ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

пуск 9 1969

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА, II

В. Г. Михайленко

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассматривались первые краевые задачи в областях мелкозернистой границей для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка вида

$$\mathfrak{M} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - c^2(x),$$

где $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, а $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$ и $c^2(x)$ удовлетворяют условию Гельдера некоторым показателем $\lambda > 0$. Было показано, что при определенных условиях мелкозернистую границу можно заменить усредненными граничными условиями тем точнее, чем мельче зерна границы. Коэффициенты, входящие в усредненные граничные условия, выражаются через обобщенные емкости (F-емкости) частей границы.

F-емкостью тела T, ограниченного замкнутой поверхностью Ляпунова ∂T, называется величина

$$c_F(T) = \int_{\partial T} \mu(y)\, ds_y,$$

где $\mu(y) \geqslant 0$ таково, что

$$\int_{\partial T} \mu(y) F(x, y)\, ds_y = 1 \quad \text{при } x \in \partial T,$$

если $F(x, y)$ — главное фундаментальное решение уравнения $\mathfrak{M}u(x) = 0$.

Так как главное фундаментальное решение $F(x, y)$ уравнения $\mathfrak{M}u(x) = 0$ можно явно выписать только в очень редких случаях, то возникают трудности с вычислением F-емкостей частей границы и, тем самым, с отысканием коэффициентов, входящих в усредненные граничные условия. В настоящей работе мы покажем, как приближенно (в пределе точно) заменить F-емкости $c_{F,i}$ тел T_i, образующих мелкозернистую границу, ньютоновскими емкостями тел T_i', которые получаются путем некоторого линейного преобразования тел T_i. Таким образом, вопрос о проверке условий 2), 3) теорем 2, 3 [1] и отыскание коэффициентов, входящих в усредненные граничные условия, будет сведен к простейшему случаю, когда $\mathfrak{M} = \Delta$.

Напомним, что ньютоновская емкость $c(T)$ тела T, ограниченного замкнутой поверхностью Ляпунова ∂T, равна

$$c(T) = \int_{\partial T} \nu(y)\, ds_y,$$

где $\nu(y) \geqslant 0$ таково, что

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial T}\frac{\nu(y)}{r(x,y)}\,ds_y = 1$$

при $x \in T$, если $r(x,y)$ — расстояние между точками x и y.

Рассмотрим тело T, ограниченное замкнутой поверхностью Ляпунова ∂T. Пусть $H_0(x,y)$ — функция особенностей оператора $\mathfrak{M}_0$ с постоянными коэффициентами, равными значениям коэффициентов оператора $\mathfrak{M}$ в некоторой точке x_0,

$$H_0(x,y) = \left[A(x_0)\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(x_0)(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

где $A(x_0) = \det\|a_{ij}(x_0)\|$, $\|A_{ij}(x_0)\|$ — матрица, обратная матрице $\|a_{ij}(x_0)\|$. Так как оператор $\mathfrak{M}_0$ — эллиптический, то путем некоторой линейной замены переменных $S(x_0)$ функцию $H_0(x,y)$, в новых переменных ξ, η можно представить в виде $[4\pi r(\xi,\eta)]^{-1}$. Пусть $c_{H_0}(T)$ — емкость тела T, порожденная ядром $H_0(x,y)$, т. е.

$$c_{H_0}(T) = \int\limits_{\partial T}\varphi(y)\,ds_y, \tag{1. 1}$$

где функция $\varphi(y) \geqslant 0$ такова, что

$$\int\limits_{\partial T}\varphi(y)H_0(x,y)\,ds_y = 1 \text{ при } x \in \partial T. \tag{1. 2}$$

Имеет место следующая

Лемма 1. Если $c(S(x_0)T)$ — ньютоновская емкость тела $S(x_0)T$, полученного из тела T путем линейной замены переменных $S(x_0)$, а $c_{H_0}(T)$ — емкость тела T, порожденная ядром $H_0(x,y)$, то

$$c_{H_0}(T) = c(S(x_0)T).$$

Доказательство. В (1. 2) сделаем упомянутую выше линейную замену переменных $S(x_0)$. При этом, тело T преобразуется в некоторое тело $S(x_0)T$, ограниченное замкнутой поверхностью Ляпунова $\partial S(x_0)T$. Получим

$$\int\limits_{\partial T}\varphi(y)H_0(x,y)\,ds_y = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial S(x_0)T}\frac{\varphi(\eta)g(\eta)}{r(\xi,\eta)}\,ds_\eta = 1 \text{ при } \xi \in \partial S(x_0)T, \tag{1. 3}$$

где $g(\eta)$ — некоторая функция, определяемая линейной заменой переменных $S(x_0)$. Обозначим

$$\varphi(\eta)g(\eta) = \psi(\eta). \tag{1. 4}$$

Тогда уравнение (1. 3) запишется в виде

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial S(x_0)T}\frac{\psi(\eta)}{r(\xi,\eta)}\,ds_\eta = 1 \text{ при } \xi \in \partial S(x_0)T,$$

и решение этого уравнения, очевидно, удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\partial S(x_0)T}\psi(\eta)\,dS_\eta = c(S(x_0)T), \tag{1. 5}$$

где $c(S(x_0)T)$ — ньютоновская емкость тела $S(x_0)T$. Производя ту же линейную замену переменных $S(x_0)$ в равенстве (1. 1) и принимая во внимание (1. 3)—(1. 5), получаем

$$c_{H_0}(T) = \int\limits_{\partial T}\varphi(y)\,ds_y = \int\limits_{\partial S(x_0)T}\psi(\eta)\,ds_\eta = c(S(x_0)T).$$

Тем самым лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть d — диаметр тела T, ограниченного замкнутой поверхностью Ляпунова ∂T, ρ — расстояние от точки x_0, до тела T, $c_{H_0}(T)$ — емкость тела T, порожденная ядром $H_0(x, y)$, $c_F(T)$ — F-емкость тела T.*

Имеют место оценки

$$|c_{H_0}(T) - c_F(T)| \leqslant \varepsilon(d+\rho)c_F(T), \tag{1.6}$$

$$|c_{H_0}(T) - c_F(T)| \leqslant \varepsilon_1(d+\rho)c_{H_0}(T). \tag{1.7}$$

где $\varepsilon(\alpha) \to 0$ и $\varepsilon_1(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Доказательство. Докажем справедливость неравенства (1.6). Пусть функции $\varphi(y)$ и $\varphi_0(y)$ таковы, что

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\partial T} \varphi(y) F(x, y)\, ds_y = 1 \\ &\int_{\partial T} \varphi_0(y) H_0(x, y)\, ds_y = 1 \end{aligned}\right\} \text{ при } x \in \partial T. \tag{1.8}$$

Вычитая эти равенства, получаем

$$\int_{\partial T} \varphi(y) F(x, y)\, ds_y - \int_{\partial T} \varphi_0(y) H_0(x, y)\, ds_y = 0 \text{ при } x \in \partial T.$$

Запишем это равенство в следующем виде:

$$\int_{\partial T} [\varphi(y) - \varphi_0(y)] F(x, y)\, ds_y = \int_{\partial T} \varphi_0(y)[H_0(x, y) - F(x, y)]\, ds_y.$$

Умножим обе части последнего равенства на $\varphi(x)$ и проинтегрируем его по поверхности ∂T. Получим

$$\begin{aligned} &\int_{\partial T} \varphi(x) \int_{\partial T} [\varphi(y) - \varphi_0(y)] F(x, y)\, ds_y ds_x = \\ &= \int_{\partial T} \varphi(x) \int_{\partial T} \varphi_0(y)[H_0(x, y) - F(x, y)]\, ds_y ds_x. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Преобразуем левую часть равенства (1.9). Так как из (1.8) следует, что

$$\int_{\partial T} \varphi(y)\, ds_y = c_F(T) \text{ и } \int_{\partial T} \varphi_0(y)\, ds_y = c_{H_0}(T),$$

то, меняя порядок интегрирования и учитывая при этом, что согласно [2], $F(x, y) = F(y, x)$, получаем

$$\int_{\partial T} \varphi(x) \int_{\partial T} [\varphi(y) - \varphi_0(y)] F(x, y)\, ds_y ds_x = c_F(T) - c_{H_0}(T). \tag{1.10}$$

Для оценки правой части равенства (1.9) воспользуемся тем, что согласно [2]

$$H(x, y) = O(r^{-1}(x, y)), \quad F(x, y) - H(x, y) = O(r^{\lambda-1}(x, y)),$$

где $H(x, y)$ — функция особенностей оператора $\mathfrak{M}$, а $0 < \lambda < 1$. Кроме того, как нетрудно видеть, при $x \in \partial T$ и $y \in \partial T$

$$H(x, y) - H_0(x, y) = O((d+\rho) r^{-1}(x, y)).$$

Тогда, принимая во внимание, что $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi_0(x) \geqslant 0$, $H_0(x, y) \geqslant 0$ получаем

$$\left| \int_{\partial T} \varphi(x) \int_{\partial T} \varphi_0(y)[H_0(x, y) - F(x, y)]\, ds_y ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\partial T} \varphi(x) \int_{\partial T} \left\{ \left| \frac{H(x, y) - F(x, y)}{H_0(x, y)} \right| + \left| \frac{H_0(x, y) - H(x, y)}{H_0(x, y)} \right| \right\} \varphi_0(y) H_0(x, y)\, ds_y ds_x \leqslant$$

$$\leqslant A \int_{\partial T} \varphi(x)[d^\lambda + d + \rho]\, ds_x = A(d^\lambda + d + \rho) c_F(T) = \varepsilon(d+\rho) c_F(T). \tag{1.11}$$

Из (1.9), (1.10) и (1.11) следует справедливость неравенства (1.6). Неравенство (1.7) доказывается аналогичным образом.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим область $D \subset R_3$, ограниченную замкнутой поверхностью Ляпунова ∂D. В этой области рассмотрим конечное число тел T_i. Мы будем предполагать, что тела T_i ограничены замкнутыми поверхностями Ляпунова ∂T_i. В дальнейшем будем рассматривать последовательность тел $T_i^{(n)} \subset D$. Введем следующие обозначения:

$d_i^{(n)}$ — диаметр тела $T_i^{(n)}$;

$r_{ij}^{(n)}$ — расстояние между телами $T_i^{(n)}$ и $T_j^{(n)}$;

$c_{F,i}^{(n)}$ — F-емкость тела $T_i^{(n)}$;

$S(x_0)$ — линейная замена переменных, которая переводит функцию особенностей $H_0(x, y)$ оператора $\mathfrak{M}_0$ с постоянными коэффициентами, равными значениям коэффициентов оператора $\mathfrak{M}$ в точке $x_0 \in D$, в $[4\pi r(\xi, \eta)]^{-1}$;

$S(x_0)\, T_i^{(n)}$ — тело, получаемое из тела $T_i^{(n)}$ путем линейной замены переменных $S(x_0)$;

$c\left(S(x_0)\, T_i^{(n)}\right)$ — ньютоновская емкость тела $S(x_0)\, T_i^{(n)}$,

$v(x_0, \rho)$ — шар с центром в точке x_0 и радиусом ρ,

$\sum\limits_{v(x_0\rho)} c_{F,i}^{(n)} \left(\sum\limits_{v(x_0\rho)} c\left(S(x_0)\, T_i^{(n)}\right)\right)$ — сумма F-емкостей (ньютоновских емкостей) тел $T_i^{(n)}$ $\left(S(x_0)\, T_i^{(n)}\right)$, распространенная при данном значении n на все те значения индекса i, при которых тела $T_i^{(n)}$ лежат строго внутри шара $v(x_0, p)$.

Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть при $n \to \infty$ выполнены следующие условия:*

1) *диаметры $d_i^{(n)}$ тел $T_i^{(n)}$ равномерно стремятся к нулю*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\max_i d_i^{(n)}\right\} = 0;$$

2) *функция*

$$\delta_1(\rho) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \max_i \sum_{\substack{j \neq i \\ v(x_0\rho) \\ x_0 \in T_i^{(n)}}} \frac{c\left(S(x_0)\, T_j^{(n)}\right)}{r_{ij}^{(n)}} \right\}$$

стремится к нулю при $\rho \to 0$;

3) *для любой точки $x_0 \in D$ имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{\rho\to 0} \left\{ \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{v(x_0\rho)} \frac{c\left(S(x_0)\, T_i^{(n)}\right)}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} \right\} = \lim_{\rho\to 0} \left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{v(x_0,\, \rho)} \frac{c\left(S(x_0)\, T_i^{(n)}\right)}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} \right\} = f(x_0),$$

где $f(x)$ — непрерывная в области D функция.

Тогда при $n \to \infty$ последовательность операторов

$$G^{(n)}[\varphi] = \int_D G^{(n)}(x, y)\, \varphi(y)\, dy, \tag{2.1}$$

ядрами которых являются функции Грина $G^{(n)}(x, y)$ задач

$$\mathfrak{M} u^{(n)}(x) = -\varphi(x) \text{ при } x \in D \diagdown \left(\bigcup_i T_i^{(n)}\right)$$

$$u^{(n)}(x) = 0 \text{ при } x \in \partial D \text{ или } x \in \partial T_i^{(n)} \tag{2.2}$$

$$\varphi(x) \in L_2(D)$$

продолженные нулем на тела $T_i^{(n)}$ *(т. е.* $G^{(n)}(x, y) = 0$, *если* $x \in T_i^{(n)}$ *или* $y \in T_i^{(n)}$*) сильно сходятся к интегральному оператору с ядром* $G(x, y)$, *удовлетворяющим уравнению*

$$\mathfrak{M}G(x, y) - f(x)\,G(x, y) = -\delta(x, y) \text{ при } x \in D \tag{2.3}$$

и граничному условию

$$G(x, y) = 0 \text{ при } x \in \partial D, \tag{2.4}$$

т. е. в метрике пространства $L_2(D)$ *последовательность* $u^n(x)$ *решений задач* (2. 2), *продолженных нулем на тела* $T_i^{(n)}$, *сходится к решению* $u(x)$ *задачи*

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}u(x) - f(x)\,u(x) &= -\varphi(x) \text{ при } x \in D \\ u(x) &= 0 \text{ при } x \in \partial D. \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство теоремы 1 будет основано на двух леммах.

Лемма 3. *Пусть при* $n \to \infty$ *диаметры* $d_i^{(n)}$ *тел* $T_i^{(n)}$ *равномерно стремятся к нулю*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\max_i d_i^n\right\} = 0. \tag{3.1}$$

Тогда, для того чтобы функция

$$\delta(\rho) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\max_i \sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} < \rho}} \frac{c_{F,j}^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}}\right\} \tag{3.2}$$

стремилась к нулю при $\rho \to 0$, *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\delta_1(\rho) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\max_i \sum_{\substack{j \neq i \\ v(x_0,\, \rho) \\ x_0 \in T_i^{(n)}}} \frac{c\left(S(x_0)\,T_j^{(n)}\right)}{r_{ij}^{(n)}}\right\} \tag{3.3}$$

стремилась к нулю при $\rho \to 0$.

Доказательство. Докажем достаточность условия (3. 3). Пусть имеют место условия (3. 1) и (3. 3). Возьмем произвольное тело $T_i^{(n)}$ и зафиксируем точку $x_0 \in T_i^{(n)}$. При достаточно больших n согласно условию (3. 1) тела $T_j^{(n)}$, расстояния от которых до тела $T_i^{(n)}$ меньше ρ (т. е. $r_{ij}^{(n)} < \rho$), лежат внутри шара $v(x_0, 2\rho)$. Согласно лемме 1 и неравенству (1. 7) для всех j, при которых тела $T_j^{(n)} \subset v(x_0, 2\rho)$, имеет место неравенство

$$\left|c_{F,j}^{(n)} - c\left(S(x_0)\,T_j^{(n)}\right)\right| \leqslant \varepsilon_1(2\rho)\, c\left(S(x_0)\,T_j^{(n)}\right),$$

где $\varepsilon_1(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Следовательно, при достаточно большом n

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ r_{ij}^{(n)} < \rho}} \frac{c_{F,j}^{(n)}}{r_{ij}^{(n)}} \leqslant [1 + \varepsilon_1(2\rho)] \sum_{\substack{j \neq i \\ v(x_0,\, 2\rho) \\ x_0 \in T_i^{(n)}}} \frac{c\left(S(x_0)\,T_j^{(n)}\right)}{r_{ij}^{(n)}}.$$

Из последнего неравенства следует, что $\delta(\rho) \leqslant [1 + \varepsilon_1(2\rho)]\,\delta_1(2\rho)$ и, следовательно, согласно условию (3. 3) $\delta(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Таким образом, достаточность условия (3. 3) доказана.

Необходимость условия (3. 3) доказывается аналогичным образом.

Лемма 4. *Пусть при $n \to \infty$ диаметры $d_i^{(n)}$ тел $T_i^{(n)}$ равномерно стремятся к нулю*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_i d_i^{(n)}\right\} = 0. \tag{3.4}$$

Тогда, для того чтобы F-емкости $c_{F,i}^{(n)}$ тел $T_i^{(n)}$ удовлетворяли предельному соотношению

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)} = \int_{v(x_0,\rho)} f(x)\,dx \tag{3.5}$$

для любого шара $v(x_0,\rho)\subset D$, где $f(x)$ — непрерывная в области D функция, необходимо и достаточно, чтобы имели место предельные соотношения

$$\lim_{\rho\to 0}\left\{\varliminf_{n\to\infty}\sum_{v(x_0,\rho)}\frac{c\left(S(x_0)\,T_i^{(n)}\right)}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\right\} = \lim_{\rho\to 0}\left\{\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{v(x_0,\rho)}\frac{c\left(S(x_0)\,T_i^{(n)}\right)}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\right\} = f(x_0) \tag{3.6}$$

для любой точки $x_0\in D$.

Доказательство. Докажем необходимость условия (3.6).

Пусть имеют место условия (3.4) и (3.5). Возьмем произвольную точку $x_0\in D$ и выберем $\rho>0$ так, чтобы $v(x_0,\rho)\subset D$. Согласно лемме 1 и неравенству (1.6) имеем

$$\left|c_{F,i}^{(n)} - c\left(S(x_0)\,T_i^{(n)}\right)\right| \leqslant \varepsilon(\rho)\,c_{F,i}^{(n)}$$

для всех значений индекса i, при которых тела $T_i^{(n)}$ лежат строго внутри шара $v(x_0,\rho)$. Следовательно,

$$\left|\sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)} = \sum_{v(x_0,\rho)} c\left(S(x_0)\,T_i^{(n)}\right)\right| \leqslant \varepsilon(\rho)\sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)}.$$

При $n\to\infty$ из последнего неравенства, принимая во внимание условие (3.5), заключаем, что

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}\sum_{v(x_0,\rho)} c\left(S(x_0)\,T_i^{(n)}\right) &\geqslant [1-\varepsilon(\rho)]\int_{v(x_0,\rho)} f(x)\,dx,\\ \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{v(x_0,\rho)} c\left(S(x_0)\,T_i^{(n)}\right) &\leqslant [1+\varepsilon(\rho)]\int_{v(x_0,\rho)} f(x)\,dx.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Так как $\varepsilon(\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$, то из неравенств (3.7), учитывая непрерывность функции $f(x)$, следует справедливость предельных соотношений (3.6). Тем самым необходимость условия (3.6) доказана.

Теперь докажем достаточность условия (3.6). Пусть выполнено условие (3.4) и для любой точки $x_0\in D$ имеют место предельные соотношения (3.6), где $f(x)$ — непрерывная в области D функция. Введем определенные в области D неотрицательные функции $g^{(n)}(x)$, заданные равенствами

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \,\overline{\in}\, \bigcup_i T_i^{(n)} \\ \dfrac{c_{F,i}^{(n)}}{V_i^{(n)}} & \text{при } x\in T_i^{(n)}, \end{cases}$$

где $V_i^{(n)}$ — объем тела $T_i^{(n)}$, и обозначим через $\mu^{(n)}$ неотрицательную меру с плотностью $g^{(n)}(x)$, определенную на области D

$$\mu^{(n)}(A) = \int_A g^{(n)}(x)\,dx.$$

Так как

$$\mu^{(r)}(D) = \sum_i c_{F,i}^{(n)}, \tag{3.8}$$

то из леммы 1, неравенства (1.7) и предельного соотношения (3.6) следует, что

$$\mu^{(n)}(D) \leqslant B,$$

где константа B не зависит от n. Поэтому по теореме Хелли из любой подпоследовательности μ^{n_k} можно выделить подпоследовательность $\mu^{n'_k}$, слабо сходящуюся к некоторой предельной мере μ, т. е. для любой непрерывной в области D функции $\varphi(x)$

$$\lim_{n=n'_k\to\infty} \int_D \varphi(x)\, d\mu^{(n)} = \lim_{n=n'_k\to\infty} \int_D \varphi(x)\, g^{(n)}(x)\, dx = \int_D \varphi(x)\, d\mu.$$

Пусть x_0 — произвольная точка из D. Если $0<\varepsilon<\rho$ и шар $v(x_0, \rho+\varepsilon) \subset D$, то, как легко видеть,

$$\varliminf_{n=n'_k\to\infty} \int_{v(x_0,\rho)} d\mu^{(n)} \geqslant \int_{v(x_0,\rho-\varepsilon)} d\mu,$$

$$\varlimsup_{n=n'_k\to\infty} \int_{v(x_0,\rho)} d\mu^{(n)} \leqslant \int_{v(x_0,\rho+\varepsilon)} d\mu,$$

откуда согласно (3.8) следует

$$\varliminf_{n=n'_k\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)} \geqslant \int_{v(x_0,\rho-\varepsilon)} d\mu, \tag{3.9}$$

$$\varlimsup_{n=n'_k\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)} \leqslant \int_{v(x_0,\rho+\varepsilon)} d\mu. \tag{3.10}$$

Так как согласно лемме 1 и неравенству (1.7)

$$\varlimsup_{n=n'_k\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)} \leqslant [1+\varepsilon_1(\rho)] \varlimsup_{n=n'_k\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c\left(S(x_0)\, T_i^{(n)}\right),$$

где $\varepsilon_1(\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$, а из предельного соотношения (3.6) следует, что

$$\varlimsup_{n=n'_k\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c\left(S(x_0)\, T_i^{(n)}\right) \leqslant \frac{4}{3}\pi\rho^3 [f(x_0)+\varepsilon_2(x_0,\rho)],$$

где $\varepsilon_2(x_0,\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$, то

$$\varlimsup_{n=n'_k\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)} \leqslant \frac{4}{3}\pi\rho^3 [f(x_0)+\varepsilon_3(x_0,\rho)],$$

где $\varepsilon_3(x_0,\rho)\to 0$ при $\rho\to 0$. Беря $\varepsilon=\rho^2$, из (3.9) получаем

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi(\rho-\rho^2)^3} \int_{v(x_0,\rho-\rho^2)} d\mu \leqslant \frac{\rho^3}{(\rho-\rho^2)^3} [f(x_0)+\varepsilon_3(x_0,\rho)],$$

откуда следует, что мера μ имеет плотность и эта плотность равна $f(x)$. Тогда неравенства (3.9)—(3.10) можно записать в виде

$$\varliminf_{n=n'_k\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)} \geqslant \int_{v(x_0,\rho-\varepsilon)} f(x)\, dx,$$

$$\varlimsup_{n=n'_k\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)} \leqslant \int_{v(x_0,\rho+\varepsilon)} f(x)\, dx,$$

откуда ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ следует

$$\varliminf_{n=n'_k\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)} \geqslant \int_{v(x_0,\rho)} f(x)\,dx \geqslant \varlimsup_{n=n'_k\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)}.$$

Значит, существует предел

$$\lim_{n=n'_k\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)} = \int_{v(x_0,\rho)} f(x)\,dx.$$

Так как это верно для любой подпоследовательности, то и для всей последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v(x_0,\rho)} c_{F,i}^{(n)} = \int_{v(x_0,\rho)} f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из лемм 3—4 и теоремы 2 [1], так как, если выполнены условия теоремы 1, то согласно леммам 3—4 выполнены и условия теоремы 2 [1].

Тем самым теорема 1 доказана.

В заключение мы приведем пример. Пусть тела T_i — шары радиуса β расположены в области D, ограниченной замкнутой поверхностью Ляпунова ∂D, так что их центры x_i образуют пространственную кубическую решетку с периодом, равным l. Рассмотрим последовательность задач (2. 2) при $l \to 0$. Мы будем предполагать, что при $l \to 0$ существует предел

$$\lim_{l\to 0} \frac{\beta}{l^3} = K.$$

В этом случае выполнены все условия теоремы 1, причем функция $f(x)$, определяемая предельным соотношением (3. 6), имеет вид

$$f(x) = \frac{K}{8\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{\left[\left(\frac{A(x)}{\lambda_1(x)} + t\right)\left(\frac{A(x)}{\lambda_2(x)} + t\right)\left(\frac{A(x)}{\lambda_3(x)} + t\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \right\}^{-1},$$

где $A(x)$ — определитель матрицы $\| a_{ij}(x) \|$, а $\lambda_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ — собственные числа этой же матрицы.

Поэтому при $\beta \ll l \ll 1$ решение задачи (2. 2) можно приближенно заменить решением задачи (2. 5), при

$$f(x) = \frac{\beta}{8\pi l^3} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{\left[\left(\frac{A(x)}{\lambda_1(x)} + t\right)\left(\frac{A(x)}{\lambda_2(x)} + t\right)\left(\frac{A(x)}{\lambda_3(x)} + t\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \right\}^{-1}.$$

4. ДОПОЛНЕНИЯ

1. Мы рассмотрели случай, когда тела $T_i^{(n)}$ распределены внутри некоторой области D так, что при $n \to \infty$ сумма их F-емкостей имеет предельную объемную плотность. Аналогичным образом можно исследовать случай, когда тела $T_i^{(n)}$ при $n \to \infty$ прижимаются к некоторой поверхности Ляпунова Γ так, что сумма их F-емкостей имеет предельную поверхностную плотность. Введем следующие обозначения: $r_i^{(n)}$ — расстояние от тела $T_i^{(n)}$ до поверхности Γ; $\sigma_i(x_0, \rho)$ — часть поверхности Γ, заключенная внутри шара $v(x_0, \rho)$; $\sum\limits_{\sigma(x_0,\rho)} c\left(S(x_0)\, T_i^{(n)}\right)$ — сумма ньютонов

ских емкостей тел $S(x_0)T_i^{(n)}$, распространенная при данном значении n на все те значения индекса i, при которых тела $T_i^{(n)}$ проектируются строго внутрь части $\sigma(x_0, \rho)$ поверхности Γ; $\mu(x)$ — конормаль к поверхности Γ в точке $x \in \Gamma$; $a(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{3} a_{ij}(x)\cos(n, x_j)\right]^2}$ — нормирующий множитель конормали.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть при $n \to \infty$ выполнены следующие условия:*

1) *диаметры $d_i^{(n)}$ тел $T_i^{(n)}$ и расстояния $r_i^{(n)}$ от них до поверхности* Γ *равномерно стремятся к нулю*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_i d_i^{(n)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\max_i r_i^{(n)}\right\} = 0;$$

2) *функция*

$$\delta_1(\rho) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\max_i \sum_{\substack{j\neq i\\ \sigma(x_0,\rho)\\ x_0\in T_i^{(n)}}} \frac{c\left(S(x_0)T_j^{(n)}\right)}{r_{ij}^{(n)}}\right\}$$

стремится к нулю при $\rho \to 0$;

3) *для любой точки $x_0 \in \Gamma$ имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{\rho\to\infty}\left\{\underline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{\sigma(x_0,\rho)}\frac{c\left(S(x_0)T_i^{(n)}\right)}{\pi\rho^2}\right\} = \lim_{\rho\to\infty}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{\sigma(x_0,\rho)}\frac{c\left(S(x_0)T_i^{(n)}\right)}{\pi\rho^2}\right\} = f(x_0),$$

где $f(x)$ — непрерывная на поверхности Γ *функция.*

Тогда при $n\to\infty$ существует предел функций Грина $G^{(n)}(x, y)$ задач (2.2) *и этот предел*

$$\lim_{n\to\infty} G^{(n)}(x, y) = G(x, y)$$

есть решение уравнения

$$\mathfrak{M}\, G(x, y) = -\delta(x, y)$$

при таких граничных условиях на поверхности Γ:

$$G^{+}(x, y) = G^{-}(x, y) = G(x, y),$$

$$\left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial\mu(x)}\right)^{+} - \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial\mu(x)}\right)^{-} = \frac{f(x)}{a(x)}G(x, y),$$

где знаками + и — отмечены предельные значения функций в точке $x \in \Gamma$ по разные стороны от Γ, *а конормаль $\mu(x)$ к поверхности* Γ *направлена из стороны, которой отвечает знак —, в сторону, которой отвечает знак +.*

Так как доказательство теоремы 2 в основном аналогично доказательству теоремы 1, то мы его приводить не будем.

2. Иногда вместо теоремы 1 удобно пользоваться некоторым ее видоизменением, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть $S\left(x_i^{(n)}\right)$ — линейная замена переменных, которая переводит функцию особенностей $H_i^{(n)}(x, y)$ оператора $\mathfrak{M}_i^{(n)}$ с постоянными коэффициентами, равными значениям коэффициентов оператора $\mathfrak{M}$ в некоторой точке $x_i^{(n)} \in T_i^{(n)}$, в $[4\pi r(\xi, \eta)]^{-1}$; $S\left(x_i^{(n)}\right)T_i^{(n)}$ — тело, получаемое из тела $T_i^{(n)}$ путем линейной замены переменных $S\left(x_i^{(n)}\right)$; $\sum\limits_{v(x_0,\rho)} c\left(S\left(x_i^{(n)}\right)T_i^{(n)}\right)$ —

сумма ньютоновских емкостей тел $S\left(x_i^{(n)}\right)T_i^{(n)}$, распространенная при данном значении n на все те значения индекса i, при которых тела $T_i^{(n)}$ лежат строго внутри шара $v(x_0, \rho)$.

Имеет место

Теорема 1[1]. *Пусть при $n\to\infty$ выполнены следующие условия:*

1) *диаметры $d_i^{(n)}$ тел $T_i^{(n)}$ равномерно стремятся к нулю*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_i d_i^{(n)}\right\}=0;$$

2) *функция*

$$\delta_1(\rho)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\max_i \sum_{\substack{j\neq i\\ r_{ij}^{(n)}<\rho}}\frac{c\left(S\left(x_j^{(n)}\right)T_j^{(n)}\right)}{r_{ij}^n}\right\}$$

стремится к нулю при $\rho\to 0$;

3) *ньютоновские емкости $c\left(S\left(x_i^{(n)}\right)T_i^{(n)}\right)$ тел $S\left(x_i^{(n)}\right)T_i^{(n)}$ удовлетворяют предельному соотношению*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{v(x_0,\,\rho)} c\left(S\left(x_i^{(n)}\right)T_i^{(n)}\right)=\int_{v(x_0,\,\rho)} f(x)\,dx$$

для любого шара $v(x_0, \rho)\subset D$, где $f(x)$ — непрерывная в области D функция.

Тогда при $n\to\infty$ последовательность операторов (2. 1), *ядрами которых являются функции Грина $G^{(n)}(x, y)$ задач* (2. 2), *продолженные нулем на тела $T_i^{(n)}$, сильно сходятся к интегральному оператору с ядром $G(x, y)$, удовлетворяющим уравнению* (2. 3) *и граничному условию* (2. 4). *Т. е. в метрике пространства $L_2(D)$ последовательность $u^{(n)}(x)$ решений задач* (2. 2), *продолженных нулем на тела $T_i^{(n)}$, сводится к решению задачи* (2. 5).

3. Подобным образом можно изменить формулировку теоремы 2.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. А. Марченко за постоянное руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Михайленко. Краевые задачи с мелкозернистой границей для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.

2. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Изд-во иностр. лит., 1957.

Поступила 27 апреля 1968 г.