Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.929 № 444 , 1999, с.44-49

Об условиях неустойчивости для дискретных систем

Г.А.Бессонов, А.В.Луценко

Харьковский государственный университет

Исследуется вопрос о неустойчивости нулевого решения нелинейной дискретной системы $x_{m+1} = f(m, x_m)$. Доказано, что помимо классических четаевских условий для непрерывных систем, выполняющихся в некоторой односвязной области, принадлежащей окрестности нуля, и на её границе, для неустойчивости нулевого решения дискретной системы достаточно ещё потребовать наличия хотя бы одной точки на границе, образ которой при отображении f принадлежал бы внутренности этой области.

В данной работе ослабляются условия, приведенные в [1], и доказываются две теоремы о неустойчивости нулевого решения автономной и неавтономной дискретных систем, что позволяет расширить класс уравнений, к которым применимы результаты типа теоремы Четаева о неустойчивости [2].

Вначале приведём пример, показывающий, что формальный перенос теоремы Четаева на дискретные системы не может быть осуществлён. Условия теоремы Четаева для автономных непрерывных систем состоят в следующем [2], [3].

Пусть $S(r_0)$ – открытый шар пространства $\mathbb{R}^n$ радиуса r_0 с центром в нуле, и пусть существует скалярная функция $V(x) \in \mathbb{C}^1(S(r_0))$ такая, что

1) $V(x)$ и $\dot{V}(x) = (f(x), grad\ f(x))$ положительны в открытом связном множестве $D_1 \in S(r_0)$;

2) $V(x) = 0$ на $\overline{D_1} \bigcap \overline{D_2}$, где D_2 обозначает дополнение множества D_1 в $S(r_0)$, $\overline{D_i}$ –замыкание множества D_i;

3) $0 \in \overline{D_1} \bigcap \overline{D_2}$.

Тогда нулевое решение системы $\dot{x} = f(x)$, где f удовлетворяет условию Липшица в $S(r_0)$, неустойчиво.

Рассмотрим дискретную систему второго порядка

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Так как собственные значения $\lambda = \pm i$ матрицы A являются простыми корнями её минимального полинома, то нулевое решение этой системы устойчиво. С другой стороны в качестве функции Ляпунова возьмём функцию

$V(x) = (x_2^3 - x_1^3)x_1^4$, в качестве $S(r_0)$ –множество $S(r_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \| x \| < r_0\}$, в качестве D_1 – множество

$$D_1 = \{x \in S(r_0) \ : \ (x_1 > 0) \wedge (x_2 > 0) \wedge ((x_2 - x_1) > 0)\}.$$

Тогда

$$\overline{D_1} \bigcap \overline{D_2} = \{x \in S(r_0) : (x_1 = 0) \wedge (x_2 \geq 0)\} \bigcup$$

$$\bigcup \{x \in S(r_0) : (x_2 = x_1) \wedge (x_1 \geq 0) \wedge (x_2 \geq 0)\}.$$

Вычислим первую разность функции $V(x)$ в силу данной системы:

$$\Delta V(x) = x_1^7 + x_2^7 + x_1^3 x_2^3 (x_2 - x_1).$$

Для любого $x \in D_1$ имеем $V(x) > 0$, $\Delta V(x) > 0$. В точках $x \in \overline{D_1} \bigcap \overline{D_2}$ имеем $V(x) = 0$. Наконец, $0 \in \overline{D_1} \bigcap \overline{D_2}$.

Выполнены условия теоремы Четаева для непрерывных систем, а нулевое решение данной дискретной системы устойчиво.

Рассмотрим дискретную систему

$$x_{m+1} = f(x_m), \qquad f(0) = 0, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $x_m \in \mathbb{R}^n$, функция $f(x)$ определена и непрерывна на множестве $D(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \| x \| \leq r\}$, удовлетворяет условию $\| f(x) \| \leq r$, $\mathbb{N}$ – множество целых неотрицательных чисел.

Теорема. *Пусть для системы (1) существует непрерывная в некотором шаре $D(r_1)$, $r_1 \leq r$, функция $V(x)$, удовлетворяющая в открытом шаре $S(r_0) = \{x : \| x \| < r_0\} \subset D(r_1)$ условиям*

1) существует открытое связное множество $\Omega_1 \subset S(r_0)$ такое, что для любого $x \in \Omega_1$ справедливы неравенства:

$$V(x) > 0, \qquad \Delta V(x) > 0,$$

где $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$;

2) $V(x) = 0$ для любого $x \in \overline{\Omega_1} \bigcap \overline{\Omega}_2$, где Ω_2– дополнение множества Ω_1 в шаре $S(r_0)$, $\overline{\Omega_i}$ – замыкание множества Ω_i;

3) $0 \in \overline{\Omega_1} \bigcap \overline{\Omega}_2$;

4)существует точка $z \in \overline{\Omega_1} \bigcap \overline{\Omega}_2$ такая, что $f(z) \in \Omega_1$.

Тогда нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что нулевое решение системы (1) устойчиво. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0, \varepsilon < r_0$, и для любого $m_0 \geq 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для каждого $m \geq m_0$ справедлива импликация

$$\| x_{m_0} \| < \delta \ \Rightarrow \| x_m \| < \varepsilon.$$

Другими словами, точки x_m принадлежат шару $S(r_0) \subset D(r_1)$ при $m \geq m_0$ и, следовательно, функция $V(x_m)$ ограничена:

$$\| V(x_m) \| \leq L, \qquad m \geq m_0.$$

Так как $0 \in \overline{\Omega_1}$, то найдётся точка $x_{m_0} \in S(\delta) \bigcap \Omega_1$ такая, что $V(x_{m_0}) > 0$.

Рассмотрим решение системы (1) с начальным вектором x_{m_0} и покажем, что при всех $m \geq m_0$ точка x_m будет находиться в множестве Ω_1, или более точно

$$(x_m \in \Omega_1) \wedge (\| x_{m+1} \| < r_0) \Rightarrow x_{m+1} \in \Omega_1.$$

Допустим противное: существует m такое, что $x_m \in \Omega_1$, $\| x_{m+1} \| < r_0$, однако $x_{m+1} \in \Omega_2$. Так как $z \in \overline{\Omega_1}$, то найдётся последовательность $x_k \in \Omega_1$, такая, что $z_k \to z$, откуда в силу непрерывности f получаем $f(z_k) \to f(z)$. Поскольку Ω_1 –открыто, найдётся k_0 такое, что для всех точек z_k при $k \geq k_0$ будет $f(z_k) \in \Omega_1$. Пусть $z_{k_0+\nu}$ одна из этих точек, т.е. $f(z_{k_0+\nu}) \in \Omega_1$. Так как Ω_1 –связно, найдётся непрерывная кривая $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, принадлежащая Ω_1, такая, что $\varphi(t_0) = x_m$, $\varphi(t_1) = z_{k_0+\nu}$. Рассмотрим функцию $f(\varphi(t))$, $t \in [t_0, t_1]$. Очевидно, $f(\varphi(t_0)) = x_{m+1} \in \Omega_2$, $f(\varphi(t_1)) = f(z_{k_0+\nu}) \in \Omega_1$. Покажем, что кривая $x = f(\varphi(t))$ пересекает множество $\overline{\Omega_1} \bigcap \overline{\Omega_2}$, т.е. существует точка $\Theta \in [t_0, t_1]$ такая, что $f(\varphi(\Theta)) \in \overline{\Omega_1} \bigcap \overline{\Omega_2}$. Действительно, так как $f(\varphi(t_1)) \in \Omega_1$, то

$$V(f(\varphi(t_1))) > 0, \qquad \Delta V(f(\varphi(t_1))) > 0. \tag{2}$$

В силу непрерывности функций V, f, φ неравенства (2) будут сохраняться вблизи точки t_1, т.е. найдётся такое $\tau > 0$, что неравенства (2) будут выполняться для любого $t \in [t_1 - \tau, t_1]$. Пусть

$$\Theta = \inf_{t \in [t_0, t_1]} \{t : f(\varphi(t)) \in \Omega_1\}. \tag{3}$$

Из (2) следует, что на отрезке $[t_0, t_1]$ найдётся последовательность $t_k \leq \Theta$ такая, что $f(\varphi(t_k)) \in \Omega_2$ и $t_k \to \Theta$. Поскольку $f(\varphi(t_k)) \to f(\varphi(\Theta))$, то $f(\varphi(\Theta)) \in \overline{\Omega_2}$. С другой стороны, найдётся последовательность $t_{k'} > \Theta$ такая, что $f(\varphi(t_{k'})) \in \Omega_1$ и $t_{k'} \to \Theta$; следовательно, $f(\varphi(\Theta)) \in \overline{\Omega_1}$.

Итак, $f(\varphi(\Theta)) \in \overline{\Omega_1} \bigcap \overline{\Omega_2}$, откуда $V(f(\varphi(\Theta))) = 0$. Так как $V(\varphi(\Theta)) > 0$, то

$$\Delta V(\varphi(\Theta)) = V(f(\varphi(\Theta))) - V(\varphi(\Theta)) < 0,$$

что противоречит условию $\Delta V(x) > 0$ при $x \in \Omega_1$. Таким образом, решение, выходящее из точки $x_{m_0} \in \Omega_1$, остаётся в Ω_1 при $m \geq m_0$.

Покажем, что на этом решении функция $V(x)$ неограниченно растёт, т.е. $V(x_m) \to +\infty$, $m \to \infty$. Введём множество

$$\omega = \{x : (x \in \Omega_1) \wedge (V(x) \geq V(x_{m_0}))\} \subset \Omega_1$$

и покажем, что ω является компактом. Ограниченность множества ω очевидна. Докажем его замкнутость. Рассмотрим произвольную последовательность $x_\nu \in \omega$ такую, что $x_\nu \to x_0, \nu \to \infty$. Так как $V(x_\nu) \geq V(x_{m_0})$, то переходя к пределу при $\nu \to \infty$ в этом неравенстве и используя непрерывность V, получаем

$$V(x_0) \geq V(x_{m_0}). \tag{4}$$

Докажем теперь, что $x_0 \in \Omega_1$. Если это не так, то $x_0 \in \Omega_2 \subset \overline{\Omega_2}$. С другой стороны, так как $x_\nu \to x_0$, то $x_0 \in \overline{\Omega_1}$. Следовательно, $x_0 \in \overline{\Omega_1} \bigcap \overline{\Omega_2}$, откуда $V(x_0) = 0$, что противоречит (4). Таким образом, множество ω – компакт. Обозначим $\mu = \min_{x\in\omega} \Delta V(x)$. Так как функция $\Delta V(x)$ непрерывна и $\Delta V(x) > 0$ при $x \in \omega$, то $\mu > 0$. Решение x_m, выходящее из точки x_{m_0}, остаётся в множестве $\omega \subset \Omega_1$ в силу неравенства $\Delta V(x) > 0$ и вытекающего из него соотношения $V(x_m) \geq V(x_{m_0})$. Поэтому $\Delta V(x_m) \geq \mu$. И теперь легко получаем

$$V(x_m) = V(x_{m_0}) + \sum_{i=0}^{m-m_0-1} \Delta V(x_{m_0+i}) \geq V(x_{m_0}) + \mu(m - m_0),$$

откуда $V(x_m) \to +\infty$ при $m \to \infty$, что противоречит ограниченности $V(x_m)$.

Пример. Рассмотрим дискретную систему второго порядка

$$x_{m+1} = f(x_m), \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}} \\ x_1^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

на множестве $D(r) = \mathbb{R}^2$. В качестве функции Ляпунова возьмём функцию $V(x) = x_1 x_2$, тогда $\Delta V(x) = (x_1 x_2)^{\frac{1}{3}} + x_1^{\frac{2}{3}} - x_1 x_2$. В качестве $S(r_0)$ возьмём множество $S(r_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \| x \| < \frac{1}{2}\right\}$, в качестве Ω_1 – множество $\Omega_1 = \{x \in S(r_0) : (x_1 > 0) \wedge (x_2 > 0)\}$. Тогда

$$\overline{\Omega_1} \bigcap \overline{\Omega_2} = \{x \in S(r_0) : (x_1 \geq 0) \wedge (x_2 = 0)\} \bigcup$$

$$\bigcup \{x \in S(r_0) : (x_1 = 0) \wedge (x_2 \geq 0)\}.$$

Для любого $x \in \Omega_1$ имеем $V(x) > 0$, $\Delta V(x) > 0$. В точках вида $(x_1, 0) \in \overline{\Omega_1} \bigcap \overline{\Omega_2}$ будет

$$f(x_1, 0) = \begin{pmatrix} x_1^{\frac{1}{3}} \\ x_1^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}.$$

Так как $\| f(x_1, 0) \| = \sqrt{2} x_1^{\frac{1}{3}}$, то при $x_1 < 2^{\frac{-9}{2}}$ будет $f(x_1, 0) \in \Omega_1$, и следовательно, существуют точки на пересечении замыканий, образ которых принадлежит Ω_1. Таким образом, нулевое решение системы (5) неустойчиво.

Рассмотрим систему

$$x_{m+1} = f(m, x_m), \qquad f(m, 0) = 0, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $x_m \in \mathbb{R}^n$, функция $f(m, x)$ определена на множестве $\mathbb{N} \times D(r)$, непрерывна по x и удовлетворяет условию $\| f(m, x) \| \leq r$.

Теорема. *Пусть для системы (6) существует непрерывная по x на множестве $\mathbb{N} \times D(r_1), r_1 \leq r$, функция $V(m, x)$, удовлетворяющая в открытом шаре $S(r_0) = \{x : \| x \| < r_0\} \subset D(r_1)$ условиям:*

1) существуют открытые связные множества $\Omega_{1m} \subset S(r_0)$, $m \in \mathbb{N}$ такие, что для любого $x \in \Omega_{1m}$ справедливы неравенства:

$$V(m,x) > 0, \qquad \Delta V(m,x) > 0,$$

где $\Delta V(m,x) = V(m+1, f(m,x)) - V(m,x)$;

2) $V(m,x) = 0$ для любого $x \in \overline{\Omega_{1m}} \bigcap \overline{\Omega_{2m}}$, где Ω_{2m} – дополнение множества Ω_{1m} в шаре $S(r_0)$;

3) $0 \in \overline{\Omega_{1m}} \bigcap \overline{\Omega_{2m}}$, $m \in \mathbb{N}$;

4) для любого $m \in \mathbb{N}$ существует точка $z \in \overline{\Omega_{1m}} \bigcap \overline{\Omega_{2m}}$ такая, что $f(m,z) \in \Omega_{1,m+1}$, $m \in \mathbb{N}$;

5) для любого $\alpha > 0$ найдётся $\beta > 0$ такое, что при $m \in \mathbb{N}$ для каждого $x \in \Omega_{1,m}$ справедлива импликация

$$V(m,x) \geq \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \Delta V(m,x) \geq \beta;$$

6) функция $V(m,x)$ ограничена в $\mathbb{N} \times S(r_0)$.

Тогда нулевое решение системы (6) неустойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что нулевое решение системы (6) устойчиво. Это означает, что для любого $\varepsilon < r_0$, и для любого $m_0 \geq 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для каждого $m \geq m_0$ справедлива импликация

$$\| x_{m_0} \| < \delta \Rightarrow \| x_m \| < \varepsilon.$$

Другими словами, точки x_m принадлежат шару $S(r_0)$ при $m \geq m_0$ и, следовательно, функция $V(m, x_m)$ ограничена: $|V(x_m)| \leq L$, $m \geq m_0$. Так как $0 \in \overline{\Omega_{1m}}$, то найдётся точка $x_{m_0} \in S(\delta) \bigcap \Omega_{1m_0}$ такая, что $V(m_0, x_{m_0}) > 0$.

Рассмотрим решение системы (6) с начальным вектором x_{m_0} и покажем, что при всех $m \geq m_0$ будет выполняться включение $x_m \in \Omega_{1m}$. С этой целью воспользуемся существованием точки $z \in \overline{\Omega_{1m}} \bigcap \overline{\Omega_{2m}}$ такой, что $f(m,z) \in \Omega_{1,m+1}$. Наличие указанной точки позволяет установить, что решение, выходящее из x_{m_0}, обладает при $m \geq m_0$ следующим свойством: если $x_m \in \Omega_{1m}$, то $f(m, x_m) \in \Omega_{1,m+1}$. Допустим противное: существует m такое $x_m \in \Omega_{1m}$, однако $x_{m+1} = f(m, x_m) \in \Omega_{2,m+1}$. Так как $z \in \overline{\Omega_{1m}}$, то найдётся последовательность $z_k \in \Omega_{1m}$ такая, что $z_k \to z$, откуда $f(m, z_k) \to f(m,z) \in \Omega_{1,m+1}$. Поскольку $\Omega_{1,m+1}$ –открыто, найдётся k_0 такое, что при $k \geq k_0$ будет $f(m, z_k) \in \Omega_{1,m+1}$. Пусть $z_{k_0+\nu}$ одна из этих точек, т.е. $f(m, z_{k_0+\nu}) \in \Omega_{1,m+1}$. В силу связности Ω_{1m} найдётся непрерывная кривая $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, принадлежащая Ω_{1m}, такая, что $\varphi(t_0) = x_m$, $\varphi(t_1) = z_{k_0+\nu}$. Рассмотрим функцию $f(m, \varphi(t))$, $t \in [t_0, t_1]$. Очевидно, $f(m, \varphi(t_0)) = x_{m+1} \in \Omega_{2,m+1}$, $f(m, \varphi(t_1)) = f(m, z_{k_0+\nu}) \in \Omega_{1,m+1}$. Покажем, что кривая $x = f(m, \varphi(t))$ пересекает множество $\overline{\Omega_{1,m+1}} \bigcap \overline{\Omega_{2,m+1}}$, т.е. существует точка $\Theta_m \in [t_0, t_1]$ такая, что $f(m, \varphi(\Theta_m)) \in \overline{\Omega_{1,m+1}} \bigcap \overline{\Omega_{2,m+1}}$. Действительно, так как $f(m, \varphi(t_1)) \in \Omega_{1,m+1}$, то

$$V(m+1, f(m, \varphi(t_1))) > 0, \qquad \Delta V(m+1, f(m, \varphi(t_1))) > 0. \tag{7}$$

В силу непрерывности функций V, f, φ неравенства (7) будут выполняться вблизи точки t_1, т.е. найдётся такое $\sigma > 0$, что (7) будут выполняться при $t \in [t_1 - \sigma, t_1]$. Пусть

$$\Theta_m = \inf_{t \in [t_0, t_1]} \{t : f(m, \varphi(t)) \in \Omega_{1,m+1}\}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что на $[t_0, t_1]$ найдётся последовательность $t_k \leq \Theta_m, k = \overline{1, \infty}$, такая, что $f(m, \varphi(t_k)) \in \overline{\Omega_{2,m+1}}$ и $t_k \to \Theta_m$. Так как $f(m, \varphi(t_k)) \to f(m, \varphi(\Theta_m))$, то $f(m, \varphi(\Theta_m)) \in \overline{\Omega_{2,m+1}}$. С другой стороны, найдётся последовательность $t_{k'} > \Theta_m$ такая, что $f(m, \varphi(t_{k'})) \in \Omega_{1,m+1}$ и $t_{k'} \to \Theta_m$. Тогда $f(m, \varphi(\Theta_m)) \in \overline{\Omega_{1,m+1}}$. Таким образом, $f(m, \varphi(\Theta_m)) \in \overline{\Omega_{1,m+1}} \bigcap \overline{\Omega_{2,m+1}}$, откуда $V(m+1, f(m, \varphi(\Theta_m))) = 0$. Так как $V(m, \varphi(\Theta_m)) > 0$, то

$$\Delta V(m, \varphi(\Theta_m)) = V(m+1, f(m, \varphi(\Theta_m))) - V(m, \varphi(\Theta_m)) < 0,$$

что противоречит положительности функции $\Delta V(m, x)$ при $x \in \Omega_{1m}$. Итак, решение, выходящее из точки $x_{m_0} \in \Omega_{1m_0}$, остаётся в Ω_{1m_0} при $m \geq m_0$.

Покажем, что на этом решении функция $V(m, x)$ неограниченно растёт, т.е. $V(m, x_m) \to +\infty$, $m \to \infty$. Действительно, взяв $\alpha = V(m_0, x_{m_0}) > 0$ из условия 5), получаем, что найдётся $\beta > 0$ такое, что $\Delta V(m_0, x_{m_0}) \geq \beta$. Так как $x_m \in \Omega_{1m}$ при $m \geq m_0$, то $\Delta V(m, x_m) = V(m+1, x_{m+1}) - V(m, x_m) > 0$, откуда следует неравенство $V(m, x_m) \geq \alpha$, $m \geq m_0$, а значит, и неравенство $\Delta V(m, x_m) \geq \beta$ при $m \geq m_0$. Поскольку

$$V(m, x_m) = V(m_0, x_{m_0}) + \sum_{i=0}^{m-m_0-1} \Delta V(m_0+1, x_{m_0+i}) \geq V(m_0, x_{m_0}) + \beta(m - m_0),$$

то $V(m, x_m) \to +\infty$ при $m \to \infty$, что противоречит ограниченности функции $V(m, x_m)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карев Б.Н., Шиманов С.Н. Две теоремы о неустойчивости для разностных систем. // Устойчивость и нелинейные колебания.– Свердловск– 1979. С. 42 – 50.

2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения.– М.: Наука, 1955.– 250 с.

3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения.– М.: Наука, 1966.– 532 с.

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.958.536.71 № 444, 1999, с.50-60

Идентификация системы с распределенными параметрами, описываемой нестационарным уравнением переноса нейтронов с изотропным потенциалом

А.С.Сохин

Харьковский государственный университет

Изучено линейное уравнение Больцмана в пространстве многих измерений с нестационарным изотропным интегралом столкновений,описывающее генерирование нейтронов в подкритичном случае. Впервые приведена новая постановка обратной задачи, позволяющая найти плотность рассеивателя в пространстве путем решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с оператором сжатия. Ядро интегрального уравнения определяется функцией, которая вычисляется при сопоставлении начальных и финальных потоков нейтронов, наблюдаемых экспериментально.

1.Постановка задачи.

Рассмотрим описывающее перенос нейтронов многоскоростное уравнение Больцмана с нестационарной изотропной индикатрисой $u(a,x,t)$ в интеграле столкновений, имеющее вид

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a \cdot \nabla y = u(a,x,t) \int\limits_A y(x,t,a')da', \quad x \in X,\ t > t_0,\ a \in A \tag{1}$$

при начальном значении потока нейтронов

$$y(x,t_0,a) = f(x,a;x_0), \quad t_0 > 0 \tag{2}$$

Здесь X– вещественное евклидово пространство n измерений с нормой $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, где $n \geq 1$ (для общности в задаче не ограничиваемся имеющими физический смысл значениями $n = 1,2,3$), параметр $x_0 \in X$, $T = [0,\infty]$, A– шар радиуса 1 в пространстве $X, L_1(M)$–множество измеримых суммируемых по Лебегу неотрицательных функций с нормой, являющейся интегралом Лебега на множестве $M = A,\ X \times A,\ T,\ X,\ L^+_\infty(X)$–множество измеримых почти везде ограниченных неотрицательных функций v с нормой

$||v|| = \max\limits_{x \in X} |v(x)|$. (В max-норме подразумевается существенный максимум.)
Индикатрису $u(a, x, t)$ подчиним условиям :

(a) $u(a, x, t)$–измеримая неотрицательная функция на $A \times X \times T$;
(b) $||u(\cdot, x, t)|| \in L_1^+(A), \quad x \in X, \ t \in T$;
(c) $||u(\cdot, x, t)||_1 \equiv u_1(x, t) \in L_\infty(X), \quad t \in T$;
(d) $||u_1(\cdot, t)||_\infty \equiv u_{1\infty}(t) = \sigma(t) \in L_1(T)$.

Обозначим $\hat{\sigma}(t)$ и $\check{\sigma}(t)$ интегралы от функции $\sigma(t)$ по промежуткам $[0, t]$ и $[t, \infty]$ соответственно. Тогда условия (a)–(d) удобно записать в виде $u(a, x, t) \in L^+_{1\infty 1}(A, X, T)$, где

$$||u||_{1\infty 1} = \hat{\sigma}(\infty) = \check{\sigma}(0) = \int\limits_0^\infty (\max_{x \in X} \int\limits_A u(a, x, t) da) dt.$$

Следуя [2] введем пространство состояний, управлений и наблюдений. В данной задаче это будет одно и то же пространство функций $L_1^+(X, T)$. Уравнение (1)–уравнение состояний. Условие (a) указывает на режим генерации, условия (b)–(d) указывают на подкритичность [5]. Если функции $u(a, x, t)$ и $f(x, a; x_0)$ непрерывно дифференцируемы по x, то задача (1)–(2) эквивалентна задаче решения интегрального уравнения

$$y(x, t, a) = f(x, t, a; x_0, t_0) + \int\limits_{t_0}^t \int\limits_A u(a, x', t') y(x', t', a') dt' da', \tag{3}$$

при $x' = x - a(t - t')$, содержащего стартовое состояние $f(x, t, a; x_0, t_0) \equiv f(x - a(t - t_0), a; x_0)$. Если функции $u(a, x, t)$ и $f(x, a; x_0)$ указанной гладкости не имеют, то решение интегрального уравнения в подходящем функциональном пространстве может существовать, но не будет иметь гладкость, нужную для подстановки в дифференциальное уравнение (1), то есть, будет являться обобщенным решением задачи (1)– (2). Интегральное уравнение (3) удобно рассматривать по переменной $t \in T = [0, \infty]$, если ввести момент включения t_0 управления как параметр,считая поток нейтронов зависящим от t_0 и полагая $y(x, t, a; t_0) = 0$ при $t < t_0$. Пусть $\sigma(t; t_0)$–функция включения Хевисайда в момент t_0, тогда имеем вместо уравнения (3) такое уравнение

$$y(x, t, a) = f(x, t, a; x_0, t_0)\sigma(t; t_0) + \int\limits_0^t \int\limits_A u(a, x, t') y(x', t', a'; x_0, t_0) dt' da' \tag{4}$$

при $x' = x - a(t - t')$. Семейство функций $f(x, t, a; x_0, t_0)$ образует множество управлений (или входов или зондирующих сигналов). Обозначим $g(x, a; x_0, t_0) = \lim\limits_{t \to \infty} y(x + at, t, a; x_0, t_0)$, тогда

$$g(x, a; x_0, t_0) = f(x + at_0, a; x_0) +$$
$$+ \int\limits_0^\infty \int\limits_A u(a, x + at', t') y(x + at', t', a'; x_0, t_0) dt' da'. \tag{5}$$

Интегральное уравнение (4) можно переписать в виде интегрального уравнения

$$y(x,t,a;x_0,t_0) = g(x,t,a;x_0,t_0) - \int\limits_t^{\infty}\int\limits_A u(a,x',t')y(x',t',a';x_0,t_0)dt'da' \quad (6)$$

при $x' = x - a(t-t')$, содержащего финальное состояние $g(x,t,a;x),t_0) \equiv g(x-at,a;x_0,t_0)$ (финальный поток нейтронов). В качестве наблюдаемых значений (или выходов или реактивных сигналов) будем рассматривать финальные состояния или некоторые функционалы от них. Ниже зависимость от параметров указывать не будем. Обозначим $\bar{f}(a)$ и $\bar{g}(a)$ интегралы по X от функций $y(x,t,a)$ из $L_1^+(A)$ для $t \in T,\ x \in X$. Равенство (5) после интегрирования по X принимает вид

$$\bar{g}(a) = \bar{f}(a) + \int\limits_0^{\infty}\int\limits_X u(a,x',t')\hat{y}(x',t')dt'dx'.$$

Равенство (6) после интегрирования по A принимает вид

$$\hat{y}(x,t) = \hat{g}(x,t) - \int\limits_t^{\infty}\int\limits_{A(x,t'-t)} u(\frac{x'-x}{t'-t},x',t')(t'-t)^{-n}\hat{y}(x',t')dx'dt', \quad (7)$$

где $A(x,t'-t) = (x' : |x'-x| \le (t'-t))$.

Рассмотрим отображения $N : \hat{g} \to \bar{g} - \bar{f}, \quad U : \hat{y} \to \bar{g} - \bar{f}, \quad U_+ : \hat{y} \to \hat{g} - \hat{y}$. Назовем N оператором наблюдений, U назовем оператором столкновений. Заметим, что $N,U : L_{1\infty}^+(X,T) \to L_1^+(A), \quad U_+ : L_{1\infty}^+(X,T) \to L_{1\infty}^+(X,T)$. Задачей наблюдения (прямой задачей) назовем задачу отыскания оператора наблюдений. Обратной задачей (задачей идентификации) назовем задачу отыскания оператора столкновений. Из определения операторов N и U следует,что $U\hat{y} = N\hat{g}$. Из (7) имеем $\hat{g} = (I+U_+)\,\hat{y}$, причем, в силу вольтерровости U_+ существует $(I+U_+)^{-1}$. Таким образом,получено операторное равенство (уравнение наблюдений)

$$U = N\,(I+U_+)\,,$$

которое можно назвать алгебраическим аналогом интегрального уравнения В.А. Марченко [3] в обратной задаче квантовой теории рассеяния. Оно позволяет при известном операторе столкновений найти оператор наблюдений $N = (I+U_+)^{-1}\,U$ и, обратно, при известном операторе наблюдений найти оператор столкновений. Уравнение наблюдений можно записать в виде

$$u_{xt} = n_{xt} + \hat{N}_{xt}u_{xt},$$

где интегральный оператор $\hat{N}_{xt}$ является сжимающим, а его ядро $\hat{n}(x,t;a,\bar{a})$ выражается через ядро $n_{xt} = n(a,x,t) \ge 0$ оператора N по формуле

$$\hat{n}(x,t;a,\bar{a}) = \int\limits_0^t n(a,x\ \ \bar{a}(t-\bar{t}),\bar{t})d\bar{t}.$$

При известном операторе наблюдений в силу сжимаемости $\hat{N}_{xt}$ ядро $u_{xt} = u(a, x, t)$ оператора столкновений находится по формуле

$$u_{xt} = \left(I - \hat{N}_{xt}\right)^{-1} n_{xt}, \quad x \in X,\ t \in T.$$

Обратная задача для нестационарного одномерного неизотропного уравнения переноса в другой постановке исчерпывающе изучена в работах Л. П. Нижника [4], стационарная одномерная задача с вырожденной индикатрисой рассмотрена в [1].

2.Решение уравнения переноса.

Теорема 1. *При $f \in L_1^+(X, A)$ существует единственное обобщенное решение $y(t) \in L_1^+(X, A), t \in T$ задачи (1)–(2), и это решение удовлетворяет неравенствам*

$$||y(t)||_1 \le ||f(t)||_1 \exp\left(\hat{\sigma}(t)\right), \quad ||y(t)|| - f(t)||_1 \le ||f(t)||_1 \left[\exp\left(\hat{\sigma}(t)\right) - 1\right],$$

где $f(t) = f(x, t, a; x_0, t_0) \equiv f(x, t, a) \in L_1^+(X, A)$, $t \in T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем оператор

$$\bar{U} f(t) = \int_0^t \int_A u(a, x - a(t - t'), t') f(x - a(t - t'), t', a') dt' da',$$

действующий в $L_{1\infty 1}(X, T, A)$. Тогда решением интегрального уравнения (3) формально является сумма ряда

$$f(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{U}^i f(t) = y(t). \tag{8}$$

Обозначим $f_i(t) = \bar{U}^i f(t)$. Из равенства $f_i(t) = \bar{U} f_{i-1}(t)$ вытекает неравенство

$$||f_i(t)||_1 \le \int_0^t \sigma(t') ||f_{i-1}(t')||_1 dt',$$

из которого последовательными оценками получим, что

$$||f_i(t)||_1 \le \frac{1}{i!} \left(\hat{\sigma}(t)\right)^i ||f(t)||_1.$$

Так что ряд (8) сходится в $L_{1\infty 1}(X, T, A)$, а его сумма удовлетворяет указанным в теореме неравенствам.

Справедливо аналогичное утверждение для задачи с финальным условием.

Теорема 2. *При $g \in L_1^+(X, A)$ существует единственное обобщенное решение $y(t) \in L_1^+(X, A), t \in T$ задачи (1), (5) и это решение удовлетворяет неравенствам*

$$||y(t)||_1 \le ||g(t)||_1 \exp\left(\check{\sigma}(t)\right), \quad ||y(t) - g(t)||_1 \le ||g(t)||_1 \left[\exp\left(\check{\sigma}(t)\right) - 1\right],$$

где $g(t) \equiv g(x-at,a) \equiv g(x,t,a) \in L_1^+(X,A),\ t \in T.$

Обозначим $\hat{f}(x,t),\ \hat{g}(x,t),\ \hat{y}(x,t)$ интегралы по A соответственно функций $f(x,t,a), g(x,t,a),\ y(x,t,a)$ из $L_1^+(X,A),\ t \in T$. Интегрируя уравнение (3) по $a \in A$, заменяя переменную интегрирования получим интегральное уравнение

$$\hat{y}(x,t) = \hat{f}(x,t) + \int_0^t dt' \int A(x,t-t')u(\frac{x-x'}{t-t'},x',t')(t-t')^{-n}\hat{y}(x',t')dx' \quad (9)$$

при $x' = x - a'(t-t')$ относительно функции $\hat{y}(x,t)$, где $A(x,t-t') = \{x' : |x'-x| \leq t-t'\}$. Если функция $\hat{y}(x,t)$ найдена , то решение задачи (1)-(2) находится по формуле

$$y(x,t,a) = f(x,t,a) + \int_0^t u(a,x-a(t-t'),t')\hat{y}(x-a(t-t'),t')dt'. \quad (10)$$

В качестве начального состояния удобно брать функции $f(x,a) = f(x)\tilde{\delta}(a)$, где функция, обладающая свойствами $\tilde{\delta}(a) \geq 0$ и $\int_A \tilde{\delta}(a')da' = 1$, является аппроксимацией δ-функции Дирака. Тогда $\hat{f}(x,t) \approx f(x;x_0)\sigma(t;t_0)$. Введем линейные непрерывные операторы

$$U_-(t,t') : L_1^+(X) \to L_1^+(X), \quad U_- : L_\infty(T, L_1(X)) \to L_1(T, L_1(X)),$$

действующие по формулам

$$U_-(t,t')\varphi = \int_{A(x,t-t')} u(\frac{x-x'}{t-t'},x',t')(t-t')^{-n}\varphi(x')dx', \quad 0 < t' < t \quad (11)$$

$$U_-z = U_-z(t) = \int_0^t U_-(t,t')z(t')dt', \quad (12)$$

где $z(t) \in L_1^+(X)$ для всех $t \in T$, $||z||_t = \max_{t' \in [0,t]} ||z(t')||_1$. Нетрудно проверить, что $||U_-(t,t')|| \leq \sigma(t)$. Проверим, что

$$||U_-^n z(t)||_1 \leq \frac{(\hat{\sigma}(t))^n}{n!}||z||_t, \quad n = 0,1\ldots.$$

Обозначим $z_0(t) = z(t)$, $z_n(t) = U_-^n z_0(t)$, тогда оценивая по норме

$$z_n(t) = U_-z_{n-1}(t) = \int_0^t U_-(t,t')z_{n-1}(t')dt',$$

получим

$$||z_n(t)||_1 \leq \int_0^t ||U_-(t,t')||||z_{n-1}(t')||_1 dt' \leq \int_0^t \sigma(t')||z_{n-1}(t')||_1 dt', \quad n = 1,2,\ldots$$

Из последней рекуррентной оценки вытекает

$$||z_n(t)||_1 \le \frac{[\hat{\sigma}(t)]^n}{n!}||z_0||_t. \tag{13}$$

Учитывая обозначения (11)-(12), уравнение (9) перепишем в форме

$$\hat{y}(t) - \int_0^t U_-(t,t')\hat{y}(t')dt' = \hat{f}(t),$$

или в операторной форме

$$(I - U_-)\hat{y} = \hat{f}.$$

В силу оценки (13) существует обратный оператор $(I - U_-)^{-1}z = \sum_{i=0}^{\infty} U_-^i z$, действующий в $L_\infty(T; L_1^+(X))$. Норма решения интегрального уравнения (9) удовлетворяет неравенству

$$||\hat{y}(t)||_1 \le \exp(\hat{\sigma}(t))||f||_1. \tag{14}$$

Обозначим $K_- = (I - U_-)^{-1} - I$. Оператор K_- ищем в виде

$$K_- z(t) = \int_0^t dt' \int_{A(x,t-t')} K_-(\frac{x-x'}{t-t'}, t, x', t')(t-t')^{-n} z(x',t')dx',$$

где $z(t) \in L_1^+(X)$ $\forall t \in T$. Ядро $K_-(\frac{x-x'}{t-t'}, t, x', t') \ge 0$ как сумма сверток неотрицательных ядер и удовлетворяет интегральному тождеству

$$(I - U_-)(I + K_-) = I,$$

из которого следует равенство операторов

$$K_- - U_- K_- = U_-, \tag{15}$$

представляющее собой интегральное уравнение для ядра K_- как функции от x и t при фиксированных значениях x' и t'. Из равенства (15) находим, что оператор K_- представим в виде суммы степенного ряда операторов U_-:

$$K_- = (I - U_-)^{-1}U_- = \sum_{i=1}^{\infty} U_-^i.$$

Из последнего равенства вытекает оценка

$$\int_X K_-(\frac{x-x'}{t-t'}, t, x', t')\frac{dx}{(t-t')^n} = \int_A K_-(a,t,x',t')da \le u_1(x',t')\exp(\int_{t'}^t \sigma(\bar{t})d\bar{t})$$

и равенство

$$K_-(a,t',x',t') = u(a,x',t').$$

Таким образом, решение $\hat{y}(x,t)$ интегрального уравнения (9) имеет представление

$$\hat{y}(x,t) = \hat{f}(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_{A(x,t-t')} K_-(\frac{x-x'}{t-t'},t,x',t')(t-t')^{-n}\hat{f}(x',t')dt'dx'.$$

Аналогично, определяя операторы

$$U_+(t,t') = \int\limits_{A(x,t'-t)} u(\frac{x-x'}{t-t'},x',t')(t'-t)^{-n}\varphi(x')dx', \tag{16}$$
$$\varphi \in L_1^+(X),\ t < t' < \infty,$$

$$U_+z(t) = \int\limits_t^\infty U_+(t,t')z(t')dt', \quad z(t) \in L_1^+(X),\ t \in T, \tag{17}$$

находим, что оператор $I+U_+$ имеет ограниченный обратный в $L_\infty(T;L_1^+(X))$. Оператор $K_+ = (I+U_+)_{-1} - I$ имеет ядро вида $K_+(\frac{x-x'}{t-t'},t,x',t')(t-t')^{-n}$, обладающее оценкой

$$\int\limits_X |K_+(\frac{x-x'}{t-t'},t,x',t')|(t'-t)^{-n}dx \le u_1(x',t')\exp(\int\limits_t^{t'}\sigma(\bar{t})d\bar{t}).$$

Из уравнения (5) аналогично получаем интегральное уравнение

$$\hat{y}(x,t) = \hat{g}(x,t) - \int\limits_t^\infty dt' \int\limits_{A(x,t'-t)} u(\frac{x-x'}{t-t'},x',t')(t'-t)^{-n}\hat{y}(x',t')dx'. \tag{18}$$

Решение интегрального уравнения (18) имеет представление

$$\hat{y}(x,t) = \hat{g}(x,t) + \int\limits_t^\infty dt' \int\limits_{A(x,t'-t)} K_+(\frac{x-x'}{t-t'},t,x',t')(t'-t)^{-n}\hat{g}(x',t')dx'. \tag{19}$$

3.Решение задачи наблюдения и обратной задачи.

Обозначим

$$\bar{y}(t,a) = \int\limits_X y(x,t,a)dx, \quad \bar{f}(a) = \int\limits_X f(x,a)dx, \quad \bar{g}(a) = \int\limits_X g(x,a)dx$$

количество нейтронов со скоростью a во всем пространстве в текущий, начальный и финальный моменты времени. Интегрируя равенство (5) по всему пространству получим равенство $\bar{g}(a) = \bar{f}(a) + U\hat{y}$, где

$$U\hat{y} = \int_0^\infty \int_X u(a, x', t')\hat{y}(x', t',)dx' \tag{20}$$

оператор столкновений $U : L^+_{1\infty}(X,T) \to L^+_1(A)$. Подставляя вместо $\hat{y}$ его выражение через $\hat{g}$ из равенства (19), будем иметь для ядра $n(a', x', t')$ оператора наблюдений N

$$\bar{g} - \bar{f} \equiv N\hat{g} = \int_0^\infty \int_X n(a, x', t')\hat{g}(x', t')dt'dx' \tag{21}$$

следующее выражение

$$n(a, x', t') = u(a, x', t') + \int_0^{t'} \int_X u(a, \bar{x}, \bar{t})K_+(\frac{\bar{x} - x'}{\bar{t} - t'}, \bar{t}, x', t')(t' - \bar{t})^{-n} d\bar{t}d\bar{x}. \tag{22}$$

Наблюдая $g(x, a)$, вычисляя $\bar{f}(a), \bar{g}(a), \hat{g}(x, t)$ и сопоставляя $\hat{g} \to \bar{g} - \bar{f}$, можем считать неотрицательную функцию $n(a, x, t)$ вычисляемым, то есть,известным наблюдением. Равенство (22) означает операторное равенство $N = U(I + K_+)$.Так как $(I + K_+)^{-1} = I + U_+$, то

$$N(I + U_+) = U \tag{23}$$

Назовем (23) уравнением наблюдений. Оно позволяет при известном операторе столкновений находить оператор наблюдений по формуле $N = U(I + U_+)-1$ и, обратно, после некоторого преобразования находить оператор столкновений по известному оператору наблюдений, вычисляемому из равенства (21) по наблюдаемым экспериментально функционалам $\bar{f}(a)$, $\bar{g}(a)$, $\hat{g}(x, t)$ от стартового и финального состояний, то есть, решить задачу идентификации.

Действительно, уравнение (23) в ядрах запишем в виде

$$n(a, x, t) + \int_0^t \int_{A(x,t-t')} n(a, x', t')u(\frac{x - x'}{t - t'}, x', t')(t - t')^{-n}dt'dx' = u(a, x, t) \tag{24}$$

Пусть индикатриса $u_a = u(a, x, t)$ известна. Тогда операторное равенство (23) означает уравнение

$$(I + U^*_+)\, n_a = u_a \tag{25}$$

относительно функции $n_a = n(a, x, t)$ от переменных $x \in X$, $t \in T$ для $a \in A$. Здесь U^*_+–сопряженный к U_+ оператор. Решая уравнение (25) находим наблюдение

$$n_a = (I + U^*_+)^{-1} u_a = (I + K^*_+)u_a, \quad a \in A$$

Обратно, пусть наблюдение $n_{xt} = n(a,x,t)$ известно, тогда полагая $\frac{x-x'}{t-t'} = \bar{a} \in A$ в уравнении (24), получим для $x \in X$, $t \in T$ интегральное уравнение

$$\left(I - \hat{N}_{xt}\right) u_{xt} = n_{xt} \tag{26}$$

Уравнение (26) назовем уравнением идентификации. В операторной форме оно имеет вид

$$\left(I - \hat{N}\right) U = N \tag{27}$$

Покажем, что уравнение идентификации имеет единственное решение.

Теорема 3. *Оператор* $N = U(I+U_+)^{-1} : L^+_{1\infty}(X,T) \to L^+_1(A)$ *имеет норму*

$$||N|| = \int_0^\infty \left(\max_{x\in X} \int_A n(a,x,t)da \right) dt < 1.$$

Доказательство. Пусть $\psi \in L^+_{1\infty}(X,T)$. Обозначим $\varphi = (I+U_+)\psi$, тогда $N\varphi = U\psi$. Обозначим $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ интегралы от φ и ψ по всему пространству. После интегрирования имеем

$$\bar{\psi}(t) + \int_t^\infty \int_X u_1(x',t')\psi(x',t')dt'dx' = \bar{\varphi}(t).$$

Так как $\psi(x',t') \geq 0$, то по теореме о среднем найдется число $m^*(t')$ такое, что внутренний интеграл в предыдущем равенстве равен $m^*(t')\bar{\psi}(t')$. Следовательно предыдущее интегральное соотношение превращается в интегральное уравнение

$$\bar{\psi} + \int_t^\infty m^*(t')\bar{\psi}(t')dt' = \bar{\varphi}.$$

Обозначим через $Y(t)$ интеграл в предыдущем выражении. Умножая предыдущее выражение на $m^*(t)$ замечаем, что функция $Y(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\frac{dY}{dt} + m^*(t)Y = m^*(t)\bar{\varphi}(t), \quad t < \infty$$

и финальному условию $Y(\infty) = 0$. Решение этой задачи находится по формуле

$$Y(t) = \int_t^\infty \exp(-\int_t^s m^*(t')dt')m^*(s)\bar{\varphi}(s)ds,$$

из которой находим

$$Y(t) \leq (1 - \exp(-\int_t^\infty m^*(t')dt'))||\bar{\varphi}||_\infty.$$

Замечая, что $m^*(t') \le \sigma(t')$, $||N\varphi||_1 = ||U\psi||_1 = Y(0)$, $||\bar{\varphi}||_\infty = ||\varphi||_{1\infty}$ и обозначая $h = 1 - \exp(-\check{\sigma}(0))$, получаем неравенство

$$||N\varphi||_1 \le h||\varphi||_{1\infty}, \quad \varphi \in L^+_{1\infty}(X,T).$$

Пусть теперь $\varphi \in L_{1\infty}(X,T)$, тогда $|\varphi| \in L^+_{1\infty}(X,T)$, $||\varphi||_{1\infty} = |||\varphi|||_{1\infty}$, $||N\varphi|| \le ||N(|\varphi|)||_1 \le h||\varphi||_{1\infty}$, то есть, получено неравенство $||N\varphi||_1 \le h||\varphi||_{1\infty}$, для всех $\varphi \in L_{1\infty}(X,T)$, означающее $||N|| \le h$, где $h < 1$.

Введем множество возможных наблюдений

$$\{N\} = \{n(a,x,t) : n(a,x,t) \in L_{1\infty 1}(A,X,T),\ ||n||_{1\infty 1} < 1\}.$$

Теорема 4. *Уравнение идентификации имеет единственное решение* $u^0_{xt} \in L^+_1(A)$ *при любой правой части* $n_{xt} \in L^+_1(A)$. *Если* $n_{xt} \equiv n(a,x,t) \in \{N\}$, *то* $u^0_{xt}(a) \equiv u(a,x,t) \in L^+_{1\infty 1}(A,X,T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 3 нетрудно получить ,что оператор $\hat{N}_{xt} : L^+_1(A) \to L^+_1(A)$ удовлетворяет неравенству $||\hat{N}_{xt}|| \le ||N||$ для всех $x \in X$, $t \in T$. Оставшиеся утверждения легко проверяются. Следовательно, из уравнения (26) получаем выражение ядра оператора столкновений через оператор наблюдений

$$u_{xt} = \left(I - \hat{N}_{xt}\right)^{-1} n_{xt}.$$

Теорема 5. *Пусть* $u^0(a,x,t)$– *индикатриса, найденная по заданному наблюдению*
$n(a,x,t) \in N$, $n^0(a,x,t)$– *наблюдение, вычисленное по* $u^0(a,x,t)$, *тогда* $n(a,x,t) = n^0(a,x,t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U^0, U^0_+, N^0, N– операторы, определяемые формулами (20),(17),(22) через функции u^0, n^0 и n, тогда имеем связывающее эти операторы равенства

$$U^0 - NU^0_+ = N, \quad U^0 - N^0U^0_+ = N^0,$$

вычитанием которых находим, что $(N - N^0)(I + U^0_+) = 0$. В силу обратимости оператора $I + U^0_+$ имеем равенство операторов $N = N^0$ и, следовательно, равенство их ядер.

Из теорем 4 и 5 вытекает

Следствие. *Для того чтобы функция* $n(a,x,t)$ *являлась ядром оператора наблюдений* N *задачи (1)–(2) с индикатрисой* $u(a,x,t) \in L^+_{1\infty 1}(A,X,T)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $n(a,x,t) \in L^+_{1\infty 1}(A,X,T)$ *и* $||n||_{1\infty 1} < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казаков А.Я. Обратная задача линейной теории переноса излучения. // Ж. выч. матем. и матем. физ.– 1984– Т. 24, №2.– С. 261 – 271.

2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.– М.: Мир, 1972.– 414 с.

3. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля.– К.: Наук. думка, 1972.– 219 с.

4. Нижник Л.П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений.– К.: Наук. думка, 1991.– 232 с.

5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: т. 3. Теория рассеяния.– М.: Мир, 1982.– 443 с.

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.912 № 444 , 1999, с.61-70

Об одном методе решения краевой задачи 2-го порядка

Г.В.Сузиков, И.В.Воробьев, О.В.Розуменко

Харьковский государственный университет

В работе изучается один новый метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, состоящий в том, что решение "сложной" краевой задачи представляется в виде предела решений "простых" задач – задач Коши для того же уравнения. По сути, добавление всего одного цикла в программу решения задачи Коши для дифференциального уравнения с простым пересчетом после каждого прохождения, превращает ее в программу решения краевой задачи. Метод чрезвычайно прост и эффективен, имеет широкую область применения.

1. Введение.

Реализованные в этой работе подходы к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений связаны с идеей представления решений "сложных" задач в виде предела последовательности решений "простых".

Напомним (см, например [1]) один из наиболее известных таких результатов.

Пусть требуется решить краевую задачу для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{2}$$

Оказывается, что ее решение можно получить как предел последовательности решений таких задач:

$$\begin{aligned} \Delta v_n &= f \quad \text{в } \Omega, \\ v_n &= -\lambda_n \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta u_n &= v_n \quad \text{в } \Omega, \\ u_n &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho_n \frac{\partial u_n}{\partial n} \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{5}$$

начиная с $n = 0$ и произвольной функции λ_0 на $\partial\Omega$. Числа ρ_n – параметры метода.

Таким образом, решение "сложной" краевой задачи для бигармонического уравнения (1)-(2) представляется в виде предела решений "простых" краевых задач для уравнения Лапласа (3)-(5).

В нашей работе, как и в [2], решение "сложной" задачи – краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений представляется в виде предела решений "простых" задач – задач Коши для того же уравнения.

Таким образом, если приведенный из [1] результат кратко сформулировать так: "для того, чтобы решить краевую задачу для бигармонического уравнения, достаточно уметь решать задачи Дирихле для уравнения Лапласа", то основной результат нашей работы получается таким: "для того, чтобы решить краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, достаточно уметь решать задачи Коши для этого уравнения".

2. Построение решения краевой задачи.

Пусть требуется решить краевую задачу:

$$y''(x) = f\left(x, y(x), y'(x)\right), \quad a \le x \le b, \tag{6}$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{7}$$

где $f : D \to R$, $D = [a, b] \times R \times R$, $y(x)$ – скалярная функция.

Рассмотрим последовательность решений задач Коши:

$$y_n''(x) = f\left(x, y_n(x), y_n'(x)\right), \quad a \le x \le b, \tag{8}$$

$$y_n(a) = A, \quad y_n'(a) = -\widetilde{\lambda}_n, \tag{9}$$

$$\widetilde{\lambda}_{n+1} = \widetilde{\lambda}_n + \rho_n (y_n(b) - B), \tag{10}$$

где $\widetilde{\lambda}_0 \in R$ выбирается произвольно, а числа $\rho_n > 0$ параметры метода. Мы покажем, что при весьма общих предположениях последовательность функций $y_n(x)$, определяемых системой (8)-(10), равномерно сходится к решению исходной краевой задачи (6)-(7), и таким образом, решение "сложной" задачи – краевой задачи (6)-(7), представляется в виде предела решений "простых" задач – задач Коши (8)-(10). В самом деле, имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть краевая задача (6)-(7) имеет решение $y(x)$, функция f непрерывна в D и липшицева по y, y' в D, то есть*

$$\forall \left(x, y_1, y_1'\right) \in D, \ \forall \left(x, y_2, y_2'\right) \in D :$$

$$\left| f\left(x, y_1, y_1'\right) - f\left(x, y_2, y_2'\right) \right| \le L\left[|y_1 - y_2| + \left|y_1' - y_2'\right| \right], \tag{11}$$

где положительная константа L удовлетворяет условию

$$\delta = 1 - L(b - a)(b - a + 1) > 0. \tag{12}$$

Тогда при ρ_n, удовлетворяющих соотношению

$$0 < r_0 \le \rho_n \le r_1 < \frac{2\delta}{b-a}, \tag{13}$$

и при любом начальном значении $\widetilde{\lambda}_0$ последовательность решений задач Коши (8)-(10) $y_n(x)$ равномерно на $[a,b]$ сходится при $n \to \infty$ к решению задачи (6)-(7) $y(x)$.

Доказательство. Так как f непрерывна в D и выполнено (11), то согласно теореме существования и единственности решения задачи Коши существует единственное решение каждой такой задачи (8)-(10) на всем отрезке $[a,b]$, и таким образом соотношения (8)-(10) в самом деле определяют последовательность $y_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$.

Перепишем граничные условия (7) в виде:

$$y(a) = A, \qquad \lambda = \lambda + \rho_n (y(b) - B), \tag{14}$$

где $y'(a) = -\lambda$.

Положим

$$z_n(x) = y_n(x) - y(x), \quad \lambda_n = \widetilde{\lambda}_n - \lambda, \quad \widetilde{f}_n = f\left(x, y_n(x), y_n'(x)\right) - f\left(x, y(x), y'(x)\right). \tag{15}$$

Тогда из соотношений (6)-(15), очевидно, имеем

$$z_n''(x) = \widetilde{f}_n, \tag{16}$$

$$z_n(a) = 0, z_n'(a) = -\lambda_n, \tag{17}$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho_n z_n(b). \tag{18}$$

Далее под нормой будем понимать норму пространства $L_2[a,b]$.

Так как $z_n(a) = 0$, $z_n(x) = \int_a^x z_n'(t)\,dt$, в силу неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$\|z_n\| \le (b-a)\left\|z_n'\right\|, \tag{19}$$

$$|z_n(x)| \le \sqrt{b-a}\left\|z_n'\right\|, \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{20}$$

Пусть $z_n'(b) - z_n'(a) = \alpha$. Так как $\alpha = \int_a^b z_n''(x)\,dx$, то учитывая (16) и последнее из соотношений (15), имеем $\alpha = \int_a^b \left[f\left(x, y_n, y_n'\right) - f\left(x, y, y'\right)\right] dx$. Учитывая также еще и (11), имеем $|\alpha| \le L\int_a^b \left(|z_n(x)| + \left|z_n'(x)\right|\right) dx$, откуда снова используя неравенство Коши-Буняковского и оценки (19)-(20), получаем:

$$|\alpha| \le L\sqrt{b-a}\,(b-a+1)\left\|z_n'\right\| = \eta. \tag{21}$$

Поскольку

$$\left(z_n(x)\, z_n'(x)\right)' = \left(z_n'(x)\right)^2 + z_n(x)\, z_n''(x),$$

то интегрируя и учитывая условие $z_n(a) = 0$, получаем

$$z_n(b)\, z_n'(b) = \left\| z_n' \right\|^2 + \int_a^b z_n(x)\, \widetilde{f}_n dx. \tag{22}$$

Так же как и в случае оценки (21), легко получаем для $\beta = \int_a^b \left[\int_x^b z_n'(t)\, dt \right] \widetilde{f}_n dx$:

$$|\beta| \le L(b-a)(b-a+1) \left\| z_n' \right\|^2. \tag{23}$$

Используя (17)-(18), а также обозначения (15) и оценки (19)-(23), получаем:

$$\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2 = 2\rho_n z_n'(a)\, z_n(b) - \rho_n^2 z_n^2(b) = 2\rho_n z_n(b)\, z_n'(b) -$$

$$- 2\rho_n z_n(b) \int_a^b \widetilde{f}_n dx - \rho_n^2 z_n^2(b) = 2\rho_n \left\| z_n' \right\|^2 + 2\rho_n \int_a^b z_n(x)\, \widetilde{f}_n dx -$$

$$- 2\rho_n z_n(b) \int_a^b \widetilde{f}_n dx - \rho_n^2 z_n^2(b) = 2\rho_n \left[\left\| z_n' \right\|^2 - \int_a^b \left[\int_x^b z_n'(t)\, dt \right] \widetilde{f}_n dx \right] -$$

$$- \rho_n^2 z_n^2(b) \ge 2\rho_n \left[1 - L(b-a)(b-a+1) - \frac{\rho_n}{2}(b-a) \right] \left\| z_n' \right\|^2.$$

Обозначим:

$$\gamma_1(n) = 2\rho_n \left[\delta - \frac{\rho_n}{2}(b-a) \right], \tag{24}$$

где δ определено в (12) и, очевидно $0 < \delta < 1$.

Тогда последнее соотношение примет вид:

$$\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2 \ge \gamma_1(n) \left\| z_n' \right\|^2. \tag{25}$$

Так как параметры метода ρ_n удовлетворяют условию (13), то, очевидно, $\gamma_1(n) > 0$.

Следовательно, мы получили последовательность невозрастающих неотрицательных чисел λ_n^2. Значит, она имеет предел, и следовательно, $\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Так как в силу (13) и (25)

$$\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2 \ge 2r_0 (\delta - 0{,}5 r_1 (b-a)) \left\| z_n' \right\|^2,$$

где $2r_0(\delta - 0{,}5r_1(b-a)) > 0$, то, следовательно $\left\| z_n' \right\| \to 0$ при $n \to \infty$. Из (15) и (20) теперь получаем:

$$|y_n(x) - y(x)| = |z_n(x)| \le \sqrt{b-a} \left\| z_n' \right\| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ равномерно на } [a,b].$$

Теорема доказана.

3. Оценка скорости сходимости.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда*

$$\rho_n = \rho^* = \frac{1}{b-a} - L\,(b-a+1) = \frac{\delta}{b-a} \tag{26}$$

оптимальные параметры метода и имеет место оценка

$$|y_n(x) - y(x)| \le C\varepsilon^n, \tag{27}$$

где

$$C = \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{\gamma_1^*}(b-a)}, \quad \varepsilon = \sqrt{1-\frac{\gamma_1^*}{\gamma_2^*}}, \tag{28}$$

$$\gamma_1^* = \frac{[1 - L\,(b-a)\,(b-a+1)]^2}{b-a} = \frac{\delta^2}{b-a}, \tag{29}$$

$$\gamma_2^* = \frac{[1 + L\,(b-a)\,(b-a+1)]^2}{b-a} = \frac{(2-\delta)^2}{b-a}, \tag{30}$$

причем $0 < \delta < 1$, $C \ge 0$ и $0 < \varepsilon < 1$, и таким образом решения последовательности задач Коши (8)-(10) сходятся равномерно на $[a,b]$ к решению граничной задачи (6)-(7) со скоростью геометрической прогрессии.

Доказательство. Получим сначала оценку сверху для $|\lambda_n|$. Поскольку $z_n'(x) - z_n'(a) = \int_a^x \widetilde{f}_n dt$, то из (17) и (21) имеем:

$$|\lambda_n| \le \left|z_n'(x)\right| + \eta.$$

Интегрируем это неравенство в пределах от a до b и применяя неравенство Коши-Буняковского, легко получаем:

$$(b-a)\,|\lambda_n| \le \sqrt{b-a}\left\|z_n'\right\| + (b-a)\,\eta.$$

Откуда, поделив на $(b-a)$ и возведя в квадрат, получаем:

$$\lambda_n^2 \le \gamma_2^* \left\|z_n'\right\|^2, \tag{31}$$

где $\gamma_2^* > 0$ определено в (30).

Следовательно, с учетом (25), имеем:

$$\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2 \ge \gamma_1(n)\left\|z_n'\right\|^2 \ge \frac{\gamma_1(n)}{\gamma_2^*}\lambda_n^2,$$

откуда, очевидно, следует:

$$\lambda_{n+1}^2 \le \left(1 - \frac{\gamma_1(n)}{\gamma_2^*}\right)\lambda_n^2 \le \prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{\gamma_1(k)}{\gamma_2^*}\right)\lambda_0^2, \tag{32}$$

что при $\rho_n = \rho^*$ (см. (24)) дает

$$\lambda_n^2 \le \left(1 - \frac{\gamma_1^*}{\gamma_2^*}\right)^n \lambda_0^2, \tag{33}$$

причем $0 < \frac{\gamma_1^*}{\gamma_2^*} = \frac{\delta^2}{(2-\delta)^2} < 1$, так как $0 < \delta < 1$.

Заметим, что наиболее быстрая оценка для убывания в (32) получается тогда, когда $\gamma_1(n)$ как функция от ρ_n принимает максимальное значение. Поскольку $\gamma_1(n)$ (см. (24)) квадратный многочлен относительно ρ_n с отрицательным старшим коэффициентом, то его максимум (γ_1^* из (29)) лежит посредине между его корнями (при $\rho_n = \rho^*$ из (26)), и поэтому, оценка (33) в определенном смысле наилучшая.

Получим теперь скорость сходимости для решений. Из (15), (20) и (25) следует:

$$|y_n(x) - y(x)|^2 = |z_n(x)|^2 \le (b-a)\left\|z_n'\right\|^2 \le \frac{b-a}{\gamma_1^*}\left(\lambda_n^2 - \lambda_{n+1}^2\right) \le$$
$$\le \frac{b-a}{\gamma_1^*}\lambda_n^2 \le \frac{\lambda_0^2}{\gamma_1^*}(b-a)\left(1 - \frac{\gamma_1^*}{\gamma_2^*}\right)^n,$$

откуда и получаем необходимую оценку (27). Теорема доказана.

4. Существование решения и оценка погрешности вычислений.

Теорема 3. *Пусть в задаче (6)-(7) функция f непрерывна в D, удовлетворяет условию Липшица (11), и пусть выполнено условие (12). Тогда краевая задача (6)-(7) имеет решение, которое можно получить как предел решений задач Коши (8)-(10) с произвольным $\widetilde{\lambda}_0$ и любыми ρ_n, удовлетворяющими условию (13).*

Если заданна точность вычислений ε_0, то условие выхода из итераций есть

$$\frac{\left|\widetilde{\lambda}_{n+1} - \widetilde{\lambda}_n\right|}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{b-a}{\gamma^*}} < \varepsilon_0, \tag{34}$$

при $\rho_n = \rho^*$ из теоремы 2. Константы ε, γ_1^* и γ_2^* также определены в теореме 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что последовательность решений задач Коши (8)-(10) $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при $\rho_n = \rho^*$ сходится к решению задачи (6)-(7).

Введем обозначения:

$$z_n(x) = y_{n+1}(x) - y_n(x), \quad \lambda_n = \widetilde{\lambda}_{n+1} - \widetilde{\lambda}_n,$$
$$\widetilde{f}_n = f\left(x, y_{n+1}(x), y_{n+1}'(x)\right) - f\left(x, y_n(x), y_n'(x)\right). \tag{35}$$

Тогда из (8)-(10) и (35) получаем:

$$z_n''(x) = \widetilde{f}_n, \tag{36}$$

$$z_n(a) = 0, \quad z_n^{'}(a) = -\lambda_n, \tag{37}$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho^* z_n(b). \tag{38}$$

Таким образом, задача (36)-(38) эквивалентна задаче (16)-(18), а значит для нее справедливы все соответствующие оценки.

Из (33) и (28) следует:

$$(\lambda_n)^2 \le \varepsilon^2 (\lambda_{n-1})^2 \le \varepsilon^{2n} (\lambda_0)^2,$$

то есть
$$\left|\widetilde{\lambda}_{n+1} - \widetilde{\lambda}_n\right| \le \widetilde{C}\varepsilon^n, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{39}$$

где
$$\widetilde{C} = \left|\widetilde{\lambda}_1 - \widetilde{\lambda}_0\right|.$$

Из (39), очевидно, для любого натурального $p > 0$, имеем:

$$\left|\widetilde{\lambda}_{n+p} - \widetilde{\lambda}_n\right| \le \frac{\widetilde{C}\varepsilon^n}{1-\varepsilon}. \tag{40}$$

Следовательно, последовательность $\left\{\widetilde{\lambda}_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ фундаментальна, и тем самым существует конечный предел:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \widetilde{\lambda}_n = \lambda.$$

Таким образом (см. например [3]), в силу непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных, предельное решение $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ задачи (8)-(10) удовлетворяет уравнению (6) и условию $y(a) = A$.

Переходя к пределу в (10) при $n \to \infty$ и учитывая, что $\rho_n = \rho^* > 0$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(b) = y(b) = B.$$

Следовательно, предельное решение есть решение исходной краевой задачи (6)-(7).

Рассмотренный выше метод позволяет найти условие выхода из итераций для обеспечения заданной точности вычислений ε_0. По аналогии с выводом (27) и учитывая, что

$$\left|\widetilde{\lambda}_{n+1} - \widetilde{\lambda}_n\right| \le \varepsilon \left|\widetilde{\lambda}_n - \widetilde{\lambda}_{n-1}\right|,$$

можно получить:

$$|y_{n+p}(x) - y_n(x)|^2 \le \left[\sum_{k=n}^{n+p-1} |z_k(x)|\right]^2 \le \left(\widetilde{\lambda}_{n+1} - \widetilde{\lambda}_n\right)^2 \frac{b-a}{\gamma_1^*(1-\varepsilon)^2}.$$

Устремляя $p \to \infty$, получаем условие выхода из итераций (34). Теорема доказана.

5. Единственность решения.

Теорема 4. *Пусть в задаче (6)-(7) функция f непрерывна в D, удовлетворяет условию Липшица (11), и пусть выполнено условие*

$$L\left(b-a\right)\left(b-a+1\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<1. \tag{41}$$

Тогда краевая задача (6)-(7) имеет не более одного решения.

Доказательство. От противного. Предположим, существует два различных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ краевой задачи (6)-(7). Составим их разность и обозначим:

$$\begin{gathered} u\left(x\right)=y_1\left(x\right)-y_2\left(x\right), \\ \widehat{f}=f\Big(x,y_1\left(x\right),y_1'\left(x\right)\Big)-f\Big(x,y_2\left(x\right),y_2'\left(x\right)\Big). \end{gathered} \tag{42}$$

Тогда функция $u\left(x\right)$ удовлетворяет условиям:

$$u''\left(x\right)=\widehat{f}, \quad a\leq x\leq b, \tag{43}$$

$$u\left(a\right)=u\left(b\right)=0. \tag{44}$$

Заметим, что для $u(x)$ справедливы оценки (19) и (20):

$$\left\|u\right\|\leq\left(b-a\right)\left\|u'\right\|, \tag{45}$$

$$\left|u\left(x\right)\right|\leq\sqrt{b-a}\left\|u'\right\|, \quad \forall x\in[a,b]. \tag{46}$$

Так как

$$0=u\left(b\right)-u\left(a\right)=\int_a^b u'\left(x\right)dx=xu'\left(x\right)\Big|_a^b-\int_a^b xu''\left(x\right)dx=$$

$$=b\left(u'\left(b\right)-u'\left(a\right)\right)+\left(b-a\right)u'\left(a\right)-\int_a^b xu''\left(x\right)dx=$$

$$=\left(b-a\right)u'\left(a\right)+\int_a^b\left(b-x\right)u''\left(x\right)dx,$$

и следовательно, $u'\left(a\right)=-\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(b-x\right)u''\left(x\right)dx$, то применяя неравенство Коши-Буняковского и замечая, что

$$\int_a^b\left(b-x\right)^2dx=\frac{\left(b-a\right)^3}{3},$$

получаем следующую оценку:

$$\left|u'\left(a\right)\right|\leq\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{3}}\left\|u''\right\|.$$

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского, находим:

$$\left|u'(x)\right| \leq \left|u'(a)\right| + \left|\int_a^x u''(x)\,dx\right| \leq \sqrt{b-a}\left(1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left\|u''\right\|, \quad \forall x \in [a,b]. \tag{47}$$

Возведя (47) в квадрат, интегрируя от a до b и извлекая корень, получим:

$$\left\|u'\right\| \leq (b-a)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left\|u''\right\|. \tag{48}$$

Из (11) и (45)-(48) имеем:

$$\left|u''(x)\right| \leq L\left(|u(x)| + \left|u'(x)\right|\right) \leq L\sqrt{b-a}\left(\left\|u'\right\| + \left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left\|u''\right\|\right) \leq$$

$$\leq L\sqrt{b-a}\,(b-a+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left\|u''\right\|.$$

Откуда, возводя в квадрат, интегрируя от a до b и извлекая корень, получаем оценку:

$$\left\|u''\right\| \leq L(b-a)(b-a+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left\|u''\right\|.$$

Следовательно, поскольку выполнено (41), имеем $\left\|u''\right\| = 0$, откуда $u''(x) \equiv 0, \quad \forall x \in [a,b]$. Следовательно, $u(x) = c_1 x + c_0$. Используя еще краевые условия (44), имеем:

$$\left.\begin{array}{l} u(a) = c_1 a + c_0 = 0 \\ u(b) = c_1 b + c_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

и, значит, $u(x) \equiv 0, \quad \forall x \in [a,b]$, мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

6. Основная теорема существования и единственности решения краевой задачи (6)-(7) и метод построения ее решения.

Поскольку из условия (41) следует условие (12), то справедлива следующая теорема:

Основная теорема. *Пусть в задаче (6)-(7) функция f непрерывна в D, удовлетворяет условию Липшица (11), и пусть выполнено условие (41). Тогда краевая задача (6)-(7) имеет единственное решение, которое можно получить как предел решений задач Коши (8)-(10) при любом начальном значении $\widetilde{\lambda}_0$ и с ρ_n удовлетворяющими (13), причем оптимальная сходимость будет при $\rho_n = \rho^*$ из (26). Если заданна точность вычислений ε_0, то условие выхода из итераций определено в (34) при $\rho_n = \rho^*$.*

7. Заключение.

Отметим, что предложенный в работе алгоритм (8)-(10) решения краевой задачи (6)-(7) чрезвычайно прост в практической реализации. В самом деле, добавляя к программе решения задачи Коши (8)-(9) всего один цикл с пересчетом после каждого прохождения по формуле (10), мы получаем программу решения краевой задачи (6)-(7).

Нами было проведено большое число численных экспериментов, которые показали, что метод высокоэффективен и что область его применения значительно шире, чем это было установлено в теоремах 1 и 2. На практике этим методом можно решить любую краевую задачу вида (6)-(7), возможно, после двух-трех "неудачных" попыток выбора $\widetilde{\lambda}_0$ и ρ_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гловински Р.Г., Лионс Ж.Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств.– М.: Мир, 1979.– 574 с.

2. Сузиков Г.В. Об одном новом методе решения краевых задач. // Тр. Междунар. конф. "Ляпуновские чтения".– Харьков.– 1992.– С. 157-158.

3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным равнениям.– М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1961.– 704 с.

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.56 № 444 , 1999, с.71-88

О величинах отклонений мероморфных минимальных поверхностей

И.И.Марченко, И.Г.Николенко

Харьковский государственный университет

Получены оценки суммы величин отклонений для мероморфных и целых минимальных поверхностей конечного нижнего порядка. Построены соответствующие минимальные поверхности, показывающие точность полученных оценок.

В 60-х годах Беккенбах развил и обобщил неванлинновскую теорию распределения значений мероморфных функций на мероморфные минимальные поверхности. В теории Неванлинны основную роль играют две функции : функция приближения $m(r, a, f)$ и считающая функция a-точек, которые определяются так :

$$m(r,a,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|}d\varphi \ , \ m(r,\infty,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|d\varphi \ ,$$

$$N(r,a,f) = \int\limits_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t}dt + n(0,a,f)\ln r \ ,$$

где $n(t, a, f)$ — число a-точек мероморфной функции f с учетом кратностей в круге $\{z : |z| < t\}$, $\ln^+ x = \max(\ln x, 0)$.

Функция $T(r, f) := m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f)$ называется неванлинновской характеристикой мероморфной функции f. Из первой основной теоремы следует, что для всех $a \in \overline{\mathbb{C}}$

$$m(r,a,f) + N(r,a,f) = T(r,f) + O(1) \quad (r \to \infty). \tag{1}$$

Из второй основной теоремы следует, что в инвариантной сумме (1) основную роль для подавляющего большинства значений a играет функция $N(r, a, f)$.

В теории Беккенбаха ([1]-[4]) изучаются мероморфные минимальные поверхности. Напомним основные определения и сформулируем некоторые результаты этой теории.

Параметры u, v называются изотермическими (см.[5]) для поверхности $S = \{x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)\}$, если $E = G, F = 0$, где E, F и G — коэффициеты первой квадратичной формы поверхности S:

$$E = ||\vec{x_u}||^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2, F = (\vec{x_u}, \vec{x_v}) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}, G = ||\vec{x_v}||^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2.$$

Известно, что на любой поверхности S класса C^2 локально существуют изотермические параметры [5].

Далее нам потребуются некоторые факты из теории гармонических функций (см.[6]). Пусть $x(z) = x(u,v)$ — гармоническая функция в некоторой проколотой окрестности точки z_0. Тогда в этой окрестности имеет место разложение функции $x(z)$ в ряд, который является аналогом ряда Лорана ([6] с.445) :

$$x(z) = c\ln r + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^k\left(a_k\cdot\cos k\theta + b_k\cdot\sin k\theta\right), \quad (b_0 = 0), \tag{2}$$

где $z - z_0 = re^{i\theta}$. С помощью этого разложения определяются нули, полюсы и существенно особые точки гармонической функции ([6]). Напомним их определения. Точка $z_0 \in D$ называется правильной для функции $x(z)$, если в разложении (2) $c = 0$ и $\min\limits_{a_k^2+b_k^2\neq 0}\{k\} \geq 0$. Если $\min\limits_{a_k^2+b_k^2\neq 0}\{k\} = t \geq 1$ и $x(z_0) = a$, то точка z_0 называется a-точкой гармонической функции порядка t. В частности, если $a = 0$, то z_0 называется нулем гармонической функции порядка t. Точка z_0 называется полюсом порядка $t = |l|$, если в разложении (2) $\min\limits_{a_k^2+b_k^2\neq 0}\{k\} = l < 0$. Точка z_0 называется логарифмическим полюсом, если $c \neq 0$ и $\min\limits_{a_k^2+b_k^2\neq 0}\{k\} \geq 0$. Если имеется бесконечное число коэффициентов с отрицательными индексами, для которых $a_k^2 + b_k^2 \neq 0$, то z_0 называется существенно особой точкой функции $x(z)$.

Мероморфной минимальной поверхностью (м.м.п.) в области D называется поверхность, заданная в изотермических параметрах $(u,v) \in D$, координаты которой являются гармоническими функциями, не имеющими кроме полюсов других особых точек в области D [1]. Если координаты минимальной поверхности являются гармоническими функциями во всей плоскости $\mathbb{C}$, то такая поверхность называется целой минимальной поверхностью (ц.м.п.).

В работе ([1]) вводится понятие полюса и a-точки м.м.п. Точка $\vec{z_0} \in D$ называется полюсом для м.м.п. в области D, если хотя бы одна её координата $x_1(z), x_2(z), x_3(x)$ имеет в точке $\vec{z_0}$ полюс. Если l_1, l_2, l_3 — порядки полюса для $x_1(z), x_2(z), x_3(z)$ в точке $\vec{z_0}$, то $t = \max(l_1, l_2, l_3)$ называется порядком полюса м.м.п. в точке $\vec{z_0}$. Следует отметить, что координаты м.м.п логарифмических полюсов не имеют [1]. Точка $\vec{z_0} \in D$ называется $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$-точкой поверхности S, если $\vec{z_0}$ является a_i-точкой гармонической функции $x_i(z)$, $(i = 1, 2, 3)$.

Пусть l_i — порядок a_i-точки функции $x_i(z)$. Тогда $t = min(l_1, l_2, l_3)$ называется порядком $\vec{a}$-точки поверхности S. Для м.м.п. a-точки и полюсы изолированы [1].

Далее мы будем рассматривать м.м.п., определенные во всей открытой комплексной плоскости.

Пусть $S = \vec{x}(u,v)$ — м.м.п. [1]. Для каждого $\vec{a} \in R^3$ положим :

$$m(r,\vec{a},S) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{||\vec{x}(re^{i\theta}) - \vec{a}||} d\theta \ , \ m(r,\infty,S) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ ||\vec{x}(re^{i\theta})|| d\theta \ ,$$

$$N(r,\vec{a},S) = \int\limits_0^r \frac{n(t,\vec{a},S) - n(0,\vec{a},S)}{t} dt + n(0,\vec{a},S)\ln r \ ,$$

где $n(t,\vec{a},S)$ — число $\vec{a}$-точек поверхности S над кругом $\{u^2 + v^2 < r^2\}$ с учетом кратностей.

Так как поверхность S является двумерным множеством в R^3, то множество точек, лежащих на поверхности S имеет нулевую трехмерную меру. Следовательно, почти всюду в R^3 функция $N(r,\vec{a},S) = 0$. В теории Беккенбаха основную роль играет другая функция — функция видимости, которая определяется так :

$$H(r,\vec{a},S) = \int\limits_0^r \frac{h(t,\vec{a},S)}{t} dt, \text{ где}$$

$$h(t,\vec{a},S) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D(0,t)} \Delta \ln ||\vec{x}(u,v) - \vec{a}|| du dv,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ — оператор Лапласа, $D(0,t) = \{(u,v) : u^2 + v^2 \le t^2\}$.

Функция $T(r,S) := m(r,\infty,S) + N(r,\infty,S)$ называется характеристикой м.м.п. S.

Первая основная теорема для м.м.п. S ([1]) утверждает, что

$$m(r,\vec{a},S) + N(r,\vec{a},S) + H(r,\vec{a},S) = T(r,S) + O(1) \ \ (n \to \infty). \qquad (3)$$

Остановимся подробнее на соотношении (3). Функция $\ln ||\vec{x}(z) - \vec{a}||$ является δ-субгармонической в $\mathbb{C}$ [1]. Её положительные изолированные массы входят в определение функции $n(r,\vec{a},S)$, а "размазанные" положительные — в $h(r,\vec{a},S)$. Отрицательные массы этой функции сосредоточены в полюсах S. Следовательно, $n(r,\vec{a},S) + h(r,\vec{a},S)$ — положительная масса круга $\{z : |z| < r\}$ δ-субгармонической функции $\ln ||\vec{x}(z) - \vec{a}||$. Поэтому формулу (3) можно получить и как следствие из формулы Пуассона-Иенсена для функции $\ln ||\vec{x}(z) - \vec{a}||$.

Из второй основной теоремы для м.м.п. S ([2]) следует, что для всех $r \to \infty$, исключая быть может множество конечной меры, справедливо неравенство:

$$\sum_{k=1}^{q} m(r, \vec{a}_k, S) \leq 2T(r, S) + O(\ln T(r, S)). \qquad (4)$$

Неванлинновский дефект определяется естественным образом :

$$\delta(\vec{a}, S) = \lim_{r\to\infty} \inf \frac{m(r, \vec{a}, S)}{T(r, S)}.$$

Соотношение (4) дает : $\sum\limits_{\vec{a}\in R^3} \delta(\vec{a}, S) \leq 2.$

В 1969 году В.П.Петренко [7] предложил измерять величину приближения мероморфной функции f к числу a в равномерной метрике :

$$\mathcal{L}(r, a, f) = \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|f(z) - a|}\ , \ \mathcal{L}(r, \infty, f) = \max_{|z|=r} \ln^+ |f(z)|,$$

$$\beta(a, f) = \lim_{r\to\infty} \inf \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

Величина $\beta(a, f)$ называется величиной отклонения мероморфной функции f относительно числа a в смысле Петренко.

По аналогии с теорией Петренко для каждого $\vec{a} \in R^3$ вводятся следующие величины [8]

$$\mathcal{L}(r, \vec{a}, S) = \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{||\vec{x}(z) - \vec{a}||}\ , \ \mathcal{L}(r, \infty, S) = \max_{|z|=r} \ln^+ ||\vec{x}(z)||,$$

$$\beta(\vec{a}, S) = \lim_{r\to\infty} \inf \frac{\mathcal{L}(r, \vec{a}, S)}{T(r, S)}.$$

Величина $\beta(\vec{a}, S)$ называется величиной отклонения поверхности S относительно точки $\vec{a}$. В работе [8] получена точная оценка для величины отклонения м.м.п. конечного нижнего порядка.

Теорема А *Пусть S — м.м.п. конечного нижнего порядка λ. Тогда для любой точки $\vec{a} \in R^3$ справедливо неравенство :*

$$\beta(\vec{a}, S) \leq \begin{cases} \pi\lambda \sin^{-1} \pi\lambda, & \text{если} \quad \lambda \leq \frac{1}{2}, \\ \pi\lambda\,, & \text{если} \quad \lambda > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

В случае мероморфной функции точная оценка для величины отклонения была получена В. П. Петренко [7].

В работе [8] доказано также, что множество положительных отклонений м.м.п. конечного нижнего порядка не более чем счётно и исследована сходимость ряда $\sum\limits_{(\vec{a})} \beta(\vec{a}, S)$ для м.м.п. нулевого нижнего порядка.

В настоящей работе доказывается аналог соотношения дефектов для величин отклонений м.м.п. конечного нижнего порядка.

Теорема 1 *Пусть S — м.м.п. конечного нижнего порядка λ. Тогда*

$$\sum_{\vec{a}\,\in\, R^3} \beta(\vec{a}, S) \le \begin{cases} 2\pi\lambda \sin^{-1}\pi\lambda\,, & \text{если} \quad \lambda \le \frac{1}{2}\,, \\ 2\pi\lambda\,, & \text{если} \quad \lambda > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Для ц.м.п. теорему 1 можно уточнить.

Теорема 2 *Пусть S — ц.м.п. конечного нижнего порядка λ. Тогда*

$$\sum_{\vec{a}\,\in\, R^3} \beta(\vec{a}, S) \le \begin{cases} \pi\lambda \sin^{-1}\pi\lambda, & \text{если} \quad \lambda \le \frac{1}{2}\,, \\ \pi\lambda, & \text{если} \quad \lambda > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Аналог соотношения дефектов для величин отклонений мероморфных функций конечного нижнего порядка получен в работе [9]. Покажем, что для любого натурального λ оценка в теореме 2 может достигаться. Для этого рассмотрим целую функцию [10] :

$$f(z) = \int\limits_0^z e^{-t^q} dt\ ,\ a_k = e^{\frac{2\pi k i}{q}} \int\limits_0^{\infty} e^{-t^q} dt\ ,\ k = 1, 2, \ldots, q.$$

По этой функции строим целую минимальную поверхность S_f ([5] с.257) :

$$S_f := \begin{cases} x_1(u,v) = Re\left[i\left(f(z) - zf'(z) - \frac{1-z^2}{2} f''(z)\right)\right], \\ x_2(u,v) = Re\left[f(z) - zf'(z) + \frac{1+z^2}{2} f''(z)\right], \\ x_3(u,v) = Re\left[-i\left(f'(z) - zf''(z)\right)\right] \ (z = u + iv). \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим также точки $\vec{a}_k = (Im\ a_k, Re\ a_k, 0) \in R^3, k = 1, 2, \ldots, q$. Из асимптотик функции f следует :

$$\mathcal{L}(r, \vec{a}_k, S_f) = \mathcal{L}(r, a_k, f) + \underline{O}(1) = r^q(1 + \overline{o}(1)),$$

$$m(r, \vec{a}_k, S_f) = m(r, a_k, f) + \underline{O}(1) = \frac{r^q}{\pi q}(1 + \overline{o}(1)),$$

$$T(r, S_f) = T(r, f) + \underline{O}(1) = \frac{r^q}{\pi}(1 + \overline{o}(1)).$$

Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{q} \beta(\vec{a}_k, S_f) = \pi q$. Легко видеть, что порядок S_f равен q. Кроме того, $\sum\limits_{k=1}^{q} \delta(\vec{a}_k, S_f) = 1$.

Так как для целых минимальных поверхностей $\delta(\infty, S) = 1$, то $\sum\limits_{(\vec{a})} \delta(\vec{a}, S_f) = 2$. Этот пример уточняет соответствующий результат Тафела [4], который построил семейство целых минимальных поверхностей от двух произвольных положительных параметров A, B, причем сумма дефектов соответствующей поверхности равна $1 + \frac{A}{A+2B}$. При $B \to 0$ эта поверхность выраждается в плоскость. Таким образом, ранее не было примера неплоской целой минимальной поверхности для которой $\sum\limits_{(\vec{a})} \delta(\vec{a}, S_f) = 2$.

Если в соотношение (5) подставим мероморфную функцию из [11], то получим $\lambda = \frac{n}{2}$ и $\sum\limits_{\vec{a} \in R^3} \beta(\vec{a}, S) = 2\pi\lambda$. Следовательно, в случае, если нижний порядок $\lambda = \frac{n}{2}$ (n — натуральное число) оценка в теореме 1 является неулучшаемой.

1. Вспомогательные результаты

Напомним определение пиков Пойа для монотонных функций, введенных А.Эдреем (см. например [7]).Пусть $T(r)$ — монотонно возрастающая, непрерывная при $r \geq r_o$ функция конечного нижнего порядка λ.

Последовательность r_k называется последовательностью пиков Пойа, если существуют последовательности $A_k \to \infty, \varepsilon_k \to 0$ такие, что для всех $r \in [A_k^{-1} r_k, A_k r_k]$ выполняется неравенство :

$$T(r) \geq (1 - \varepsilon_k) \left(\frac{r}{r_k}\right)^{\lambda} T(r_k). \tag{1.1}$$

Далее в качестве $T(r)$ будет выступать неванлинновская характеристика роста м.м.п. S конечного нижнего порядка λ, а r_k — её пики Пойа. С помощью последовательностей пиков Пойа можно оценить рост $\frac{T(r_k, S)}{r_k^{\lambda}}$. Пусть $R_k = \frac{r_k}{4}, S_k = \frac{r_k}{4} e^{-\frac{2}{\varepsilon}}$, где $0 < \varepsilon < 1$ — произвольное фиксированное число. Тогда из неравенства (1.1) следует :

$$\frac{T(4R_k, S)}{R_k^{\lambda}} < \varepsilon \int\limits_{S_k}^{R_k} \frac{T(r, S)}{r^{\lambda+1}} dr \quad (k \to \infty). \tag{1.2}$$

Следующие утверждения являются некоторыми аналогами леммы о логарифмической производной для мероморфных минимальных поверхностей.

Лемма 1 *Пусть S — м.м.п. в $\mathbb{C}$. Тогда для каждой точки $\vec{a} \in R^3$ соотношение :*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{||\vec{x}_u(re^{i\theta})||}{||\vec{x}(re^{i\theta}) - \vec{a}||} d\theta = \underline{O}(\ln(rT(r, S))$$

выполняется для всех $r \to \infty$, искючая, быть может, множество E конечной меры.

Лемма 1 следует из соотношений (25), (22), (28) работы [2].

Лемма 2 *Пусть S — м.м.п. конечного нижнего порядка λ. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ при $k > k_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство :*

$$\int\limits_{S_k}^{R_k} \ln^+ \max_{|z|=r} \frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||} r^{-\lambda-1} dr < \varepsilon \int\limits_{S_k}^{R_k} T(r,S) r^{-\lambda-1} dr,$$

где S_k, R_k определены в неравенстве (1.2).

Доказательство.

В работе ([12]с.61) доказано неравенство :

$$\int\limits_{S_k}^{R_k} r^{-\lambda-1} L\left(r, \frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right) dr \leq \frac{\pi\lambda}{\sin\frac{\pi\lambda}{2y}} \int\limits_{S_k}^{R_k} r^{-\lambda-1} m\left(r, \frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right) dr +$$

$$+ \sum_{S_k \leq |c_k| \leq R_k} \frac{\pi}{\lambda} tg \frac{\pi\lambda}{4y} |c_k|^{-\lambda} + \frac{\pi}{\lambda} tg \frac{\pi\lambda}{4y} \int\limits_{S_k \leq |z| \leq R_k} |z|^{-\lambda} \Delta \ln ||\vec{x}(z)|| dz + \tag{1.3}$$

$$+ C y R_k^{-\lambda} T\left(2R_k, \frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right),$$

где S_k, R_k определены в неравенстве (1.2), y — произвольное фиксированное число, удовлетворяюшее неравенству $y > max(\frac{1}{2}, \lambda), c_k$ — нули поверхности $S, C = const$,

$$L\left(r, \frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right) = \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}, m\left(r, \frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{||\vec{x}_u(re^{i\theta})||}{||\vec{x}(re^{i\theta})||} d\theta.$$

Преобразуем последний интеграл, стоящий в правой части неравенства :

$$\int\limits_{S_k \leq |z| \leq R_k} |z|^{-\lambda} \Delta \ln ||\vec{x}(z)|| dz = \int\limits_{S_k}^{R_k} r^{-\lambda+1} \int\limits_0^{2\pi} \Delta \ln ||\vec{x}(re^{i\theta})|| d\theta dr =$$

$$= \int\limits_{S_k}^{R_k} r^{-\lambda} dh(r,0,S) \leq R_k^{-\lambda} h(R_k,0,S) + \lambda \int\limits_{S_k}^{R_k} r^{-\lambda-1} h(r,0,S) dr \leq$$

$$\leq R_k^{-\lambda} h(R_k,0,S) + \lambda R_k^{-\lambda} H(R_k,0,S) + \lambda^2 \int\limits_{S_k}^{R_k} r^{-\lambda-1} H(r,0,S) dr.$$

Так как $h(R_k,0,S) \leq \frac{H(2R_k,0,S)}{\ln 2}$, окончательно имеем :

$$\int\limits_{S_k \leq |z| \leq R_k} |z|^{-\lambda} \Delta \ln ||\vec{x}(z)|| dz \leq (\lambda+1) H(2R_k,0,S) + \tag{1.4}$$

$$+\lambda^2\int\limits_{S_k}^{R_k} r^{-\lambda-1}H(r,0,S)dr \quad (r\to R_k).$$

Аналогично получаем:

$$\sum_{S_k\le|c_k|\le R_k}|c_k|^{-\lambda}\le(\lambda+1)N(2R_k,0,S)+\lambda^2\int\limits_{S_k}^{R_k}N(r,0,S)r^{-\lambda-1}dr. \qquad (1.5)$$

Из первой основной теоремы для м.м.п. следует :

$$N(r,0,S)=T(r,S)-m(r,0,S)-H(r,0,S)+O(1).$$

Соотношения (1.4),(1.5) и (1.3) дают:

$$\int\limits_{S_k}^{R_k}L\left(r,\frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right)r^{-\lambda-1}dr\le\left(\frac{\pi\lambda}{\sin\frac{\pi\lambda}{2y}}-\pi\lambda tg\frac{\pi\lambda}{4y}\right)\int\limits_{S_k}^{R_k}m\left(r,\frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right)r^{-\lambda-1}dr+$$

$$+\pi\lambda tg\frac{\pi\lambda}{4y}\int\limits_{S_k}^{R_k}r^{-\lambda-1}T(r,S)dr+CyR_k^{-\lambda}T\left(2R_k,\frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right). \qquad (1.6)$$

Рассмотрим последнее слагаемое в правой части неравенства (1.3). Так как $R_k\to\infty$, то существует $\widetilde{R}_k\in[2R_k,3R_k]$ такое, что $\widetilde{R}_k\notin E$, где E — множество конечной меры из леммы 1.

Обозначим через $q(z)$ целую функцию с нулями в полюсах поверхности S_u и рассмотрим функцию $U_1(z)=\ln(||\vec{x}_u(z)||\cdot|q(z)|)$. Тогда для каждого $z\in\mathbb{C}$ $U_1(z)\ne\infty$. Кроме того, для всех z выполняется [1]:

$$\Delta\ln||\vec{x}_u(z)||=\frac{1}{2}\Delta\ln E=-EK\ge 0.$$

Таким образом, $U_1(z)$ — субгармоническая функция. Поэтому функция

$$U(z)=\ln\frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}=U_1(z)-\ln(||\vec{x}_u(z)||\cdot|q(z)|)=U_1(z)-U_2(z).$$

является δ - субгармонической функцией. В силу формулы Привалова (см.[13] с.171)

$$T(R,\frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||})=T(R,U(z))=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}U^+(Re^{i\varphi})d\varphi+N(R,U_2)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}(Re^{i\varphi})d\varphi+N(R,U_2). \qquad (1.7)$$

Используя (1.7) и лемму 1, получаем :

$$T\left(2R_k, \frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right) \leq T\left(\widetilde{R}_k, \frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right) \leq 2T(\widetilde{R}_k, S) + T(2R_k, S) \leq$$

$$\leq 2T(3R_k, S) + T(2R_k, S) \leq 3T(3R_k, S). \tag{1.8}$$

В силу леммы 1,(1.2),(1.6) и (1.8) имеем :

$$\int_{S_k}^{R_k} \ln^+ \max_{|z|=r} \frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||} r^{-\lambda-1} dr \leq$$

$$\leq \left\{\varepsilon\left(\frac{\pi\lambda}{\sin\frac{\pi\lambda}{2y}} - \pi\lambda tg\frac{\pi\lambda}{4y}\right) + (1+\varepsilon)\pi\lambda tg\frac{\pi\lambda}{4y}\right\} \int_{S_k}^{R_k} T(r,S) r^{-\lambda-1} dr. \tag{1.9}$$

Выбирем число y из условия $tg\frac{\pi\lambda}{4y} = \sqrt{\varepsilon}$. Тогда из (1.9) и произвольности числа ε следует утверждение леммы 2.

2. О соотношении для величин отклонений.

Пусть S – м.м.п. конечного нижнего порядка λ. Тогда в изотермических координатах u,v она представляется следующим образом :

$$\begin{cases} x_1 = Ref_1(z), \\ x_2 = Ref_2(z), \\ x_3 = Ref_3(z), \end{cases}$$

где $f_i(z)$ — многозначные аналитические функции $(i = 1, 2, 3)$ во всех точках z, кроме полюсов S.

Пусть $\{\vec{a}_j\}_{j=1}^q$ – набор различных векторов в R^3 такой, что

$$\vec{a}_j = (a_j^1, a_j^2, a_j^3), \ \ a_j^i \in R, \quad a_j^i \neq \infty,$$

$$\beta(\vec{a}_j, S) > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, q; q \geq 2;$$

$$c = \min\{||\vec{a}_l - \vec{a}_j|| : l \neq j\}.$$

Положим $G_k = \{z \in K(S_k, R_k) : \ln||\vec{x}_u|| < -2\varepsilon T(12r, S)\}$, где S_k, R_k – последовательности из (1.2), а $0 < \varepsilon < 1$ – произвольное фиксированное число. Ясно, что функции $f_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ — голоморфные функции в G_k.

Рассмотрим G_{kj} – множество, образованное теми связными компонентами G_k, в каждой из которых найдется точка z_1 такая, что $||\vec{x}(z_1) - \vec{a}_j|| < \frac{c}{6}$. Так как $\beta(\vec{a}_j, S) > 0$, то при $k \geq k_0$ множества G_{kj} не являются пустыми.

Покажем, что при $k \geq k_0(\varepsilon, c)$ множества G_{kj} попарно не пересекаются. Для этого воспользуемся одним приёмом Вейцмана ([9],[14]).

Пусть $r_n = 2^n, n \geq 0$. Рассмотрим кольцо $K(S_k, R_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и кольца $K(r_n, r_{n+1})$, где $n = m_0(k), m_0(k) + 1, \ldots, M_0(k)$. Числа $m_0(k), M_0(k)$ определены из неравенства

$$r_{m_0(k)} \leq S_k < r_{m_0(k)+1} \quad , \quad r_{M_0(k)-1} \leq R_k < r_{M_0(k)}.$$

Рассмотрим функцию $f_1(z)$. Из теоремы Картана (см.[10],с.18) следует

$$\int_0^{2\pi} n\left(2r_n, \frac{1}{f_1'(z) - te^{i\varphi}}, f_1\right) d\varphi \leq \int_0^{2\pi} N\left(6r_n, \frac{1}{\frac{f_1'(z)}{t} - e^{i\varphi}}, f_1\right) d\varphi \leq$$

$$\leq \ln^+ \frac{1}{t} + (2 + \overline{o}(1))T(12r_n, f_1) < \ln^+ \frac{1}{t} + (2 + \overline{o}(1))T(12r_n, S) \; (n \to \infty).$$

Обозначим через $l_1(t)$ суммарную длину линий уровня $|f_1'(z)| = t$ в круге $S(0, 2r_n)$. Положим $\gamma_{11} = exp(-\varepsilon T(12r_n, S))$, $\gamma_{12} = \frac{\gamma_{11}}{2}$. Согласно принципа длины и площади (см.[15] с.26) выполняется неравенство

$$\int_{\gamma_{12}}^{\gamma_{11}} \frac{l_1^2(t)}{t} dt \leq C_1 r_n^2 (\ln^+ \frac{1}{\gamma_{11}} + T(12r_n, S)).$$

Но

$$\int_{\gamma_{12}}^{\gamma_{11}} \frac{l_1^2(t)}{t} dt = \int_{\ln \gamma_{12}}^{\ln \gamma_{11}} l_1^2(e^x) dx = \int_{-\ln \gamma_{11}}^{-\ln \gamma_{12}} l_1^2(e^{-\alpha}) d\alpha.$$

Так как $\gamma_{11} = 2\gamma_{12} = exp(-\varepsilon T(12r_n, S))$, то существует число

$$\alpha_{1n} \in [\varepsilon T(12r_n, S), \varepsilon T(12r_n, S) + \ln 2] : l_1(e^{-\alpha_{1n}}) \leq C_2 r_n \sqrt{T(12r_n, S)}.$$

Применяя те же рассуждения к функциям $f_2(z)$ и $f_3(z)$, мы получаем, что существуют числа

$$\alpha_{2n} \in [\varepsilon T(12r_n, S), \varepsilon T(12r_n, S) + \ln 2] : l_2(e^{-\alpha_{2n}}) < C_3 \, r_n \sqrt{T(12r_n, S)},$$

$$\alpha_{3n} \in [\varepsilon T(12r_n, S), \varepsilon T(12r_n, S) + \ln 2] : l_3(e^{-\alpha_{2n}}) < C_4 \, r_n \sqrt{T(12r_n, S)},$$

где $l_2(t)$ – суммарная длина линий уровня $|f_2'(z)| = t$, $l_3(t)$ – суммарная длина линий уровня $|f_3'(z)| = t$ в круге $S(0, 2r_n)$.

Пусть $\alpha_n = \max(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \alpha_{3n})$. Далее положим

$$G'_{nk} = \{z \in K(S_k, R_k) \cap K(r_n, r_{n+1}) : \ln ||\vec{x}_u(z)|| < -\alpha_n\}.$$

Функции f_i являются аналитическими и в G'_{nk}. В силу определения G_k и G'_{nk} следует, что при $k \geq k_0(\varepsilon, c)$ $\cup_{n=m_0}^{M_0} G'_{nk} \supset G_k \supset G_{kj}$.

Пусть $z \in G_{kj}$. Тогда существует связная компонента $\mathcal{M}$ множества G_k такая, что $z \in \mathcal{M}$ и существует точка $z_1 \in \mathcal{M}$: $||\vec{x}(z_1) - \vec{a}_j|| < \frac{c}{6}$. Т.к.

$\cup_{n=m_0}^{M_0} G'_{nk} \supset \mathcal{M}$, существует кривая $\Gamma \subset \cup_{n=m_0}^{M_0} G'_{nk}$, соединяющая точку z и z_1, длина которой не превосходит суммы длин границ областей G'_{nk}. Далее получаем :

$$|f_1(z) - f_1(z_1)| = |\int\limits_{\Gamma} |f_1'(z)|dz| \le \int\limits_{\Gamma} |f_1'(z)||dz| \le$$

$$\le \sum_{n=m_0}^{M_0} \int\limits_{\Gamma\cap G'_{nk}} |f_1'(z)||dz| = \sum_{n=m_0}^{M_0} \int\limits_{\Gamma\cap G'_{nk}} \left|\frac{\partial x_1}{\partial u} + i\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| |dz|.$$

В силу уравнения Даламбера-Эйлера для аналитической в G'_{nk} функции $f_1(z)$ имеем : $\frac{\partial y_1}{\partial u} = -\frac{\partial x_1}{\partial v}$. Так как параметры u и v — изотермические, то $E = ||\vec{x}'_u||^2 = G = ||\vec{x}'_v||^2$. Отсюда :

$$\left|\frac{\partial x_1}{\partial u}\right| \le ||\vec{x}_u|| < exp(-\varepsilon T(12r_n, S)),$$

$$\left|\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial x_1}{\partial v}\right| \le ||\vec{x}_v|| = ||\vec{x}_u|| < exp(-\varepsilon T(12r_n, S)),$$

$$\left|\frac{\partial x_1}{\partial u} + i\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| \le \left|\frac{\partial x_1}{\partial u}\right| + \left|\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| < 2exp(-\varepsilon T(12r_n, S)).$$

Следовательно,

$$|f_1(z) - f_1(z_1)| < 2exp(-\varepsilon T(12r_n, S)) \sum_{n=m_0}^{M_0} \int\limits_{\Gamma\cap G'_{nk}} |dz| <$$

$$< \mathrm{C}_3 \sum_{n=m_0}^{M_0} exp(-\varepsilon T(12r_n, S)) r_n \sqrt{T(12r_n, S)} =$$

$$= \mathrm{C}_5 \sum_{n=m_0}^{M_0} exp\left(-\varepsilon T(12r_n, S)\right)\left[1 - \frac{\ln r_n}{\varepsilon T(12r_n, S)} - \frac{1}{2\varepsilon}\frac{\ln T(12r_n, S)}{T(12r_n, S)}\right]\Big) \le$$

$$\le C_5 \sum_{n=m_0}^{M_0} e^{-\frac{\varepsilon}{2}n} < \frac{c}{16} \quad (k \to \infty).$$

Тогда

$$|x_1(z) - x_1(z_1)| = |Re[f_1(z) - f_1(z_1)]| \le |f_1(z) - f_1(z_1)| < \frac{c}{16}.$$

Аналогично для функций $f_2(z)$, $f_3(z)$ получаем при $k \ge k_0$:

$$|x_2(z) - x_2(z_1)| < \frac{c}{16} \quad , \quad |x_3(z) - x_3(z_1)| < \frac{c}{16}.$$

Таким образом для всех $z \in G_{kj}$ и $k \ge k_0$:

$$|x_1(z) - a_j^1| \le |x_1(z) - x_1(z_1)| + |x_1(z_1) - a_j| < \frac{c}{16} + \frac{c}{6} < \frac{c}{4}.$$

Аналогично :
$$|x_2(z) - a_j^2| < \frac{c}{4}\ ,\ \ |x_3(z) - a_j^3| < \frac{c}{4}$$

Поэтому : $||\vec{x}(z) - \vec{a}_j|| < \sqrt{\frac{3c^2}{16}} < \frac{c}{2}$.

Отсюда следует, что множества G_{kj} при $k \geq k_0$ попарно не пересекаются.

Далее рассмотрим функции [9]

$$w_{kj}(z) = \begin{cases} \max\left\{\ln\frac{1}{||\vec{x}_u(z)||}, 2\varepsilon T(12r, S)\right\}, \text{если } z \in G_{kj} \\ 2\varepsilon T(12r, S), \text{если } z \notin G_{kj}. \end{cases}$$

Эти функции являются δ – субгармоническими в кольце К(S_k, R_k)(см.[9]), причем отрицательные массы сосредоточены в нулях функции $||\vec{x}_u(z)||$.

Напомним определение и свойства T^*-функции Бернстейна [16]. Положим

$$m^*_{kj}(r, \theta, S) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi}\int_E w_{kj}(re^{i\varphi})d\varphi,$$

$$N(r, w_{kj}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_{kj,2}(re^{i\varphi})d\varphi = N_{kj}(r, S),$$

$$T^*_{kj}(re^{i\theta}, w_{kj}) = m^*_{kj}(r, \theta, S) + N_{kj}(r, S),$$

где $w_{kj}(z) = w_{kj,1}(z) - w_{kj,2}(z)$.

В силу теоремы Бернстейна [16] следует, что функция $T^*_{kj}(re^{i\theta}, w_{kj})$ является субгармонической в кольце К(S_k, R_k). Рассмотрим, следуя [9]

$$T^*_0(re^{i\theta}, S) = \sum_{j=1}^{q} T^*_{kj}(re^{i\theta}, w_{kj}) = \sum_{j=1}^{q} m^*_{kj}(r, \theta, S) + \sum_{j=1}^{q} N_{kj}(r, S).$$

Функция $T^*_0(re^{i\theta}, S)$ является субгармонической в кольце К(S_k, R_k) как сумма конечного числа субгармонических функций и выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}T^*_0(re^{i\theta}, S) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{q}\widetilde{w}_{kj}(re^{i\theta})\ ,\ 0 < \theta < \pi,$$

где $\widetilde{w}_{kj}(z)$ — круговая перестройка функции $w_{kj}(z)$ [14],

$$\max_{0\leq\theta\leq\pi} T^*_0(re^{i\theta}, S) \leq T\left(r, \frac{1}{||\vec{x}_u(z)||}\right) + 2q\varepsilon T(12r, S), \tag{2.0}$$

где $T\left(r, \frac{1}{||\vec{x}_u(z)||}\right)$ — неванлинновская характеристика δ-субгармонической функции $\ln\frac{1}{||\vec{x}_u(z)||}$.

Выберем числа α, ψ, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi}{2\lambda}\right), 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2\lambda} - \alpha.$$

Рассмотрим [17],[18]

$$\sigma(r) = \int_0^\alpha T_0^*(re^{i\theta}, S)\cos\lambda(\varphi+\psi)d\varphi.$$

Далее будем считать, что $T_0^*(z,S)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция от u,v ($z = u + iv$). В случае, если это не так, то приближаем её дважды непрерывно дифференцируемыми субгармоническими функциями и делаем предельные переходы как в работе [9].

Применим оператор $L = r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}$ к функции $\sigma(r)$ и воспользуемся субгармоничностью $T_0^*(z)$:

$$L\sigma(r) = r\frac{d}{dr}(r\sigma'(r)) = \int_0^\alpha LT_0^*(re^{i\varphi}, S)\cos\lambda(\varphi+\psi)d\varphi \geq$$

$$\geq -\int_0^\alpha \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}T_0^*(re^{i\varphi}, S)\cos\lambda(\varphi+\psi)d\varphi =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\varphi}\, T_0^*(re^{i\varphi}, S)\cos\lambda(\varphi+\psi)\Big|_0^\alpha - \lambda\, T_0^*(re^{i\varphi}, S)\sin\lambda(\varphi+\psi)\Big|_0^\alpha + \lambda^2\sigma(r).$$

Разделим последнее неравенство на $r^{\lambda+1}$ и проинтегрируем его по r от S_k до R_k:

$$\int_{S_k}^{R_k}\Big\{\frac{\partial}{\partial\varphi}T_0^*(r,S)\cos\lambda\psi - \frac{\partial}{\partial\varphi}T_0^*(re^{i\alpha},S)\cos\lambda(\alpha+\psi) -$$

$$-\lambda T_0^*(re^{i\varphi},S)\sin\lambda(\varphi+\psi)|_0^\alpha\Big\}\frac{dr}{r^{\lambda+1}} \leq \frac{r\sigma'(r)}{r^\lambda}\Big|_{S_k}^{R_k} + \lambda\,\frac{\sigma(r)}{r^\lambda}\Big|_{S_k}^{R_k}. \quad (2.1)$$

Далее докажем, что

$$T\left(r, \frac{1}{||\vec{x}_u(z)||}\right) \leq 2\left(T(r,S) + m\left(r,\infty,\frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right)\right). \quad (2.2)$$

Пусть $\{b_\nu\}$ — полюсы поверхности S_u. Построим целую функцию $q(z)$ с нулями в точках $\{b_\nu\}$ (с соответствующими кратностями). Рассмотрим функцию

$$Q_1(z) = \ln(||\vec{x}_u(z)||\cdot|q(z)|) = \ln||\vec{x}_u(z)|| + \ln|q(z)|.$$

У этой функции уже нет полюсов и кроме того [1]

$$\Delta\ln||\vec{x}_u(z)|| = \frac{1}{2}\Delta\ln E = EK \geq 0,\ \forall z \in C.$$

Таким образом, $Q_1(z)$ – субгармоническая функция. Поэтому функция

$$Q(z) = \ln||\vec{x}_u(z)|| = Q_1(z) - \ln|q(z)| = Q_1(z) - Q_2(z).$$

является δ – субгармонической функцией. В силу формулы Привалова (см.[13] с.171)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q^+(re^{i\varphi})d\varphi + N(r,Q_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q^-(re^{i\varphi})d\varphi + N(r,Q_1) + Q(0),$$

где $Q^+(z) = \max(Q(z),0)$, $Q^-(z) = \max(-Q(z),0)$.

Т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ ||\vec{x}_u(re^{i\varphi})||d\varphi + N(r,Q_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{||\vec{x}_u(re^{i\varphi})||}d\varphi +$$

$$+N(r,Q_1) + Q(0).$$

Так как $N(r,Q_2) = N(r,0,q)$,

$$N(r,Q_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^r \left(\int\int\limits_{u^2+v^2\le t^2} \Delta \ln ||\vec{x}_u(z)|| \cdot |q(z)| dudv \right) \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^r \left(\int\int\limits_{u^2+v^2\le t^2} \Delta \ln ||\vec{x}_u(z)|| dudv \right) \frac{dt}{t} + N(r,0,q).$$

мы получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ ||\vec{x}_u(re^{i\varphi})||d\varphi + N(r,0,q) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{||\vec{x}_u(re^{i\varphi})||}d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^r \left(\int\int\limits_{u^2+v^2\le t^2} \Delta \ln ||\vec{x}_u(z)|| dudv \right) \frac{dt}{t} + N(r,0,q) + O(1).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^r \left(\int\int\limits_{u^2+v^2\le t^2} \Delta \ln ||\vec{x}_u(z)|| dudv \right) \frac{dt}{t} \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ ||\vec{x}_u(re^{i\varphi})||d\varphi . \qquad (2.3)$$

Рассмотрим функцию $P(z) = -Q(z) = Q_2(z) - Q_1(z)$. Эта функция также является δ-субгармонической функцией. Поэтому в силу формулы Привалова

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P^+(re^{i\varphi})d\varphi + N(r,Q_1) == \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P^-(re^{i\varphi})d\varphi + N(r,Q_2) + P(0), \quad (2.4)$$

где $P^+(z) = \max(P(z), 0)$, $P^-(z) = \max(-P(z), 0)$. Используя формулу для характеристики δ-субгармонической функции [13] с.171, (2.3),(2.4) оценим характеристику $T(r, P(z))$.

$$T(r, P(z)) = T\left(r, \frac{1}{||\vec{x}_u(z)||}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P^+(re^{i\varphi})d\varphi + N(r, Q_1) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P^-(re^{i\varphi})d\varphi + N(r, Q_2) + P(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ ||\vec{x}_u(re^{i\varphi})||d\varphi +$$

$$+N(r, \infty, S_u) + \frac{1}{2\pi}\int_0^r \left(\int\limits_{u^2+v^2\le t^2}\int \Delta \ln ||\vec{x}_u(z)||dudv\right)\frac{dt}{t} + \underline{O}(1) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ ||\vec{x}_u(re^{i\varphi})||d\varphi + N(r, \infty, S_u) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ ||\vec{x}_u(re^{i\varphi})||d\varphi + \underline{O}(1) \le$$

$$\le 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{||\vec{x}_u(r^{i\varphi})||}{||\vec{x}(re^{i\varphi})||}d\varphi + 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ ||\vec{x}(re^{i\varphi})||d\varphi + 2N(r, \infty, S) + \underline{O}(1) \le$$

$$\le 2\left(T(R, S) + m\left(r, \infty, \frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)||}\right)\right).$$

Таким образом неравенство (2.2) доказано.

Из определения $\sigma(r)$, леммы 2 и неравенства (2.2) следует :

$$\sigma(r) \le C_1 T\left(r, \frac{1}{||\vec{x}_u(z)||}\right) + 2q\varepsilon T(12r, S)) < C_2 T(12r, S)\,. \tag{2.5}$$

В силу логарифмической выпуклости $\sigma(r)$ имеем

$$r\sigma'(r) < C_3 T(2r, S)\,. \tag{2.6}$$

Таким образом применяя неравенства (2.5),(2.6) и (1.2) при $k > k_0(\varepsilon)$ получаем :

$$\frac{r\sigma'(r)}{r^\lambda}\bigg|_{S_k}^{R_k} + \lambda\,\frac{\sigma(r)}{r^\lambda}\bigg|_{S_k}^{R_k} \le \varepsilon\int_{S_k}^{R_k} \frac{T(r, S)}{r^{\lambda+1}}dr\,. \tag{2.7}$$

В силу соотношений (2.1) и (2.7) имеем

$$\int_{S_k}^{R_k} \left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}T_0^*(r, S)\cos\lambda\psi - \frac{\partial}{\partial\varphi}T_0^*(re^{i\alpha}, S)\cos\lambda(\alpha+\psi) -\right.$$

$$-\lambda T_0^*(re^{i\varphi},S)\sin\lambda(\varphi+\psi)|_0^{\alpha}\Big\}\frac{dr}{r^{\lambda+1}}\leq\varepsilon\int\limits_{S_k}^{R_k}T(r,S)r^{-\lambda-1}dr.$$

Положим в последней формуле $\psi=\frac{\pi}{2\lambda}-\alpha$

$$\int\limits_{S_k}^{R_k}\Big\{\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{q}\widetilde{w}_{kj}(r,0)\sin\lambda\alpha-\lambda T_0^*(re^{i\alpha},S)+$$

$$+\lambda\sum_{j=1}^{q}N_{kj}(r,S)\cos\lambda\alpha\Big\}\frac{dr}{r^{\lambda+1}}\leq\varepsilon\int\limits_{S_k}^{R_k}\frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}}dr. \qquad (2.8)$$

Из неравенств (2.0) и (2.2) следует, что

$$\int\limits_{S_k}^{R_k}T_0^*(re^{i\alpha},S)r^{-\lambda-1}dr\leq\int\limits_{S_k}^{R_k}T\left(r,\frac{1}{\|\vec{x}_u(z)\|}\right)r^{-\lambda-1}dr+$$

$$+2q\varepsilon\int\limits_{S_k}^{R_k}T(12r,S)r^{-\lambda-1}dr\leq(2+\varepsilon)\int\limits_{S_k}^{R_k}T(r,S)r^{-\lambda-1}dr$$

Кроме того,

$$\int\limits_{S_k}^{R_k}T(12r,S)r^{-\lambda-1}dr=12^{\lambda}\int\limits_{12S_k}^{12R_k}T(t,S)t^{-\lambda-1}dt\leq12^{\lambda}\left\{\int\limits_{S_k}^{R_k}+\int\limits_{R_k}^{12R_k}\right\}\frac{T(t,S)}{t^{\lambda+1}}dt.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{R_k}^{12R_k}T(t,S)t^{-\lambda-1}dt\leq\frac{T(R_k,S)}{R_k^{\lambda}}.$$

Отсюда в силу неравенства (1.2) получаем

$$\int\limits_{R_k}^{12R_k}T(t,S)t^{-\lambda-1}dt\leq\varepsilon\int\limits_{S_k}^{R_k}T(t,S)t^{-\lambda-1}dt\ (k\to\infty).$$

Таким образом

$$\int\limits_{S_k}^{R_k}T(12r,S)r^{-\lambda-1}dr\leq12^{\lambda}(1+\varepsilon)\int\limits_{S_k}^{R_k}T(r,S)r^{-\lambda-1}dr. \qquad (2.9)$$

Из соотношений (2.2), (2.8) и (2.9) следует, что

$$\int\limits_{S_k}^{R_k} \frac{\sum\limits_{j=1}^{q} \widetilde{w}_{kj}(r,0)}{r^{\lambda+1}} \leq 2\frac{\pi\lambda}{\sin\lambda\alpha}(1+\varepsilon_1)\int\limits_{S_k}^{R_k}\frac{T(r,S)}{r^{\lambda+1}}dr\,, \qquad (2.10)$$

где $\alpha \leq \min\left(\pi, \frac{\pi}{2\lambda}\right)$. Легко видеть, что

$$\max_{|z|=r}\ln^+\frac{1}{||\vec{x}(z)-\vec{a}_j||} = \ln^+\frac{1}{||\vec{x}(re^{i\theta_j(r)})-\vec{a}_j||} \leq \max_{|z|=r}\ln^+\frac{||\vec{x}_u(z)||}{||\vec{x}(z)-\vec{a}_j||}+$$

$$+\max_{re^{i\theta}\in G_{kj}}\ln^+\frac{1}{||\vec{x}_u(re^{i\theta})||}+2\varepsilon T(12r,S),\ \vec{a}_j\in R^3.$$

Отметим,что

$$\widetilde{w}_{kj}(r,0) = \max_{re^{i\theta}\in G_{kj}}\ln^+\frac{1}{||\vec{x}_u(re^{i\theta})||}.$$

Поэтому, используя (2.9),(2.10) и лемму 2, имеем

$$\int\limits_{r_k}^{R_k}\left(\sum_{j=1}^{q}\max_{|z|=r}\ln^+\frac{1}{||\vec{x}(z)-\vec{a}_j||}\right)r^{-\lambda-1}dr \leq 2\frac{\pi\lambda}{\sin\lambda\alpha}(1+\varepsilon)\int\limits_{r_k}^{R_k}T(r,S)r^{-\lambda-1}dr$$

где ε – произвольное положительное число. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{q}\beta(\vec{a}_j,S) \leq \liminf_{r\to\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{q}\max\limits_{|z|=r}\ln^+\frac{1}{||\vec{x}(z)-\vec{a}_j||}}{T(r,S)} \leq 2\frac{\pi\lambda}{\sin\lambda\alpha}(1+\varepsilon)$$

В силу произвольности чисел $\varepsilon > 0$, α, $0 < \alpha < \min(\frac{\pi}{2\lambda}, \pi)$, получаем утверждение теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beckenbach E.F., Hutchison G.A. Meromorphic minimal surfaces. // Pac. Journ. of Math.– 1969.– V. 28, №1.– P. 17 – 47.

2. Beckenbach E.F., Cootz. The second fundamental theorem for meromorphic minimal surfaces. // Bull. Amer. Math. Soc.– 1970.– V. 76, №4.– P. 711 – 716.

3. Beckenbach E.F., Hutchison G.A. Meromorphic minimal surfaces. // Bull. Amer. Math. Soc.– 1962.– V.-68, №5.– P. 519 – 522.

4. Beckenbach E.F., Eng E.H., Tafel R.E. Global properties of rational and logarithmico-rational minimal surfaces. // Pac. Jorn. math. Soc.– 1974.– V. 50, №2.– P. 355 – 381.

5. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Энштейна.– М.Л.: ОНТИ, 1935.– 703 с.

6. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций.– М.Л.: Гостехиздат., 1950.– 703 с.

7. Петренко В.П. Рост мероморфных функций. Харьков: Выща школа, 1978.

8. Марченко И.И. Рост мероморфных минимальных поверхностей. // Теория функций, функциональный анализ и их приложение.– 1979.– С. 31.

9. Марченко И.И., Щерба А.И. О величинах отклонений мероморфных функций // Матем. сб.– 1990.– Т. 181, №1.– С. 3 – 24.

10. Хейман У.К. Мероморфные функции.– М.: Мир, 1966.

11. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М.: Наука, 1970.

12. Марченко И.И. Рост и распределение значений плюрисубгармонических функций и мероморфных минимальных поверхностей. // Харьков, 1979.

13. Привалов И.И. Субгармонические функции.– М.: ОНТИ, 1937.– С. 171 – 197.

14. Weitsman A. A theorem on Nevanlinna deficiencies. // Acta.Math.– 1972.– V. 128, №1–2.– P. 41 - 52.

15. Хейман У.К. Многолистные функции.– М.: ИЛ, 1960.

16. Baerstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization. // Acta.Math.– 1974.– V. 133.– P. 139 – 169.

17. Essen M., Shea D.F. Applications of Denjoy integral inequalities and differential inequalities to growth problems for subharmonic and meromorphic functions // Proc.Poyal Irish.Acad.– 1982.– V. A82, №2.– P. 201 – 216.

18. Gariepy R., Lewis J.L. Space analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions. // Arkive Math.– 1975.– V. 13, №1.– P. 91 – 105.

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 511.6 № 444 , 1999, с.89-93

О дефектах плюрисубгармонических функций

И.И.Марченко
Харьковский государственный университет

В классе плюрисубгармонических функций, логарифмически растущих по одной из переменных, показано, что множество валероновских дефектных значений имеет нулевую логарифмическую емкость. Также строится пример плюрисубгармонической функции, медленно растущей по одной из переменных бесконечного нижнего порядка, для которой множество дефектных значений совпадает со всей комплексной плоскостью.

В работе [1] были введены и исследованы величины, характеризующие рост и распределение значений плюрисубгармонических функций, медленно растущих по одной из переменных. Напомним их определения. Пусть $u(z,w)$ — плюрисубгармоническая функция двух комплексных переменных [2] такая, что $u(z_0,w)\not\equiv-\infty$ при каждом фиксированном $z_0\in\mathbb{C}$ и $u(z,w_0)\not\equiv-\infty$ при каждом фиксированном $w_0\in\mathbb{C}$. Положим

$$M(z,R,u)=\max_{|t|=R}u(z,t)\ ,\quad T(r,R,u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}M(re^{i\theta},R,u)d\theta.$$

Функция $u(z,w)$ принадлежит классу M, если для каждого $k>1$ выполняется соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\sup\frac{T(1,r^k,u)}{T(r,1,u)}=C(k,u)<\infty.$$

Если $u\in M$, то её характеристика роста определяется так

$$T(r,u)=T(r,1,u).$$

С помощью этой функции естественным образом определяется порядок и нижний порядок функции u :

$$\rho=\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\log T(r,u)}{\log r}\ ,\quad \lambda=\lim_{r\to\infty}\inf\frac{\log T(r,u)}{\log r}.$$

Для каждого $w \in \mathbb{C}$ рассмотрим

$$m(r,w,u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{M(re^{i\theta}, 1+|w|, u) - u(re^{i\theta}, w)\}d\theta.$$

Величины дефектов в смысле Неванлинны и Валирона относительно w вводятся следующим образом :

$$\delta(w,u) = \lim_{r\to\infty}\inf\frac{m(r,w,u)}{T(r,u)}\ ,\ \Delta(w,u) = \lim_{r\to\infty}\sup\frac{m(r,w,u)}{T(r,u)}.$$

Множества : $D(u) = \{w : \delta(w,u) > 0\}$, $V(u) = \{w : \Delta(w,u) > 0\}$ называются соответственно множеством неванлинновских и множеством валироновских дефектных значений.

Следует отметить, что в случае $u(z,w) = \log|g(z,w)|$, где $g(z,w)$ — целая функция двух переменных, вышеуказанные характеристики совпадают с характеристиками, введенными В.П.Петренко [3]. В.П.Петренко показал, что для целых функций конечного нижнего порядка множество неванлинновских дефектных значений имеет плоскую меру нуль [3]. В дальнейшем этот результат был усилен независимо автором [1] и С.Ю.Фаворовым (см.например [4]).

Теорема А *Если $u(z,w)$ принадлежит классу M и имеет конечный нижний порядок, то множество $D(u)$ имеет логарифмическую емкость ноль.*

В работе [3] был построен пример целой функции $g(z,w) \in M$ порядка 1, для которой множество дефектных значений имеет мощность континуум.

В настоящей работе мы приводим пример плюрисубгармонической функции класса M бесконечного нижнего порядка, для которой множество неванлинновских дефектных значений совпадает со всей плоскостью. Следовательно, конечность нижнего порядка в теореме А является существенным. Так же мы исследуем структуру множества валироновских дефектных значений для плюрисубгармонических функций, логарифмически растущих по второй переменной. Дадим соответствующие определения. Для каждого $p > 0$ рассмотрим класс $M_0(p)$ плюрисубгармонических функций, для которых

$$\lim_{R\to\infty}\inf\frac{T(1,R,u)}{\ln R} = p.$$

Основными результатами работы являются следующие три теоремы.

Теорема 1 *Существует плюрисубгармоническая функция $u(z,w)$ из класса M бесконечного нижнего порядка, для которой множество $D(u)$ совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}$.*

Теорема 2 *Пусть $u(z,w) \in M_0(p)$. Тогда множество валироновских дефектных значений имеет логарифмическую емкость ноль.*

Теорема 3 *Для каждого $p > 0$ выполняется* :

$$\sup_{u \in M_0(p)} \sum_{(w)} \delta(w,u) = \infty.$$

Отметим, что если $u(z,w) = \log|g(z,w)| \in M_0(p)$, где $g(z,w)$ — целая функция, то

$$u(z,w) = \log|g_0(z) + g_1(z)w + \ldots + g_p(z)w^p|,$$

где $g_k(z)$ $(k = 0,1,\ldots,p)$ — целые функции от $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, характеристики функции $u(z,w)$ в этом случае совпадают с соответствующими характеристиками целой кривой $G = (g_0(z),\ldots,g_p(z)) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{p+1}$ [3]. Поэтому

$$\sum_{(w)} \delta(w,u) \leq p+1. \qquad (1)$$

Теорема 3 показывает, что в классе $M_0(p)$ плюрисубгармонических функций нет аналога соотношения дефектов (1).

Докажем теорему 1. Для этого рассмотрим плюрисубгармоническую функцию

$$u(z,w) = \left|e^{e^z + w}\right|.$$

Покажем, что $u(z,w)$ принадлежит классу M.

$$M(z,R,u) = \max_{|w|=R} \left|e^{e^z+w}\right| = e^R \left|e^{e^z}\right|.$$

$$T(r,R,u) = \frac{1}{2\pi} e^R \int_0^{2\pi} exp\left(e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)\right) d\theta = e^R \varphi(r),$$

где через $\varphi(r)$ обозначен соответствующий интеграл. Легко видеть, что

$$\varphi(r) > exp\left(exp\,\frac{r}{2}\right).$$

Поэтому для каждого $x > 0$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(1,r^x,u)}{T(r,1,u)} = 0.$$

Таким образом, $u(z,w) \in M$. Вычислим величину $\delta(w,u)$.

$$m(r,w,u) = \left(e^{1+|w|} - e^{|w|\cos\psi}\right)\varphi(r)\,, \text{ где } \psi = \arg\, w,$$

$$T(r,u) = T(r,1,u) = e\varphi(r).$$

Отсюда

$$\delta(w,u) = e^{|w|} - e^{|w|\cos\psi - 1}.$$

Мы видим, что для всех $w \in \mathbb{C}$ $\delta(w, u) > 0$.

Теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2. Пусть R_k — последовательность такая, что

$$p = \lim_{R\to\infty} \inf \frac{T(1,R,u)}{\log R} = \lim_{k\to\infty} \frac{T(1,R_k,u)}{\log R_k}.$$

Тогда при $k > k_0$ выполняется неравенство

$$T(1, R_k, u) < (p+1)\log R_k. \tag{2}$$

Из логарифмической выпуклости функции $T(r, R, u)$ ([2],с.173) следует, что для каждого λ, $0 < \lambda < 1$, справедливо

$$T(r, R, u) \le \lambda T(r^{\frac{1}{\lambda}}, 1, u) + (1-\lambda)T(1, R^{\frac{1}{1-\lambda}}, u). \tag{3}$$

Выберем число λ_k так, чтобы

$$R^{\frac{1}{1-\lambda_k}} = R_k \quad \text{, т.е. } \lambda_k = \frac{\log R_k - \log R}{\log R_k},$$

где $R > 0$ — произвольное фиксированное число. Пусть при $k > k_0$ $\lambda_k > 0$. Тогда соотношения (2), (3) дают :

$$T(r, R, u) \le \lambda_k T(r^{\frac{1}{\lambda_k}}, 1, u) + (p+1)\log R.$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $k \to \infty$

$$T(r, R, u) \le T(r, 1, u) + (p+1)\log R. \tag{4}$$

Далее нам потребуется следующий результат, доказанный нами в работе [1].

Лемма А *Пусть K — компакт, содержащийся в круге радиуса R, $\nu(w)$ — его равновесная мера Робена. Тогда*

$$\int_K m(r, w, u)d\nu(w) \le 3\log R[T(r, 5R, u) - T(r, 1, u)].$$

Соотношение (4) и лемма А дают

$$\int_K m(r, w, u)d\nu(w) \le 3(P+1)\log R(\log R + 5).$$

Далее, используя хорошо известный метод Альфорса [5], получаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ и для всех $w \in \mathbb{C}$, исключая, быть может, множество нулевой логарифмической емкости

$$m(r, w, u) = O(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(r, u)) \quad (r \to \infty). \tag{5}$$

Утверждение теоремы 2 является следствием соотношения (5).

Докажем теорему 3. Пусть m — любое натуральное число, $p > 0$ — любое фиксированное. Рассмотрим функцию $u(z, w) = \frac{p}{m} \log |e^z + w^m - 1|$. Легко видеть, что $u \in M_0(p)$. Кроме того, в точках $w_n = exp\left(\frac{2\pi n i}{m}\right)$ $(n = 0, 1, \ldots, m-1)$ функция $u(z, w_n)$ является гармонической в $\mathbb{C}$. Поэтому $\delta(w_n, u) = 1$ $(n = 0, 1, \ldots, m-1)$. Следовательно, $\sum\limits_{(w)} \delta(w, u) \geq m$. Отсюда следует утверждение теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко И.И. Рост и распределение значений некоторых классов плюрисубгармонических функций. // ДАН УССР. Сер. А.– 1979– №4.– С. 259 – 264.

2. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных.– М.: Наука, 430 с.

3. Петренко В.П. Рост целых функций двух комплексных переменных, медленно растущих по одной из переменных. // Изв. АН СССР. Сер. матем.– 1976– Т. 40, №1.– С. 65 – 95.

4. Петренко В.П. Рост мероморфных функций.– Харьков: Изд-во ХГУ, 1978.– 136 с.

5. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции.– М.: ГИТТЛ, 1941.– 388 с.

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9 № 444 , 1999, с.94-100

О базисности элементарных решений вырожденных линейных дифференциальных уравнений

Л.А.Власенко, А.Л.Пивень

Харьковский государственный университет

В гильбертовом пространстве рассматривается дифференциальное уравнение $\sum_{j=0}^{n} A_j u^{(j)}(t) = 0$ с линейными замкнутыми операторами. Оператор A_n при старшей производной может иметь нетривиальное ядро. Устанавливаются условия, при которых решения разлагаются в ряд по элементарным решениям. Результаты применяются к дифференциальным уравнениям в частных производных.

В гильбертовом пространстве X рассматривается дифференциальное уравнение

$$\sum_{j=0}^{n} A_j u^{(j)}(t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1}$$

где A_j – замкнутые линейные операторы с областями определения D_j, $j = 0, ..., n$. При условии обратимости оператора A_n уравнение (1) исследовалось многими авторами. Отметим здесь работу [1], в которой также содержится большая библиография. Мы не будем предполагать обратимость оператора A_n. В связи с этим уравнение (1) мы будем называть *вырожденным* или *неявным* . Единственность решения и полнота элементарных решений для неявного уравнения (1) была рассмотрена в [2]. В данной заметке исследуется разложение решений в ряд по элементарным решениям.

Функция $u(t) \in C^n\{(0,\infty), X\} \bigcap C^{n-1}\{[0,\infty), X\}$ называется *решением уравнения* (1), если она удовлетворяет уравнению (1) и

$$A_j u(t) \in C^j\{(0,\infty), X\} \bigcap C^{j-1}\{[0,\infty), X\}, \ j = 1, ..., n.$$

Решение $u(t)$ уравнения (1) называется *нормальным решением* , если функции $u(t)$, $A_j u(t)$, $j = 0, ..., n-1$ имеют конечный экспоненциальный тип. Наибольший из показателей экспоненциального роста этих функций обозначим через h_u и назовем *показателем экспоненциального роста нормального решения*.

С уравнением (1) связываем операторный пучок $L(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n} \lambda^j A_j$, определенный на $D = \bigcap\limits_{j=0}^{n} D_j \neq \{0\}$. Предполагается, что пучок $L(\lambda)$ имеет регулярную точку λ_0, т.е. существует резольвентный оператор $R(\lambda_0) = L^{-1}(\lambda_0) \in [X]$. Справедливо представление

$$L(\lambda) = \left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_0)^j T_j + E \right) L(\lambda_0), \quad T_j = \sum_{k=j}^{n} C_k^j \lambda_0^{k-j} A_k R(\lambda_0). \tag{2}$$

Также предположим, что операторы $A_j R(\lambda_0), j = 1, ..., n$ вполне непрерывны. Тогда из [3] следует, что спектр пучка $L(\lambda)$ состоит не более чем из счетного числа собственных чисел конечной кратности и резольвента $R(\lambda)$ является мероморфной оператор-функцией.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено следующее условие:

(H). Для некоторых постоянных $c, \alpha > 0$ множество $\Sigma_{\alpha,c} = \{\lambda : Re\ \lambda \leq \alpha,\ |Im\ \lambda| \geq c(1 + |Re\ \lambda|)\}$ состоит из регулярных точек пучка $L(\lambda)$.

Собственные числа пучка $L(\lambda)$, лежащие в полуплоскости $Re\ \lambda < \alpha$, занумеруем так, чтобы $Re\ \lambda_s \geq Re\ \lambda_{s+1}$. Для собственного числа λ_s рассмотрим каноническую систему $\varphi_{j,k}^s$ $(j = 1, ..., j_s,\ k = 0, ..., k_{s,j})$ собственных и присоединенных векторов [3]:

$$\sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!} L^{(r)}(\lambda_s) \varphi_{j,k-r}^s = 0; \quad k = 0, ..., k_{s,j}, \quad \varphi_{j,0}^s \neq 0.$$

Обозначим через $u_{j,k}^s(t)$, $j = 1, ..., j_s$, $k = 0, ..., k_{s,j}$ элементарные решения уравнения (1), построенные по этой канонической системе:

$$u_{j,k}^s(t) = e^{\lambda_s t} \sum_{r=0}^{k} \frac{t^r}{r!} \varphi_{j,k-r}^s; \quad s = 1, 2, ..., \ j = 1, ..., j_s,\ k = 0, ..., k_{s,j}. \tag{3}$$

Укажем условия, при которых любое нормальное решение уравнения (1) с показателем экспоненциального роста $h_u < \alpha$ разлагается в ряд по системе элементарных решений (3).

Теорема. *Пусть выполнено условие (H). Предположим, что $A_j R(\lambda_0) \in \sigma_{p_j}$* [1]*, $0 < p_j < 1/j$, $j = 1, ..., n$. Тогда для любого нормального решения $u(t)$ уравнения (1) с показателем экспоненциального роста $h_u < \alpha$ существуют не зависящие от t коэффициенты $c_{j,k}^s$ такие, что ряд*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_s} \sum_{k=0}^{k_{s,j}} c_{j,k}^s u_{j,k}^s(t)$$

[1] Определение классов σ_p вполне непрерывных операторов содержится в [4].

после, быть может, надлежащей расстановки скобок сходится к $u(t)$ при всех $t > 0$.

Доказательство. Пусть $u(t)$ – нормальное решение уравнения (1) с показателем экспоненциального роста $h_u < \alpha$. Выберем такое $\omega \in (h_u, \alpha)$, что прямая $Re\ \lambda = \omega$ состоит из регулярных точек пучка $L(\lambda)$. Обозначим $L_1(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^j T_j + E$. Тогда с использованием представления (2) имеем

$$L(\lambda) = L_1(\lambda - \lambda_0) L(\lambda_0). \tag{4}$$

Так как $A_j R(\lambda_0) \in \sigma_{p_j}$, $p_j < 1/j$, то в силу теоремы 2 [5] резольвента $L_1^{-1}(\lambda)$ является отношением двух целых функций порядка меньше единицы и минимального типа (знаменатель этого отношения – скалярная функция). Поэтому $R(\lambda) = R(\lambda_0) L_1^{-1}(\lambda - \lambda_0) = \dfrac{G(\lambda)}{g(\lambda)}$, где $G(\lambda)$, $g(\lambda)$ – целые функции порядка меньше единицы и минимального типа.

Для всех регулярных точек λ из полуплоскости $Re\ \lambda > h_u$ справедлива формула связи преобразования Лапласа $\widehat{u}(\lambda)$ решения $u(t)$ с резольвентой $R(\lambda)$:

$$\widehat{u}(\lambda) = R(\lambda) \sum_{j=1}^{n} A_j \sum_{l=0}^{j-1} \lambda^{j-1-l} u^{(l)}(0). \tag{5}$$

Обозначим

$$f(\lambda) = R(\lambda) \sum_{j=1}^{n} A_j \sum_{l=0}^{j-1} \lambda^{j-1-l} u^{(l)}(0). \tag{6}$$

Понятно, что $f(\lambda) = \dfrac{g_1(\lambda)}{g(\lambda)}$, где $g_1(\lambda) = G(\lambda) \sum_{j=1}^{n} A_j \sum_{l=0}^{j-1} \lambda^{j-1-l} u^{(l)}(0)$. Вектор-функция $g_1(\lambda)$ является целой минимального типа при порядке меньше единицы. Из условия (H) следует, что функция $g(\lambda)$ не имеет нулей, принадлежащих $\Sigma_{\alpha,c}$. В силу теоремы 8.7.1 [6] при некоторых $C_1 > 0$ и $0 < p < 1$ выполнена оценка $|g(\lambda)| \geq C_1 e^{-|\lambda|^p}$, $\lambda \in \Lambda^+ \cup \Lambda^-$. Здесь Λ^+, Λ^- – углы, лежащие в $\Sigma_{\alpha,c}$ и симметричные относительно вещественной оси (см. рис.1). Очевидно, что в этих углах справедлива оценка

$$||f(\lambda)|| = O\left(e^{\beta|\lambda|^p}\right), \ |\lambda| \to \infty \tag{7}$$

Из теоремы 8.7.1 [6] следует, что оценка (7) выполнена на последовательности отрезков l_k прямых $Re\ \lambda = -a_k$ ($a_k \to \infty$), заключенных между сторонами углов Λ^+, Λ^- (см. рис.1).

В силу формулы обращения преобразования Лапласа $\widehat{u}(\lambda)$, соотношения (5) и обозначения (6) имеем

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{Re\ \lambda = \omega} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda.$$

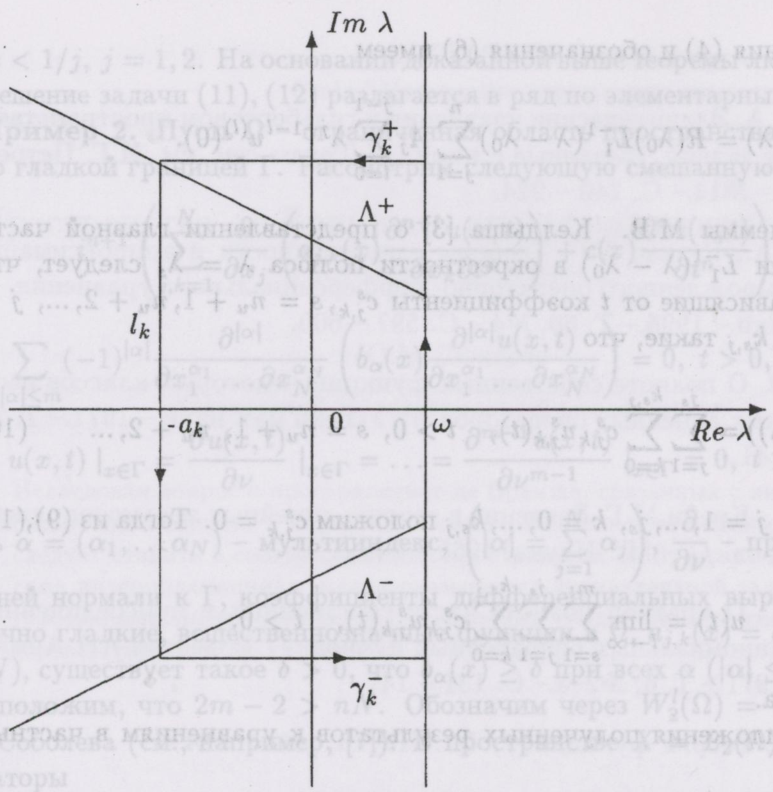

Рис. 1

Полюсы мероморфной функции $f(\lambda)$ совпадают с собственными числами λ_s, $s = n_u+1, n_u+2, \ldots$ пучка $L(\lambda)$, лежащими в полуплоскости $Re\ \lambda \leq h_u$. Здесь n_u – число собственных чисел пучка $L(\lambda)$ в полосе $h_u < Re\ \lambda < \alpha$. Пусть m_k – число полюсов функции $f(\lambda)$, лежащих в полосе $-a_k < Re\ \lambda \leq h_u$. Применим теорему о вычетах к области, ограниченной отрезками γ_k^+, γ_k^-, l_k и отрезком прямой $Re\lambda = \omega$ (см. рис.1). Получим

$$u(t) = \lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{s=n_u+1}^{m_k} Res_{\lambda_s}(e^{\lambda t}f(\lambda)) - \frac{1}{2\pi i}\int_{l_k} e^{\lambda t}f(\lambda)d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k^+} e^{\lambda t}f(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k^-} e^{\lambda t}f(\lambda)d\lambda\Big), \quad t>0. \tag{8}$$

В углах Λ^+, Λ^- применим принцип Фрагмена-Линделефа к функции $e^{\lambda t}f(\lambda)$. Поэтому два последних интеграла в (8) стремятся к нулю при $k\to\infty$. Так как на отрезках l_k выполнена оценка (7), то второй интеграл в (8) также стремится к нулю при $k\to\infty$. Таким образом,

$$u(t) = \lim_{k\to\infty}\sum_{s=n_u+1}^{m_k} Res_{\lambda_s}(e^{\lambda t}f(\lambda)), \quad t>0. \tag{9}$$

В силу соотношения (4) и обозначения (6) имеем

$$f(\lambda) = R(\lambda_0)L_1^{-1}(\lambda-\lambda_0)\sum_{j=1}^{n} A_j \sum_{l=0}^{j-1} \lambda^{j-1-l} u^{(l)}(0).$$

Поэтому из леммы М.В. Келдыша [3] о представлении главной части оператор-функции $L_1^{-1}(\lambda-\lambda_0)$ в окрестности полюса $\lambda=\lambda_s$ следует, что существуют не зависящие от t коэффициенты $c_{j,k}^s, s = n_u+1, n_u+2, \ldots,\ j = 1,\ldots,j_s,\ k=0,\ldots,k_{s,j}$ такие, что

$$Res_{\lambda_s}(e^{\lambda t} f(\lambda)) = \sum_{j=1}^{j_s}\sum_{k=0}^{k_{s,j}} c_{j,k}^s u_{j,k}^s(t), \quad t>0,\ s = n_u+1,\ n_u+2, \ldots \tag{10}$$

Для $s=1,\ldots,n_u,\ j=1,\ldots,j_s,\ k=0,\ldots,k_{s,j}$ положим $c_{j,k}^s = 0$. Тогда из (9),(10) следует, что

$$u(t) = \lim_{l\to\infty} \sum_{s=1}^{m_l}\sum_{j=1}^{j_s}\sum_{k=0}^{k_{s,j}} c_{j,k}^s u_{j,k}^s(t), \quad t>0.$$

Теорема доказана.

Приведем приложения полученных результатов к уравнениям в частных производных.

Пример 1. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial t^2} - 2\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^3 \partial t} + \frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial x^5} = 0, \quad 0 \le x \le \pi, t>0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = \frac{\partial^3 u(0,t)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u(\pi,t)}{\partial x^3} = 0,$$
$$u(0,t) + \frac{\partial^2 u(\pi,t)}{\partial x^2} = 0,\ t>0. \tag{12}$$

Положим $X = L_2[0,\pi] = L_2,\ A_0 u(x) = u^{(V)}(x),\ A_1 u(x) = -2u'''(x),$ $A_2 u(x) = u'(x),\ D_0 = \{u(x) \in L_2 : u^{(V)} \in L_2,\ u(x)$ удовлетворяет (12)$\}$, $D_1 = \{u(x) \in L_2 : u''' \in L_2,\ u'(0) = u'(\pi) = 0,\ u(0) + u''(\pi) = 0\}$, $D_2 = \{u(x) \in L_2 : u' \in L_2\}$. Тогда в пространстве L_2 задача (11),(12) записывается в виде

$$A_2 \frac{d^2u}{dt^2} + A_1 \frac{du}{dt} + A_0 u = 0, \quad t>0.$$

Нетрудно показать, что спектр пучка $L(\lambda) = \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0$ состоит из собственных чисел $\{-k^2\}_{k=1}^{\infty}$. Следовательно, условие (H) выполняется при любом $\alpha > 0$. Если λ_0 – регулярная точка пучка $L(\lambda)$, то с помощью функции Грина дифференциального оператора $L(\lambda_0)$ и признаков ядерности интегральных операторов [4] устанавливается, что $A_2 R(\lambda_0) \in \sigma_{p_2},\ A_1 R(\lambda_0) \in \sigma_{p_1}$, где $p_j < 1/j$, $j = 1, 2$. На основании доказанной выше теоремы любое нормальное решение задачи (11), (12) разлагается в ряд по элементарным решениям.

Пример 2. Пусть Ω – ограниченная область пространства R^N с достаточно гладкой границей Γ. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$i^{n+1}\left(\sum_{j,k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{j,k}(x)\frac{\partial^{n+1}u(x,t)}{\partial x_k\partial t^n}\right)+c(x)\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n}\right)+$$

$$+\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}\left(b_\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}u(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}\right)=0,\ t>0,\ x\in\Omega; \quad (13)$$

$$u(x,t)\mid_{x\in\Gamma}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}\mid_{x\in\Gamma}=\ldots=\frac{\partial^{m-1}u(x,t)}{\partial\nu^{m-1}}\mid_{x\in\Gamma}=0,\ t>0. \quad (14)$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_N)$ – мультииндекс, $\left(|\alpha| = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j\right)$, $\frac{\partial}{\partial\nu}$ – производная по внешней нормали к Γ, коэффициенты дифференциальных выражений – достаточно гладкие, вещественнозначные функции в $\overline{\Omega}$, $a_{j,k}(x) = a_{k,j}(x)$ $(k, j = 1, \ldots N)$, существует такое $\delta > 0$, что $b_\alpha(x) \ge \delta$ при всех α $(|\alpha| \le m)$ и $x \in \Omega$. Предположим, что $2m - 2 > nN$. Обозначим через $W_2^l(\Omega) = W_2^l$ пространство Соболева (см., например, [7]). В пространстве $X = L_2(\Omega) = L_2$ введем операторы

$$A_0 u = \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}\left(b_\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}\right),$$

$$A_n u = i^{n+1}\left(\sum_{j,k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{j,k}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)+c(x)u(x)\right)$$

с областями определения $D_0 = \{u(x) \in W_2^{2m} : u(x)$ удовлетворяет $(14)\}$, $D_n = \{u(x) \in L_2,\ A_n u \in L_2\}$. Тогда в пространстве L_2 задача (13),(14) записывается в виде

$$A_n\frac{d^n u(t)}{dt^n}+A_0 u(t)=0,\quad t>0.$$

Известно, что существует $A_0^{-1} \in [L_2, W_2^{2m}]$ (см., например, [7]). Понятно, что $A_n A_0^{-1} \in [L_2, W_2^{2m-2}]$, а в силу компактности вложения W_2^{2m-2} в L_2 получаем, что $A_n A_0^{-1}$ является вполне непрерывным в L_2 оператором. Из [8] следует, что любой ограниченный в L_2 оператор с областью значений в W_2^l принадлежит классу σ_p при $p > \frac{N}{l}$. Доказательство основных утверждений [8] сохраняется при замене регулярной границы на гладкую. Поэтому $A_n A_0^{-1} \in \sigma_p$, $p > \frac{N}{2m-2}$. Непосредственные вычисления показывают, что собственные числа λ_k пучка $L(\lambda) = \lambda^n A_n + A_0$ удовлетворяют соотношениям $Re\ (i\lambda_k)^n = 0$. Таким образом, все условия основной теоремы выполнены и поэтому нормальные решения задачи (13),(14) разлагаются в ряд по элементарным решениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкаликов А.А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. // Труды сем. им. И.Г. Петровского – 1989.– №14.– С. 140 – 224.

2. Власенко Л.А., Руткас А.Г. Теоремы единственности и аппроксимации для одного вырожденного операторно-дифференциального уравнения. // Матем. заметки.– 1996.– Т. 60, №4.– С. 597 – 600.

3. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов. // Успехи мат. наук.– 1971.– Т. 26, №4.– С. 15 – 41.

4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. //– М.: Наука, 1965.– 448 с.

5. Гасымов М.Г. О кратной полноте части собственных и присоединенных векторов полиномиальных операторных пучков. // Известия АН Армянской ССР.– 1971.– Т. 6, №2–3.– С. 131 – 147.

6. Титчмарш Е. Теория функций. // М.: Наука, 1980.–464 с.

7. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. // К.: Наукова думка, 1965.– 800 с.

8. Beals R. Classes of compact operators and eigenvalue distributions for elliptic operators. // Amer. J. Math.– 1967.– V. 89, №4.– P. 1056 – 1072.

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 444 , 1999, с.101-110

Пространства де Бранжа и интерполяционные задачи в классе Стилтьеса

Ю.М.Дюкарев

Харьковский государственный университет

Исследован вопрос о пространствах де Бранжа, связанных с интерполяционными задачами в классе Стилтьеса. Показано, что таким задачам следует ставить в соответствие два пространства де Бранжа. При этом сама интерполяционная задача оказывается эквивалентной задаче о согласованных интегральных представлениях скалярных произведений в соответствующих пространствах де Бранжа.

1. Введение

В статьях [1-3] пространства де Бранжа [4] появлялись в связи с интерполяционными задачами в классах неванлинновских матриц-функций. При этом по интерполяционным данным строится пространство де Бранжа так, что интерполяционная задача оказывается эквивалентной задаче об интегральном представлении скалярного произведения в соответствующем пространстве де Бранжа.

В данной статье пространства де Бранжа вводятся в связи с интерполяционными задачами в классе Стилтьеса. В статье получены следующие результаты:

1. Показано, что, в отличие от неванлинновской интерполяции, при интерполяции в классе Стилтьеса интерполяционной задаче следует ставить в соответствие не одно, а два пространства де Бранжа.

2. Поставлена задача о согласованных интегральных представлениях скалярных произведений в пространствах де Бранжа.

3. Показано, что задача о согласованных интегральных представлениях эквивалентна интерполяционной задаче в классе Стилтьеса.

Для определенности мы рассматриваем случай матричной проблемы моментов Стилтьеса, но результаты легко переносятся и на другие интерполяционные задачи в классе Стилтьеса. Приведем в удобной для нас форме некоторые результаты по матричной проблеме моментов Стилтьеса.

Пусть $s_0, s_1, ..., s_{2n}$, $n \geq 1$, обозначает множество $m \times m$ матриц и пусть K_1, K_2 обозначают блочные матрицы Ганкеля

$$K_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 & \dots & s_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & \dots & s_{2n} \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, \quad K_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & \dots & s_{2n-1} \end{bmatrix}}_{nm}.$$

Пусть $\mathcal{Z}(K_1, K_2)$ обозначает множество всех решений матричной проблемы моментов Стилтьеса, т.е., множество всех неубывающих и непрерывных справа $m \times m$ матриц-функций $\sigma(t)$, $\sigma(0) = 0$ и множество $m \times m$ матриц $M \geq 0$ таких, что

$$s_j = \int_0^\infty t^j d\sigma(t), \ 0 \leq j \leq 2n-1, \ s_{2n} = \int_0^\infty t^{2n} d\sigma(t) + M. \tag{1.1}$$

Пусть $\mathcal{Z}(K_1)$ обозначает множество всех решений проблемы моментов Гамбургера, т.е., множество неубывающих и непрерывных справа $m \times m$ матриц-функций $\sigma(t)$ с $\sigma(-\infty) = 0$ и $m \times m$ матриц $M \geq 0$ таких, что

$$s_j = \int_{-\infty}^\infty t^j d\sigma(t), \ 0 \leq j \leq 2n-1, \ s_{2n} = \int_{-\infty}^\infty t^{2n} d\sigma(t) + M. \tag{1.2}$$

Пусть $\mathcal{Z}(K_2)$ обозначает множество всех решений проблемы моментов Гамбургера

$$s_j = \int_{-\infty}^\infty t^{j-1} d\sigma(t), \ 1 \leq j \leq 2n-2, \ s_{2n-1} = \int_{-\infty}^\infty t^{2n-2} d\sigma(t) + M. \tag{1.3}$$

Мы рассмотрим *вполне неопределенный* случай $K_1 > 0$, $K_2 > 0$. В этом случае имеем $\mathcal{Z}(K_1, K_2) \neq \emptyset$, $\mathcal{Z}(K_1) \neq \emptyset$, $\mathcal{Z}(K_2) \neq \emptyset$. Пусть $U_1(z), U_2(z)$ обозначают $2m \times 2m$ матрицы-функции

$$U_1(z) = \left[\begin{array}{c|c} I + zv_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & -zv_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \\ \hline u_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & I - zu_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \alpha(z) & \beta(z) \\ \hline \gamma(z) & \delta(z) \end{array}\right], \quad U_2(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha(z) & z^{-1}\beta(z) \\ \hline z\gamma(z) & \delta(z) \end{array}\right], \tag{1.4}$$

где I - единичная $m \times m$ матрица,

$$v_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{m}, L_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I \end{bmatrix}}_{nm}, \quad L_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{nm}, \quad u_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} -s_0 \\ -s_1 \\ \vdots \\ -s_{n-1} \end{bmatrix}}_{m},$$

$$T_1 = L_2 L_1^*,\ T_2 = L_1^* L_2,\ u_1 = L_2 u_2,\ v_2 = L_1^* v_1,$$
$$R_{T_1}(z) = (I - zT_1)^{-1},\ \ R_{T_2}(z) = (I - zT_2)^{-1}.$$

Пусть $2m \times 2m$ матрица $J = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -iI \\ \hline iI & 0 \end{array}\right]$. J-формы $U_j(z), j = 1,2$ имеют вид (см. аналогичные вачисления в [7]).

$$J - U_j(z) J U_j^*(\lambda) = i(z - \bar{\lambda}) \begin{bmatrix} v_j^* \\ u_j^* \end{bmatrix} R_{T_j^*}(z) K_j^{-1} R_{T_j^*}^*(\lambda)[v_j,\ u_j]. \tag{1.5}$$

Подставим в (1.5) $\bar{z}$ вместо λ. Получим

$$J - U_j(z) J U_j^{\#}(z) = 0,\ j = 1,2. \tag{1.6}$$

Здесь $U_j^{\#}(z) = U_j^*(\bar{z}),\ \ j = 1,2.$ Заменим в (1.5) z и λ на $x \in \mathbb{R}$. Получим

$$J - U_j(x) J U_j^*(x) = 0,\ \ j = 1,2. \tag{1.7}$$

Отсюда (см. [6])

$$J - U_j^*(x) J U_j(x) = 0,\ \ j = 1,2. \tag{1.8}$$

Определение 1.1. Матрица-функция $s(z)$, голоморфная в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ называется *стилтьесовской функцией* если

1. $\{s(z) - s^*(z)\}/(z - \bar{z}),\ \mathrm{Im}\, z \neq 0.$ 2. $s(x) \geq 0,\ x < 0.$

Определение 1.2. Матрица-функция $w(z)$ голоморфная в $\mathrm{Im}\, z > 0$ называется *неванлиновской*, если $\{w(z) - w^*(z)\}/(z - \bar{z}) \geq 0$.

Определение 1.3. Пара матриц-функций $p(z), q(z)$ мерофорфных в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ называется *стилтьесовской парой* если

1. $\det(p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z)) \not\equiv 0;$

2. $[p^*(z), q^*(z)] \dfrac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0,\ \mathrm{Im}\ z \neq 0;$

3. $[p^*(z), \bar{z}q^*(z)] \dfrac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ zq(z) \end{bmatrix} \geq 0,\ \mathrm{Im}\ z \neq 0.$

Определение 1.4. Пара мероморфных в верхней полуплоскости матриц-функций $p(z), q(z)$ называется *неванлинновской парой* если

1. $\det(p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z)) \not\equiv 0;$

2. $[p^*(z), q^*(z)] \dfrac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0.$

Пара $p(z), q(z)$ называется *эквивалентной* паре $p_1(z), q_1(z)$, если существует мероморфная матрица-функция $Q(z)$, $(\det Q(z) \not\equiv 0)$ такая, что $p_1(z) = p(z)Q(z)$ и $q_1(z) = q(z)Q(z)$. Пусть $\mathcal{S}$ [соотв. $\mathcal{N}$] обозначает множество всех классов эквивалентности стилтьесовских [соотв. неванлинновских] пар.

О п р е д е л е н и е 1.5. Пусть $\sigma(t)$ является решением проблемы моментов Стилтьеса [соотв. Гамбургера]. Мы назовем стилтьесовскую [соотв. неванлинновскую] функцию $s(z)$ [соотв. $w(z)$] ассоциированной с проблемой моментов Стилтьеса [соотв. Гамбургера], если

$$s(z) = \int_0^\infty (t-z)^{-1} d\sigma(t) \text{ [соотв. } w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-z)^{-1} d\sigma(t)\text{]}.$$

Пусть $\mathcal{Q}_+(K_1, K_2)$ [соотв. $\mathcal{Q}_+(K_1)$] обозначает множество всех функций, ассоциированных с проблемой моментов Стилтьеса [соотв. Гамбургера].

Теорема 1.1 *1. Дробно-линейное преобразование*

$$s(z) = \{\gamma(z)p(z) + \delta(z)q(z)\} \cdot \{\alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z)\}^{-1} \tag{1.9}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{S}$ и $\mathcal{Q}_+(K_1, K_2)$.

2. *Дробно-линейное преобразование (1.9) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{N}$ и $\mathcal{Q}_+(K_1)$.*

3. *Дробно-линейное преобразование*

$$w(z) = \{z\gamma(z)p(z) + \delta(z)q(z)\} \cdot \left\{\alpha(z)p(z) + z^{-1}\beta(z)q(z)\right\}^{-1} \tag{1.10}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{N}$ и $\mathcal{Q}_+(K_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 3.1 в [5].

Введем обозначения:

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\},$$

$$\overline{\mathbb{C}_+} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}, \quad \overline{\mathbb{C}_-} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\},$$

H_m^2 обозначает пространство Харди $m-$мерных вектор-функций в $\mathbb{C}_+$.

2. Пространства де Бранжа, связанные с проблемой моментов Стилтьеса.

Сформулируем некоторые факты из теории пространств де Бранжа (см. [3], [4].

Пара целых $m \times m$ матриц-функций E и F называется парой де Бранжа, если

1. $E(z)E^{\#}(z) = F(z)F^{\#}(z)$, 2. $\det E(z) \neq 0,\ z \in \overline{\mathbb{C}}_+$,
3. $\det F(z) \neq 0,\ z \in \overline{\mathbb{C}}_-$, 4. $V(z) = E^{-1}(z)F(z)$ внутренняя в $\mathbb{C}_+$.

С произвольной парой де Бранжа $\{E, F\}$ свяжем линейное пространство $\mathcal{B}(E, F)$ m–мерных целых вектор-функций f таких, что

$$E^{-1}f \in H_m^2 \ominus V H_m^2$$

и будем называть пространством де Бранжа, построенным по E и F.

Теорема 2.1 *Пусть $\{E, F\}$ - пара де Бранжа целых $m \times m$ матриц-функций.*

Тогда $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E, F)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$< f, g >_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) E^{-1^*}(t) E^{-1}(t) g(t) dt. \tag{2.1}$$

Доказательство. См. [3].

Определение 2.1. Пара целых $m \times m$ матриц-функций α и β называется парой *де Бранжа-Стилтьеса*, если пары

$$(E_1, F_1) = (\alpha + i\beta, \alpha - i\beta) \text{ и } (E_2, F_2) = (\alpha + iz^{-1}\beta, \alpha - iz^{-1}\beta)$$

являются парами де Бранжа.

Теорема 2.2 *Если $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ определены формулой (1.4), то матричные полиномы $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ образуют пару де Бранжа-Стилтьеса.*

Доказательство. Сначала покажем, что пара (E_1, F_1) является парой де Бранжа. Доказательство проведем по шагам.

Шаг 1. $E_1(z)E_1^{\#}(z) = F_1(z)F_1^{\#}(z)$.

Доказательство шага 1.

$$\begin{aligned}
&E_1(z)E_1^{\#}(z) - F_1(z)F_1^{\#}(z) = \\
&= \{\alpha(z) + i\beta(z)\}\{\alpha^{\#}(z) - i\beta^{\#}(z)\} - \{\alpha(z) - i\beta(z)\}\{\alpha^{\#}(z) + i\beta^{\#}(z)\} \\
&= 2i\{\beta(z)\alpha^{\#}(z) - \alpha(z)\beta^{\#}(z)\} = 0,
\end{aligned}$$

где третье равенство вытекает из (1.6).

Шаг 2. Матричные полиномы E и F обратимы на $\mathbb{R}$.

Доказательство шага 2. Пусь $\xi^* E(x_0) = 0$ в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ и на некотором векторе $\xi \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$\xi^*\{\alpha(x_0)+i\beta(x_0)\}=0,$$
$$\xi^*\{\alpha(x_0)+i\beta(x_0)\}\{\alpha^*(x_0)-i\beta^*(x_0)\}=0,$$
$$\xi^*\{\alpha(x_0)\alpha^*(x_0)-i\alpha(x_0)\beta^*(x_0)+i\beta(x_0)\alpha^*(x_0)+\beta(x_0)\beta^*(x_0)\}=0.$$

Из (1.7) следует, что $\beta(x_0)\alpha^*(x_0)-\alpha(x_0)\beta^*(x_0)=0$. Следовательно,

$$\xi^*\{\alpha(x_0)\alpha^*(x_0)+\beta(x_0)\beta^*(x_0)\}=0.$$

Поэтому, $\xi^*\alpha(x_0)=\xi^*\beta(x_0)=0$. Матрица $U_1(x_0)$ обратима (см. (1.7)). Следовательно, $\xi^*=0$. Отсюда следует, что E_1 обратима на $\mathbb{R}$. Аналогичным образом докажем, что F_1 обратима на $\mathbb{R}$.

Шаг 3. E_1 [соотв. F_1] обратима в $\overline{\mathbb{C}_+}$ [соотв. $\overline{\mathbb{C}_-}$].

Доказательство шага 3.

$$\begin{aligned}
E_1(z)E_1^*(z)-F_1(z)F_1^*(z) &= \\
&=\alpha(z)\alpha^*(z)-i\alpha(z)\beta^*(z)+i\beta(z)\alpha^*(z)+\beta(z)\beta^*(z)\\
&\quad-\alpha(z)\alpha^*(z)-i\alpha(z)\beta^*(z)+i\beta(z)\alpha^*(z)-\beta(z)\beta^*(z)\\
&=2i\{\beta(z)\alpha^*(z)-\alpha(z)\beta^*(z)\}\\
&=-2[I\,0]\,\{J-U_1(z)JU_1^*(z)\}\begin{bmatrix} I\\ 0\end{bmatrix}=2i(\bar z-z)v_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}R^*_{T_1^*}(z)v_1.
\end{aligned}$$

Здесь четвертое равенство следует из (1.5). Следовательно, так как K_1^{-1} положительно определена и $v_1^*R_{T_1^*}(z)$ имеет ранг m

$$E_1(z)E_1^*(z)-F_1(z)F_1^*(z)>0,\ z\in\mathbb{C}_+,\ [\text{соотв.} <0,\ z\in\mathbb{C}_-.] \tag{2.2}$$

Отсюда, учитывая шаг 2, E_1 и F_1 обратимы в соответствующих замкнутых полуплоскостях.

Шаг 4. Матрица-функция $V_1(z)=E_1^{-1}(z)F_1(z)$ является внутренней в $\mathbb{C}_+$.

Доказательство шага 4. Функция $V_1(z)$ определена корректно и

$$\begin{aligned}
I-V_1(z)V_1^*(z)&=I-E_1^{-1}(z)F_1(z)F_1^*(z)E_1^{-1^*}(z)\\
&=E_1^{-1}(z)\{E_1(z)E_1^*(z)-F_1(z)F_1^*(z)\}E_1^{-1^*}(z).
\end{aligned}$$

Таким образом, $V_1(z)$ унитарна на оси по шагу 1 и является сжимающей в $\mathbb{C}_+$ по (2.2). Следовательно, V_1 является внутренней в $\mathbb{C}_+$.

Мы показали, что пара (E_1,F_1) является парой де Бранжа. Аналогичным образом убеждаемся в том, что (E_2,F_2) является парой де Бранжа. Поэтому пара (α,β) является парой де Бранжа-Стилтьеса.

Теорема 2.2 доказана.

Определение 2.2. Обозначим $\mathcal{B}(E_1,F_1)$ [соотв. $\mathcal{B}(E_2,F_2)$] пространства де Бранжа, построенное по E_1 и F_1 [соотв. E_2 и F_2]. Эти два пространства будем называть пространствами де Бранжа-Стилтьеса, построенными по α и β.

3. Согласованные интегральные представления скалярных произведений в пространствах де Бранжа-Стилтьеса.

Из определения 2.1 следует, что

$$F(z) \in \mathcal{B}(E_1, F_1) \iff F(z) = \sum_{j=0}^{n} F_j z^j,\ F_j \in \mathbb{C}^m, \tag{3.1}$$

$$f(z) \in \mathcal{B}(E_2, F_2) \iff f(z) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j z^j,\ f_j \in \mathbb{C}^m. \tag{3.2}$$

Введем вектор-колонки

$$\mathfrak{F} = \begin{bmatrix} F_0 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1)m}, \quad \mathfrak{f} = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{nm}.$$

Теорема 3.1 *Если $F, G \in \mathcal{B}_1$ и $f, g \in \mathcal{B}_2$, то*

$$< F, G >_{\mathcal{B}_1} = \mathfrak{F}^* \mathfrak{K}_1 \mathfrak{G}, \quad < \mathfrak{f}, \mathfrak{g} >_{\mathcal{B}_2} = \mathfrak{f}^* \mathfrak{K}_2 \mathfrak{g}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Из определения 1.4 следует, что пара $\begin{bmatrix} I \\ iI \end{bmatrix}$ является неванлинновской. Из теоремы 1.1 следует, что

$$w(z) = \{\gamma(z) + i\delta(z)\} \cdot \{\alpha(z) + i\beta(z)\}^{-1} \in \mathcal{Q}_+(K_1).$$

Поэтому

$$w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-z)^{-1} d\sigma(t), \quad \sigma(t) \in \mathcal{Z}(K_1).$$

По теореме 2.2 $E_1(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ обратима в $\overline{\mathbb{C}}_+$. По формуле обращения преобразования Стилтьеса

$$\begin{aligned}
2\pi i\, d\sigma(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} [w(x+i\varepsilon) - w^*(x+i\varepsilon)]dx = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} [(\gamma(x+i\varepsilon) + i\delta(x+i\varepsilon))E_1^{-1}(x+i\varepsilon)) \\
&\quad - E_1^{-1^*}(x+i\varepsilon)(\gamma^*(x+i\varepsilon) - i\delta^*(x+i\varepsilon))]dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} E_1^{-1^*}(x+i\varepsilon)[E_1^*(x+i\varepsilon)(\gamma(x+i\varepsilon) + i\delta(x+i\varepsilon)) \\
&\quad - (\gamma^*(x+i\varepsilon) - i\delta^*(x+i\varepsilon))E_1(x+i\varepsilon)]E_1^{-1}(x+i\varepsilon)dx \\
&= E_1^{-1^*}(x)[(\alpha^*(x) - i\beta^*(x))(\gamma(x) + i\delta(x)) \\
&\quad - (\gamma^*(x) - i\delta^*(x))(\alpha(x) + i\beta(x))]E_1^{-1}(x)dx \\
&= E_1^{-1^*}(x)(2i)E_1^{-1}(x)dx.
\end{aligned}$$

Здесь четвертое равенство следует из (1.8). Таким образом,

$$d\sigma(x) = \frac{1}{\pi} E_1^{-1^*}(x) E_1^{-1}(x) dx.$$

Как следует из 1.2 ($M=0$)

$$s_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{E_1(t)E_1^*(t)\}^{-1}t^j dt, \quad 0 \le j \le 2n.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} < F,G >_{B_1} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(t)E_1^{*-1}(t)E_1^{-1}(t)G(t)dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n} F_j^* t^j)E_1^{*-1}(t)E_1^{-1}(t)(\sum_{k=0}^{n} G_k t^k)dt \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} F_j^* \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_1^{*-1}(t)E_1^{-1}(t)t^{j+k}dt\, G_k \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} F_j^* s_{j+k} G_k = \mathfrak{F}^*\mathfrak{K}_1\mathfrak{G}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом убеждаемся в справедливости равенства $< f,g >_{B_2} = \mathfrak{f}^*\mathfrak{K}_2\mathfrak{g}$.

Теорема 3.1 доказана.

Определение 3.1. Возрастающая и непрерывная справа $m \times m$ матрица-функция $\sigma(t)$ ($\sigma(0)=0$) и $m\times m$ матрица $M \ge 0$ называются *решением задачи о согласованном интегральном представлении скалярных произведений в пространствах де Бранжа-Стилтьеса* если

$$< F,G >_{B_1} = \int_0^{\infty} F^*(t)d\sigma(t)G(t) + F_n^* M G_n, \tag{3.4}$$

$$< f,g >_{B_2} = \int_0^{\infty} f^*(t)td\sigma(t)g(t). \tag{3.5}$$

Пусть $\mathcal{P}(K_1,K_2)$ обозначает множество всех решений задачи (3.4)-(3.5).

Теорема 3.2 $\{\sigma(t),M\} \in \mathcal{Z}(K_1,K_2) \iff \{\sigma(t),M\} \in \mathcal{P}(K_1,K_2)$.

Доказательство. Докажем необходимость. Если $\{\sigma(t),M\} \in \mathcal{Z}(K_1,K_2)$, то

$$\begin{aligned} < F,G >_{B_1} &= \mathfrak{F}^*\mathfrak{K}_1\mathfrak{G} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\mathfrak{F}_j^* s_{j+\ell}\mathfrak{G}_\ell \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} F_j^*\int_{-\infty}^{\infty} t^{j+k}d\sigma(t)G_k + F_n^* M G_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F^*(t)d\sigma(t)G(t) + F_n^* M G_n. \end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается (3.5). Следовательно, $\{\sigma(t), M\} \in \mathcal{P}(K_1, K_2)$.

Докажем достаточность. Если $\{\sigma(t), M\} \in \mathcal{P}(K_1, K_2)$, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^* \mathfrak{K}_1 \mathfrak{G} &= < F, G >_{B_1} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F^*(t) d\sigma(t) G(t) + F_n^* M G_n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} F_j^* \int_{-\infty}^{\infty} t^{j+k} d\sigma(t)\, G_k + F_n^* M G_n. \end{aligned}$$

Следовательно, $\forall F_0, \ldots, F_n, G_0, \ldots, G_m \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$[F_0^* \ldots F_n^*] \begin{bmatrix} s_0 & \ldots & s_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & \ldots & s_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix} =$$

$$= [F_0^* \ldots F_n^*] \begin{bmatrix} \int_0^\infty d\sigma(t) & \ldots & \int_0^\infty t^n d\sigma(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^\infty t^n d\sigma(t) & & \int_0^\infty t^{2n} d\sigma(t) + M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix}.$$

Окончательно, в силу произвольности $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$,

$$s_j = \int_0^\infty t^j d\sigma(t), \ 0 \le j \le 2n-1, \ s_{2n} = \int_0^\infty t^{2n} d\sigma(t) + M,$$

т.е., $\{\sigma(t), M\} \in \mathcal{Z}(K_1, K_2)$.

Теорема 3.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахнович Л.А. Метод операторных тождеств // Алгебра и анализ. – 1993. – Т.5, вып.1. – С. 3 – 80.

2. Кацнельсон В.Э., Хейфец А.Я., Юдицкий П.М. Абстрактная интерполяционная проблема и теория расширений изометрических операторов// Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций: Сборник научных трудов. – Киев: Наукова думка. – 1987. – С. 83 – 96.

3. Dym H. On Hermitian Block Hankel Matrices, Matrix Polynomials, the Hamburger Moment Problem, Interpolation and Maximum Entropy //Integral Equations and Operator Theory. – 12(1989). – P. 757 – 812.

4. De Branges L. Hilbert spaces of entire functions// Prentice Hall:N.-Y.–1968. – 336 p.

5. Дюкарев Ю.М., Кацнельсон В.Э. Мультипликативные и аддитивные классы Стилтьеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи// Теория функций, функцион. анализ и их прил.– 1981, вып.36. – С. 13 – 27.

6. Потапов В.П. Дробно-линейные преобразования матриц.// Исследования по теории операторов и их приложениям: Киев, 1979.– С. 75 – 97.

7. Dyukarev Yu.M. Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolation problems in the Stieltjes class// Operator Theory: Advances and Applications. – 95(1997). – P. 165 – 184.