О ПРОИЗВОДНЫХ И ПЕРВООБРАЗНЫХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА

А. А. Гольдберг, И. В. Островский

Пусть $f(z)$ — трансцендентная целая функция. Мы будем предполагать, что читатель знаком с основными фактами теории целых функций [1], однако напомним некоторые наиболее важные для нас определения. Пусть ρ — порядок $f(z)$, $\rho < \infty$, $\rho(r)$ — уточненный порядок $f(z)$, т. е. такая непрерывно дифференцируемая на $[0, \infty)$ функция, что 1) $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$; 2) $\rho'(r) r \ln r \to 0$ при $r \to \infty$; 3) $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r, f)}{V(r)} = A$, $0 < A < \infty$, $V(r) = r^{\rho(r)}$. Из 3) следует, что $\ln r = O(V(r))$, $r \to \infty$.

Говорят, что не более чем счетное множество кружков $\{|z - z_k| < r_k\}$ в z-плоскости имеет нулевую линейную плотность (или, что то же, является C^0-множеством), если

$$\sum_{|z_k| < r} r_k = O(r) \text{ при } r \to \infty 0.$$

Пусть E — измеримое множество, $E \subset [0, \infty)$. Его верхней (нижней) плотностью называют верхний (нижний) предел при $r \to \infty$ отношения $\operatorname{mes}\{E \cap [0, r]\}/r$ и обозначают через D^*E (D_*E). Если существует предел, его называют плотностью множества E и обозначают через DE.

Целая функция $f(z)$ называется целой функцией вполне регулярного роста (в. р. р.) относительно уточненного порядка $\rho(r)$, если для некоторого C^0-множества C существует равномерный относительно θ предел

$$\lim_{r\to\infty,\ re^{i\theta}\overline{\in} C} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{V(r)} = h(\theta, f),\ V(r) = r^{\rho(r)}.$$

Если для некоторого множества $E_\theta \subset [0, \infty)$ нулевой линейной плотности существует предел

$$\lim_{r\to\infty,\ r\overline{\in} E_\theta} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{V(r)} = h(\theta, f),$$

то говорят, что $f(z)$ имеет в. р. р. относительно $\rho(r)$ на луче $\{\arg z = \theta\}$. Б. Я. Левин [1, стр. 184] доказал, что для того, чтобы $f(z)$ была функцией в. р. р. относительно $\rho(r)$, необходимо и достаточно, чтобы она имела в. р. р. относительно $\rho(r)$ на каждом луче.

Введем некоторые обозначения. Пусть $h(\theta, f)$ — индикатор целой функции $f(z)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, $-\infty < \theta < \infty$. Обозначим через $S = S(f)$ внутренность множества тех значений θ, при которых $h(\theta, f) = 0$. Очевидно, при $\rho \leqslant 1/2$ это множество пусто. Пусть (α, β) — составляющий интервал открытого множества S. Обозначим через $S_1 = S_1(f)$ объединение таких интервалов (α, β), для которых выполняется хотя бы одно из следующих условий: 1) $\beta - \alpha > \pi/\rho$; 2) $h'_-(\alpha, f) = 0$; 3) $h'_+(\beta, f) = 0$. Длина каждого из составляющих интервалов открытого множества $S_2 = S_2(f) = S \setminus S_1$ не превосходит π/ρ. Обозначим через $I(f)$ множество таких θ, $-\infty < \theta < \infty$, что функция $f(z)$ не имеет на луче $\{\arg z = \theta\}$ в. р. р. относительно $\rho(r)$. Известно [1, стр. 186], что множество $I(f)$ открытое. Наконец, обозначим

$$F(z) = \int_0^z f(t)\,dt. \tag{1}$$

В этой статье будут доказаны такие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ и в. р. р. относительно уточненного порядка $\rho(r)$. Тогда $F(z)$ тоже является функцией в. р. р. относительно $\rho(r)$, т. е. $I(F) = \varnothing$. Множество (возможно, пустое) $I(f') \subset S_2(f)$, причем если $I(f')$ пересекается с некоторым составляющим интервалом (α, β) множества $S_2(f)$ таким, что $\beta - \alpha = \pi/\rho$, то $(\alpha, \beta) \subset I(f')$.*

Из статьи В. С. Азарина [14] следует, что описание множества $I(f')$, приведенное в теореме 1, не может быть уточнено.

Теорема 2. *Пусть целая функция $f(z)$ имеет в. р. р. относительно некоторого уточненного порядка $\rho(r)$ на лучах $\{\arg z = \theta\}$, где $h(\theta, f) > 0$. Тогда*

$$T(r, f) \sim T(r, f') \sim T(r, F) \text{ при } r \to \infty. \tag{2}$$

Здесь и ниже мы без пояснений используем стандартные обозначения неванлинновской теории [2]. Р. Неванлинна [3, стр. 242] предполагал, что соотношение (2) справедливо для всех целых функций, но Хейман [4] показал, что (2) может не выполняться, если только $T(r, f) \neq O(\ln^2 r)$, $r \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — целая функция порядка нуль. Следующие утверждения равносильны:*

А) $f(z)$ — целая функция в. р. р. относительно $\rho(r)$;

Б) $f(z)$ имеет хотя бы один луч в. р. р. относительно $\rho(r)$;

В) существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, f)}{V(r)} = K,\ 0 < K < \infty,\ V(r) = r^{\rho(r)};$$

Г) существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{V(r)} = K,\ 0 < K < \infty,\ V(r) = r^{\rho(r)};$$

Д) существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, f)}{V(r)} = K,\ 0 < K < \infty,\ V(r) = r^{\rho(r)}.$$

Заметим, что в силу равносильности утверждений А) и Б) в случае нулевого порядка для целой функции или каждый луч $\{\arg z = \theta\}$ является лучом в. р. р. или нет ни одного луча в. р. р. Это обстоятельство не имеет места для целых функций положительного порядка, поскольку В. С. Азарин [5] показал, что для всякого $0 < \rho < \infty$ и всякого замкнутого множества $M \subset [0, 2\pi]$ существует целая функция, у которой луч $\{\arg z = \theta\}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ является лучом в. р. р. тогда и только тогда, когда $\theta \in M$.

Заметим также, что для функций положительного порядка ни одна из импликаций В) $\Leftrightarrow$ Г) и Г) $\Leftrightarrow$ В) не имеет места [2, гл. II, § 5]. Для функций порядка $0 \leqslant \rho \leqslant 1/2$ сохраняет силу Г) $\Leftrightarrow$ Д) [6], но при $\rho > 1/2$ не верно ни Г) $\Leftrightarrow$ Д), ни Д) $\Leftrightarrow$ Г) [14].

Изложим сначала

Доказательство теоремы 3. Равносильность утверждений Г) и Д) доказал Бернштейн [6], ее можно получить также как непосредственное следствие из одной теоремы Куботы [7]. Нам остается доказать равносильность А), Б), В), Д). Импликация

Б) тривиальна. Докажем Б) $\to$ В). Известно [8, 9], что для ой целой функции нулевого порядка индикатор тождественно и положительной постоянной, т. е.

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{V(r)} = K, \ 0 < K < \infty.$$

ода следует [1, стр. 98], что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, f)}{V(r)} = K. \tag{3}$$

Пусть луч $\{\arg z = \theta_0\}$ является лучом в. р. р. для $f(z)$. Тогда существует множество $E \subset [0, \infty)$ нулевой плотности такое, что

$$K = \lim_{r\to\infty,\, r\bar{\in} E} \frac{\ln|f(re^{i\theta_0})|}{V(r)} \leqslant \underline{\lim}_{r\to\infty,\, r\bar{\in} E} \frac{\ln M(r, f)}{V(r)}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$\lim_{r\to\infty,\, r\bar{\in} E} \frac{\ln M(r, f)}{V(r)} = K,$$

и так как $\ln M(r, f)$ — возрастающая функция, а $V(r)$ — медленно изменяющаяся, справедливость В) доказана.

Докажем В) $\to$ Д). Не уменьшая общности можно считать, что $f(0) = 1$. Имеем

$$N(r, 0) \leqslant \ln M(r, f) \leqslant r\int_0^\infty \frac{N(t, 0)}{(t+r)^2}\,dt. \tag{5}$$

Правая половина неравенства (5) следует из известных оценок [2, стр. 78, 82], левая половина — из равенства Иенсена. Из (5) сразу следует, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, 0)}{V(r)} \leqslant K.$$

Предположим, что Д) не выполняется. Тогда существует такое число L, $0 < L < K$ и такая последовательность $r_k \to \infty$, что

$$\mathrm{N}(r_k, 0) \leqslant LV(r_k). \tag{6}$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое r_{k_0}, что при $r \geqslant r_{k_0}$ выполняется $N(r, 0) \leqslant (K+\varepsilon)V(r)$ и $V(r)r^{-\varepsilon}$ является убывающей функцией. Тогда из (5) и (6) получаем

$$(1 + o(1))KV(r_k) \leqslant \ln M(r_k, f) \leqslant$$

$$\leqslant r_k\int_0^{r_k} \frac{N(t, 0)}{(t+r_k)^2}\,dt + r_k\int_{r_k}^\infty \frac{N(t, 0)}{(t+r_k)^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant r_k LV(r_k)\int\limits_0^{r_k}\frac{dt}{(t+r_k)^2}+r_k(K+\varepsilon)\int\limits_{r_k}^{\infty}\{V(t)\,t^{-\varepsilon}\}\frac{t^{\varepsilon}\,dt}{(t+r_k)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}LV(r_k)+r_k(K+\varepsilon)V(r_k)\,r_k^{-\varepsilon}\int\limits_{r_k}^{\infty}\frac{t^{\varepsilon}\,dt}{(t+r_k)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}LV(r_k)+(K+\varepsilon)V(r_k)\int\limits_1^{\infty}\frac{\tau^{\varepsilon}\,d\tau}{(\tau+1)^2}. \qquad (7)$$

Разделив обе части неравенства (7) на $V(r_k)$ и устремив k к ∞, получим

$$K\leqslant\frac{1}{2}L+(K+\varepsilon)\int\limits_1^{\infty}\frac{\tau^{\varepsilon}\,d\tau}{(\tau+1)^2}.$$

Устремив в последнем неравенстве ε к 0, получим $K\leqslant L/2+K/2$, т. е. приходим к противоречию.

Импликация Д) $\to$ А) была по существу доказана А. Ф. Гришиным [9, теорема 5]. При этом, применяя теорему А. Ф. Гришина, надо иметь в виду, что из Д) следует $n(r,\ 0)=o(N(r,\ 0))$ при $r\to\infty$. Действительно,

$$n(r,\ 0)\leqslant\int\limits_r^{er}\frac{n(t,\ 0)}{t}\,dt=N(er,\ 0)-N(r,\ 0)=$$
$$=(K+O(1))V(er)-(K+O(1))V(r)=$$
$$=O(V(r))=O(N(r,\ 0)).$$

Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 вытекает следующее

Следствие. *Пусть для целой функции $f(z)$ нулевого порядка луч $\{\arg z=\theta\}$ не является лучом в. р. р. относительно уточненного порядка $\rho(r)$. Тогда какое бы измеримое множество $E\subset[0,\infty)$, $D_*E>0$, мы ни взяли, не существует предел*

$$\lim_{r\to\infty,\ r\in E}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{V(r)}. \qquad (8)$$

Доказательство. Пусть E — произвольное измеримое фиксированное множество с $D_*E=\delta>0$, а $h(\theta,\ f)=K$. Согласно [8, стр. 348], существует последовательность $R_k\to\infty$ такая, что $N(2R_k,\ 0)\sim KV(2R_k)$,

$$N_2(2R_k)\equiv 2R_k\int\limits_{2R_k}^{\infty}\frac{n(t,\ 0)}{t^2}\,dt=o(V(2R_k)). \qquad (9)$$

Для всех $k \geqslant k_0$ мера $E \cap \left[\frac{\delta}{3} R_k,\ R_k\right]$ не меньше $\frac{\delta}{3} R_k$. В противном случае имели бы

$$D_* E \leqslant \varliminf_{k \to \infty} R_k^{-1} \operatorname{mes} \{E \cap [0,\ R_k]\} \leqslant \frac{2}{3} \delta.$$

Известно [10, теорема 52], что для всех $R \geqslant R_0(\delta)$ и для всех $r \in [(\delta/3) R,\ R]$, кроме множества интервалов с длиной меньше $(\delta/4) R$, выполняется

$$\ln |f(re^{i\theta})| > N(2R,\ 0) - QN_2(2R),\ Q = Q(\delta) = \text{const}. \qquad (10)$$

Положим здесь $R = R_k$. Как следует из предыдущего, за r в (10) можно взять точку $r = r_k \in E \cap [(\delta/3) R_k,\ R_k]$. Учитывая (9) и (10), получаем (используя свойства нулевого уточненного порядка)

$$\ln |f(r_k e^{i\theta})| > (1 + o(1)) KV(2R_k) + o(V(2R_k)) = \\ = (1 + o(1)) KV(r_k).$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{r \to \infty,\ r \in E} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{V(r)} = K. \qquad (11)$$

Из (3) и теоремы 3 следует, что

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\ln M(r,\ f)}{V(r)} = L < K.$$

Предположим, что $\ln M(s_k,\ f) \sim LV(s_k)$, $s_k \to \infty$. Тогда при $(\delta/2) s_k \leqslant r \leqslant s_k$ имеем $(k \to \infty)$

$$\frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{V(r)} \leqslant \frac{\ln M(r,\ f)}{V(r)} \leqslant \frac{\ln M(s_k,\ f)}{V(s_k)} \cdot \frac{V(s_k)}{V(r)} = L + o(1).$$

Множество $E \cap \{\bigcup_{k=1}^{\infty} [(\delta/2) s_k,\ s_k]\}$ не ограничено, так как в противном случае имели бы $D_* E \leqslant \delta/2$. Следовательно,

$$\varliminf_{r \to \infty,\ r \in E} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{V(r)} \leqslant L < K. \qquad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что предел (8) не существует.

Отметим, что следствие справедливо и для целых функций положительного порядка, если условие $D_* E > 0$ заменить условием $D_* E > \eta_0(f) > 0$, где $\eta_0(f)$ — некоторая положительная постоянная, зависящая от $f(z)$ [11, лемма 0].

Переходим к доказательству теорем 1 и 2. Прежде всего заметим, что в случае $\rho = 0$ эти теоремы следуют из теоремы 3. Действительно, хорошо известно [12, § 4], что для целых функций конечного порядка

$$\ln M(r, f) \sim \ln M(r, f'), \quad r \to \infty. \tag{13}$$

Используя утверждение В) теоремы 3, получаем, что функции $f(z)$, $f'(z)$ и $F(z)$ одновременно являются функциями в. р. р. Из утверждения Г) теоремы 3 следует, что если $f(z)$ — функция в. р. р., то выполняется (2). Условие $h(0, f) > 0$, фигурирующее в условии теоремы 2, для функций нулевого порядка всегда выполняется.

В дальнейшем будем предполагать, что $\rho > 0$, и существенно опираться на следующую лемму В. С. Азарина [11][1]:

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция порядка в угле $\{|\arg z| < \eta\}$, которая не является функцией в. р. р. на луче $\arg z = 0$. Тогда существуют такие $\lambda > 0$, $1 > \xi > 0$ и такая последовательность $r_k \to \infty$, что для $|z - r_k| < \xi r_k$ выполняется*

$$\ln |f(z)| \leqslant (h(0, f) - \lambda) V(r). \tag{13'}$$

Наше доказательство теорем 1 и 2 использует ряд лемм.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция порядка ρ в области $G = \{|\arg z| < \eta\} \cup \{|z| < 1\}$ и имеет на луче $\{\arg z = 0\}$ в. р. р. Тогда аналитическая в области G функция $F(z)$, определяемая формулой (1), тоже имеет в. р. р. на луче $\{\arg z = 0\}$.*

Нетрудно показать (ср. [10, § 7.6], [13]), что всегда $h(\theta, f) = h(\theta, F)$, кроме того случая, когда $h(\theta, f) < 0$, а $F(re^{i\theta}) \to C \neq 0, \infty$ при $r \to \infty$. Для доказательства достаточно повторить, например, рассуждения В. И. Беневоленского [13], которые он проводит для случая целых функций, а также уточнить следствие 2 из [13]. Если $F(r) \to C \neq 0, \infty$ при $r \to \infty$, то очевидно, что $\{\arg z = 0\}$ является лучом в. р. р. для $F(z)$. Поэтому мы можем считать, что $h(0, f) = h(0, F)$. Предположим, что $\{\arg z = 0\}$ не является лучом в. р. р. для $F(z)$, и применим к $F(z)$ лемму 1. Пусть $|r - r_k| < \xi r_k - 1$. По формуле Коши

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - r| = 1} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - r)^2} d\zeta.$$

Учитывая, что $V(t) = (1 + o(1)) V(r)$ при $|t - r| \leqslant 1$, получаем

$$|f(r)| \leqslant \exp\{(h(0, F) - \lambda)(1 + o(1)) V(r)\}.$$

[1] Соответствующая лемма 2 у В. С. Азарина приведена в более слабой формулировке, хотя фактически доказано приводимое нами утверждение. Пользуемся случаем отметить, что, как сообщил нам В. С. Азарин, в его статье на стр. 57 надо заменить определение E_0 следующим:

$$E_0 = \bigcup_{j=2}^{\infty} \{E_{j-1} \cap E_j \cap [R_j, R_{j+1})\}$$

и соответствующим образом исправить конец доказательства леммы 0.

Очевидно, $D^*E > 0$, где $E = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{r: |r - r_k| < \xi r_k - 1\}$. Поэтому для любого $E_0 \subset [0, \infty)$ с $DE_0 = 0$

$$\varlimsup_{r\to\infty,\ r\bar{\in} E_0} \frac{\ln|f(r)|}{V(r)} \leqslant h(0, F) - \lambda = h(0, f) - \lambda < h(0, f),$$

что противоречит предположению.

Лемма 3. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция порядка ρ в области $G = \{|\arg z| < \eta\} \cup \{|z| < 1\}$ и имеет на луче $\{\arg z = 0\}$ в. р. р., причем $h(0, f) \neq 0$. Тогда $f'(z)$ тоже имеет в. р. р. на луче $\{\arg z = 0\}$.*

Из сказанного в начале доказательства леммы 2 следует, что $h(0, f') = h(0, f) = h$. Пусть сначала $h > 0$. Предположим, что $f'(z)$ не имеет в. р. р. на луче $\{\arg z = 0\}$. Применим к $f'(z)$ лемму 1, причем можно считать, что $\lambda < h$. Выберем положительное число ε столь малым, что $\varepsilon < \lambda$ и

$$(h + \varepsilon)\left(\frac{1-\xi}{1-\xi/2}\right)^{\rho}(1+\varepsilon) < h - \varepsilon. \tag{14}$$

Изменяя в случае необходимости $V(r)$ на конечном промежутке, можно считать, что для всех $r \geqslant 0$ функция $V(r)$ возрастает и $\ln|f'(r)| < (h+\varepsilon)V(r)$. Пусть $(1-\xi/2)r_k \leqslant r \leqslant (1+\xi)r_k$. Будем считать k настолько большим, что

$$\frac{V(r_k(1-\xi))}{V(r_k(1-\xi/2))} \leqslant \left(\frac{1-\xi}{1-\xi/2}\right)^{\rho}(1+\varepsilon).$$

Тогда

$$V(r_k(1-\xi)) \leqslant \left(\frac{1-\xi}{1-\xi/2}\right)^{\rho}(1+\xi)V(r). \tag{15}$$

Учитывая неравенства (14), (15), получаем

$$|f(r)| \leqslant |f(0)| + \int_0^r |f'(t)|\,dt \leqslant |f(0)| + \int_0^{r_k(1-\xi)} \exp\{(h+$$

$$+\varepsilon)V(t)\}\,dt + \int_{r_k(1-\xi)}^{r} \exp\{(h-\lambda)V(t)\}\,dt \leqslant |f(0)| +$$

$$+ r\exp\{(h+\varepsilon)V(r_k(1-\xi))\} + r\exp\{(h-\lambda)V(r)\} \leqslant |f(0)| +$$
$$+ r\exp\{(h-\varepsilon)V(r)\} + r\exp\{(h-\lambda)V(r)\} \leqslant |f(0)| +$$
$$+ 2r\exp\{(h-\varepsilon)V(r)\}.$$

Таким образом, на множестве $E = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{r: (1-\xi/2)r_k \leqslant r \leqslant (1+\xi)r_k\}$ выполняется

$$\ln|f(r)| \leqslant (h-\varepsilon)(1+o(1))V(r) = (h(0, f) - \varepsilon)(1+o(1))V(r).$$

Так как $D^*E > 0$, $f(z)$ не имеет в. р. р. на луче $\{\arg z = 0\}$, что противоречит условию.

Пусть теперь $h < 0$. Тогда существует конечный предел

$$\lim_{r\to\infty} f(r) = f(0) + \int_0^\infty f'(t)\,dt = C \neq \infty.$$

Если $C \neq 0$, $h(0, f) = 0$. Поэтому $C = 0$ и

$$f(r) = f(0) + \int_0^r f'(t)\,dt = -\int_r^\infty f'(t)\,dt. \qquad (16)$$

Как раньше, предположим, что $f'(z)$ не имеет в. р. р. на лу $\{\arg z = 0\}$, и применим к $f'(z)$ лемму 1. Выберем $1 > \varepsilon > 0$ столь малым, что $h + \varepsilon < 0$, $\varepsilon < \lambda$ и

$$(h+\varepsilon)\left(\frac{1+\xi}{1+\xi/2}\right)^\rho (1-\varepsilon) < h - \varepsilon. \qquad (17)$$

Будем считать k настолько большим, что при $r \geqslant r_k(1-\xi)$ выполняется $\ln|f'(r)| < (h+\varepsilon)V(r)$, функция $V(r)$ возрастает, а функция $(h+\varepsilon)V(r) + 2\ln r$ убывает, а также

$$\frac{V(r_k(1+\xi))}{V(r_k(1+\xi/2))} \geqslant \left(\frac{1+\xi}{1+\xi/2}\right)^\rho (1-\varepsilon). \qquad (18)$$

Из (18) следует, что для r, $(1-\xi)r_k \leqslant r \leqslant (1+\xi/2)r_k$ выполняется

$$V(r_k(1+\xi)) \geqslant \left(\frac{1+\xi}{1+\xi/2}\right)^\rho (1-\varepsilon)V(r). \qquad (19)$$

Теперь для $(1-\xi)r_k \leqslant r \leqslant (1+\xi/2)r_k$, учитывая (16), (17), (19), имеем

$$|f(r)| \leqslant \int_r^{(1+\xi)r_k} |f'(t)|\,dt + \int_{(1+\xi)r_k}^\infty |f'(t)|\,dt \leqslant \int_r^{(1+\xi)r_k} \exp\{(h-$$

$$-\lambda)V(t)\}\,dt + \int_{(1+\xi)r_k}^\infty \exp\{(h+\varepsilon)V(t)\}\,dt \leqslant 2\xi r_k \exp\{(h-\lambda)V(r)\} +$$

$$+\int_{(1+\xi)r_k}^\infty \exp\{(h+\varepsilon)V(t) + 2\ln t\}\frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{2\xi}{1-\xi} r\exp\{(h-\lambda)V(r)\} +$$

$$+\frac{1}{(1+\xi)r_k}\exp\{(h+\varepsilon)V((1+\xi)r_k) + 2\ln((1+\xi)r_k)\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\xi}{1-\xi} r\exp\{(h-\lambda)V(r)\} + \frac{1+\xi}{1-\xi} r\exp\{(h+\varepsilon)V((1+\xi)r_k)\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\xi}{1-\xi} r\exp\{(h-\lambda)V(r)\} + \frac{1+\xi}{1-\xi} r\exp\{(h-\varepsilon)V(r)\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+3\xi}{1-\xi} r\exp\{(h-\varepsilon)V(r)\}.$$

…им образом, на множестве $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r: r_k(1-\xi)\leqslant r\leqslant r_k(1+$ $/2)\}$ выполняется

$$\ln|f(r)|\leqslant(h-\varepsilon)(1+o(1))V(r)=(h(0, f)-\varepsilon)(1+o(1))V(r).$$

…к как $D^*E>0$, $f(z)$ не имеет в. р. р. на луче $\{\arg z=0\}$, и мы …ть приходим к противоречию. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. Утверждение теоремы 1, ка…ющееся $F(z)$, следует из леммы 2 и того обстоятельства [1, … 184], что целая функция является функцией в. р. р., если она …еет в. р. р. на каждом луче. Если $h(\theta, f)\neq 0$, то $\{\arg z=0\}$ …яется лучом в. р. р. относительно $\rho(r)$ для $f'(z)$ в силу леммы 3. …и $\theta\in\partial S(f)$, то $\{\arg z=\theta\}$ является лучом в. р. р. для $f'(z)$, так …к множество лучей в. р. р. для целых функций замкнуто. От…тим, что вне $S(f)$ выполняется $h(\theta, f)=h(\theta, f')$. Если $h(\theta, f)=0$, …, очевидно, $h(\theta, f')\leqslant 0$. Пусть $\theta\in(\alpha, \beta)$, где (α, β) — составляю…щий интервал множества $S_1(f)$. Если $\beta-\alpha>\pi/\rho$, то в силу извест…ного свойства индикатора [1, стр. 78, свойство e)] $h(\theta, f')\equiv 0$ при … (α, β). Теперь по теореме М. Картрайт [1, стр. 244, теорема 6] …олучаем, что $f'(z)$ имеет в. р. р. относительно $\rho(r)$ в углу $\{\alpha<$ $\arg z<\beta\}$. Предположим теперь $h'_-(\alpha, f)=0$. Так как сущест…вует последовательность $\theta_n\to\alpha$, $\theta_n<\alpha$, $\theta_n\overline{\in} S(f)$, то $h'_-(\alpha, f')=$ $h'_-(\alpha, f)=0$.

Пусть $\alpha\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant\beta$. Учитывая известные свойства индика…тора [1, стр. 77, свойство $в$) и стр. 79, свойство $ж$)], получаем

$$h'_-(\theta_2, f')-h'_-(\theta_1, f')\geqslant h'_-(\theta_2, f')-h'_+(\theta_1, f')\geqslant$$
$$\geqslant-\rho^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}h(\theta, f')\,d\theta\geqslant 0.$$

…ледовательно, $h'_-(\theta, f')$ — не убывающая функция на $[\alpha, \beta]$ и $h'_-(\theta, f')\geqslant h'_-(\alpha, f')=0$. Так как

$$0=h(\beta, f')-h(\alpha, f')=\int_{\alpha}^{\beta}h'_-(\theta, f')\,d\theta,$$

… $h'_-(\theta, f')\equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$ и $h(\theta, f')\equiv 0$ при $\theta\in[\alpha, \beta]$. Отсюда в …илу теоремы Б. Я. Левина [1, стр. 214, теорема 7] следует, что $f'(z)$ имеет в. р. р. относительно $\rho(r)$ в углу $\{\alpha<\arg z<\beta\}$. В слу…чае, когда $h'_+(\beta, f)=0$, применимы аналогичные рассуждения. Та…ким образом, мы показали, что $I(f')\cap S_1(f)=\varnothing$, т. е. $I(f')\subset$ $S_2(f)$.

Предположим теперь, что $(\alpha, \beta)\subset S_2(f)$ и $\beta-\alpha=\pi/\rho$. Покажем, что $h(\theta, f')$ — тригонометрический индикатор на $[\alpha, \beta]$. Если $h(\theta,$ $f')\equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$, это тривиально. Пусть $\min\limits_{[\alpha,\beta]}h(\theta, f')=h(\theta_0, f')<$

< 0, $\alpha < \theta_0 < \beta$. В силу упоминавшегося свойства индикатора стр. 78, свойство e)] $\theta_0 = (\alpha + \beta)/2$ и $h(\theta, f') \geqslant h(\theta_0, f') \cos \rho (\theta - \theta_0)$ при $|\theta - \theta_0| \leqslant \pi/(2\rho)$. Но из определения тригонометрически ρ- выпуклых функций следует, что при $|\theta - \theta_0| \leqslant \pi/(2\rho)$ выполняется $h(\theta, f') \leqslant h(\theta_0, f') \cos \rho (\theta - \theta_0)$. Следовательно, $h(\theta, f') \equiv h(\theta_0, f') \cos \rho (\theta - \theta_0)$ при $|\theta - \theta_0| \leqslant \pi/(2\rho)$ и $h(\theta, f')$ — тригонометрический индикатор на $[\alpha, \beta]$. Из теоремы Б. Я. Левина [1, стр. 213, теорема 6] сразу следует, что если $(\alpha, \beta) \cap I(f') \neq \varnothing$, то $(\alpha, \beta) \subset I(f')$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Обозначим через Φ множество тех значений $\theta \in [-\pi, \pi]$, где $h(\theta, f) > 0$. Так как все лучи $\{\arg z = \theta\}$, $\theta \in \Phi$ являются лучами в. р. р. для $f(z)$, по теореме Б. Я. Левина [1, стр. 184] существует такое множество $E \subset [0, \infty)$, $DE = 1$, что

$$\ln^+ |f(re^{i\theta})| = h(\theta, f) V(r) + o(V(r))$$

при $r \to \infty$, $r \in E$, равномерно относительно $\theta \in \Phi$, а равномерно относительно $\theta \in [-\pi, \pi]$ выполняется [1, стр. 97]

$$\ln^+ |f(re^{i\theta})| \leqslant h^+(\theta, f) V(r) + o(V(r)).$$

Отсюда следует [2, стр. 59—60], что

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta =$$

$$= \left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h^+(\theta, f) \, d\theta\right\} V(r) + o(V(r)) \quad (r \in E). \tag{20}$$

Так как $T(r, f)$ — монотонная функция, ограничение $r \in E$ можно отбросить. Используя леммы 2 и 3, а также уже отмечавшееся обстоятельство: $h^+(\theta, f) \equiv h^+(\theta, f') \equiv h^+(\theta, F)$ (см. доказательство леммы 2) и применяя к $f'(z)$ и $F(z)$ формулу (20), получим теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М. ГИТТЛ, 1956.
2. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970.
3. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. М. ГИТТЛ, 1941.
4. W. K. Hayman. On the characteristic of functions meromorphic in the plane and of their integrals. Proc. London Math. Soc., 14A (1965), 93—128.
5. В. С. Азарин. О лучах вполне регулярного роста целой функции. «Матем. сб.», 79, 1969.
6. A. Baernstein. A nonlinear Tauberian theorem in function theory. Trans. Amer. Math. Soc., 146 (1969), 87—104.
7. Y. Kubota. On meromorphic functions of order zero. Kodai Math. Sem. Rep., 21 (1969), 405—412.
8. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. II. «Матем. сб», 61, 1963.

Λ. Φ. Гришин. О функциях, голоморфных внутри угла и имеющих ·левой порядок. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их ·кения». Вып. 1. Изд-во Харьковск. ун-та, 1965.
. M. L. Cartwright. Integral functions, Cambridge, 1956.
. В. С. Азарин. Об одном характеристическом свойстве функций · регулярного роста внутри угла. Сб. «Теория функкий, функциональный · и их приложения», вып. 2. Изд-во Харьковск. ун-та, 1966.
. G. Valiron. Fonctions entiéres d'ordre fini et fonctions méromorphes, ·, 1960.
. В. И. Беневоленский. О некоторых предельных свойствах це- ·ункций конечного порядка и их производных. Сб. «Исследования по со- ·ным проблемам теории функций комплексного переменного». М., Физ- , 1960.
. В. С. Азарин. Пример целой функции с заданными индикатором ·ним индикатором. «Матем. сб.», 89, 1972.

Поступила 25 июня 1971 г.