

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра фундаментальної математики

Кваліфікаційна робота

ІСНУВАННЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ КОНТАКТУ БАЛКИ КІРХГОФА

Виконав:

студент групи М-162 VI курсу

(другий магістерський рівень)

спеціальності 111 Математика

ПРИХОДЬКО П.В.

Керівник:

доцент кафедри фундаментальної математики,

кандидат фізико-математичних наук

ФАСТОВСЬКА Т.Б.

Рецензент:

професор, доктор фізико-математичних наук

ШЕПЕЛЬСКИЙ Д.Г.

Харків

2023

Зміст

1	Вступ	2
2	Задача з слабким демпінгом.	4
2.1	Постановка задачі.	4
2.2	Існування та єдиність розв'язків.	5
3	Задача з сильним демпінгом	19
3.1	Постановка задачі	19
3.2	Існування та єдиність розв'язків	20
4	Задача з пружною основою	28
4.1	Постановка задачі	28
4.2	Існування та єдиність розв'язків	29
5	Чисельний експеримент	37
6	Висновки.	46

1 Вступ

У даній роботі ми досліджуємо коректну розв'язність задачі динаміки балки, яка складається з двох частин: одна частина демпфована струнним демпінгом, тоді як друга – ні. Математична модель, розроблена для опису цієї задачі, називається задачею контакту. Вона задається системою диференціальних рівнянь з частинними похідними, шуканою функцією в якій є поперечне відхилення балки. Основним питанням, яке ми розглянемо, буде коректна розв'язність в залежності від характеру демпінгу в першій частині балки, та нелінійностей, а також чисельне моделювання розв'язків.

Подібні задачі вивчалися з точки зору наявності експоненціальної швидкості спадання енергії до нуля, див. [4], [10]. Нелінійні варіанти одновимірних задач цього класу розглянуто у [15], [11]. У роботах [7], [8] віднайдено, що у випадку двовимірних пластин результат зберігається, тобто енергія спадає експоненційно за часом, що прямує до нескінченності. У найпізніших статтях [12], [13] розглянуто лінійні задачі контакту для балок з термопружною та в'язкопружною частинами відповідно; показано експоненційну стабілізацію розв'язків з локалізовним демпінгом. Ці результати стали узагальненням [5], [9] в яких стабілізація була доведена для більш специфічних граничних умов і видів демпінгу. Наша ціль у поточній роботі – не тільки показати існування та єдиність розв'язків нелінійної задачі контакту для балки

Кірхгофа зі струкурним демпінгом, але й чисельно змоделювати їхній вигляд на конкретних прикладах. Досі питання про конкретну розв'язність таких задач не вивчалися; крім того, наявність граничних умов контакту суттєво ускладнює чисельне моделювання розв'язків.

2 Задача з слабким демпінгом.

2.1 Постановка задачі.

Розглядається система рівнянь динаміки пружної балки

$$\alpha_1 u_{tt} + \beta_1 u_{xxxx} + \gamma u_t + f_1(u) = 0, \quad x \in (0, L_0), \quad t > 0 \quad (1)$$

$$\alpha_2 v_{tt} + \beta_2 v_{xxxx} + f_2(v) = 0, \quad x \in (L_0, L), \quad t > 0 \quad (2)$$

з граничними умовами на кінцях

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad (3)$$

$$v(L, t) = v_{xx}(L, t) = 0, \quad (4)$$

граничними умовами контакту

$$u(L_0, t) = v(L_0, t), \quad (5)$$

$$u_x(L_0, t) = v_x(L_0, t), \quad (6)$$

$$\beta_1 u_{xx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xx}(L_0, t), \quad (7)$$

$$\beta_1 u_{xxx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xxx}(L_0, t), \quad (8)$$

та початковими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (9)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (10)$$

де $\alpha_i, \beta_i, \gamma, a_i, b_i$ – додатні константи.

Система описує динаміку балки, що складається з двох частин з різними властивостями матеріалів.

2.2 Існування та єдиність розв'язків.

Означення 1. Нехай $U \in \mathbb{R}^n$ – відкрита множина, $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Простором Соболева $W_p^k(U)$ називають функціональний простір, що складається з функцій із простору Лебега $L_p(Q)$, які мають слабкі похідні до k -го порядку включно з $L_p(Q)$.

При $p = 2$: $W_p^k(U) := H^k(U)$.

Позначимо $w := (u, v) \in H^4(0, L_0) \times H^4(L_0, L)$ та $\tilde{f}(w) := (f_1(u), f_2(v))^T$,

та визначимо простори

$$H = L_2(0, L_0) \times L_2(L_0, L) \quad (11)$$

зі скалярним добутком

$$(w_1, w_2)_H = (w_1, w_2) = \alpha_1 \int_0^{L_0} u_1 u_2 \, dx + \alpha_2 \int_{L_0}^L v_1 v_2 \, dx \quad (12)$$

та

$$H_A = \{(u, v) \in H^2(0, L_0) \times H^2(L_0, L) \mid u(0) = 0, v(L) = 0, \\ u(L_0) = v(L_0), u_x(L_0) = v_x(L_0)\} \quad (13)$$

зі скалярним добутком

$$[w_1, w_2]_A = \beta_1 \int_0^{L_0} u_{1xx} u_{2xx} \, dx + \beta_2 \int_{L_0}^L v_{1xx} v_{2xx} \, dx. \quad (14)$$

Оскільки в рамках цієї роботи ми будемо скалярно множити функції переважно в H , для скорочення позначень надалі $(w_1, w_2) := (w_1, w_2)_H$, якщо

не обговорено інше. Тоді рівняння (1), (2) можна переписати у вигляді

$$C \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial w}{\partial t} + Bw + \tilde{f}(w) = 0, \quad (15)$$

де

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot id & 0 \\ 0 & \alpha_2 \cdot id \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \beta_1 \partial_{xxxx} & 0 \\ 0 & \beta_2 \partial_{xxxx} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} \gamma \cdot id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто отримуємо гіперболічне рівняння:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + G \frac{\partial w}{\partial t} + Aw + f(w) = 0, \quad (16)$$

де

$$A := C^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \partial_{xxxx} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2}{\alpha_2} \partial_{xxxx} \end{pmatrix}; G := C^{-1}D = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\alpha_1} \cdot id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Області визначення операторів:

$$D(A) = \{(u, v) \in H^4(0, L_0) \times H^4(L_0, L) | u(0) = 0, v(L) = 0, u(L_0) = v(L_0), \\ u_x(L_0) = v_x(L_0), \beta_1 u_{xx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xx}(L_0, t), \beta_1 u_{xxx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xxx}(L_0, t)\},$$

$$D(G) = H,$$

$$f(w) := \left(\frac{1}{\alpha_1} f_1(u), \frac{1}{\alpha_2} f_2(v) \right)^T.$$

Рівняння (16) розглядається з початковими умовами

$$w(x, 0) = (u_0(x), v_0(x)) =: w_0(x), \quad (17)$$

$$w_t(x, 0) = (u_1(x), v_1(x)) =: w_1(x). \quad (18)$$

Означення 2. Функцию $w \in L_\infty(0, T; H_A)$ таку, що $w_t \in L_\infty(0, T; H)$ називають **слабким розв'язком** рівняння (16) з початковими умовами (17)–(21), якщо для будь-якої функції $\varphi \in L_2(0, T; H_A)$, такої, що $\varphi_t \in L_2(0, T; H)$ виконується рівність

$$\begin{aligned} - \int_0^T (w_t, \varphi_t) dt + \int_0^T (Gw_t, \varphi) dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}}w, A^{\frac{1}{2}}\varphi) dt + \int_0^T (f(w), \varphi) dt = \\ = (w_1, \varphi_t(0)) \end{aligned} \quad (19)$$

та $w(x, 0) = w_0(x)$.

Теорема 1. Нехай $(u_0, v_0) \in H_A, (u_1, v_1) \in H$ та функції $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є локально ліпшицевими та такими, що існує константа $C > 0$ така, що

$$F_1(s) \geq -C, F_2(s) \geq -C, s \in \mathbb{R}, F_i(s) = \int_0^s f_i(\xi) d\xi, i = 1, 2. \quad (20)$$

Тоді на будь-якому відрізку $[0, T]$ існує єдиний слабкий розв'язок задачі (16)–(21) $(u, v) \in C(0, T; H_A)$ такий, що $(u_t, v_t) \in C(0, T; H)$.

Доведення. 1. Існування.

Застосуємо метод Гальоркіна.

Оскільки оператор A є додатно визначеним самоспряженим оператором з дискретним спектром, можна вибрати $\{e_k\}$ – ортонормований базис з власних векторів оператора A (з відповідними власними значеннями λ_k). Нехай $w_m(t) := \sum_{k=1}^m d_k^m(t)e_k$ – наближені розв'язки системи. Підставляючи

їх у (16), запишемо систему Гальоркіна:

$$(w_m''(t), e_k) + (Gw_m'(t), e_k) + (A^{\frac{1}{2}}w_m, A^{\frac{1}{2}}e_k) + (f(w_m), e_k) = 0, k = 1, ..m, \quad (21)$$

з початковими умовами

$$(w_m(0), e_k) = d_k^m(0) = (w_0, e_k), k = 1, ..m, \quad (22)$$

$$(w_m'(0), e_k) = d_k^{m'}(0) = (w_1, e_k), k = 1, ..m. \quad (23)$$

Помножимо тепер (21) на $d_k^{m'}(t)$, підсумуємо від 1 до m та проінтегруємо за s від 0 до t ; позначивши також $[w_m, w_m']_A := (A^{\frac{1}{2}}w_m, A^{\frac{1}{2}}w_m')$, маємо:

$$\int_0^t (w_m''(s), w_m'(s))ds + \int_0^t (Gw_m'(s), w_m'(s))ds + \int_0^t [w_m(s), w_m'(s)]_A ds + \int_0^t (f(w_m), w_m'(s))ds = 0. \quad (24)$$

Беручи до уваги, що

$$(w_m'', w_m') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_m'\|^2, \quad (25)$$

$$[w_m, w_m']_A = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_m\|_A^2, \quad (26)$$

$$\int_0^t (f(w_m), w_m'(s))ds = \int_0^L F(w_m(t))dx - \int_0^L F(w_m(0))dx \quad (27)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|w'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|w_m(t)\|_A^2 + \int_0^t (Gw'_m(s), w'_m(s))ds + \int_0^L F(w_m(t))dx = \\ = \int_0^L F(w_m(0))dx + \frac{1}{2}\|w'_m(0)\|^2 + \frac{1}{2}\|w_m(0)\|_A^2. \end{aligned}$$

Користуючись умовою (20), отримаємо

$$\frac{1}{2}\|w'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|w_m(t)\|_A^2 \leq C + \frac{1}{2}\|w'_m(0)\|^2 + \frac{1}{2}\|w_m(0)\|_A^2 + \int_0^L F(w_m(0))dx.$$

Перевіримо локальну ліпшицевість функції F :

$$\begin{aligned} |F(u) - F(v)| &\leq \left| \int_v^u f(s)ds \right| \leq \sup_{s \in [u,v]} |f(s)| |u - v| \leq \\ &\leq \sup_{s \in [u,v]} |f(s)| \max(|u|, |v|). \end{aligned} \quad (28)$$

Зважаючи на локальну ліпшицевість f та неперервне вкладення (в однови-
мірному випадку) $H^2(\Omega) \subset C(\Omega)$, маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^L F(w_m(0))dx &\leq \int_0^L |F(w_m(0)) - F(0)|dx \leq \\ &\leq \sup_{s \in [0, w_m(0)]} |f(s)| \sup |w_m(0)| \leq C(\|w_0\|_A). \end{aligned} \quad (29)$$

Отже, існує $C > 0$ така, що

$$\operatorname{esssup}_{t \in [0, T]} (\|w'_m(t)\|^2 + \|w_m(t)\|_A^2) \leq C (1 + \|w_1\|^2 + \|w_0\|_A^2). \quad (30)$$

Таким чином, за лемою Больцано-Вейерштраса, існує $\{w_{m_l}\}_{l=1}^\infty$ – збіжна підпослідовність $\{w_m\}_{m=1}^\infty$, та w, ω такі, що:

$$w_{m_l} \xrightarrow[L_\infty(0,T;H_A)]{w^*} w, \quad (31)$$

$$w'_{m_l} \xrightarrow[L_\infty(0,T;H)]{w^*} \omega. \quad (32)$$

При цьому для будь-якої $\varphi \in C_0^\infty(0, T; H)$:

$$\langle w'_{m_l}, \varphi \rangle \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \langle \omega, \varphi \rangle, \quad (33)$$

$$\langle w'_{m_l}, \varphi \rangle = -\langle w_{m_l}, \varphi' \rangle \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} -\langle w, \varphi' \rangle = \langle w, \varphi' \rangle. \quad (34)$$

Тобто $w' = \omega$.

Покажемо також, що подібна збіжність має місце і для других похідних.

Помножимо (21) на $\lambda_k^{-1} d_k^{m''}$ та підсумуємо отримане за k від 1 до m :

$$\|w''_m\|_{H_A^*}^2 \leq C(\|w'_m\|_H^2 + \|w_m\|_A^2 + \|P_m f(w_m)\|_H^2), \quad (35)$$

де $H_A \subset H \subset H_A^*$, $A : H_A \rightarrow H_A^*$. Так як норми w_m, w'_m обмежені за (31)–(32), а нелінійність – завдяки локальній ліпшицевості,

$$w''_m \xrightarrow[L_\infty(0,T;H_A^*)]{w^*} w''. \quad (36)$$

Доведемо, що для будь-яких $\varphi_1 \in L_2(0, T; H^2(0, L_0))$, $\varphi_2 \in L_2(0, T; H^2(L_0, L))$:

$$\left| \int_0^T \int_0^{L_0} (f_1(u_{m_l}) - f_1(u)) \varphi_1 dx dt \right| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, \quad (37)$$

$$\left| \int_0^T \int_0^{L_0} (f_2(v_{m_l}) - f_2(v)) \varphi_2 dx dt \right| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0. \quad (38)$$

З (31)–(32) та теореми про компактність,

$$\|u_m - u\|_{L^2[0, L_0]} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Крім того, зважаючи на локальну ліпшицевість f_1 , існує константа $L_1(K) > 0$ така, що

$$|f_1(u_{m_l}) - f_1(u)| \leq L_1(K)|u - u_{m_l}|, \quad (39)$$

де $|u|, |u_{m_l}| \leq K$. Тоді, так як

$$\sup_{[0, T]} \sup_{[0, L_0]} |u_{m_l}| \leq \sup_{[0, T]} \|u_{m_l}\|_A \leq C(T, \|w_0\|_A, \|w_1\|),$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^{L_0} |(f_1(u_{m_l}) - f_1(u))|^2 dx dt &\leq \int_0^T \int_0^{L_0} L_1^2(K) |u - u_{m_l}|^2 dx dt \leq \\ &\leq C(T, \|w_0\|_A, \|w_1\|) \int_0^T \int_0^{L_0} |u - u_{m_l}|^2 dx dt \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_0^{L_0} (f_1(u_{m_l}) - f_1(u)) \varphi_1 dx dt \right|^2 &\leq \\ &\leq C \int_0^T \int_0^{L_0} |(f_1(u_{m_l}) - f_1(u))|^2 dx dt \int_0^T \|\varphi_1\|^2 dt \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Для $f_2(v)$ міркування аналогічні.

Для того, щоб довести, що w дійсно є слабким розв'язком (16)-(21), помножимо (21) на φ_k , де $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_k(t) e_k$, підсумуємо отримане від 1 до ∞ та

проінтегруємо за t від 0 до T :

$$\int_0^T (w_m'', \varphi) dt + \int_0^T (Gw_m', \varphi) dt + \int_0^T [w_m, \varphi]_A dt + \int_0^T (P_m f(w), \varphi) dt = 0,$$

де P_m – ортопроектор на $Lin \{e_i\}_{i=1}^m$. Інтегруючи частинами перший доданок та переходячі до границі за m , маємо

$$\begin{aligned} - \int_0^T (w', \varphi') dt + \int_0^T (Gw', \varphi) dt + \int_0^T [w, \varphi]_A dt + \int_0^T (f(w), \varphi) dt = \\ = (w_1, \varphi). \end{aligned}$$

Користуючись слабкою збіжністю (31)–(32), з теореми про компактність отримуємо

$$w_{m_l}(t) \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{s} w(t).$$

Зокрема,

$$w_{m_l}(0) \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{s} w(0),$$

а отже $w(0) = w_0$.

2. Енергетична оцінка.

Введемо оператор

$$D_h w = \frac{w(t+h) - w(t-h)}{2h}. \quad (40)$$

Для коректного визначення на $[0, T]$ продовжимо $w(t)$ наступним чином:

$$w(t) = \begin{cases} w(T), & t > T \\ w(0), & t < 0. \end{cases} \quad (41)$$

Оскільки для тестової функції $\varphi \in L_2(0, T; H_A)$ виконується $\varphi_t \in L_2(0, T; H)$, за Теоремою 2 з [3] (с.286) маємо $\varphi \in C(0, T; H)$. Тоді, зважаючи на характер збіжності у просторі тестових функцій, можемо продовжити (19) на клас функцій $\varphi \in L_2(0, T; H_A)$, $\varphi_t \in L_2(0, T; H)$ без граничної умови $\varphi(T) = 0$. Будемо мати

$$\begin{aligned} - \int_0^T (w', \varphi') dt + \int_0^T (Gw', \varphi) dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}}w, A^{\frac{1}{2}}\varphi) dt + \int_0^T (f(w), \varphi) dt = \\ = (w_1, \varphi(0)) - (w_t(T), \varphi(T)). \end{aligned} \quad (42)$$

Підставляючи в якості φ введenu функцію $D_h w$, отримаємо

$$\begin{aligned} - \int_0^T (w_t, D_h w_t) dt + \int_0^T (Gw_t, D_h w) dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}}w, A^{\frac{1}{2}}D_h w) dt + \\ + \int_0^T (f(w), D_h w) dt = (w_t(0), D_h w(0)) - (w_t(T), D_h w(T)). \end{aligned} \quad (43)$$

Означення 3. Функцію $h : [0, T] \rightarrow X$ називають **слабко неперервною** на $[0, T]$ ($h \in C_w(0, T; X)$) якщо відображення $t \mapsto \langle h(t), y \rangle$ є неперервним для будь-якого $y \in X^*$.

Оскільки $w \in L_\infty(0, T; H_A)$ та $w_t \in L_\infty(0, T; H)$, за Теоремою 2 з [3] (с.286) отримуємо $w \in C(0, T; H)$. Тоді, користуючись Лемою 8.1 з [6], маємо $w \in C_w(0, T; H_A)$. Зважаючи на те, що $w_t \in L_\infty(0, T; H)$ та $w_{tt} \in L_\infty(0, T; H_A^*)$ (35), аналогічно $w_t \in C_w(0, T; H)$.

Інтегруючи частинами, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^T (w_{tt}, D_h w) dt &= \\ &= (w_t(T), D_h w(T)) - (w_t(0), D_h w(0)) - \int_0^T (w_t, D_h w_t) dt. \end{aligned} \quad (44)$$

Використаємо вигляд функції $D_h w$, та зробимо заміну у другому інтегралі:

$$\begin{aligned} - \int_0^T (w_t, D_h w_t) dt &= -\frac{1}{2h} \int_0^T (w_t, w_t(t+h)) dt + \frac{1}{2h} \int_0^T (w_t, w_t(t-h)) dt = \\ &= [s := t-h] = -\frac{1}{2h} \int_0^T (w_t, w_t(t+h)) dt + \frac{1}{2h} \int_{-h}^{T-h} (w_t, w_t(t+h)) dt = \\ &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^0 (w_t, w_t(t+h)) dt - \frac{1}{2h} \int_{T-h}^T (w_t, w_t(t+h)) dt. \end{aligned} \quad (45)$$

Зважаючи на довізначення функції $w(t)$ (41), цей вираз дорівнює 0. Розглянемо тепер позаінтегральні доданки:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [(w_t(0), D_h w(0)) - (w_t(T), D_h w(T))] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} [(w_t(0), (w(h) - w(-h))) - \\ &- (w_t(T), (w(T+h) - w(T-h)))] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} [(w_t(0), (w(h) - w(0))) - \\ &- (w_t(T), (w(T) - w(T-h)))] = \frac{1}{2} \|w_t(0)\|^2 - \frac{1}{2} \|w_t(T)\|^2. \end{aligned} \quad (46)$$

Розглянемо третій доданок в (43):

$$\int_0^T (A^{\frac{1}{2}}w, A^{\frac{1}{2}}D_h w) dt = -\frac{1}{2h} \int_{-h}^0 (A^{\frac{1}{2}}w(t), A^{\frac{1}{2}}w(t+h)) dt +$$

$$+ \frac{1}{2h} \int_{T-h}^T (A^{\frac{1}{2}}w(t), A^{\frac{1}{2}}w(t+h)) dt. \quad (47)$$

Завдяки (41), отримані вирази можливо переписати наступним чином:

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^0 (A^{\frac{1}{2}}w(t), A^{\frac{1}{2}}w(t+h)) dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^0 (A^{\frac{1}{2}}w(0), A^{\frac{1}{2}}(w(t+h) - w(t))) dt +$$

$$+ \frac{1}{2h} \int_{-h}^0 (A^{\frac{1}{2}}w(0), A^{\frac{1}{2}}w(0)) dt \quad (48)$$

та

$$\frac{1}{2h} \int_{T-h}^T (A^{\frac{1}{2}}w(t), A^{\frac{1}{2}}w(t+h)) dt = \frac{1}{2h} \int_T^{T+h} (A^{\frac{1}{2}}(w(t-h) - w(t)), A^{\frac{1}{2}}w(T)) dt +$$

$$+ \frac{1}{2h} \int_T^{T+h} (A^{\frac{1}{2}}w(T), A^{\frac{1}{2}}w(T)) dt. \quad (49)$$

Тоді

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^T (A^{\frac{1}{2}}w, A^{\frac{1}{2}}D_h w) dt = \frac{1}{2} \|w(T)\|_A^2 - \frac{1}{2} \|w(0)\|_A^2.$$

Для доданку з нелінійністю:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L f(w) D_h w dx dt &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^L f(w) w' dx dt = \int_0^T \int_0^L \frac{d}{dt} F(w) dx dt = \\ &= \int_0^L F(w(t)) dx - \int_0^L F(w(0)) dx. \end{aligned} \quad (50)$$

Переходячи до границі у доданку $\int_0^T (Gw_t, D_h w) dt$, отримаємо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^T (Gw_t, D_h w) dt = \gamma \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt.$$

Приходимо до енергетичної рівності:

$$E(T) + \gamma \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt = E(0),$$

де

$$E(t) := \frac{1}{2} \|w'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|w(t)\|_A^2 + \int_0^L F(w(t)) dx.$$

З енергетичної рівності випливає оцінка

$$E(T) \leq E(0),$$

тому

$$\|w'(t)\|^2 + \|w(t)\|_A^2 \leq E(0) + C =: K.$$

Тоді з енергетичної рівності та слабкої неперервності w, w_t випливає (див.

[6], Теорема 8.2, с.307), що

$$w \in C(0, T; H_A),$$

$$w_t \in C(0, T; H).$$

3. Єдиність.

Визначимо для $s \in [0, T]$ функцію

$$h_s(t) = \begin{cases} -\int_t^s w(\tau) d\tau, & t < s \\ 0, & s \leq t \leq T, \end{cases}$$

де $w := w_1 - w_2$ - різниця слабких розв'язків задачі та покажемо, що вона належить до простору тестових функцій:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|h_s(t)\|_A^2 dt &= \int_0^T \left\| \int_t^s w(\tau) d\tau \right\|_A^2 dt \leq \int_0^T \int_0^L \left(\int_0^T w_{xx}(\tau) d\tau \right)^2 dx dt \leq \\ &\leq CT \int_0^L \left(\int_0^T w_{xx}(\tau) d\tau \right)^2 dx \leq CT^2 \int_0^L \int_0^T |w_{xx}(\tau)|^2 d\tau dx \leq CT^2 \|w\|_A^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Приналежність $(h_s)'_t \in L_2(0, T; H)$ очевидна. Тоді, за визначенням слабого розв'язку маємо

$$\begin{aligned} - \int_0^T (w'(t) + Gw(t), h'_s(t)) dt + \int_0^T [w, h_s(t)]_A dt + \\ + \int_0^T (f(w_1) - f(w_2), h_s(t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Зважаючи на (27) та структуру функції $h_s(t)$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|^2 + \frac{1}{2}\|h_s(0)\|_A^2 + \gamma \int_0^s \|u(t)\|^2 dt = \int_0^s (f(w_1) - f(w_2), h_s(t)) dt. \quad (53)$$

Також за визначенням $h_s(t)$ (та за аддитивністю інтеграла),

$$h_s(t) = h_s(0) - h_t(0), t < s, \quad (54)$$

тобто

$$\begin{aligned} \left| \int_0^s (f(w_1) - f(w_2), h_s(t)) dt \right| &\leq \int_0^s |(f(w_1) - f(w_2), h_s(0))| dt + \\ &+ \int_0^s |(f(w_1) - f(w_2), h_t(0))| dt \leq \|h_s(0)\| \int_0^s \|f(w_1) - f(w_2)\| dt + \\ &+ \int_0^s \|f(w_1) - f(w_2)\| \|h_t(0)\| dt \leq \frac{1}{4} \|h_s(0)\|^2 + \\ &+ \left(\int_0^s \|f(w_1) - f(w_2)\| dt \right)^2 + \int_0^s \|f(w_1) - f(w_2)\| \|h_t(0)\| dt. \quad (55) \end{aligned}$$

З локальної ліпшицевості функції f та вкладення $H^1(0, L) \subset C(0, L)$ випливає, що

$$\|f(w_1) - f(w_2)\| \leq C(\|w_1\|_{H^1}, \|w_2\|_{H^1}) \|w\|.$$

Отже, отримуємо

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^s (f(w_1) - f(w_2), h_s(t)) dt \right| &\leq \frac{1}{4} \|h_s(0)\|^2 + \left(\int_0^s C(\|w_1\|_{H^1}, \|w_2\|_{H^1}) \|w\| dt \right)^2 + \\
&+ \frac{1}{4} \int_0^s \|h_t(0)\|^2 dt + \int_0^s C(\|w_1\|_{H^1}, \|w_2\|_{H^1}) \|w\|^2 dt \leq \frac{1}{4} \|h_s(0)\|^2 + \\
&+ \frac{1}{4} \int_0^s \|h_t(0)\|^2 dt + C(\|w_1\|_{L_\infty(0,T;H^1)}, \|w_2\|_{L_\infty(0,T;H^1)}) \int_0^s \|w\|^2 dt + \\
&+ C(\|w_1\|_{L_\infty(0,T;H^1)}, \|w_2\|_{L_\infty(0,T;H^1)}) \int_0^s dt \cdot \int_0^s \|w\|^2 dt \leq \\
&\leq \frac{1}{4} \|h_s(0)\|^2 + \frac{1}{4} \int_0^s \|h_t(0)\|^2 dt + C(s+1) \int_0^s \|w\|^2 dt. \quad (56)
\end{aligned}$$

Таким чином, підставляючи в (53), маємо

$$\|w(s)\|^2 + \|h_s(0)\|_A^2 \leq C \int_0^s \|w\|^2 dt. \quad (57)$$

За лемою Гронула, $w(t) \equiv 0$.

□

3 Задача з сильним демпінгом

3.1 Постановка задачі

Розглядається система рівнянь динаміки пружної балки

$$\alpha_1 u_{tt} + \beta_1 u_{xxxx} - \gamma u_{txx} + f_1(u) = 0, \quad x \in (0, L_0), \quad t > 0 \quad (58)$$

$$\alpha_2 v_{tt} + \beta_2 v_{xxxx} + f_2(v) = 0, \quad x \in (L_0, L), \quad t > 0 \quad (59)$$

з граничними умовами на кінцях

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad (60)$$

$$v(L, t) = v_{xx}(L, t) = 0, \quad (61)$$

граничними умовами контакту

$$u(L_0, t) = v(L_0, t), \quad (62)$$

$$u_x(L_0, t) = v_x(L_0, t), \quad (63)$$

$$\beta_1 u_{xx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xx}(L_0, t), \quad (64)$$

$$\beta_1 u_{xxx}(L_0, t) - \gamma u_{tx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xxx}(L_0, t), \quad (65)$$

та початковими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (66)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (67)$$

де $\alpha_i, \beta_i, \gamma, a_i, b_i$ – додатні константи.

3.2 Існування та єдиність розв'язків

Позначимо $w, \tilde{f}(w)$ як вище, тоді рівняння (58), (59) можна переписати у вигляді

$$C \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial w}{\partial t} + Bw + \tilde{f}(w) = 0, \quad (68)$$

де тепер

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot id & 0 \\ 0 & \alpha_2 \cdot id \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \beta_1 \partial_{xxxx} & 0 \\ 0 & \beta_2 \partial_{xxxx} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -\gamma \cdot \partial_{xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто отримуємо гіперболічне рівняння:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + G \frac{\partial w}{\partial t} + Aw + f(w) = 0, \quad (69)$$

де

$$A := C^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \partial_{xxxx} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2}{\alpha_2} \partial_{xxxx} \end{pmatrix}; G := C^{-1}D = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\alpha_1} \cdot \partial_{xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(w) := \left(\frac{1}{\alpha_1} f_1(u), \frac{1}{\alpha_2} f_2(v) \right)^T.$$

Рівняння (16) розглядається з початковими умовами

$$w(x, 0) = (u_0(x), v_0(x)) =: w_0(x), \quad (70)$$

$$w_t(x, 0) = (u_1(x), v_1(x)) =: w_1(x). \quad (71)$$

Означення 4. Функцию $w \in L_\infty(0, T; H_A)$ таку, що $w_t \in L_\infty(0, T; H)$, $u_t \in L_2(0, T; H^1(0, L_0))$ та $u_t(0) = 0$ називають **слабким розв'язком** рівняння (69) з початковими умовами (70)–(74), якщо для будь-якої функції $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in L_2(0, T; H_A)$, такої, що $\varphi_t \in L_2(0, T; H)$, та $\varphi_{1t}(0) = 0$ виконується рівність

$$-\int_0^T (w_t, \varphi_t) dt + \gamma \int_0^T (u_{tx}, \varphi_{1x}) dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}} w, A^{\frac{1}{2}} \varphi) dt + \int_0^T (f(w), \varphi) dt =$$

$$= (w_1, \varphi(0)) \quad (72)$$

та $w(x, 0) = w_0(x)$.

Теорема 2. Нехай $(u_0, v_0) \in H_A, (u_1, v_1) \in H$ та функції $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є локально ліпшицевими та такими, що існує константа $C > 0$ така, що

$$F_1(s) \geq -C, F_2(s) \geq -C, s \in \mathbb{R}, F_i(s) = \int_0^s f_i(\xi) d\xi, i = 1, 2. \quad (73)$$

Тоді на будь-якому відрізку $[0, T]$ існує єдиний слабкий розв'язок задачі (69)–(74) $(u, v) \in C(0, T; H_A)$ такий, що $(u_t, v_t) \in C(0, T; H)$.

Доведення. 1. Існування.

Застосуємо метод Гальоркіна. Впродовж доведення в цілях спрощення позначень під f' будемо мати на увазі похідну функції f за часом.

Нехай $\{e_k\}$ – ортонормований базис з власних векторів оператора A (з відповідними власними значеннями λ_k), та $w_m(t) := \sum_{k=1}^m d_k^m(t) e_k$ – наближені розв'язки. Підставляючи їх у (69), запишемо систему Гальоркіна:

$$\begin{aligned} (w_m''(t), e_k) - \gamma(u_{mxx}'(t), e_k) + (A^{\frac{1}{2}}w_m, A^{\frac{1}{2}}e_k) + \\ + (f(w_m), e_k) = 0, k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (74)$$

з початковими умовами

$$(w_m(0), e_k) = d_k^m(0) = (w_0, e_k), k = 1, \dots, m, \quad (75)$$

$$(w_m'(0), e_k) = d_k^{m'}(0) = (w_1, e_k), k = 1, \dots, m. \quad (76)$$

Помножимо тепер (74) на $d_k^{m'}(t)$, підсумуємо від 1 до m та проінтегруємо

за s від 0 до t ; позначивши $[w_m, e_k]_A := (A^{\frac{1}{2}}w_m, A^{\frac{1}{2}}e_k)$, маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^t (w_m''(s), w_m'(s)) ds + \gamma \int_0^t (u_{mx}'(s), u_{mx}'(s)) ds + \\ + \int_0^t [w_m(s), w_m'(s)]_A ds + \int_0^t (f(w_m), w_m'(s)) ds = 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Беручи до уваги (27), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|w_m'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|w_m(t)\|_A^2 + \gamma \int_0^t \|u_{mx}'(s)\|^2 ds + \int_0^L F(w_m(t)) dx = \\ = \int_0^L F(w_m(0)) dx + \frac{1}{2} \|w_m'(0)\|^2 + \frac{1}{2} \|w_m(0)\|_A^2. \end{aligned}$$

Користуючись умовою (73), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|w_m'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|w_m(t)\|_A^2 + \gamma \int_0^t \|u_{mx}'(s)\|^2 ds \leq \\ \leq C + \frac{1}{2} \|w_m'(0)\|^2 + \frac{1}{2} \|w_m(0)\|_A^2 + \int_0^L F(w_m(0)) dx. \end{aligned}$$

Тоді, аналогічно (30), існує $C > 0$ така, що

$$\operatorname{esssup}_{t \in [0, T]} \left(\|w_m'(t)\|^2 + \|w_m(t)\|_A^2 + \int_0^t \|u_{mx}'(s)\|^2 ds \right) \leq C (1 + \|w_1\|^2 + \|w_0\|_A^2).$$

Таким чином, за лемою Больцано-Вейерштраса, існує $\{w_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$ – збіжна

підпоследовність $\{w_m\}_{m=1}^\infty$, та w, ω такі, що:

$$w_{m_l} \xrightarrow[L_\infty(0,T;H_A)]{w^*} w, \quad (78)$$

$$w'_{m_l} \xrightarrow[L_\infty(0,T;H)]{w^*} \omega, \quad (79)$$

$$u'_{m_l} \xrightarrow[L_2(0,T;H^1[0,L_0])]{w} \eta. \quad (80)$$

При цьому для будь-якої $\varphi \in C_0^\infty(0, T; H)$:

$$\langle w'_{m_l}, \varphi \rangle \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \langle \omega, \varphi \rangle,$$

$$\langle w'_{m_l}, \varphi \rangle = -\langle w_{m_l}, \varphi' \rangle \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} -\langle w, \varphi' \rangle = \langle w, \varphi' \rangle.$$

Тобто $w' = \omega$, аналогічно $\eta = u'$.

Покажемо також, що подібна збіжність має місце і для других похідних.

Зазначимо, що норма $\|w_{m,x}\|^2$ еквівалентна $\|A^{\frac{1}{4}}w_m\|^2$, де

$$D(A^{\frac{1}{4}}) = \{(u, v) \in H^1(0, L_0) \times H^1(L_0, L) | u(0) = 0, v(L) = 0, \\ u(L_0) = v(L_0), u_x(L_0) = v_x(L_0)\}.$$

Тому має місце оцінка

$$\|(A^{-1}w_m)''_x\| \leq C\|A^{\frac{1}{4}}(A^{-1}w_m)''\| \leq C\|(A^{-\frac{1}{2}}w_m)''\| \leq C\|w''_m\|_{H_A^*}.$$

Скористаємося нею у наступний спосіб: помножимо (74) на $\lambda_k^{-1}d_k^{m''}$, підсумуємо отримане за k від 1 до m та проінтегруємо за t від 0 до T . Маємо:

$$\|w''_m\|_{H_A^*}^2 \leq |(\tilde{G}w'_{m,x}, (A^{-1}w_m)''_x)| + |(w_m, (A^{-1}w_m)'')| + |(f(w_m), (A^{-1}w_m)'')| \leq \\ \leq C(\gamma\|u'_{m,x}\| \|w''_m\|_{H_A^*} + \|w_m\|_{H_A} \|w''_m\|_{H_A^*} + \|f(w_m)\| \|w''_m\|_{H_A^*}),$$

де

$$\tilde{G} := \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$w_m'' \xrightarrow[L_2(0,T;H_{A^*})]{w} w''. \quad (81)$$

Крім того, аналогічно до попереднього випадку (38) маємо, що для будь-яких $\varphi_1 \in L_2(0, T; H^2(0, L_0))$, $\varphi_2 \in L_2(0, T; H^2(L_0, L))$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^{L_0} (f_1(u_{m_l}) - f_1(u)) \varphi_1 dx dt \right| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, \\ & \left| \int_0^T \int_0^{L_0} (f_2(v_{m_l}) - f_2(v)) \varphi_2 dx dt \right| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Для того, щоб довести, що w дійсно є слабким розв'язком (69)-(74), помножимо (74) на φ_k , де $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_k(t) e_k$, підсумуємо отримане від 1 до $j < m$ та проінтегруємо за t від 0 до T :

$$\int_0^T (w_m'', \varphi^j) dt + \gamma \int_0^T (w_{mx}', \varphi_{1x}^j) dt + \int_0^T [w_m, \varphi^j]_A dt + \int_0^T (P_m f(w), \varphi^j) dt = 0,$$

де $\varphi^j = \sum_{i=1}^j \varphi_k(t) e_k$, P_m – ортопроектор на $Lin \{e_i\}_{i=1}^m$. Інтегруючи частинами перший доданок та переходячі до границі за m , маємо

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (w', \varphi^{j'}) dt + \gamma \int_0^T (w'_x, \varphi_{1x}^j) dt + \int_0^T [w, \varphi^j]_A dt + \int_0^T (f(w), \varphi^j) dt = \\ & = (w_1, \varphi^j(0)). \end{aligned}$$

Переходячи до границі тепер за j , отримуємо (72).

Користуючись слабкою збіжністю (78)–(79), також отримуємо

$$w_{m_l}(0) \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{s} w(0),$$

а отже $w(0) = w_0$.

2. Енергетична оцінка.

Скористаємося означеннями з (40)–(41) без зміни позначень, та аналогічно продовжимо (72) на клас функцій $\varphi \in L_2(0, T; H_A)$, $\varphi_t \in L_2(0, T; H)$ без граничної умови $\varphi(T) = 0$. Будемо мати

$$\begin{aligned} - \int_0^T (w', \varphi') dt + \gamma \int_0^T (u'_x, \varphi_x) dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}} w, A^{\frac{1}{2}} \varphi) dt + \int_0^T (f(w), \varphi) dt = \\ = (w_1, \varphi(0)) - (w_t(T), \varphi(T)). \end{aligned} \quad (82)$$

Підставляючи в якості φ функцію $D_h w$, отримаємо

$$\begin{aligned} - \int_0^T (w_t, D_h w_t) dt + \gamma \int_0^T (u'_x, D_h w_x) dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}} w, A^{\frac{1}{2}} D_h w) dt + \\ + \int_0^T (f(w), D_h w) dt = (w_t(0), D_h w(0)) - (w_t(T), D_h w(T)). \end{aligned} \quad (83)$$

Тоді перетворення (44)–(50) можна дослівно повторити, а у доданку $\gamma \int_0^T (u'_x, D_h w_x) dt$ перейти до границі наступним чином:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma \int_0^T (u'_x, D_h w_x) dt = \gamma \int_0^T \|u'_x(t)\|^2 dt.$$

Приходимо до енергетичної рівності:

$$E(T) + \gamma \int_0^T \|u'_x(t)\|^2 dt = E(0),$$

де

$$E(t) := \frac{1}{2} \|w'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|w(t)\|_A^2 + \int_0^L F(w(t)) dx.$$

З енергетичної рівності випливає оцінка

$$E(T) \leq E(0),$$

тому

$$\|w'(t)\|^2 + \|w(t)\|_A^2 \leq E(0) + C =: K.$$

Аналогічно до попереднього випадка, отримуємо неперервність

$$w \in C(0, T; H_A),$$

$$w_t \in C(0, T; H).$$

3. Єдиність.

Повторюючи міркування з відповідного розділу, наведеного вище, бачимо, що (52) перейде у

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (w'(t), h'_s(t)) dt + \gamma \int_0^T (u_x(t), h'_{sx}(t)) dt + \\ & + \int_0^T [w(t), h_s(t)]_A dt + \int_0^T (f(w_1) - f(w_2), h_s(t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Аналогічно до (53),

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|^2 + \frac{1}{2}\|h_s(0)\|_A^2 + \gamma \int_0^s \|u_x(t)\|^2 dt = \int_0^s (f(w_1) - f(w_2), h_s(t)) dt. \quad (85)$$

Застосовуючи оцінку на нелінійність (56) та лему Гронуола, отримуємо єдиність. \square

4 Задача з пружною основою

4.1 Постановка задачі

Розглядається система

$$\alpha_1 u_{tt} + \beta_1 u_{xxxx} - \gamma u_{txx} + f_1(u, u_x) \quad (86)$$

$$-\partial_x g_1(u, u_x) = 0, \quad x \in (0, L_0), \quad t > 0 \quad (87)$$

$$\alpha_2 v_{tt} + \beta_2 v_{xxxx} + f_2(v, v_x) - \partial_x g_2(v, v_x) = 0, \quad x \in (L_0, L), \quad t > 0 \quad (88)$$

з граничними умовами на кінцях

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad (89)$$

$$v(L, t) = v_{xx}(L, t) = 0, \quad (90)$$

граничними умовами контакту

$$u(L_0, t) = v(L_0, t), \quad (91)$$

$$u_x(L_0, t) = v_x(L_0, t), \quad (92)$$

$$\beta_1 u_{xx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xx}(L_0, t), \quad (93)$$

$$(\beta_1 u_{xxx} - \gamma u_{tx} - g_1(u, u_x))(L_0, t) = (\beta_2 v_{xxx}(L_0, t) - g_2(v, v_x))(L_0, t), \quad (94)$$

та початковими умовами

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (95)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad (96)$$

де $\alpha_i, \beta_i, \gamma, a_i, b_i$ – додатні константи.

4.2 Існування та єдиність розв’язків

Позначимо $w := (u, v) \in H^4(0, L_0) \times H^4(L_0, L)$ та $\tilde{f}(w, w_x) := (f_1(u, u_x), f_2(v, v_x))^T$, $\tilde{g}(w, w_x) := (g_1(u, u_x), g_2(v, v_x))^T$, тоді рівняння (86), (88) можна переписати у вигляді

$$C \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial w}{\partial t} + Bw + \tilde{f}(w, w_x) - \partial_x \tilde{g}(w, w_x) = 0, \quad (97)$$

де

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot id & 0 \\ 0 & \alpha_2 \cdot id \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \beta_1 \partial_{xxxx} & 0 \\ 0 & \beta_2 \partial_{xxxx} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -\gamma \partial_{xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тобто отримуємо рівняння:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + G \frac{\partial w}{\partial t} + Aw + f(w, w_x) - \partial_x g(w, w_x) = 0, \quad (98)$$

де

$$A := C^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\alpha_1} \partial_{xxxx} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2}{\alpha_2} \partial_{xxxx} \end{pmatrix}; G := C^{-1}D = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\alpha_1} \partial_{xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(w, w_x) := \left(\frac{1}{\alpha_1} \tilde{f}_1(u, u_x), \frac{1}{\alpha_2} \tilde{f}_2(v, v_x) \right)^T, g(w, w_x) := \left(\frac{1}{\alpha_1} \tilde{g}_1(u, u_x), \frac{1}{\alpha_2} \tilde{g}_2(v, v_x) \right)^T.$$

Рівняння (98) розглядається з початковими умовами

$$w(x, 0) = (u_0(x), v_0(x)) =: w_0(x) \quad (99)$$

$$w_t(x, 0) = (u_1(x), v_1(x)) =: w_1(x). \quad (100)$$

Означення 5. Функцію $w \in L_\infty(0, T; H_A)$ таку, що $w_t \in L_\infty(0, T; H)$ називають **слабким розв'язком** рівняння (98) з початковими умовами (99)–(102), якщо для будь-якої функції $\varphi \in L_2(0, T; H_A)$, такої, що $\varphi_t \in L_2(0, T; H)$ виконується рівність

$$\begin{aligned} - \int_0^T (w_t, \varphi_t) dt + \int_0^T (Gw_t, \varphi) dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}}w, A^{\frac{1}{2}}\varphi) dt + \\ + \int_0^T (f(w, w_x), \varphi) dt + \int_0^T (g(w, w_x), \varphi_x) dt = (w_1, \varphi_t(0)) \end{aligned} \quad (101)$$

та $w(x, 0) = w_0(x)$.

Теорема 3. Нехай $(u_0, v_0) \in H_A$, $(u_1, v_1) \in H$ та функції $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є локально ліпшицевими та такими, що існує константа $C > 0$ така, що

1. $\nabla F_i(s, r) = (f_i, g_i)(s, r), i = 1, 2.$

2. $F_i(s, r) \geq -C, s, r \in \mathbb{R}, i = 1, 2.$

Тоді на будь-якому відрізку $[0, T]$ існує слабкий розв'язок задачі (98)–(102) $(u, v) \in C(0, T; H_A)$ такий, що $(u_t, v_t) \in C(0, T; H)$. Якщо $g_2 = 0$, то розв'язок єдиний.

Доведення. 1. Існування.

Застосуємо метод Гальоркіна. Впродовж доведення в цілях спрощення позначень під f' будемо мати на увазі похідну функції f за часом.

Нехай $\{e_k\}$ – ортонормований базис з власних векторів оператора A (з відповідними власними значеннями λ_k), та $w_m(t) := \sum_{k=1}^m d_k^m(t)e_k$ – наближені розв'язки. Підставляючи їх у (98), запишемо систему Гальоркіна:

$$(w_m''(t), e_k) + (Gw_m'(t), e_k) + (A^{\frac{1}{2}}w_m, A^{\frac{1}{2}}e_k) + (f(w_m, w_{mx}), e_k) + (g(w_m, w_{mx}), e_{kx}) = 0, k = 1, ..m, \quad (102)$$

з початковими умовами

$$(w_m(0), e_k) = d_k^m(0) = (w_0, e_k), k = 1, ..m, \quad (103)$$

$$(w_m'(0), e_k) = d_k^{m'}(0) = (w_1, e_k), k = 1, ..m. \quad (104)$$

Помножимо тепер (102) на $d_k^{m'}(t)$, підсумуємо від 1 до m та проінтегруємо за s від 0 до t ; позначивши $[w_m, e_k]_A := (A^{\frac{1}{2}}w_m, A^{\frac{1}{2}}e_k)$, маємо:

$$\int_0^t (w_m''(s), w_m'(s))ds + \int_0^t (Gw_m'(s), w_m'(s))ds + \int_0^t [w_m(s), w_m'(s)]_A ds + \int_0^t (f(w_m, w_{mx}), w_m'(s))ds + \int_0^t (g(w_m, w_{mx}), w_{mx}'(s))ds = 0. \quad (105)$$

Беручи до уваги (25), (26), та позначаючи

$$F_i(y, z) = \int_0^y f_i(s, z)ds + \int_0^z g_i(y, s)ds + C, i = 1, 2,$$

$$\int_0^L F(w, w_x) dx = \int_0^{L_0} F_1(w, w_x) dx + \int_{L_0}^L F_2(w, w_x) dx$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^t (f(w_m, w_{mx}), w'_m(s)) ds + \int_0^t (g(w_m, w_{mx}), w'_{mx}(s)) ds = \\ = \int_0^L F(w_m(t), w_{mx}(t)) dx - \int_0^L F(w_m(0), w_{mx}(0)) dx. \end{aligned} \quad (106)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|w'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|w_m(t)\|_A^2 + \int_0^t (Gw'_m(s), w'_m(s)) ds + \int_0^L F(w_m(t), w_{mx}(t)) dx = \\ = \int_0^L F(w_m(0), w_{mx}(0)) dx + \frac{1}{2} \|w'_m(0)\|^2 + \frac{1}{2} \|w_m(0)\|_A^2. \end{aligned}$$

Користуючись умовою (3), отримаємо

$$\frac{1}{2} \|w'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|w_m(t)\|_A^2 \leq C + \frac{1}{2} \|w'_m(0)\|^2 + \frac{1}{2} \|w_m(0)\|_A^2 + \int_0^L F(w_m(0), w_{mx}(0)) dx.$$

Перевіримо локальну ліпшицевість функцій F_i по координатно:

$$\begin{aligned} |F_i(\omega_1, \omega_{1x}) - F_i(\omega_2, \omega_{2x})| &\leq \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f_i(s, t) ds + \int_{\omega_{1x}}^{\omega_{2x}} g_i(s, t) dt \right| \leq \\ &\leq \sup_{s \in [\omega_1, \omega_2]} |f_i(s, t)| |\omega_1 - \omega_2| + \sup_{t \in [\omega_{1x}, \omega_{2x}]} |g_i(s, t)| |\omega_{1x} - \omega_{2x}| \leq \\ &\leq C \left(\sup_{s \in [\omega_1, \omega_2]} |f_i(s, t)| + \sup_{t \in [\omega_{1x}, \omega_{2x}]} |g_i(s, t)| \right) |(\omega_1, \omega_{1x}) - (\omega_2, \omega_{2x})|, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Зважаючи на локальну ліпшицевість f_i, g_i , маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^L F(w_m(0), w_{mx}(0)) dx &\leq \int_0^L |F(w_m(0), w_{mx}(0)) - F(0, 0)| dx \leq \\ &\leq \left(\sup_{s \in [0, w_m(0)]} |f(s, t)| + \sup_{t \in [0, w_{mx}(0)]} |g(s, t)| \right) (\sup |w_m(0)| + \sup |w_{mx}(0)|) \leq \\ &\leq C(\|w_0\|_A) \end{aligned}$$

Отже, існує $C > 0$ така, що

$$\operatorname{esssup}_{t \in [0, T]} (\|w'_m(t)\|^2 + \|w_m(t)\|_A^2) \leq C(\|w_1\|, \|w_0\|_A).$$

Таким чином, за лемою Больцано-Вейерштраса, існує $\{w_{m_l}\}_{l=1}^\infty$ – збіжна підпослідовність $\{w_m\}_{m=1}^\infty$, та w, ω такі, що:

$$w_{m_l} \xrightarrow[L_\infty(0, T; H_A)]{w^*} w, \quad (107)$$

$$w'_{m_l} \xrightarrow[L_\infty(0, T; H)]{w^*} w'. \quad (108)$$

$$u'_{m_l} \xrightarrow[L_2(0, T; H^1)]{w} u', \quad (109)$$

Аналогічно до (36)

$$w''_m \xrightarrow[L_\infty(0, T; H_A^*)]{w^*} w''.$$

Крім того, аналогічно (38) маємо, що для будь-яких $\varphi_1 \in L_2(0, T; H^2(0, L_0))$, $\varphi_2 \in$

$L_2(0, T; H^2(L_0, L))$:

$$\left| \int_0^T \int_0^{L_0} (f_1(u_{m_l}, u_{m_l x}) - f_1(u, u_x)) \varphi_1 dx dt \right| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, \quad (110)$$

$$\left| \int_0^T \int_{L_0}^L (f_2(v_{m_l}, v_{m_l x}) - f_2(v, v_x)) \varphi_2 dx dt \right| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, \quad (111)$$

$$\left| \int_0^T \int_0^{L_0} (g_1(u_{m_l}, u_{m_l x}) - g_1(u, u_x)) \varphi_{1x} dx dt \right| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, \quad (112)$$

$$\left| \int_0^T \int_{L_0}^L (g_2(v_{m_l}, v_{m_l x}) - g_2(v, v_x)) \varphi_{2x} dx dt \right| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0. \quad (113)$$

Для того, щоб довести, що w дійсно є слабким розв'язком (98)-(102), помножимо (21) на φ_k , де $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_k(t) e_k$, підсумуємо отримане від 1 до ∞ та проінтегруємо за t від 0 до T :

$$\begin{aligned} & \int_0^T (w_m'', \varphi) dt + \int_0^T (Gw_m', \varphi) dt + \int_0^T [w_m, \varphi]_A dt + \\ & + \int_0^T (P_m f(w_m, w_{mx}), \varphi) dt + \int_0^T (P_m g(w_m, w_{mx}), \varphi_x) dt = 0, \end{aligned} \quad (114)$$

де P_m – ортопроектор на $\text{Lin} \{e_i\}_{i=1}^m$. Інтегруючи частинами перший доданок та переходячі до границі за m , маємо

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (w', \varphi') dt + \int_0^T (Gw', \varphi) dt + \int_0^T [w, \varphi]_A dt + \\ & + \int_0^T (f(w, w_x), \varphi) dt + \int_0^T (g(w, w_x), \varphi_x) dt = (w_1, \varphi). \end{aligned} \quad (115)$$

Користуючись слабкою збіжністю (107)–(108), також отримуємо

$$w_{m_l}(0) \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{s} w(0),$$

а отже $w(0) = w_0$.

2. Енергетична оцінка

Скористаємося означеннями з (40)–(41) без зміни позначень, та аналогічно продовжимо (101) на клас функцій $\varphi \in L_2(0, T; H_A)$, $\varphi_t \in L_2(0, T; H)$ без граничної умови $\varphi(T) = 0$. Будемо мати

$$\begin{aligned} - \int_0^T (w', \varphi') dt + \int_0^T (Gw', \varphi) dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}}w, A^{\frac{1}{2}}\varphi) dt + \int_0^T (f(w, w_x), \varphi) dt + \\ + \int_0^T (g(w, w_x), \varphi_x) dt = (w_1, \varphi(0)) - (w_t(T), \varphi(T)). \end{aligned}$$

Підставляючи в якості φ введenu функцію $D_h w$, отримаємо

$$\begin{aligned} - \int_0^T (w_t, D_h w_t) dt + \int_0^T (Gw_t, D_h w) dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}}w, A^{\frac{1}{2}}D_h w) dt + \\ + \int_0^T (f(w, w_x), D_h w) dt + \int_0^T (g(w, w_x), (D_h w)_x) dt = \\ = (w_t(0), D_h w(0)) - (w_t(T), D_h w(T)). \quad (116) \end{aligned}$$

Тоді перетворення (44)–(50) можна дослівно повторити, а у доданку з

нелінійністю перейти до границі наступним чином:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^L f(w, w_x) D_h w dx dt + \int_0^T \int_0^L g(w, w_x) (D_h w)_x dx dt + \\
& \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_0^L f(w, w_x) w' dx dt + \int_0^T \int_0^L g(w, w_x) w'_x dx dt = \\
& = \int_0^L F(w(T), w_x(T)) dx - \int_0^L F(w(0), w_x(0)) dx.
\end{aligned}$$

Приходимо до енергетичної рівності:

$$E(T) + \gamma \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt = E(0),$$

де

$$E(t) := \frac{1}{2} \|w'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|w(t)\|_A^2 + \int_0^L F(w, w_x) dx.$$

З енергетичної рівності випливає оцінка

$$E(T) \leq E(0),$$

тому

$$\|w'(t)\|^2 + \|w(t)\|_A^2 \leq E(0) + C =: K.$$

Аналогічно до попереднього випадка, отримуємо неперервність

$$w \in C(0, T; H_A),$$

$$w_t \in C(0, T; H).$$

3. Єдиність.

З (116) випливає що для різниці розв'язків $w = w_1 - w_2$ за умови $g_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T (w_t, D_h w_t) dt + \int_0^T (G w_t, D_h w) dt + \int_0^T (A^{\frac{1}{2}} w, A^{\frac{1}{2}} D_h w) dt + \\
 & \quad + \int_0^T (f(w_1, w_{1x}) - f(w_2, w_{2x}), D_h w) dt \\
 & \quad + \int_0^T (g_1(u_1, u_{1x}) - g_2(u_2, u_{2x}), (D_h u)_x) dt = 0. \quad (117)
 \end{aligned}$$

Тоді, переходячи до границі $h \rightarrow 0$, враховуючи локальну ліпшицевість нелінійностей енергетичну рівність та обмеженість знизу F_i , маємо

$$\begin{aligned}
 & \|w_t(T)\|^2 + \|w(T)\|_A^2 + \int_0^T \|u_{tx}\|^2 dt \\
 & \leq C(\|w_1(0)\|_A, \|w_2(0)\|_A) \left(\int_0^T \|w(t)\|_A^2 dt + \int_0^T \|w_t(t)\|^2 dt \right) \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_0^T \|u_{tx}\|^2 dt. \quad (118)
 \end{aligned}$$

За лемою Гронуола, $w(t) \equiv 0$.

□

5 Чисельний експеримент

Для чисельного розв'язання системи використано метод скінченних різниць з явними та неявними різницевиими схемами [1], [14]. Суть цього метода по-

лягає в наступному:

1. На просторово-часову область $[0; L] \times [0; T]$, в якій розглядається задача, наносяться скінченно-різницева сітка $\omega_{h\tau} = \{x_i = il_1, i = \overline{0, n_1}; t^j = j\tau, j = \overline{0, m}\} \cup \{\tilde{x}_k = kl_2, k = \overline{0, n_2}; t^j = j\tau, j = \overline{0, m}\}$.

Після чого обчислюються сіткові функції початкових умов задачі:

$$u_{i0} = u_0(x_i), u_{i1} = u_1(x_i)\tau + u_{i0},$$

$$v_{k0} = v_0(\tilde{x}_k), v_{k1} = v_1(\tilde{x}_k)\tau + v_{k0}.$$

Також, за (3) – (4):

$$u_{0,j} = 0, v_{n_2,j} = 0.$$

2. Похідні функцій апроксимуються відношеннями скінченних різниць та підставляються їх у вихідну систему (1) – (2) та умови контакту (5)–(8). Характер умов контакту у даній задачі передбачає використання мішаного типу різницевої схеми, а саме: на всій області визначення, окрім трьох вузлових значень $u_{n_1-1,j}, u_{n_1,j} = v_{0,j}, v_{1,j}$ за простором застосовуємо явну різницеву схему, поблизу ж точок контакту – неявну різницеву схему. За часом тип схеми єдиний для всієї області, але змінюється в залежності від порядку похідних: у випадку лінійних умов контакту (випадки (1) - (4) далі) зручніше використовувати явну схему, в той же час наявність мішаної похідної у рівнянні для $u(x, t)$ та введення нелінійностей в умови контакту вимагає використання неявної схеми – у різницевому варіанті рівняння лише одне значення може бути невідомим, отже похідна u_{txx} виражається через сіткові значення попереднього часового шару.

Таким чином, різницева схема для u має вигляд:

$$u'_x(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{l_1},$$

$$u''_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{l_1^2},$$

$$u'''_{xxx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+2,j} - 3u_{i+1,j} + 3u_{i,j} - u_{i-1,j}}{l_1^3},$$

$$u''''_{xxxx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{l_1^4},$$

$$u''_t(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau},$$

$$u''_{tt}(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2},$$

$$u''_{txx}(x_i, t_j) = \frac{(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) - (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})}{\tau l_1^2}.$$

Різницева схема для v має вигляд:

$$v'_x(x_i, t_j) = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{l_2},$$

$$v''_{xx}(x_i, t_j) = \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{l_2^2},$$

$$v'''_{xxx}(x_i, t_j) = \frac{v_{i+2,j} - 3v_{i+1,j} + 3v_{i,j} - v_{i-1,j}}{l_2^3},$$

$$v''''_{xxxx}(x_i, t_j) = \frac{v_{i+2,j} - 4v_{i+1,j} + 6v_{i,j} - 4v_{i-1,j} + v_{i-2,j}}{l_2^4},$$

$$v''_{tt}(x_i, t_j) = \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\tau^2}.$$

Після підстановки бачимо, що (1)–(2) – це лінійні співвідношення, у яких задіяно 7 вузлових значень сіткової функції. Таким чином, за значеннями $u_{i+2,j}, u_{i+1,j}, u_{i,j}, u_{i-1,j}, u_{i-2,j}, u_{i,j-1}$ знаходимо $u_{i,j+1}$ (аналогічно для функції $v_{k,j}$).

Також за (3) – (4): $u_{1,j} = \frac{1}{2}u_{2,j}, v_{n_2-1,j} = \frac{1}{2}v_{n_2-2,j}$.

Отримані ж з (5)–(8) лінійні системи 4×4 застосовуємо для того, щоб знайти $u_{n_1-1,j}, u_{n_1,j}, v_{0,j}, v_{1,j}$.

Нижче наведено код для реалізації даного алгоритму, а також графічно-го зображення розв'язків у мові програмування *Python* для декількох варіацій системи. Конкретні графіки представлені для фіксованого набору параметрів $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \gamma = 1, \beta_2 = 4$, при $x \in [0, 10]$ та $L_0 = 4$ та наступних початкових умов:

$$u_0(x) = -\frac{5}{618}x^3 + \frac{469}{1236}, \quad (119)$$

$$u_1(x) = -\frac{5}{48}x^2 + \frac{2}{3}, \quad (120)$$

$$v_0(x) = \frac{25}{88992}x^4 - \frac{145}{22248}x^3 + \frac{25}{927}x^2 + \frac{181}{11124}x + \frac{2360}{2781}, \quad (121)$$

$$v_1(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{3} \quad (122)$$

для випадків (1) – (4), та

$$u_0(x) = -\frac{5}{618}x^3 + \frac{469}{1236}, \quad (123)$$

$$u_1(x) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad (124)$$

$$v_0(x) = \frac{25}{88992}x^4 - \frac{145}{22248}x^3 + \frac{25}{927}x^2 + \frac{181}{11124}x + \frac{2360}{2781}, \quad (125)$$

$$v_1(x) = -\frac{1}{36}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{5}{9} \quad (126)$$

для випадків (5) – (6).

1.

$$\alpha_1 u_{tt} + \beta_1 u_{xxxx} = 0, \quad x \in (0, L_0), \quad t > 0 \quad (127)$$

$$\alpha_2 v_{tt} + \beta_2 v_{xxxx} = 0, \quad x \in (L_0, L), \quad t > 0 \quad (128)$$

з умовами контакту

$$u(L_0, t) = v(L_0, t), \quad (129)$$

$$u_x(L_0, t) = v_x(L_0, t), \quad (130)$$

$$\beta_1 u_{xx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xx}(L_0, t), \quad (131)$$

$$\beta_1 u_{xxx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xxx}(L_0, t), \quad (132)$$

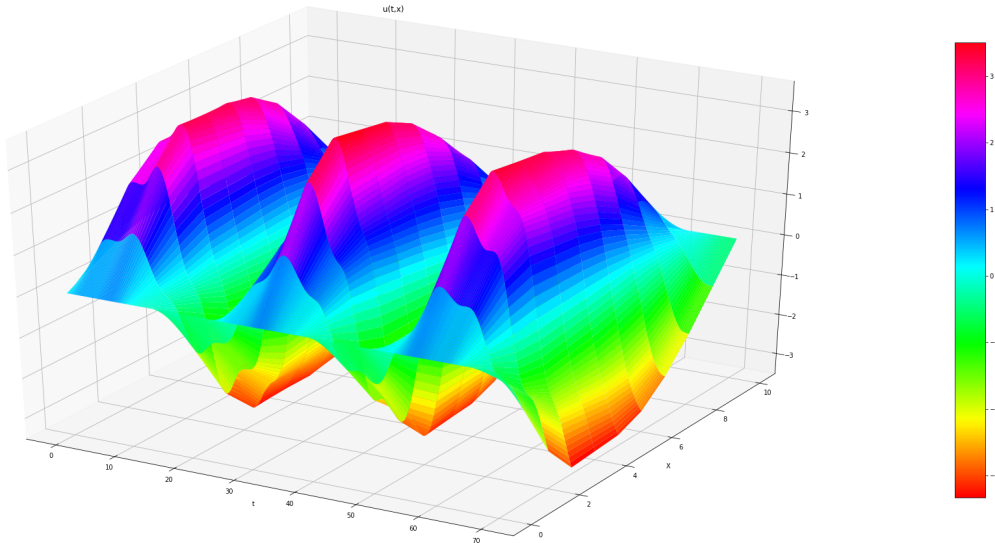


Рис. 1: Розв'язок системи (127) – (132) на інтервалі $[0, T]$, $T = 70$

2.

$$\alpha_1 u_{tt} + \beta_1 u_{xxxx} + f_1(u) = 0, \quad x \in (0, L_0), \quad t > 0 \quad (133)$$

$$\alpha_2 v_{tt} + \beta_2 v_{xxxx} + f_2(v) = 0, \quad x \in (L_0, L), \quad t > 0 \quad (134)$$

де $f_1 = 4u^3 - 2u$, $f_2 = 4v^3 - 2v$, з умовами контакту

$$u(L_0, t) = v(L_0, t), \quad (135)$$

$$u_x(L_0, t) = v_x(L_0, t), \quad (136)$$

$$\beta_1 u_{xx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xx}(L_0, t), \quad (137)$$

$$\beta_1 u_{xxx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xxx}(L_0, t), \quad (138)$$

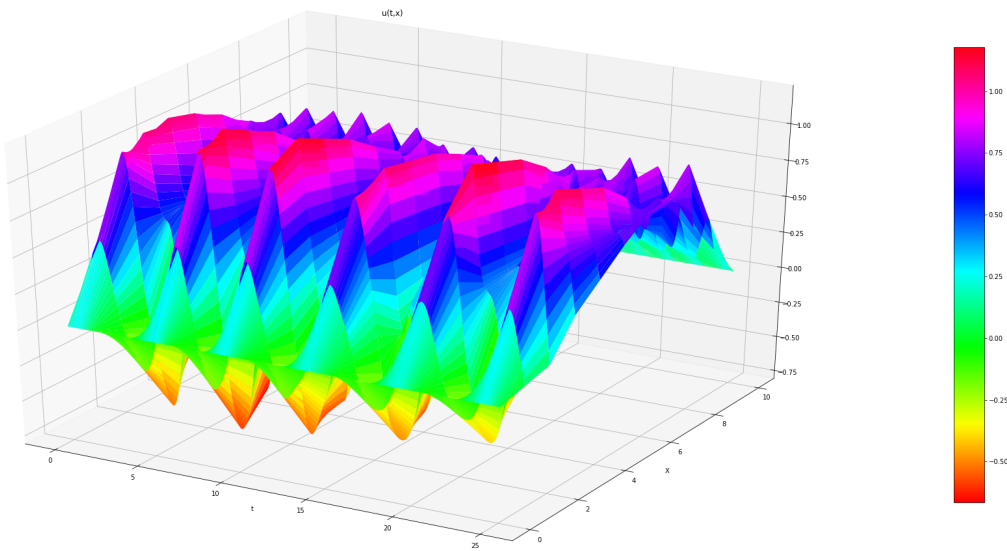


Рис. 2: Розв'язок системи (133) – (138) на інтервалі $[0, T]$, $T = 25$

3.

$$\alpha_1 u_{tt} + \beta_1 u_{xxxx} + \gamma u_t = 0, \quad x \in (0, L_0), \quad t > 0 \quad (139)$$

$$\alpha_2 v_{tt} + \beta_2 v_{xxxx} = 0, \quad x \in (L_0, L), \quad t > 0 \quad (140)$$

з умовами контакту

$$u(L_0, t) = v(L_0, t), \quad (141)$$

$$u_x(L_0, t) = v_x(L_0, t), \quad (142)$$

$$\beta_1 u_{xx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xx}(L_0, t), \quad (143)$$

$$\beta_1 u_{xxx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xxx}(L_0, t), \quad (144)$$

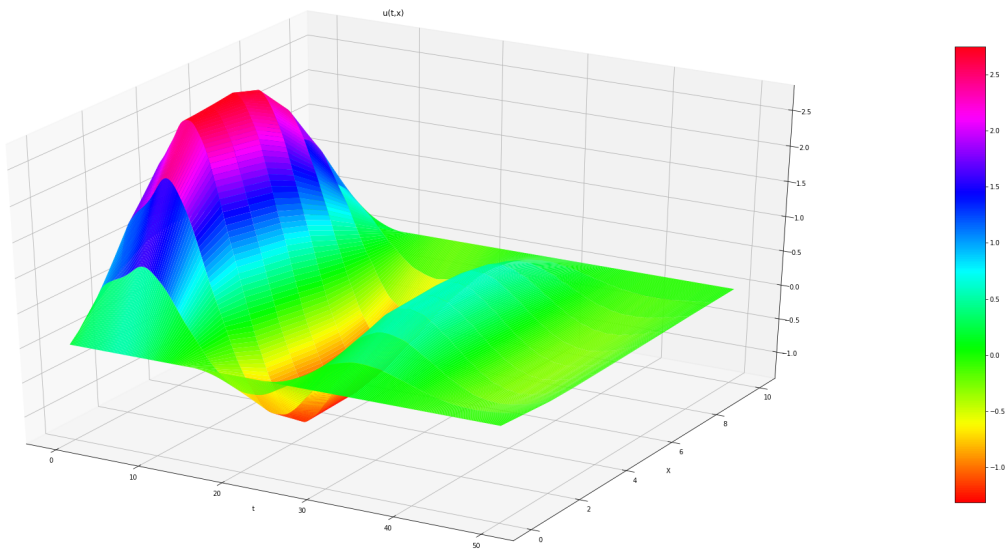


Рис. 3: Розв'язок системи (139) – (144) на інтервалі $[0, T]$, $T = 50$

4.

$$\alpha_1 u_{tt} + \beta_1 u_{xxxx} + \gamma u_t + f_1(u) = 0, \quad x \in (0, L_0), \quad t > 0 \quad (145)$$

$$\alpha_2 v_{tt} + \beta_2 v_{xxxx} + f_2(v) = 0, \quad x \in (L_0, L), \quad t > 0 \quad (146)$$

де $f_1 = 4u^3 - 2u$, $f_2 = 4v^3 - 2v$, з умовами контакту

$$u(L_0, t) = v(L_0, t), \quad (147)$$

$$u_x(L_0, t) = v_x(L_0, t), \quad (148)$$

$$\beta_1 u_{xx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xx}(L_0, t), \quad (149)$$

$$\beta_1 u_{xxx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xxx}(L_0, t), \quad (150)$$

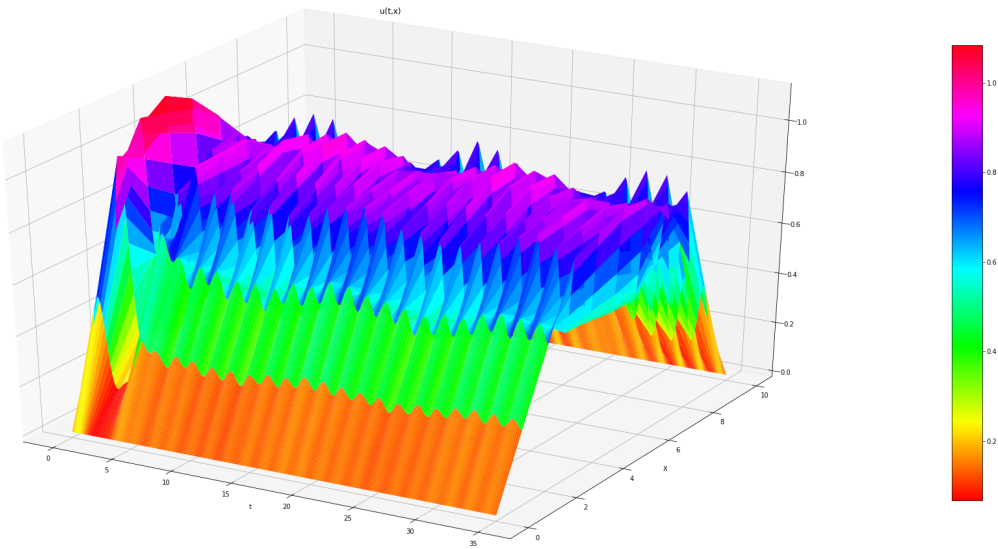


Рис. 4: Розв'язок системи (145) – (150) на інтервалі $[0, T]$, $T = 35$

5.

$$\alpha_1 u_{tt} + \beta_1 u_{xxxx} - \gamma u_{txx} = 0, \quad x \in (0, L_0), \quad t > 0 \quad (151)$$

$$\alpha_2 v_{tt} + \beta_2 v_{xxxx} = 0, \quad x \in (L_0, L), \quad t > 0 \quad (152)$$

з умовами контакту

$$u(L_0, t) = v(L_0, t), \quad (153)$$

$$u_x(L_0, t) = v_x(L_0, t), \quad (154)$$

$$\beta_1 u_{xx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xx}(L_0, t), \quad (155)$$

$$-\gamma u_{tx} + \beta_1 u_{xxx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xxx}(L_0, t), \quad (156)$$

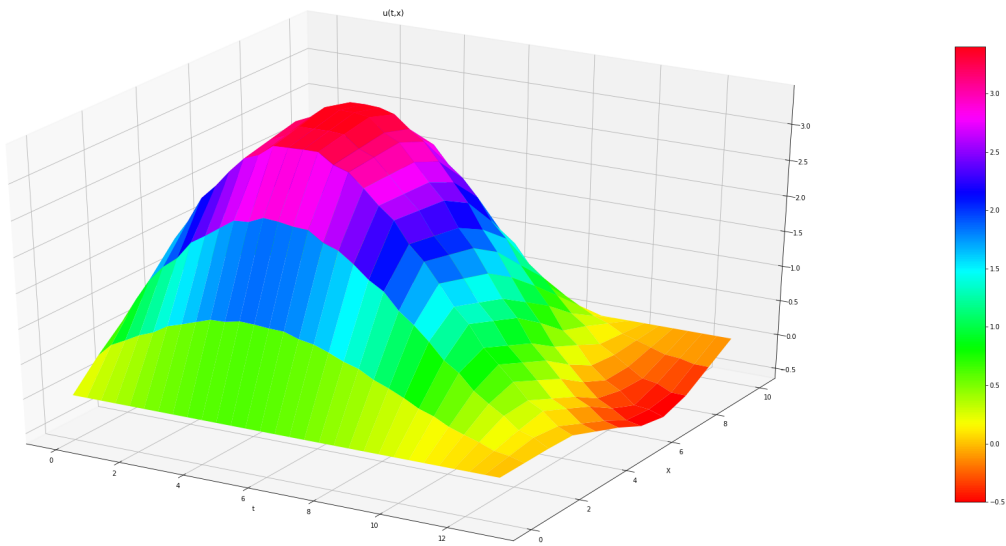


Рис. 5: Розв'язок системи (151) – (156) на інтервалі $[0, T]$, $T = 13$

6.

$$\alpha_1 u_{tt} + \beta_1 u_{xxxx} - \gamma u_{txx} + f_1(u) = 0, \quad x \in (0, L_0), \quad t > 0 \quad (157)$$

$$\alpha_2 v_{tt} + \beta_2 v_{xxxx} + f_2(v) = 0, \quad x \in (L_0, L), \quad t > 0 \quad (158)$$

де $f_1 = 4u^3 - 2u$, $f_2 = 4v^3 - 2v$, з умовами контакту

$$u(L_0, t) = v(L_0, t), \quad (159)$$

$$u_x(L_0, t) = v_x(L_0, t), \quad (160)$$

$$\beta_1 u_{xx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xx}(L_0, t), \quad (161)$$

$$-\gamma u_{tx} + \beta_1 u_{xxx}(L_0, t) = \beta_2 v_{xxx}(L_0, t), \quad (162)$$

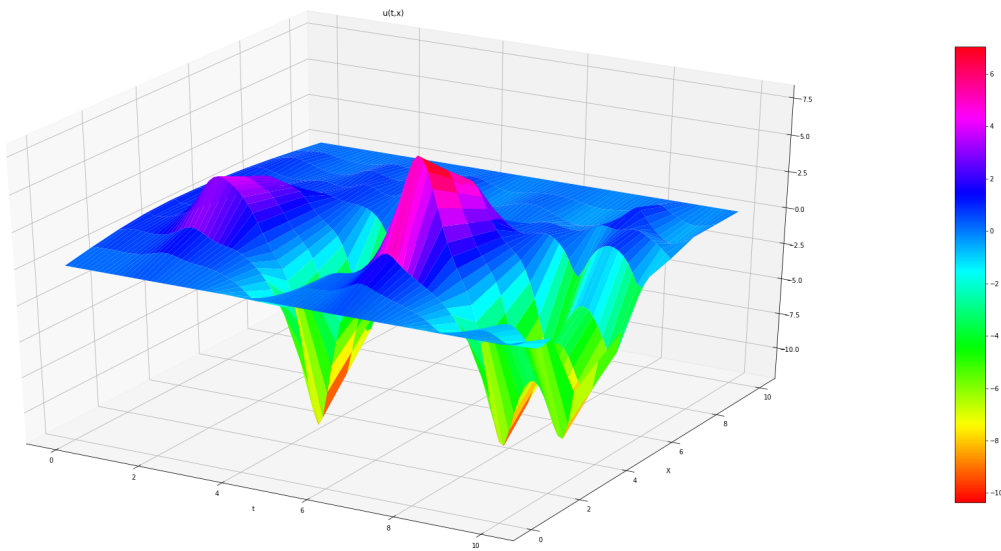


Рис. 6: Розв'язок системи (157) – (162) на інтервалі $[0, T]$, $T = 10$

6 Висновки.

Доведено коректну розв'язність задач контакту пружної балки з нелінійностями, що залежать від поперечних переміщень середньої площини частин балки у випадку сильного та слабкого демпінгу. У випадку нелінійностей, що залежать від поперечного переміщення середньої площини частин бал-

ки та кута повороту поперечного перетину у сильно демпфованій частині та лише від поперечного переміщення у недемпфованій. Відкритим залишається питання про єдиність розв'язків у випадку, коли і в недемпфованій частині нелінійності залежать від кута повороту поперечного перетину. Чисельно змодельовано розв'язки для обох випадків демпінгу та нелінійностей, що залежать від поперечного переміщення, а також лінійних задач. Для лінійних задач видно спадання розв'язків до нуля. Для задач з нелінійностями, що залежать від кута повороту поперечного перетину, чисельний процес нестійкий.

```
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib as mpl
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

a11 = 1
be1 = 1
a12 = 1
be2 = 4
ga = 1
a = -5/618
c = 469/1236
k1 = 25/88992
l = -145/22248
q = 25/927
r = 181/11124
p = 2360/2781
a1 = -1/16
b = 1/2
c1 = -1/36
d = 2/9
g = 5/9
L = 10
L0 = 4
T = 10
n1 = 5
n2 = 7
m = 90
l1 = L0/(n1-1)
l2 = (L-L0)/(n2-1)
tau = T/(m-1)

def u0(x):
```

```

    return a*x**3 + c*x

def v0(x):
    return k1*x**4 + l*x**3 + q*x**2 + r*x + p

def u1(x):
    return a1*x**2 + b*x

def v1(x):
    return c1*x**2 + d*x + g

def f1(u, ux):
    return 4*(u + ux)**3 - 2*(u + ux)

def f2(v, vx):
    return 4*(v + vx)**3 - 2*(v + vx)

u = sp.zeros([n1, m])
v = sp.zeros([n2, m])

t = sp.zeros(m)
t[0] = 0
for j in range(0,m):
    t[j] = tau*j

X1 = sp.zeros(n1)
X1[0] = 0
for i in range(0,n1):
    X1[i] = (L0+l1)*i/n1

X2 = sp.zeros(n2)
X2[0] = 0
for i in range(0,n2):
    X2[i] = L0 + (L-L0+l2)*i/n2

```

```

X = sp.hstack((X1, X2))
for j in range(0,m-1):
    u[0, j] = 0
    v[n2-1, j] = 0

for i in range(0,n1):
    u[i, 0] = u0(X1[i])
    u[i, 1] = u1(X1[i])*tau + u[i, 0]

for k in range(0,n2):
    v[k, 0] = v0(X2[k])
    v[k, 1] = v1(X2[k])*tau + v[k, 0]

h = sp.zeros([3, 3])
f = sp.zeros(3)
h[0,0] = -1/11
h[1,0] = -2/11**2
h[2,0] = -3/11**3 + ga/(tau*11)
h[0,1] = 1/11 + 1/12
h[1,1] = 1/11**2 - be2/12**2
h[2,1] = 1/11**3 + be2/12**3 - ga/(tau*11)
h[0,2] = -1/12
h[1,2] = 2*be2/12**2
h[2,2] = -3*be2/12**3
f[0] = 0
for j in range(1,m-1):
    for i in range(2,n1-2):
        u[i, j+1] = -((u[i+2, j] - 4*u[i+1, j] + 6*u[i, j] - 4*u[i-1, j] + u[i-2, j])/11**4 -
            ga*((u[i+1, j] - 2*u[i, j] + u[i-1, j]) - (u[i+1, j-1] - 2*u[i, j-1] + u[i-1,
            j-1]))/(tau*11**2) + f1(u[i, j], 0) + (- 2*u[i, j] + u[i, j-1])/tau**2)/(a11/tau**2)
        for k in range(2,n2-2):
            v[k, j+1] = -4*tau**2*(be2*(v[k+2, j] - 4*v[k+1, j] + 6*v[k, j] - 4*v[k-1, j] + v[k-2,
            j])/ (9*12**4) + f2(v[k, j], 0)) + (2*v[k, j] - v[k, j-1])
    u[1, j+1] = u[2, j+1]/2
    v[n2-2, j+1] = v[n2-3, j+1]/2

```

```

f[1] = be2*v[2,j+1]/l2**2 - u[n1-3, j+1]/l1**2
f[2] = be2*(v[3,j+1] - 3*v[2,j+1])/l2**3 + (u[n1-4, j+1] - 3*u[n1-3, j+1])/l1**3 + (u[n1-1, j]
    - u[n1-2, j])/(l1*tau)
st = np.linalg.solve(h, f)
u[n1-2, j+1] = st[0]
u[n1-1, j+1] = st[1]
v[0, j+1] = st[1]
v[1, j+1] = st[2]

fig=plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
ax.set_xlabel('t')
ax.set_ylabel('X')
ax.set_title('u(t,x)')
Xx,Yy = sp.meshgrid(t, X)
z = sp.vstack((u, v))
surf = ax.plot_surface(Xx, Yy, z, rstride=1, cstride=1, linewidth=0, cmap=mpl.cm.hsv)
fig.colorbar(surf, shrink = 0.75, aspect=15)

```

Література

- [1] A. Bergara, Finite-Difference Numerical Methods of Partial Differential Equations in Finance with Matlab.
- [2] I.D. Chueshov, Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems, ACTA Scientific Publishing House, 1999, 418 p.
- [3] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998, 662 p.
- [4] J.U. Kim, On the energy decay of a linear thermoelastic bar and plate, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 23(1) 889-899(1992).
- [5] J.E. Lagnese, G. Leugering, Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear feedback, Journal of Differential Equation, Vol. 91(1) 355-388(1991).
- [6] J. L. Lions, E. Madgenes, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Springer, New York, 1972, 372 p.
- [7] Z. Liu, S. Zheng, Exponential stability of the Kirchhoff plate with thermal or viscoelastic damping, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 55(3) 551-564(1997).
- [8] Z.Y. Liu, M. Renardy, A note on the equation of a thermoelastic plate, Applied Mathematics Letters, Vol. 8(3) 1-6(1995).

- [9] K. Liu, Z. Liu, Exponential decay of the energy of the Euler Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Void damping, SIAM Control and Optimization Vol. 36(3)1086-1098(1998).
- [10] J.E. Munoz Rivera, Energy decay rates in linear thermoelasticity, Funkcialaj Ekvacioj, Vol.35(1) 19-30(1992).
- [11] J.E. Munoz Rivera, Rioco Barreto, Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity, Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications Vol. 31(1-2) 149-162(1998).
- [12] J.E. Munoz Rivera, H. Portillo Oquendo, The transmission problem for thermoelastic beams, National Laboratory for Scientific Computation, Department of Applied Mathematic, **19** (2001), 25651-070.
- [13] J.E. Munoz Rivera, Higidio Portillo Oquendo, Transmission problem for viscoelastic beams, National Laboratory for Scientific Computation, Department of Applied Mathematic, **20** (2002), 25651-070.
- [14] L. Olsen-Kettle, Numerical solution of partial differential equations, The University of Queensland, 2011, 107 p.
- [15] R. Racke, Y. Shibata, S. Zheng, Global solvability and exponential stability in one dimensional nonlinear thermoelasticity, Quaterly of Applied Mathematics, Vol. 51(1) 751-763(1993).