Обидва човни почали рухатися уздовж взаємно перпендикулярних прямих: човен А – уздовж річки, а човен В – уперек. Відійшовши на однакову відстань від бакена, човни потім повернулися назад. Знайти відношення часів руху човнів, якщо швидкість кожного човна відносно води в $\eta = 1,2$ разів більше

за швидкість течії. **Відповідь:** $\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} = 1,8$.

2. Дві матеріальні точки рухаються згідно з рівняннями $x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$ та $x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3$, де $A_1 = 4$ м/с; $B_1 = 8$ м/с²; $C_1 = -16$ м/с³; $A_2 = 2$ м/с; $B_2 = 4$ м/с²; $C_2 = 1$ м/с³. У який момент часу прискорення цих точок будуть однакові? Знайти швидкості точок у цей момент. **Відповідь:** 0,235 с; 5,1 м/с; 0,286 м/с.

3. По крижаній горі пустили ковзати від низу до верху шайбу. На відстані $\ell = 3$ м від початкової точки шайба побувала двічі: через $t_1 = 2$ с і $t_2 = 10$ с після початку руху. Вважаючи прискорення незмінним, знайти його модуль і початкову швидкість шайби. **Відповідь:** $a = \frac{2\ell}{t_1 t_2} = 0,3$ м/с², $v_0 = \frac{\ell(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} = 1,8$ м/с.

4. Під яким кутом до горизонту кинуто тіло, якщо відомо, що горизонтальна дальність польоту s в чотири рази більше максимальної висоти h траєкторії. **Відповідь:** $\alpha = 45^\circ$.

5. Найбільша висота підйому тіла, яке кинуто під кутом до горизонту, дорівнює 10 м, а радіус кривизни траєкторії в точці найвищого підйому – 20 м. Визначити: початкову швидкість тіла; швидкість, радіус кривизни, нормальне і тангенціальне прискорення тіла через 1 секунду після початку руху. **Відповідь:** $v_0 = 19,8$ м/с, $v = 14,6$ м/с, $R = 22,5$ м, $a_n = 9,4$ м/с², $a_\tau = 2,83$ м/с².

6. Нормальне прискорення частинки, що рухається по колу радіусом $R = 3,2$ м, змінюється згідно із законом $a_n = At^2$, де $A = 2,5$ м/с⁴. Знайти: а) шлях, пройдений частинкою за $\tau = 5$ с після початку руху; б) тангенціальне і повне прискорення наприкінці цієї ділянки шляху. **Відповідь:** а) $s = 35,3$ м; б) $a_\tau = 2,8$ м/с², $a = 62,6$ м/с².

Варіант 4

1. Дві частинки рухаються з постійними швидкостями v_1 і v_2 уздовж двох

взаємно перпендикулярних прямих до точки їх перетину О. У момент часу $t = 0$ частинки знаходилися на відстані ℓ_1 та ℓ_2 від точки О. Через який час після цього відстань між частинками стане найменшою? Чому вона дорівнюватиме?

Відповідь: $\tau = \frac{\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$; $\ell_{\text{мінімум}} = \frac{|\ell_1 v_2 - \ell_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

2. Рух точки по кривій заданий рівняннями $x = A_1 t^3$; $y = A_2 t$, де $A_1 = 1 \text{ м/с}^3$; $A_2 = 2 \text{ м/с}$. Знайти рівняння траєкторії точки, її швидкість і повне прискорення у момент часу $t = 0,8 \text{ с}$. **Відповідь:** $y^3 - 8x = 0$; $2,77 \text{ м/с}$; $4,8 \text{ м/с}^2$.

3. Визначити початкову швидкість, яку необхідно надати тілу, кинутому вертикально вгору, щоб воно повернулося назад через $t = 6 \text{ с}$. Якою буде максимальна висота підйому? Опір повітря не враховувати. **Відповідь:**

$$v_0 = \frac{gt}{2} = 29 \text{ м/с}, h = \frac{gt^2}{8} = 44,1 \text{ м}.$$

4. Гармата і ціль знаходяться на одному рівні на відстані $5,1 \text{ км}$ один від одного. Через скільки часу снаряд із початковою швидкістю 240 м/с досягне цілі? **Відповідь:** $t_1 = 0,41 \text{ с}$ або $t_2 = 0,71 \text{ с}$ залежно від початкового кута.

5. Тіло кинули під кутом 30° до горизонту. Знайти тангенціальне і нормальне прискорення в початковий момент руху тіла. **Відповідь:** $a_t = 4,9 \text{ м/с}^2$, $a_n = 8,55 \text{ м/с}^2$.

6. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі згідно із законом $\varphi = at - bt^3$, де $a = 6,0 \text{ рад/с}$, $b = 2,0 \text{ рад/с}^2$. Знайти: а) середні значення кутової швидкості і кутового прискорення за проміжок часу від $t = 0$ до зупинки тіла; б) кутове прискорення тіла у момент його зупинки. **Відповідь:** а) $\langle \omega \rangle = \frac{2a}{3} = 4 \text{ рад/с}$, $\langle \beta \rangle = \sqrt{3ab} = 6 \text{ рад/с}^2$; б) $\beta = 2\sqrt{2ab} = 12 \text{ рад/с}^2$.

Практичне заняття 2

Кінематика матеріальної точки (обернена задача кінематики)

Обернена задача кінематики полягає у визначенні закону руху матеріальної точки за яким-небудь відомим параметром руху (вектором швидкості або прискоренням). Під час розв'язання задачі, як правило, доводиться застосовувати інтегрування, тобто вирішувати диференціальні рівняння. Нижче розглянуті задачі, в яких диференціальні рівняння розв'язуються найбільш простим способом – методом розділення змінних.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Швидкість матеріальної точки змінюється згідно із законом $\vec{v} = 6t\vec{i} + 2\vec{j}$. Визначити кінематичний закон руху матеріальної точки, якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася на початку координат, тобто $\vec{r}_0 = 0$.

Розв'язок

Вектор швидкості і радіус-вектор $\vec{r}$ безпосередньо пов'язані між собою диференціальним рівнянням (див. (1.2)):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Це векторне диференціальне рівняння еквівалентне до трьох скалярних диференціальних рівнянь:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Компоненти вектора швидкості відомі з умови задачі:

$$v_x = 6t, \quad v_y = 2, \quad v_z = 0.$$

Підставляючи ці значення в наведені вище диференціальні рівняння, отримаємо систему рівнянь для визначення всіх трьох компонент радіуса-вектора $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = 6t, \quad \frac{dy}{dt} = 2, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Розділивши змінні і проінтегрувавши, отримаємо:

$$\begin{cases} x = 3t^2 + c_1 \\ y = 2t + c_2 \\ z = c_3 \end{cases},$$

де c_1 , c_2 , c_3 — довільні сталі, які визначаються з початкових умов задачі.

Згідно з умовою задачі, у момент часу $t = 0$ тіло знаходилося на початку координат. Звідси випливає, що всі три сталі дорівнюють нулю.

Таким чином, кінематичний закон руху матеріальної точки в координатному уявленні має такий вигляд:

$$x = 3t^2, \quad y = 2t, \quad z = 0.$$

Або у векторній формі:

$$\vec{r} = 3t^2 \vec{i} + 2t \vec{j}.$$

Приклад 2. Прискорення матеріальної точки змінюється згідно із законом $\vec{a} = 2\beta\vec{j}$. Визначити: вектор і модуль швидкості; закон руху матеріальної точки, якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася на початку координат та її швидкість у цей момент часу дорівнювала $\vec{v}_0 = \alpha\vec{i}$.

Розв'язок

Вектор швидкості і вектор прискорення пов'язані між собою відомим диференціальним співвідношенням (див. (1.5)):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}.$$

Перепишемо це векторне рівняння в координатній формі, використовуючи дані з умови задачі:

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{dv_x}{dt} = 0, \\a_y &= \frac{dv_y}{dt} = 2\beta, \\a_z &= \frac{dv_z}{dt} = 0.\end{aligned}$$

Розділяючи змінні й інтегруючи, отримаємо компоненти вектора швидкості:

$$\begin{aligned}v_x &= c_1, \\v_y &= 2\beta t + c_2, \\v_z &= c_3.\end{aligned}$$

Сталі інтегрування c_1 , c_2 та c_3 визначимо з початкових умов. При $t = 0$ вектор швидкості дорівнює:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} + v_{0z}\vec{k} = \alpha\vec{i}.$$

Звідси:

$$c_1 = \alpha, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0.$$

Таким чином, компоненти вектора швидкості, вектор швидкості і модуль вектора швидкості будуть дорівнювати:

$$v_x = \alpha, \quad v_y = 2\beta t, \quad v_z = 0,$$

$$\vec{v} = \alpha\vec{i} + 2\beta t\vec{j},$$

$$v = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}.$$

Знаючи вектор швидкості, можна визначити радіус-вектор, використовуючи відоме співвідношення між ними (див. (1.2)):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \alpha,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2\beta t,$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Розділяючи змінні й інтегруючи, визначимо компоненти радіуса-вектора:

$$\begin{aligned}x &= \alpha t + c_4, \\y &= \beta t^2 + c_5, \\z &= c_6.\end{aligned}$$

У початковий момент часу матеріальна точка знаходилася на початку координат. Тому: $c_4 = c_5 = c_6 = 0$.

Таким чином, закон руху матеріальної точки має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\text{а) у координатній формі} - \quad x &= \alpha t, \\y &= \beta t^2, \\z &= 0,\end{aligned}$$

$$\text{б) у векторній формі} - \vec{r} = \alpha t \vec{i} + \beta t^2 \vec{j}.$$

Приклад 3. Частинка рухається в площині xy зі швидкістю $\vec{v} = \alpha \vec{i} + \beta x \vec{j}$, де $\vec{i}$ та $\vec{j}$ – орти осей x та y , α та β – сталі. У початковий момент часу частинка знаходилася в точці з координатами $x_0 = y_0 = 0$. Знайти: а) закон руху частинки $\vec{r} = \vec{r}(t)$; б) залежність вектора швидкості від часу; в) рівняння траєкторії $y = y(x)$.

Розв'язок

а) Для знаходження закону руху частинки скористаємося визначенням швидкості матеріальної точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Знайдемо компоненти вектора швидкості, використовуючи заданий закон змінювання швидкості:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \alpha, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \beta x, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Розділяючи змінні й інтегруючи, з першого рівняння отримаємо:

$$x = \alpha t + c_1.$$

Постійну інтегрування c_1 визначимо з початкових умов: оскільки при $t = 0$, $x_0 = 0$, то $c_1 = 0$. Отже, $x = \alpha t$. Підставивши це співвідношення в друге диференціальне рівняння, розділивши змінні та проінтегрувавши, отримаємо вираз для другої компоненти радіуса-вектора:

$$y = \frac{\alpha\beta}{2} t^2 + c_2.$$

З початкових умов зрозуміло, що стала інтегрування c_2 , а також третя компонента радіус-вектора дорівнюють нулю.

Таким чином, закон руху частинки має наступний вигляд:

$$\vec{r} = \alpha t \vec{i} + \frac{\alpha\beta}{2} t^2 \vec{j}.$$

Знаючи закон руху частинки, можна визначити будь-які параметри руху частинки, зокрема залежність вектора швидкості від часу та рівняння траєкторії.

б) Вираз для вектора швидкості знайдемо, продиференціювавши вираз для $\vec{r}(t)$ за часом:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha \vec{i} + \alpha \beta t \vec{j}.$$

в) Рівняння траєкторії визначимо з системи рівнянь:

$$x = \alpha t, \quad y = \frac{\alpha \beta}{2} t^2.$$

Виключивши з цієї системи рівнянь час t , отримаємо:

$$y = \frac{\beta}{2\alpha} x^2.$$

Видно, що траєкторією руху частинки є парабола.

Завдання для самостійної роботи

Варіант 1

1. Швидкість матеріальної точки, яка рухається в площині xu , змінюється з часом згідно із законом $\vec{v} = A\vec{i} - 2Bt\vec{j}$, де A і B – додатні сталі. Знайти: а) залежність від часу модуля швидкості точки; б) прискорення $\vec{a}$ точки і його модуль; в) залежність радіус-вектора $\vec{r}$ точки від часу, якщо в момент $t = 0$ він дорівнював нулю. **Відповідь:** а) $v = \sqrt{A^2 + 4B^2 t^2}$; б) $\vec{a} = -2B\vec{j}$, $a = 2B$; в) $\vec{r} = At\vec{i} - Bt^2\vec{j}$.

2. Частинка рухається з прискоренням, що змінюється з часом згідно із законом $a = At^2$, де $A = 0,3 \text{ м/с}^3$. Знайти приріст швидкості за перших 4 с руху.

Який шлях пройде частинка за цей час? **Відповідь:** $\Delta v = \frac{A}{3}t^3 = 6,4 \text{ м/с}$,

$$s = \frac{A}{12}t^4 = 6,4 \text{ м}.$$

3. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі так, що його кутове прискорення залежить від часу згідно із законом $\beta = -6bt$. У початковий момент часу його кутова швидкість дорівнювала $\omega_0 = a$. Знайти залежність від часу кута повороту. **Відповідь:** $\varphi = at - bt^3$.

4. Частинка у момент часу $t = 0$ вийшла з початку координат системи відліку і далі рухалася прямолінійно так, що її швидкість змінювалася з часом згідно із законом $v = v_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$, де v_0 і τ – сталі величини. Визначити для даного руху залежності шляху і прискорення від часу. **Відповідь:** $s = v_0 t \left(1 - \frac{t}{2\tau}\right)$;

$$a = -\frac{v_0}{\tau}.$$

Варіант 2

1. Швидкість частинки, яка рухається упродовж осі x , змінюється з часом згідно із законом $\vec{v} = (1 - 2Bt)\vec{i}$, де B – додатна стала. У момент $t = 0$ координата частинки $x_0 = 0$. Знайти проміжок часу, після закінчення якого частинка повернеться в початкову точку, а також шлях, який вона пройде за цей час.

Відповідь: $\Delta t = \frac{1}{B}$, $s = \frac{1}{2B}$.

2. Прискорення матеріальної точки змінюється згідно із законом $\vec{a} = \alpha t^2 \vec{i} - \beta \vec{j}$, де $\alpha = 3 \text{ м/с}^4$, $\beta = 3 \text{ м/с}^2$. У момент часу $t = 0$ точка знаходилася на початку координат і мала швидкість, що дорівнювала нулю. Визначити закон руху частинки. **Відповідь:** $\vec{r} = \frac{\alpha t^4}{12} \vec{i} - \frac{\beta t^2}{2} \vec{j}$.

3. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі так, що його кутове прискорення залежить від часу згідно із законом $\beta = -2b$. У початковий момент часу його кутова швидкість дорівнювала $\omega_0 = a$. Знайти залежність від часу кута повороту. **Відповідь:** $\varphi = at - bt^2$.

4. Частинка рухається в додатному напрямку осі x так, що її швидкість змінюється згідно із законом $v = \alpha\sqrt{x}$, де α – додатна стала. У момент $t = 0$ частинка знаходилася в точці $x_0 = 0$. Знайти: а) її швидкість та прискорення як функції часу; б) середню швидкість за час, протягом якого вона пройде перші s метрів шляху. **Відповідь:** а) $v = \alpha^2 t / 2$; $a = \alpha^2 / 2$; б) $\langle v \rangle = (\alpha / 2)\sqrt{s}$.

Варіант 3

1. Швидкість частинки, яка рухається в площині xu , змінюється з часом згідно із законом $\vec{v} = (1 - 0,5t)\vec{i} + 4t\vec{j}$. У момент часу $t = 0$ координати частинки $x_0 = y_0 = 0$. Знайти екстремальне значення координати x_1 та координату y_1 відповідну цьому моменту часу. Записати залежність радіуса-вектора $\vec{r}$ від часу. **Відповідь:** $x_1 = 1$ при $t = 2$ с; $y_1 = 8$; $\vec{r} = t(1 - 0,25t^2)\vec{i} + 2t^2\vec{j}$.

2. Компоненти прискорення частинки, що рухається в площині xu , дорівнюють: $a_x = 2A$, $a_y = 2B$, де A і B – додатні сталі. У момент часу $t = 0$ координати частинки $x_0 = y_0 = 0$, швидкість $v_0 = 0$. Знайти: а) модулі швидкості і прискорення частинки залежно від часу; б) рівняння траєкторії частинки. **Відповідь:** а) $v = 2t\sqrt{A^2 + B^2}$, $a = 2\sqrt{A^2 + B^2}$; б) $y = \frac{B}{A}x$.

3. Нормальне прискорення частинки, яка рухається по колу радіусом R , змінюється згідно із законом $a_n = At^2$, де A – додатна стала. Знайти залежність кута повороту від часу. **Відповідь:** $\varphi = \sqrt{\frac{A}{R}} \frac{t^2}{2}$.

4. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі так, що його кутова

швидкість залежить від кута повороту φ згідно із законом $\omega = \omega_0 - a\varphi$, де ω_0 та a – додатні сталі. У момент часу $t = 0$ кут $\varphi = 0$. Знайти залежність від часу кута повороту. **Відповідь:** $\varphi = (1 - e^{-at}) \frac{\omega_0}{a}$.

Варіант 4

1. Швидкості двох частинок, які рухаються уздовж осі x , змінюються з часом за законами: $\vec{v}_1 = 4\vec{i}$, $\vec{v}_2 = -0,8t\vec{i}$. У момент часу $t = 0$ їх координати відповідно дорівнюють: $x_1 = 0$, $x_2 = 15$ м. Знайти: а) радіус-вектор точки зустрічі цих частинок; б) модулі швидкостей v_1 та v_2 частинок у момент їх зустрічі.

Відповідь: а) $\vec{r} = 11,6\vec{i}$; б) $v_1 = 4$ м/с, $v_2 = 2,3$ м/с.

2. Матеріальна точка рухається в площині xy з прискоренням $\vec{a} = 16\vec{j}$. У початковий момент часу точка знаходилася на початку координат і мала швидкість $\vec{v}_0 = 2\vec{i}$. Знайти закон руху точки. **Відповідь:** $\vec{r} = 2t\vec{i} + 8t^2\vec{j}$.

3. Тангенціальне прискорення частинки, що рухається по колу радіусом R , змінюється згідно із законом $a_\tau = At$. Знайти залежність кута повороту від часу.

Відповідь: $\varphi = \frac{A}{6R} t^3$.

4. Частинка рухається в додатному напрямку осі x так, що її прискорення змінюється згідно із законом $\vec{a} = -r\vec{v}$, де r – додатна величина. У початковий момент швидкість частинки дорівнює v_0 . Знайти залежність шляху від часу.

Відповідь: $s = \frac{v_0}{r} (1 - e^{-rt})$.

Практичне заняття 3

Динаміка матеріальної точки. Закони Ньютона

Задачі з динаміки матеріальної точки можна розділити на дві групи: задачі, де сили, що діють на матеріальну точку, залишаються в процесі руху постійними, і задачі, де сили, що діють на матеріальну точку, змінюються в процесі руху.

Загальний підхід до розв'язання задач для обох груп однаковий, проте в другій групі задач, як правило, доводиться розв'язувати диференціальні рівняння, які впливають з другого закону Ньютона. У посібнику в основному використовується один із найпростіших прийомів розв'язання диференціальних рівнянь – метод розділення змінних. Деякі методичні рекомендації щодо застосування цього методу були наведені при розгляді прикладів розв'язання задач із кінематики матеріальної точки.

Рекомендовано таку схему розв'язання задач з даної теми:

1. Уважно вивчити умову задачі та зробити попередній фізичний аналіз: з'ясувати, яким законам підкоряється описуваний в задачі фізичний процес; які сили діють на тіла, що цікавлять нас; проаналізувати характер, походження і напрям цих сил. Особливу увагу слід приділити аналізу взаємодії кожного тіла з іншими тілами (часто «забувають» третій закон Ньютона). Виписати й осмислити відомі величини та величини, які треба знайти.

2. Зробити схематичне креслення. Вказати на ньому всі сили, що діють на кожне тіло, а також прискорення і швидкості.

3. Для кожного тіла записати рівняння руху спочатку у векторній формі, а тільки потім перейти до скалярного вигляду. Систему координат, яка застосовується для проектування векторних рівнянь, не слід змішувати з системою відліку, в якій визначаються прискорення і швидкість тіла. Слід зазначити, що закони Ньютона справедливі тільки в інерціальних системах

відліку. У неінерціальних системах відліку в рівнянні руху з'являються сили інерції.

4. Проаналізувати характер кінематичних зв'язків між тілами. За необхідності скласти рівняння кінематичних зв'язків.

5. Провести аналіз отриманих рівнянь: чи складають вони повну систему рівнянь, достатніх для знаходження всіх невідомих величин. Інакше необхідно знайти відсутні рівняння. Це можуть бути конкретні умови задачі, кінематичні рівняння зв'язків і таке інше.

6. Аналітично вирішити отриману систему рівнянь.

7. Погодити одиниці вимірювань всіх величин і розрахувати чисельні значення всіх невідомих величин.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Два тіла масами m_1 і m_2 , які пов'язані невагомою і нерозтяжною ниткою, лежать на гладкій горизонтальній поверхні столу. На перше тіло діє паралельно поверхні столу постійна за величиною сила F . Нитка може витримати натяг із силою не більш T_0 . Знайти значення сили F , при якому відбувається обрив нитки.

Розв'язок

Розглянемо сили, що діють на кожне тіло (див. рис. 3.1). На перше тіло діє зовнішня сила, сила тяжіння $m_1\vec{g}$ (поява сили пов'язана з гравітаційною взаємодією даного тіла із Землею), сила реакції опори $\vec{N}_1$ (результат пружної взаємодії першого

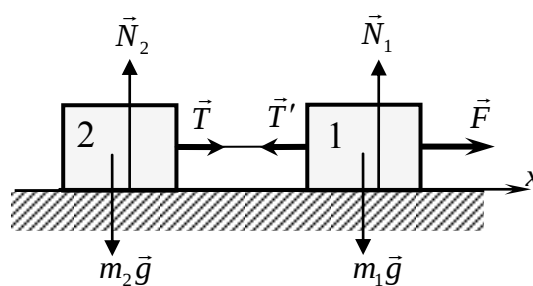


Рис. 3.1

тіла зі столом; сила направлена перпендикулярно до поверхні столу вгору) і сила натягу нитки $\vec{T}'$ (сила виникла в результаті пружної деформації нитки; нитку

можна розглядати як пружину, яка одним кінцем із силою $\vec{T}'$ діє на перше тіло, а іншим кінцем з силою $\vec{T}$ діє на друге тіло). Отже, для першого тіла другий закон Ньютона має такий вигляд:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F} + m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}'.$$

На друге тіло діють три сили: сила тяжіння, сила реакції опори $\vec{N}_2$ і сила натягу нитки $\vec{T}$. Другий закон Ньютона для нього матиме вигляд:

$$m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}.$$

Нитку (як третє тіло) до уваги можна не брати через її невагомість.

Легко показати на підставі другого закону Ньютона, що сили, які діють на будь-який елемент невагомої нитки з боку сусідніх елементів, чисельно рівні. Дійсно, для довільного елемента нитки можна записати другий закон Ньютона у вигляді:

$$\Delta m \vec{a} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \Delta m \vec{g},$$

де $\vec{f}_1$ та $\vec{f}_2$ – сили, що діють на даний елемент нитки з боку сусідніх елементів. Але якщо $\Delta m = 0$, то $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$. Оскільки елемент нитки обраний довільно, то можна дійти висновку, що сила натягу нитки однакова по всій її довжині. Звідси випливає, що сили натягу нитки $\vec{T}$ і $\vec{T}'$, що діють на тіла з боку невагомої нитки, чисельно дорівнюють одна одній. Тобто $T = T'$.

З умови нерозтяжності нитки виходить, що прискорення обох тіл чисельно рівні:

$$a_1 = a_2 = a.$$

Спроектуємо тепер обидва векторні рівняння на вісь абсцис. Отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 a = F - T \\ m_2 a = T \end{cases}.$$

Врахуємо, що нас цікавить значення сили F , при якій відбувається обрив нитки (тобто $T = T_0$). Тоді отримаємо:

$$\begin{cases} m_1 a = F - T_0 \\ m_2 a = T_0 \end{cases}.$$

Звідси:

$$F = \frac{m_1 + m_2}{m_2} T_0.$$

Приклад 2. На гладкому горизонтальному столі лежить брусок масою $M = 2$ кг, на якому знаходиться інший брусок масою $m = 1,5$ кг. Бруски з'єднані легкою ниткою, перекинutoю через невагомий блок. Коефіцієнт тертя між брусками $\mu = 0,4$. Нижній брусок під дією постійної сили переміщується на відстань $s = 0,5$ м за 1 секунду. Визначте силу, що діє на нижній брусок; силу натягу нитки.

Розв'язок

Визначимо і розставимо сили, що діють на кожне тіло (див. рис. 3.2). На верхнє тіло діють чотири сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ (результат

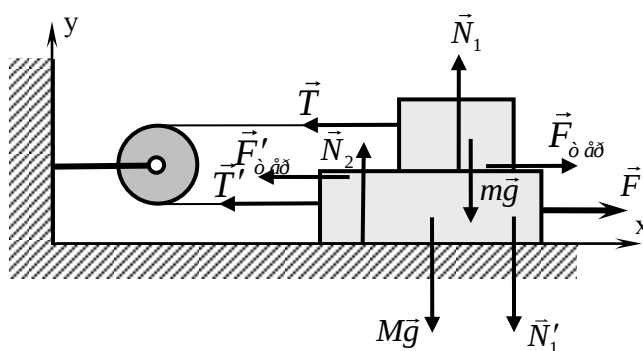


Рис. 3.2

гравітаційної взаємодії тіла із Землею), сила натягу нитки $\vec{T}$ (сила виникла в результаті пружної деформації нитки), сила реакції опори $\vec{N}_1$ (сила виникла в результаті пружної взаємодії верхнього бруска з нижнім бруском, прикладена до верхнього тіла і спрямована вгору; є однією з двох складових сили, з якою нижній брусок діє на верхнє тіло) і сила тертя $\vec{F}_{\partial \partial \partial}$ (дотична складова сили, з якою нижній брусок діє на верхнє тіло; в даному випадку це сила тертя ковзання, спрямована проти відносної швидкості верхнього тіла).

На нижній брусок діють шість сил: сила тяжіння, зовнішня сила, сила натягу нитки $\vec{T}'$, сила реакції опори $\vec{N}_2$ (результат пружної взаємодії нижнього тіла з горизонтальною поверхнею столу, спрямована вгору), сила тиску $\vec{N}'_1$ (вертикальна складова сили, з якою верхній брусок діє на нижній брусок, спрямована вниз) і сила тертя $\vec{F}'_{\partial \partial \partial}$ (горизонтальна складова сили, з якою верхній брусок діє на нижній брусок). Для зручності вектори сил, що діють на обидва бруски, на рис. 3.2 рознесені.

Оскільки за умовою задачі поверхня столу гладка, то дією сили тертя, яка могла б виникнути в результаті взаємодії нижнього бруска з горизонтальною поверхнею столу, можна нехтувати. Врахуємо, що, відповідно до третього закону Ньютона, повинна спостерігатися рівність таких сил:

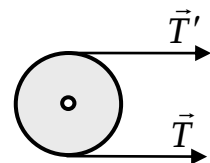


Рис. 3.3

$$|\vec{F}_{\partial \partial \partial}| = |\vec{F}'_{\partial \partial \partial}| = F_{\partial \partial \partial} \text{ и } |\vec{N}_1| = |\vec{N}'_1| = N_1.$$

Врахуємо ще такі обставини. З невагомості нитки виходить, що сили натягу нитки уздовж відповідних частин нитки (верхньої або нижньої) однакові по всій довжині (див. приклад 1). Для обертання масивного блоку необхідно, щоб сумарний момент сил відносно осі обертання був відмінний від нуля, тобто $TR \neq T'R$ (R – радіус блоку). Якщо ж блок невагомий, то він може обертатися і

під дією сумарного моменту, що дорівнює нулю. Звідси витікає, що сили натягу нитки по різні сторони блоку дорівнюють одна одній за величиною.

Запишемо рівняння руху для обох брусків:

$$\begin{cases} m\vec{a}_1 = \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\partial \dot{a}\ddot{a}} + m\vec{g} \\ M\vec{a}_2 = \vec{F} + \vec{T}' + \vec{F}_{\partial \dot{a}\ddot{a}} + \vec{N}'_1 + \vec{N}_2 + M\vec{g}. \end{cases}$$

Спроекуємо систему векторних рівнянь на координатні осі. Врахуємо, що через нерозтяжність нитки прискорення обох брусків однакові за модулем ($|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$). Додамо до отриманих рівнянь вираз для сили тертя ковзання: $F_{\partial \dot{a}\ddot{a}} = \mu N_1$. Зв'язок між переміщенням і прискоренням тіла легко отримати з кінематичного рівняння руху. Якщо сумістити початок координат з точкою початку руху нижнього тіла і відлік часу почати з моменту початку руху тіл, то з кінематичного рівняння руху отримаємо (див. задачі з кінематики матеріальної точки):

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

Система рівнянь руху брусків тепер матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} ma = T - F_{\partial \dot{a}\ddot{a}} \\ Ma = F - T - F_{\partial \dot{a}\ddot{a}} \\ F_{\partial \dot{a}\ddot{a}} = \mu N_1 \\ 0 = N_1 - mg \\ s = \frac{at^2}{2}. \end{cases}$$

Вийшла система з п'яти рівнянь із п'ятьма невідомими. Система повна. Вирішуючи цю систему, остаточно отримаємо:

$$T = m(a + \mu g) = m\left(\frac{2s}{t^2} + \mu g\right) = 7,38 \text{ Н},$$

$$F = (M + m)a + 2\mu mg = (M + m)\frac{2s}{t^2} + 2\mu mg = 15,26 \text{ Н}.$$

Приклад 3. Похила площина (див. рис. 3.4) складає кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. Відношення мас тіл $m_2/m_1 = \eta = 2/3$. Коефіцієнт тертя між тілом m_1 і площиною $k = 0,10$. Масами блоку і нитки можна нехтувати. Знайти модуль і напрям прискорення тіла m_2 , якщо система почала свій рух із стану спокою.

Розв'язок

При розв'язанні задач із динаміки, в яких заздалегідь не відомий напрямок руху тіл і необхідно враховувати сили тертя, виникає проблема з визначенням напрямку дії сил тертя. Для вирішення цієї проблеми врахуємо ту обставину, що сила тертя завжди спрямована проти відносної швидкості тіла і не може змінити напрям руху тіла на протилежний. Тому для визначення напрямку сил тертя слід спочатку з'ясувати напрямок руху тіл у відсутності сил тертя, а вже потім розв'язувати задачу з урахуванням їх дії.

Отже, визначимо напрямок руху вантажів без урахування сил тертя (див. рис. 3.4). На перше тіло діють: сила тяжіння, сила реакції опори $\vec{N}$ і сила натягу нитки $\vec{T}$. На друге тіло діють: сила тяжіння $m_2\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}'$. З невагомості нитки і блоку (див. прикл. 1 і 2) виходить, що $T = T'$. Крім того, з нерозтяжності нитки випливає, що прискорення обох тіл

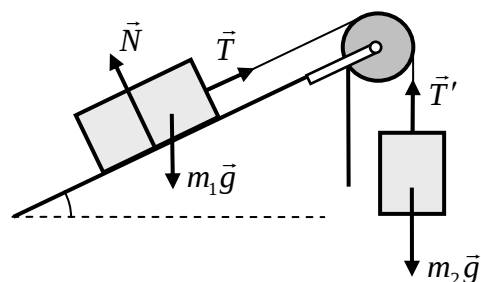


Рис. 3.4

дорівнюють один одному за модулем.

Запишемо тепер рівняння руху для обох тіл у векторній формі:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \\ m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}' \end{cases}$$

Спроектуємо векторне рівняння руху для першого тіла на вісь, паралельну похилій площині. Векторне рівняння для другого тіла спроектуємо на вертикальну вісь. Отримаємо систему двох скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \sin \alpha \\ m_2 a = m_2 g - T \end{cases}$$

Вирішуючи систему рівнянь відносно прискорення, отримаємо:

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g = \frac{\eta - \sin \alpha}{\eta + 1} g.$$

Вочевидь напрям руху тіл визначатиметься співвідношенням $\eta / \sin \alpha$. Якщо $\eta > \sin \alpha$, то тіло m_1 рухатиметься вправо, якщо $\eta < \sin \alpha$ – вліво. У нашому випадку ($\eta = 2/3$, $\sin 30^\circ = 0,5$) рух тіл направлений за годинниковою стрілкою. Слід відзначити, що в даному випадку напрями швидкості і прискорення повинні співпадати, оскільки ці тіла не мали початкової швидкості.

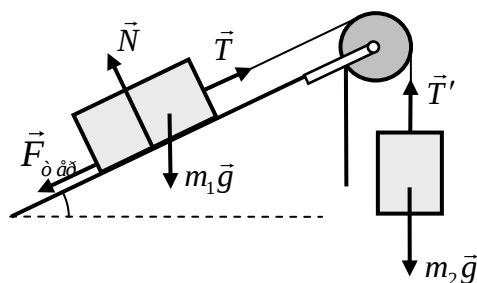


Рис. 3.5

Тепер, коли напрям руху тіл (без урахування сил тертя) відомий, можна додати

силу тертя (див. рис. 3.5). Врахуємо, що при русі тіла m_1 на нього діятиме сила тертя ковзання, яка дорівнює $F_{\text{тр}} = kN$.

Рівняння руху тіл тепер матимуть наступний вигляд:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{тр}} \\ m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}'. \end{cases}$$

Після проектування векторних рівнянь на відповідні осі, отримаємо таку систему скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \sin \alpha - F_{\text{тр}} \\ 0 = N - m_1 g \cos \alpha \\ m_2 a = m_2 g - T \\ F_{\text{тр}} = kN. \end{cases}$$

Вирішуючи дану систему рівнянь щодо прискорення тіл, отримаємо:

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha - k m_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2} g = \frac{\eta - \sin \alpha - k \cos \alpha}{\eta + 1} g = 0,048g = 0,47 \text{ м/с}^2.$$

Примітка: можлива ситуація, коли після врахування сил тертя (сил тертя ковзання) і підстановки чисельних значень, знак прискорення системи тіл вийшов негативним. Цього не повинно бути, адже сила тертя не може змінювати напрям руху тіл. Зміна знаку прискорення викликана тією обставиною, що величина сили тертя виявилася дуже великою і, отже, необхідно зменшити силу тертя. Інакше кажучи, необхідно замінити силу тертя ковзання на силу тертя спокою. Прискорення системи тіл, в цьому випадку, буде дорівнювати нулю.

Приклад 4. На похилій площині, яка складає кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом, знаходиться брусок масою $m_1 = 0,4$ кг. Брусок за допомогою системи блоків і нерозтяжних ниток пов'язаний з вантажем масою $m_2 = 0,3$ кг. Коефіцієнт тертя ковзання між бруском і площиною $\mu = 0,1$. Визначити напрямок і величину прискорення вантажів; натяг ниток. Масами блоків і ниток нехтувати.

Розв'язок

З умови задачі не можна визначити характер і напрямок руху тіл. Тим самим не визначений напрям дії сили тертя. Тому, перш за все, необхідно визначити можливий напрямок руху тіл. Для цього, враховуючи, що сили тертя не можуть змінити напрямок руху тіл, розв'яжемо задачу без урахування сил тертя.

Розглянемо сили, що діють на тіла (див. рис. 3.6). На вантаж m_2 діють сила тяжіння $m_2\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}_2$. На брусок m_1 діють

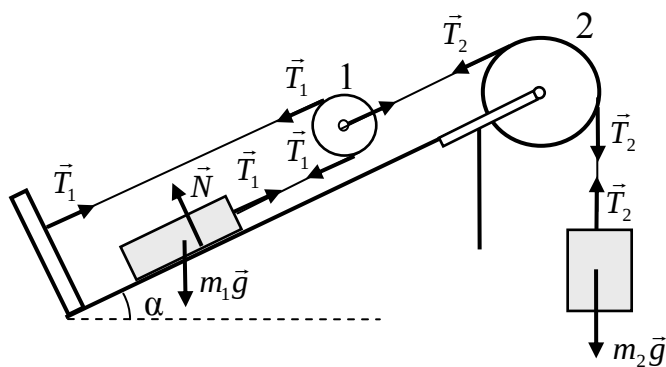


Рис. 3.6

сила тяжіння, сила реакції опори $\vec{N}$ і сила натягу нитки $\vec{T}_1$. З умови невагомості ниток і блоків виходить, що сила натягу нитки уздовж кожної нитки одна й та сама. Враховуючи цю обставину, можна легко отримати співвідношення між силами натягу T_1 і T_2 . Якби блок 1 мав масу $M_{\text{бл}}$, то для нього можна було б записати таке рівняння руху:

$$M_{\text{бл}} \vec{a} = 2\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + M_{\text{бл}} \vec{g}.$$

Але за умовою задачі маса блоку дорівнює нулю. Отже:

$$2T_1 = T_2.$$

Тепер спробуємо отримати співвідношення між прискореннями бруска і вантажу. Для цього скористаємося умовою постійності довжини нитки, що сполучає брусок m_1 з нерухомою стінкою, відносно якої брусок переміщується з часом. Довжина нитки, що сполучає брусок m_1 і стінку, дорівнює (див. рис. 3.7):

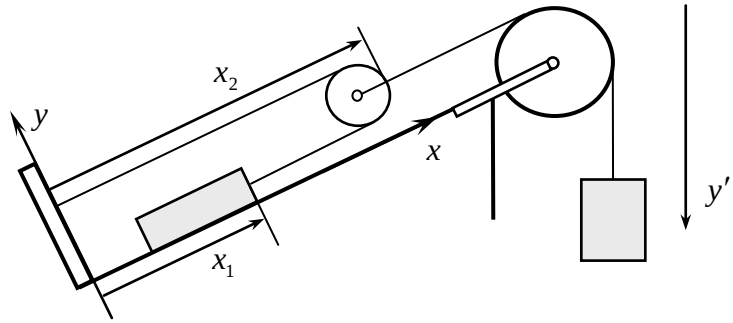


Рис. 3.7

$$\ell = x_2 + x_2 - x_1.$$

Після двократного диференціювання, отримаємо:

$$2x_2'' - x_1'' = 0.$$

Врахуємо, що: $x_1'' = a_1$ – прискорення бруска, $x_2'' = a_2$ – прискорення рухомого блоку, яке, у свою чергу, дорівнює прискоренню вантажу m_2 . Звідси отримаємо:

$$2a_2 = a_1.$$

Запишемо тепер рівняння руху для обох тіл з урахуванням отриманих нами співвідношень:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 \\ m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 \\ 2T_1 = T_2 \\ 2a_2 = a_1. \end{cases}$$

Спроектуємо векторні рівняння для бруска і вантажу на осі, вказані на малюнку і, припускаючи, що тіло m_2 рухається вниз, отримаємо:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T_1 - m_1 g \sin \alpha \\ m_2 a_2 = m_2 g - T_2 \\ 2T_1 = T_2 \\ 2a_2 = a_1. \end{cases}$$

Визначимо величину і знак прискорення. Вирішуючи систему рівнянь, отримаємо вирази для прискорень:

$$a_1 = 2 \frac{m_2 - 2m_1 \sin \alpha}{m_2 + 4m_1} g,$$

$$a_2 = \frac{m_2 - 2m_1 \sin \alpha}{m_2 + 4m_1} g.$$

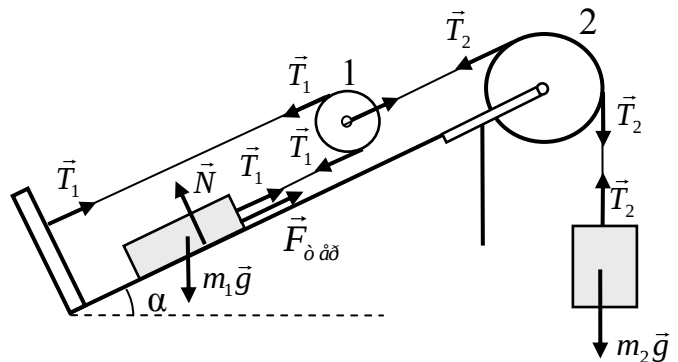


Рис. 3.8

Підставивши числові значення, отримаємо остаточно:

$$a_1 \approx -1 \text{ м/с}^2, \quad a_2 \approx -0,5 \text{ м/с}^2.$$

Отримані від'ємні значення прискорень означають, що брусок опускається уздовж похилої площини, а вантаж підіймається вгору.

Тепер, коли стали відомі напрямки руху тіл, врахуємо силу тертя, що діє на брусок (див. рис. 3.8). Система рівнянь тепер матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\dot{\alpha}\ddot{\alpha}\delta} \\ m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 \\ 2T_1 = T_2 \\ 2a_2 = a_1 \\ F_{\dot{\alpha}\ddot{\alpha}\delta} = \mu N. \end{cases}$$

Після проектування векторних рівнянь на відповідні осі, отримаємо:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g \sin \alpha - T_1 - F_{\dot{\alpha}\ddot{\alpha}\delta} \\ 0 = m_1 g \cos \alpha - N \\ m_2 a_2 = T_2 - m_2 g \\ 2T_1 = T_2 \\ 2a_2 = a_1 \\ F_{\dot{\alpha}\ddot{\alpha}\delta} = \mu N. \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему рівнянь, отримаємо остаточно:

$$a_2 = \frac{2m_1 \sin \alpha - 2\mu m_1 \cos \alpha - m_2}{m_2 + 4m_1} g = 0,0163 \text{ м/с}^2, \quad a_1 = 2a_2 = 0,0326 \text{ м/с}^2,$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha + 2)}{m_2 + 4m_1} g = 1,5 \text{ Н}, \quad T_2 = 2T_1 = 3 \text{ Н}.$$

Завдання для самостійної роботи

Варіант 1

1. Тіло масою $m_1 = 0,5$ кг рухається прямолінійно під дією деякої сили, причому залежність координати тіла від часу описується рівнянням $x = At^2 - Bt^3$, де $A = 5$ м/с², $B = 1$ м/с³. Знайти силу, що діє на тіло наприкінці першої секунди руху. **Відповідь:** $F = m(2A - 6Bt)$; $F = 2$ Н.

2. Тіло ковзає вниз по площині, нахиленій до горизонталі під кутом α , з постійною швидкістю. Потім воно отримує поштовх вгору уздовж тієї ж площини при початковій швидкості v_0 . На яку відстань s тіло просунеться догори перед тим, як зупинитися? **Відповідь:** $s = \frac{v_0^2}{4g \sin \alpha}$.

3. В установці, яка представлена на рис. 3.9, вантажі 1 і 2 з масами m_1 і m_2 , що пов'язані невагомою і нерозтяжною ниткою, рухаються з постійною швидкістю. Знайти прискорення, яке отримають вантажі, якщо на вантаж 2 покласти додатковий вантаж масою m_3 .

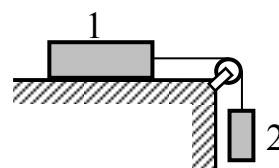


Рис. 3.9

Коефіцієнт тертя між вантажем 1 і горизонтальною поверхнею залишається одним і тим же. З якою силою додатковий вантаж тисне на вантаж 2? Масою блоку і тертям в блоці нехтувати. **Відповідь:** $a = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g$,

$$F = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} g.$$

4. Три вантажі висять на блоках (рис. 3.10). Крайні блоки нерухомі, а середній блок може пересуватися. Вважаючи заданими маси вантажів m_1 і m_2 , визначити масу вантажу m_3 , при якому середній блок залишатиметься нерухомим. Тертям

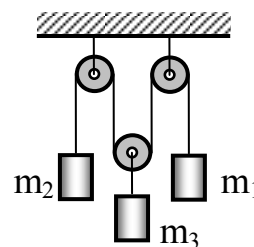


Рис. 3.10

і масами блоків і ниток нехтувати. **Відповідь:** $m_3 = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}$.

5. На столі лежить дошка маси $M = 1$ кг, а на дошці – вантаж маси $m = 2$ кг. Яку силу F потрібно прикласти до дошки, щоб дошка вислизнула з-під вантажу? Коефіцієнт тертя між вантажем і дошкою дорівнює $\mu_1 = 0,25$, а між дошкою і столом – $\mu_2 = 0,5$. **Відповідь:** $F > \mu_1(M + m)g + \mu_2(M + m)g \approx 22,5$ Н.

Варіант 2

1. Тіло масою $m = 0,5$ кг рухається так, що залежність координати x тіла від часу описується рівнянням $x = A \sin \omega t$, де $A = 5$ см, $\omega = \pi$ с⁻¹. Знайти силу, що діє на тіло в момент часу $t = 1/6$ с. **Відповідь:** $F_x = -mA\omega^2 \sin \omega t = -0,123$ Н.

2. Санчата, що ковзають з гори, за час t пройшли шлях L . Швидкість санчат за цей час зросла в три рази. Визначити коефіцієнт тертя, якщо кут нахилу гори дорівнює α . **Відповідь:** $\mu = \operatorname{tg} \alpha - \frac{L}{gt^2 \cos \alpha}$.

3. В установці, яка показана на рис. 3.11, маси тіл дорівнюють m_0 , m_1 і m_2 ; масами блоку і ниток, а також тертям у блоці можна нехтувати. Знайти прискорення, з яким опускається тіло m_0 , і силу

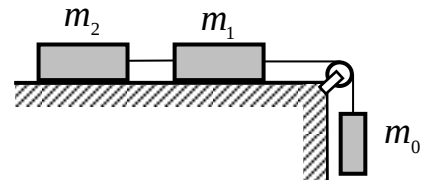


Рис. 3.11

натягу нитки, що пов'язує тіла m_1 і m_2 , якщо коефіцієнт тертя між цими тілами і горизонтальною поверхнею дорівнює μ . **Відповідь:** $a = \frac{m_0 - \mu(m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2} g$,

$$T = \frac{(1 + \mu)m_0m_2}{m_0 + m_1 + m_2} g.$$

4. Два вантажі висять на блоках, а третій вантаж лежить на горизонтальній площині (рис. 3.12). Крайні блоки нерухомі, середній блок

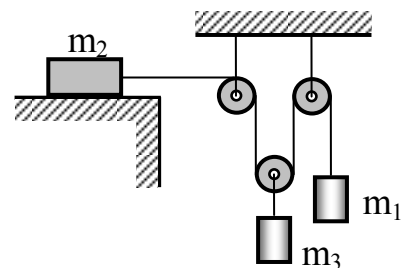


Рис. 3.12

може пересуватися. Вважаючи заданими маси вантажів m_1 і m_2 , визначити масу вантажу m_3 , при якому він залишатиметься нерухомим. Тертям і масами блоків і ниток нехтувати. **Відповідь:** $m_3 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}$.

5. На горизонтальній поверхні лежить брусок, маса якого $m_1 = 2$ кг. Коефіцієнт тертя між бруском і поверхнею дорівнює $\mu_1 = 0,2$. На бруску лежить інший брусок, маса якого $m_2 = 8$ кг. Коефіцієнт тертя між верхнім і нижнім брусками дорівнює $\mu_2 = 0,3$. До верхнього бруска прикладена горизонтальна сила. Визначити: значення сили F_1 , при якому розпочнеться сумісне ковзання брусків по поверхні; значення сили F_2 , при якому верхній брусок почне ковзати відносно нижнього бруска. **Відповідь:** $F_1 = \mu_1(m_1 + m_2)g = 19,6$ Н; $F_2 = (\mu_2 - \mu_1)(m_2/m_1)(m_1 + m_2)g = 39,2$ Н.

Варіант 3

1. Швидкість частинки масою m , яка рухається в площині xOy , змінюється згідно із законом $\vec{v} = At\vec{i} + Bt^2\vec{j}$, де A і B – сталі. Знайти модуль результуючої сили, що діє на частинку, залежно від часу. **Відповідь:** $F = m\sqrt{A^2 + B^2t^2}$.

2. Два тіла масою m_1 і m_2 , що пов'язані між собою ниткою, рухаються по горизонтальній площині під дією сили, яка прикладена до першого тіла (див. рис. 3.13) і весь час складає кут α з

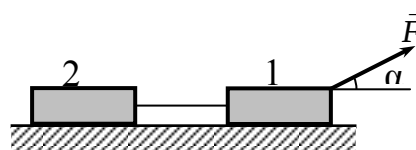


Рис. 3.13

поверхнею. Коефіцієнт тертя між тілами і поверхнею однаковий і дорівнює μ . Знайти прискорення, з яким рухаються тіла, і силу натягу нитки між тілами.

Відповідь: $a = \frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{m_1 + m_2} - \mu g$; $T = \frac{m_2 F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{m_1 + m_2}$.

3. В установці, яку зображено на рис. 3.14, маси тіл дорівнюють m_0 , m_1 і m_2 , маси блоку і ниток малі і тертя в блоці немає. Крім того, відомі кут α і коефіцієнт тертя μ між похилою площиною і вантажами. Визначити: прискорення вантажу m_2 ; силу натягу T нитки між вантажами m_1 і m_2 . Вважати, що $m_0 > (m_1 + m_2) \sin \alpha$. **Відповідь:**

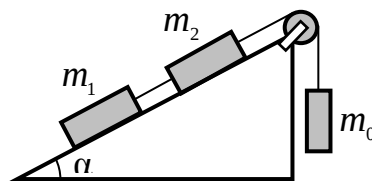


Рис. 3.14

$$a = \frac{m_0 - (m_1 + m_2) \cdot (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_0 + m_1 + m_2} g,$$

$$T = m_1(a + g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)).$$

4. Знайти прискорення маси m_1 і натягнення ниток T_1 і T_2 в системі, зображеній на рис. 3.15. Масою блоків і ниток нехтувати, сили тертя не враховувати. **Відповідь:**

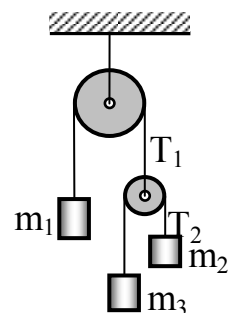


Рис. 3.15

$$a_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}, \quad T_1 = \frac{8m_1m_2m_3g}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)},$$

$$T_1 = \frac{4m_1m_2m_3g}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}.$$

5. На похилу площину з кутом нахилу до горизонту $\alpha = 35^\circ$ поклали дошку масою $m_2 = 2,0$ кг, а на неї – брусок масою $m_1 = 1,0$ кг. Коефіцієнт тертя між бруском і дошкою дорівнює $\mu_1 = 0,1$, а між дошкою і площиною – $\mu_2 = 0,2$. Визначити: а) прискорення бруска, б) прискорення дошки a_2 . **Відповідь:**

$$\text{а) } a_1 = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) = 4,8 \text{ м/с}^2,$$

$$\text{б) } a_2 = g(\sin \alpha + [\mu_1(m_1/m_2 - \mu_2(m_1 + m_2)/m_2)] \cos \alpha) = 3,6 \text{ м/с}^2.$$

Варіант 4

1. Під дією однакових і постійних сил два тіла рухаються прямолінійно так, що залежності їх координат від часу описуються рівняннями: $x_1 = At^2$, $x_2 = 3At^2$. Знайти відношення мас цих тіл. **Відповідь:** $m_1/m_2 = 3$.

2. Брусок маси m тягнуть за нитку так, що він рухається з постійною швидкістю по горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя μ (рис. 3.16). Знайти кут α , при якому натягнення нитки буде найменшим. Чому воно дорівнюватиме? **Відповідь:** $\mu = \tan \alpha$; $F = \mu mg / \sqrt{1 + \mu^2}$.

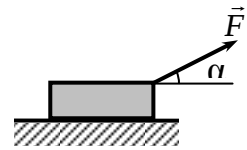


Рис. 3.16

3. Брусок масою m_1 опускається прискорено по похилій площині і підіймає вантаж масою m_2 (рис. 3.17). Коефіцієнт тертя між бруском і площиною дорівнює μ . Нехтуючи масою ниток і блоків, визначити прискорення бруска і силу натягу нитки, яка діє на брусок. **Відповідь:**

$$a = \frac{m_1 \sin \alpha - \mu m_1 \cos \alpha - 4m_2}{m_1 + 16m_2},$$

$$T = \frac{4m_1 m_2 g (1 + 4 \sin \alpha - 4 \mu \cos \alpha)}{m_1 + 16m_2}.$$

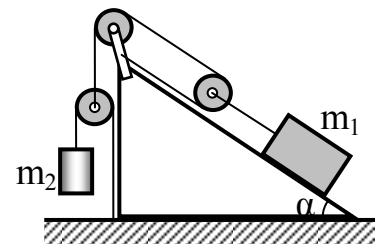


Рис. 3.17

4. Тіло масою m_1 може ковзати без тертя по похилій площині бруска масою m_2 (рис. 3.18). Кут нахилу площини з горизонтом α . Брусок рухається без тертя по горизонтальній площині. Знайти прискорення тіла і бруска.

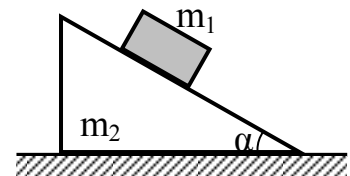


Рис. 3.18

Відповідь: $a_1 = \frac{(m_1 + m_2)g \sin \alpha}{m_1 \sin^2 \alpha + m_2}$, $a_2 = \frac{m_1 g \sin \alpha \cos \alpha}{m_1 \sin^2 \alpha + m_2}$.

5. На гладкій горизонтальній площині лежить дошка маси m_1 і на ній брусок маси m_2 . До бруска приклали горизонтальну силу, що збільшується з часом t згідно із законом $F = \alpha t$, де α – стала. Знайти залежності від t прискорень дошки a_1 і бруска a_2 , якщо коефіцієнт тертя між дошкою і бруском дорівнює k . **Відповідь:** при $t \leq t_0$ прискорення $a_1 = a_2 = \alpha t / (m_1 + m_2)$; при $t \geq t_0$ $a_1 = k g m_2 / m_1$, $a_2 = (\alpha t - k g m_2) / m_2$. Тут $t_0 = k g m_2 (m_1 + m_2) / \alpha m_1$.

Додаток. Математичні поняття і формули

1. Системи координат

1.1. Системи координат на площині

До найбільш уживаних систем координат відносяться: декартова прямокутна і полярна.

а) *Прямокутна декартова система координат на площині.*

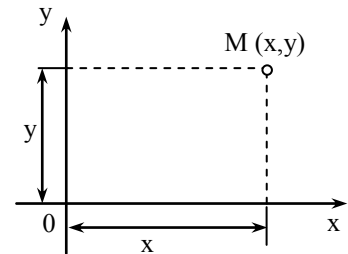


Рис. 1

Положення точки на площині визначається двома величинами (з урахуванням знака), які є відстанями x і y від початку координат до її проєкцій на осі координат (див. рис. 1). Розрізняють дві системи координат: праву і ліву. Якщо додатний промінь Ox після повороту на 90° проти годинникової стрілки поєднується з додатним променем Oy , то така система координат є правою (стандартною). Елемент площі в цій системі координат $dS = dx dy$.

б) *Полярна система координат.*

Положення точки на площині визначається двома величинами: відстанню ρ від точки до початку координат (полюса) і кутом φ між

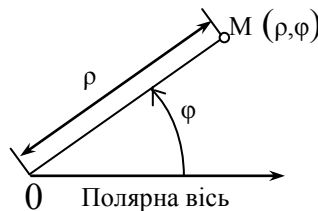


Рис. 2а

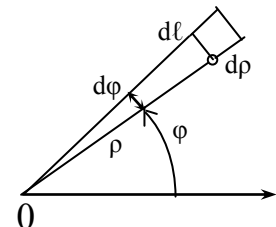


Рис. 2б

полярною віссю і відрізком прямої, що поєднує початок координат і

точку (див. рис. 2а). Кут φ прийнято вимірювати в радіанах. Полярний кут φ вважається додатним при відліку від полярної осі проти годинникової стрілки. Елемент площі в полярній системі координат дорівнює (див. рис. 2б).

1.2. Системи координат в просторі

До найбільш вживаних систем координат належать: декартова прямокутна, циліндрова і сферична.

а) Прямокутна декартова система координат.

Положення точки визначається трьома координатами (див. рис. 3). Розрізняють праву і ліву системи координат. На рис. 3 наведена права система координат. Елемент об'єму – $dV = dxdydz$.

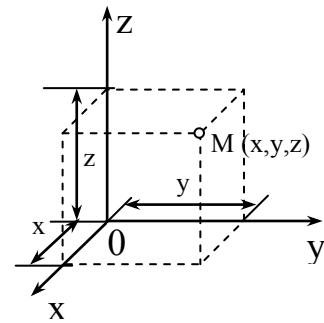


Рис. 3

б) Циліндрова система координат.

Положення точки характеризують трьома координатами: довжиною ρ , кутом φ і довжиною z (див. рис. 4а). Елемент об'єму дорівнює $dV = \rho d\varphi \cdot d\rho \cdot dz$ (див. рис. 4б). Зв'язок координат в декартовій і циліндровій системах виражають за формулами (при поєднанні полярної осі й осі Ox):

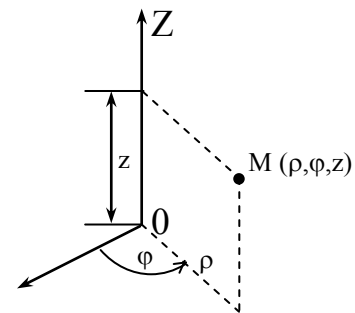


Рис. 4а

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\rho},$$

де $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq \rho < \infty$; $-\infty < z < \infty$.

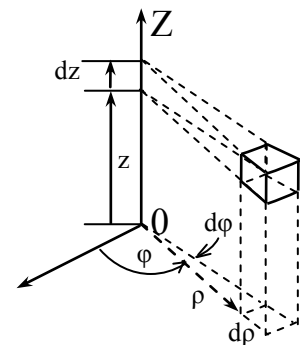


Рис. 4б

в) Сферична система координат.

Положення точки характеризують трьома величинами: довжиною радіуса-вектора r , кутом θ між віссю Oz і радіусом-вектором, кутом φ між полярною віссю і проекцією радіуса-вектора на полярну площину (див. рис. 5а). Елемент

об'єму дорівнює $dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ (див. рис. 5б). Сферичні і декартові координати точки пов'язані наступними формулами перетворення:

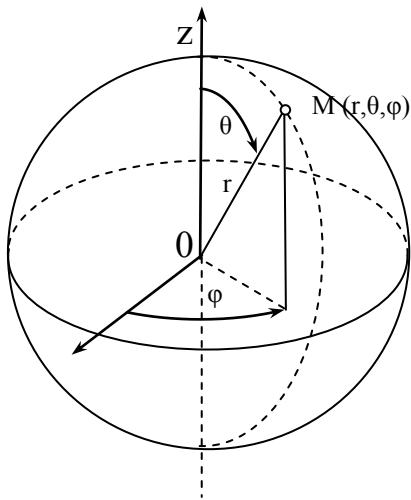


Рис. 5а

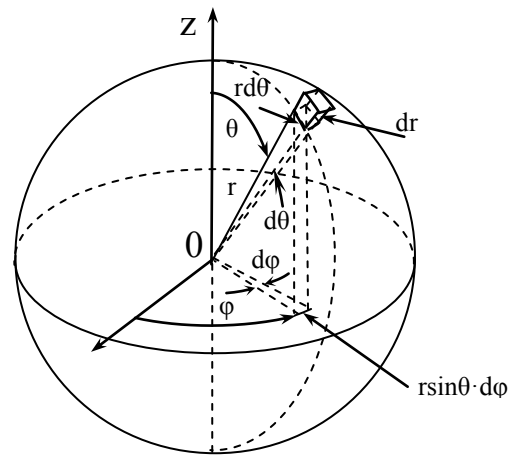


Рис. 5б

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},$$

де $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r < \infty$.

2. Деякі відомості про вектори

а) Операції алгебри.

Вектором називають направлений прямолінійний відрізок. Вектори вважаються такими, що дорівнюють один одному, якщо вони мають однакову довжину й однаковий напрям. Строго кажучи, вектор характеризується не тільки чисельним значенням і напрямом, але і повинен володіти ще цілою низкою властивостей, які виявляються, зокрема, в операціях над векторами. Визначені операції додавання векторів і множення вектора на число, які задовольняють таким умовам:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c});$$

$$\beta(\vec{a} + \vec{b}) = \beta\vec{a} + \beta\vec{b};$$

$$(\beta + \gamma)\vec{a} = \beta\vec{a} + \gamma\vec{a};$$

$$(\beta\gamma)\vec{a} = \beta(\gamma\vec{a}),$$

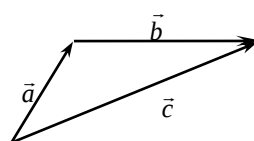


Рис. 6а

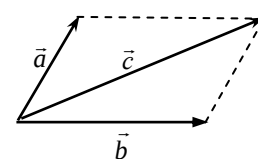


Рис. 6б

де β та γ – довільні дійсні числа.

Геометрично операція додавання

векторів виражається правилами трикутника або паралелограма (див. рис. 6а, 6б).

Будь-який вектор може бути єдиним способом розкладений на суму трьох векторів, паралельних трьом даним (некомпланарним) векторам, які у разі декартової прямокутної системи координат паралельні ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, що мають напрям координатних осей 0x, 0y, 0z):

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

де a_x, a_y, a_z – координати (проекції) вектора $\vec{a}$.

б) *Скалярний добуток векторів.*

Скалярним добутком $(\vec{a}, \vec{b})$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають таку операцію над векторами, в результаті якої виходить скалярна величина, що дорівнює добутку довжин цих векторів, помноженому на косинус кута між ними, тобто

$$(\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos \left(\widehat{\vec{a}\vec{b}} \right).$$

Скалярний добуток позначають також $\vec{a} \cdot \vec{b}$, або просто $\vec{a}\vec{b}$.

Скалярний добуток має такі властивості:

$$(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0;$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a});$$

$$(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c}) = \alpha (\vec{a}, \vec{c}) + \beta (\vec{b}, \vec{c}).$$

У координатній формі скалярний добуток векторів виражається таким чином:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Довжина вектора $\vec{a}$ визначається за формулою

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виражається за формулою

$$\cos \left(\widehat{\vec{a}\vec{b}} \right) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

в) Векторний добуток векторів.

Векторним добутком $[\vec{a}, \vec{b}]$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають таку операцію над векторами, в результаті якої виходить вектор $\vec{c}$, перпендикулярний обом векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і направлений так, що трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють правоґвинтову систему (див. рис. 7). Довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними. Таким чином,

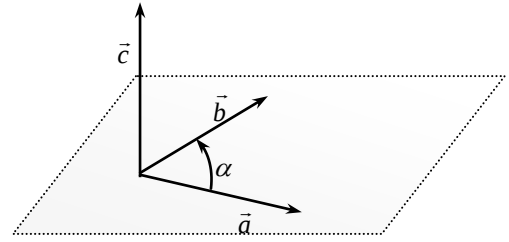


Рис. 7

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{c}| = ab \sin(\angle \vec{a} \vec{b}).$$

Векторний добуток позначають також $\vec{a} \times \vec{b}$.

Векторний добуток має такі властивості:

$$[\vec{a}, \vec{a}] = 0;$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}];$$

$$[\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c}] = \alpha [\vec{a}, \vec{c}] + \beta [\vec{b}, \vec{c}].$$

За допомогою координат векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, використовуючи визначник третього порядку, векторний добуток можна представити у вигляді

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.$$

Змішаний добуток $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$ обчислюється за формулою

$$(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

Змішаний або векторно-скалярний добуток трьох векторів є скаляром і чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеду, побудованого на цих векторах.

Подвійний векторний добуток $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ обчислюється за формулою

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = (\vec{a}, \vec{c})\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}).$$

г) *Правила диференціювання векторних функцій скалярного аргументу.*

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k};$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha \vec{a}) = \frac{d\alpha}{dt} \vec{a} + \alpha \frac{d\vec{a}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \vec{b} + \vec{a} \frac{d\vec{b}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a} \vec{b}] = \left[\frac{d\vec{a}}{dt}, \vec{b} \right] + \left[\vec{a}, \frac{d\vec{b}}{dt} \right].$$

Зокрема, якщо $|\vec{a}(t)|=1$, то

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}, \vec{a}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}, \vec{a} \right) + \left(\vec{a}, \frac{d\vec{a}}{dt} \right) = 2 \left(\vec{a}, \frac{d\vec{a}}{dt} \right) = 0,$$

тобто одиничний вектор і його похідна перпендикулярні один одному.

3. Довідкові відомості з математики

Формули алгебри і тригонометрії

Корінь квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

Таблиця похідних і інтегралів

Функція	Похідна	Функція	Похідна
x^n	nx^{n-1}	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^{nx}	ne^{nx}	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	shx	chx
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	tnx	$\frac{1}{ch^2 x}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - v'u}{v^2}$	$ctgx$	$-\frac{1}{sh^2 x}$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int e^x dx = e^x$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx$

$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right $
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right $
$\int \sin^2 x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$	$\int \cos^2 x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$

Список використаної літератури

1. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Наука, 1988. – 416 с.
2. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов. – М. : Высш. школа, 1981. – 496 с.
3. Балаш В. А. Сборник задач по курсу общей физике / В. А. Балаш. – М. : Просвещение, 1978. – 208 с.
4. Зайцева А. М. Задачник-практикум по общей физике. Механика / А. М. Зайцева. – М. : Просвещение, 1972. – 128 с.
5. Сборник задач по курсу общей физики : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / Загуста Г. А., Макеева Г. П., Микулич А. С. и др. – М. : Просвещение, 1989. – 271 с.
6. Сборник задач по общему курсу физики / Стрелков С. П., Сивухин Д. В., Угаров В. А., Яковлев И. А. – М. : Наука, 1977. – 288 с.