

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна
Факультет радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем
Кафедра теоретичної радіофізики

ЗАТВЕРДЖУЮ

В. о. завідувача кафедри

В. В. Хардіков
підпис ініціали, прізвище

“ 12 ” грудня 2023 року

Кваліфікаційна робота магістра

на тему: Взаємодія електромагнітних полів із середовищем із близьким до нуля показником заломлення в резонаторі з ідеальними провідними стінками.

Виконав: студент II курсу магістратури, групи РР-61 спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали, освітньо-професійна програма «Радіофізика і електроніка»

Микита АНТЮФЄЄВ.

Керівник
доктор фіз.-мат. наук, проф

Дмитро БАТРАКОВ

Консультант
канд. фіз.-мат. наук

Марія АНТЮФЄЄВА

2023 рік

РЕФЕРАТ

Антюфєєв М.О. Взаємодія електромагнітних полів із середовищем із близьким до нуля показником заломлення в резонаторі з ідеальними провідними стінками. Дипломна робота магістра за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали». Харків. Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, кафедра теоретичної радіофізики, 2023, 12 рис., 50 стор., 60 посилань. .

У кваліфікаційній роботі магістра розглянуто задачу про електромагнітні поля у резонаторі з ідеально провідними стінками, що заповнений штучним матеріалом з дисперсією, таким що його показник заломлення близький до нуля в певному діапазоні частот. Задачу розв'язано у рамках еволюційного підходу до задач електродинаміки в часовій області (метод модового базису). Отримано розв'язки у випадку збуджених полів в резонаторі, для гармонічної залежності від часу модових коефіцієнтів сторонніх струмів. Наведено числові розрахунки і проаналізовано власні характеристики заповненого резонатора, залежно від параметрів середовища, а також основні особливості вимушених коливань в такому резонаторі, також залежно від параметрів резонатора та середовища.

SUMMARY

Antyufeyev M. Interaction of electromagnetic fields with a medium with a near-zero refractive index in a resonator with perfect conducting walls. Thesis master on 105 «Applied physics and nanomaterials». Kharkiv. V. N. Karazin Kharkiv National University, Department of theoretical physics, 2023, 12 figures, 50 pages, 60 references.

The master's qualification work deals with the problem of electromagnetic fields in a cavity resonator with perfectly conducting walls, which is filled with an artificial material with a dispersion such that its refractive index is close to zero in a certain frequency range. The problem was solved within the Evolutionary Approach to Electromagnetics in Time Domain (Mode Basis Method). Solutions were obtained in the case of excited fields in the resonator, for the harmonic time dependence of the mode coefficients of external currents. Numerical calculations are presented and the eigencharacteristics of the filled resonator are analyzed, depending on the parameters of the media, as well as the main features of forced oscillations in such a resonator, also depending on the parameters of the resonator and the medium.

ЗМІСТ

РЕФЕРАТ	2
SUMMARY	3
ЗМІСТ	4
Вступ.....	5
1 Аналітичний огляд	7
1.1 Загальний огляд метаматеріалів	7
1.2 Матеріали з показником заломлення близьким до нуля.....	11
1.2.1 Особливості NZI.....	12
1.2.2 Конуси Дірака.....	13
1.2.3 Посилення поля	16
1.2.4 Створення матеріалів із майже нульовим індексом.....	16
1.2.5 Фононні матеріали	18
1.2.6 Міжсмугові матеріали	20
1.3 Обговорення та перспективи	21
2 Постановка задачі та її розв’язок.....	24
2.1 Представлення електромагнітних полів в резонаторі, який заповнено середовищем в рамках ЕАЕ	24
2.2 Еволюційні рівняння.....	25
2.3 Еволюційні рівняння для електромагнітного поля в резонаторі, який заповнено дисперсійним середовищем з показником заломлення близьким до нуля у певному діапазоні частот	27
2.4 Розв’язок еволюційних рівнянь (2.15) – (2.16) у випадку гармонічних у часі сторонніх струмів.	30
3 Числове моделювання	33
3.1 Параметри середовища і власні параметри заповненого резонатора.....	33
3.2 Параметри коливань, що збуджені в заповненому резонаторі	39
Висновки	44
Посилання	46

ВСТУП

Протягом останніх десятиліть значно зросла зацікавленість у вивченні поширення хвиль та перетворення електромагнітних полів у середовищах електродинамічні властивості яких мають незвичайний вигляд, наприклад є модульованими у часі та/або просторі, мають нелінійні характеристики або залежать від частоти. На базі таких досліджень є 90-х роках минулого століття виник новий клас матеріалів, які називають метаматеріалами. Метаматеріали – це штучні речовини з унікальними електромагнітними властивостями. Метаматеріали індукують низькочастотні та високочастотні ширини забороненої зони для контролю поширення хвиль з різною довжиною хвилі, а також часто застосовуються в мікрохвильовій техніці, хвилеводах, компенсації дисперсії, розумних антенах і лінзах. Наприклад, діелектрична і магнітна проникність метаматеріалів можуть приймати позитивні або негативні значення. У зв'язку з меншими розмірами однієї комірки, ніж їх довжина хвилі, для хвилеводіння використовується селективна частота поверхневих метаматеріалів. Потреба в регульованих заборонених зонах також може призвести до безлічі досліджень можливості налаштування метаматеріалів для структур, які працюють з різною швидкістю.

З іншого боку об'ємні резонатори є важливими компонентами мікрохвильових і оптичних систем. Вони використовуються як фільтри або як пристрої для посилення певних фізичних взаємодій, на їх основі конструюють випромінювальні антени або електромагнітні джерела, такі як магнетрони або лазери. Останнім часом вони широко використовуються для підвищення чутливості датчиків та в конструкції різноманітних сенсорів, в тому числі й біологічних. Дуже широке застосування мають об'ємні резонатори у вимірюваннях, при дослідженні властивостей матеріалів тощо. Існують різні за конструкцією мікрохвильові резонатори для відмінних областей застосування. Враховуючи продемонстроване метаматеріалами величезне покращення функцій електромагнітного відгуку, поєднання резонаторів з такими середовищами, що мають особливі електромагнітні властивості може забезпечити захоплюючий потенціал майбутнього проектування окремих пристроїв.

Таким чином, дуже важливим є розв'язання теоретичних та практичних задач, які призводять до розширенням функціональності об'ємних резонаторів шляхом заповнення їх специфічними середовищами. Тому предметом вивчення цієї дипломної роботи є об'ємний мікрохвильовий

резонатор, який заповнено середовищем з часовою дисперсією, що забезпечує близькі до нуля значення показника заломлення в певній області частот, де показник заломлення середовища змінює своє значення з від'ємного на додатне. Взаємодія електромагнітних полів, що існують в мікрохвильовому резонаторі, з середовищем змінюють електродинамічні характеристики резонатора і впливають, в першу чергу, на його резонансну частоту. Для того щоб зрозуміти до яких наслідків може привести заповнення резонатора таким матеріалом, в першому розділі дипломної роботи наведено огляд метаматеріалів, їх можливостей та застосування. Другий розділ роботи представляє постановку та розв'язок теоретичної електродинамічної задачі про вимушені електромагнітні коливання у резонаторі з ідеально провідними стінками що заповнений дисперсним середовищем, яке має показник заломлення близький до нуля в певному діапазоні частот. Розв'язок проведено в рамках еволюційного підходу до задач електродинаміки у часовій області (Evolutionary Approach to Electromagnetics in Time Domain), також відомий як метод модового базису. Третій розділ роботи надає чисельні результати стосовно поведінки електромагнітних полів в такому резонаторі, змальовує основні риси власних характеристик резонатора та вимушених коливань в ньому.

1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД

1.1 Загальний огляд метаматеріалів

Метаматеріали протягом їх розробки та удосконалення також називали як «середовища лівої руки» (LHM), чи «лівосторонні матеріали», середовища з негативним показником заломлення, «середовище зворотної хвилі», «подвійно від'ємні матеріали», та ін. Концепція цього матеріалу була запропонована ще в 1968 році, як теоретична можливість, хоча перші ідеї з'явилися ще наприкінці дев'ятнадцятого сторіччя. У 1999 році вчений Джон Пендрі визначив практичний спосіб виготовлення LHM, який не відповідав правилу правої руки звичайного типу, [1]. У 2005 році Сміт продемонстрував новий метаматеріал, який демонструє негативну і позитивну діелектричну проникність одночасно. Крім того, він провів мікрохвильове експериментальне дослідження, щоб перевірити незвичайні характеристики такого матеріалу [2].

Термін «метаматеріал» походить з грецької мови, значення частки «мета» є вищим/поза межним. Це штучний синтетичний композиційний матеріал, отриманий шляхом з'єднання ряду елементів, включаючи пластик і метали. Електромагнітні метаматеріали це тип синтетичного конструкційного/штучного матеріалу, розроблений шляхом створення однорідних металевих структур і використовуваний для вимірювання вологості, тиску, температури, маскування, хвилеводів, бездротової передачі даних та біологічних молекул, присутніх у навколишньому середовищі. Магнітна проникність та електрична проникність використовуються для характеристики електромагнітного матеріалу. Цей тип метаматеріалів або металодіелектричний або повністю діелектричний метаматеріал і складається з більшої кількості діелектричних матеріалів, що призводить до сильного контрасту між діелектричними проникненнями сусідніх частин. Крім того, такі типи метаматеріалів зазвичай впливають на електромагнітні хвилі невеликою довжиною хвилі в порівнянні з довжиною хвилі

електромагнітного випромінювання, і такий тип метаматеріалу використовується в оптиці, а також мікрохвильовій техніці [3, 4].

Добре відомо, що реакція системи на присутність електромагнітного поля багато в чому визначається властивостями використовуваних матеріалів. Ми описуємо ці властивості, визначаючи макроскопічні параметри діелектричної проникності та магнітної проникності цих матеріалів. Це дозволяє класифікувати середовище в такий спосіб [5]. Середовище, у якого діелектрична і проникність більша за нуль ($\epsilon > 0$, $\mu > 0$), називається подвійним позитивним середовищем (DPS). Під це позначення підпадає більшість середовищ, що зустрічаються в природі (наприклад, діелектриків). Середовище з діелектричною проникністю менше нуля і магнітною проникністю більше нуля ($\epsilon < 0$, $\mu > 0$) називають епсилон-від'ємним середовищем (ENG). У певних частотних режимах багато видів плазми мають цю характеристику. Наприклад, благородні метали (наприклад, срібло, золото) поведуться подібним чином в інфрачервоних та видимих частотних областях. Середовище з діелектричною проникністю більше за нуль і магнітною проникністю менше за нуль ($\epsilon > 0$, $\mu < 0$) називають мю-від'ємним середовищем (MNG). У певних частотних режимах цю характеристику виявляють деякі гіротропні матеріали. Були створені штучні матеріали, які також мають властивості DPS, ENG та MNG. Середовище, у якого діелектрична та магнітна проникність менше нуля ($\epsilon < 0$, $\mu < 0$), називають подвійно від'ємним (DNG) середовищем. На сьогоднішній день цей клас матеріалів продемонстровано лише на штучних конструкціях. Вищеописану класифікацію середовищ наведено на Рис. 1.1.

Незважаючи на те, що матеріал часто описують за допомогою деякого постійного значення діелектричної проникності та магнітної проникності, насправді всі властивості матеріалу залежать від частоти. Існує кілька моделей матеріалів, побудованих для опису частотної характеристики матеріалів. Оскільки магнітне поле електромагнітної хвилі менше її електричного поля на хвильовий опір середовища, в якому вона

поширюється, зазвичай акцентують увагу на тому, як відбувається рух електрона за наявності ядра і, отже, основний дипольний момент цієї системи змінюється під дією електричного поля. Розуміння цієї поведінки призводить до моделі електричної сприйнятливості середовища і, отже, її діелектричної проникності. З іншого боку, існує безліч середовищ, для яких реакція магнітного поля є домінуючою. У загальному випадку магнітний відгук матеріалу можна описати повністю симетричним по відношенню до електричного поля способом, використовуючи магнітну сприйнятливість і, отже, його магнітну проникність. Хоча магнітні диполі фізично виникають з моментів, пов'язаних із струмовими петлями, їх можна описати математично за допомогою магнітного заряду та струму, як аналогів електричних заряду та струму.

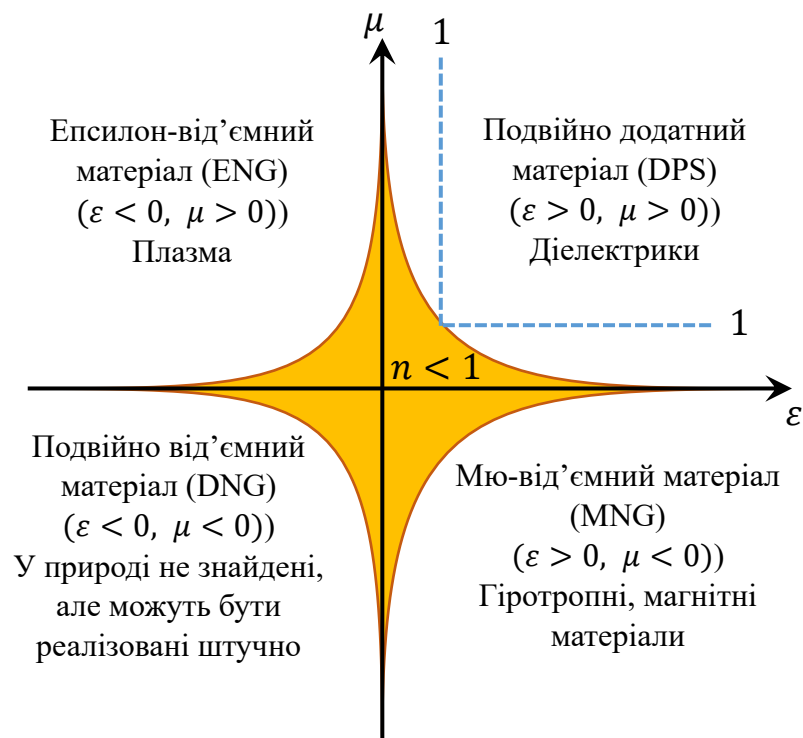


Рис. 1.1. Класифікація матеріалів на основі значень ефективних параметрів (магнітної проникності та діелектричної проникності).

Однією з найвідоміших моделей матеріалу є модель Лоренца [5]. Вона отримана шляхом опису руху електрона в термінах веденого гармонійного загасаючого осцилятора. Щоб спростити обговорення, ми припустимо, що зарядам можна рухатися в тому ж напрямку, що й електричне поле. Модель Лоренца описує часовий відгук компоненти поляризації середовища на дію компоненти електричного поля як

$$\frac{d^2}{dt^2}P_j + \Gamma_L \frac{d}{dt}P_j + \omega_0^2 P_j = \varepsilon_0 \chi_L E_j. \quad (1.1)$$

Перший доданок зліва враховує прискорення зарядів, другий – механізми затримки системи з коефіцієнтом загасання (втрат) Γ_L , а третій – відновлюючі сили, з характерною частотою $f_0 = \omega_0/2\pi$. Керуючий член має коефіцієнт зв'язку χ_L . Відгук у частотній області, якщо припустити, що залежність від часу $\exp(i\omega t)$, визначається виразом

$$P_j(\omega) = \frac{\chi_L}{-\omega^2 + i\Gamma_L \omega + \omega_0^2} \varepsilon_0 E_j \quad (1.2)$$

При малих втрат $\Gamma_L/\omega_0 \ll 1$ відгук явно резонансний на власній частоті f_0 . Поляризація та електричні поля пов'язані з електричною сприйнятливістю таким чином:

$$\chi_{e,Lorentz}(\omega) = \frac{P_j(\omega)}{\varepsilon_0 E_j(\omega)} = \frac{\chi_L}{-\omega^2 + i\Gamma_L \omega + \omega_0^2} \quad (1.3)$$

Діелектрична проникність тоді виходить відразу як $\varepsilon_{Lorentz}(\omega) = \varepsilon_0 [1 + \chi_{e,Lorentz}(\omega)]$.

Існує кілька добре відомих окремих випадків моделі Лоренца. Коли член прискорення малий у порівнянні з іншими, виходить модель Дебая:

$$\Gamma_d \frac{d}{dt}P_j + \omega_0^2 P_j = \varepsilon_0 \chi_d E_j, \quad \chi_{e,Debye}(\omega) = \frac{\chi_d}{i\Gamma_d \omega + \omega_0^2} \quad (1.4)$$

Коли сила, що відновлює, незначна, виходить модель Друде:

$$\frac{d^2}{dt^2}P_j + \Gamma_{dr} \frac{d}{dt}P_j = \varepsilon_0 \chi_{dr} E_j, \quad \chi_{e,Drude}(\omega) = \frac{\chi_{dr}}{-\omega^2 + i\Gamma_{dr} \omega} \quad (1.5)$$

де коефіцієнт зв'язку зазвичай являє собою плазмову частоту $\chi_{dr} = \omega_p^2$. У всіх цих моделях високочастотна межа діелектричної проникності наближається до значення вільного простору.

Якщо припустити, що коефіцієнт зв'язку завжди позитивний, лише моделі Лоренца і Друде можуть давати негативні діелектричні проникності. Оскільки модель Лоренца є резонансною, дійсна частина сприйнятливості ϵ' , отже, діелектричної проникності стає негативною у вузькій області частот над резонансом. З іншого боку, модель Друде може давати негативну дійсну частину діелектричної проникності широкому спектральному діапазоні, тобто $\omega < \sqrt{\omega_p^2 - \Gamma_{dr}^2}$

1.2 Матеріали з показником заломлення близьким до нуля

Завдяки раннім експериментам із дзеркалами, лінзами та призмами дослідники навчилися створювати матеріали, що забезпечують широкий спектр бажаних оптичних властивостей, навіть створюючи ефекти, недосяжні за допомогою натуральних матеріалів [6,7,8,9]. Центральне місце у цьому прагненні займало вивчення методів посилення, як правило, слабкої взаємодії між електромагнітною хвилею і матерією, що дозволило розширити простір для проектування та керування фотонами. Серед безлічі вивчених підходів є дослідження матеріалів, які мають показник заломлення (n) близький до нуля для певних довжин хвиль – ці матеріали називаються матеріалами з майже нульовим, близьким до нуля, або надмалим показником заломлення (near-zero-index, NZI). З часу новаторських робіт Надера Енгети, Річарда Ціолковські, Стефана Еноха та інших [2,10,11] було показано, що матеріали NZI роблять безліч захоплюючих, а іноді і приголомшливих оптичних ефектів, таких як тунелювання фотонів [9,12], суперзв'язок [13], контроль викидів [14] та екстремальних нелінійних взаємодій [15].

Умову NZI було реалізовано в багатьох системах, включаючи гомогенні матеріали, метали [16], напівпровідники леговані і фононні матеріали [17] або через структуровані матеріали, такі як метаматеріали, хвилеводи поблизу частоти відсічення [18], резонансні порожнини [19] і фотонні кристали [20]. Незважаючи на різноманітність, ці підходи зберігають

загальні риси, що лежать в основі унікальних ефектів NZI: швидкості, що розходяться, розширення довжини хвилі і посилення електричного поля.

1.2.1 Особливості NZI

Розбіжність швидкості. Для ілюстрації явища розбіжності швидкостей у матеріалі з показником заломлення, близьким до нуля, розглянемо поширення плоскої хвилі в області, що описується моделлю Друде (1.5). У випадку відсутності втрат, при $\omega \rightarrow \omega_p$, де ω_p це плазмова частота, $n(\omega) \rightarrow 0$. Таким чином, фазова швидкість розходиться ($v_p(\omega) = c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ та $\varepsilon = n^2/\mu$, де c це швидкість світла у вакуумі, ε це діелектрична проникність, μ це проникність матеріалу), а групова швидкість:

$$v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{\varepsilon(\omega) + \frac{\omega d\varepsilon(\omega)}{2 d\omega}} \quad (1.6)$$

прагне до нуля, оскільки нахил діелектричної проникності кінцевий [21]. Приклад розбіжності швидкостей, був отриманий в оптичному діапазоні з використанням порожнього металевого хвилеводу. Структура на основі срібла досягла ефективної умови NZI для плазмонних мод поблизу відсікання. Хвилевод збуджувався пучком високоенергетичних електронів, і розсіяне оптичне випромінювання спостерігалось просторово та спектрально. Кутова діаграма випромінювання наближається до лінійного диполя в міру наближення довжини хвилі до відсікання, демонструючи велику фазову швидкість спрямованої моди. Крім того, змінюючи положення електронного пучка всередині хвилеводу при вимірюванні інтенсивності розсіяного спектра, спостерігалось просторове розподілення резонансної моди. Шляхом об'єднання енергії розсіяного світла з інтерференційною картиною було розраховано імпульс моди визначення дисперсії хвилеводу ($k = m\pi/L$, де L — довжина хвилеводу, у разі 2 мкм). При ширині менше 200 нм хвилеводи демонструють режим відсікання з імпульсом, близьким до нуля, значно зменшеною груповою швидкістю.

Розширення довжини хвилі. Істотне розширення довжини хвилі в матеріалах NZI є природним наслідком фазової швидкості, що розходиться.

$\lambda_{NZI} = \lambda_0/n$ (λ_{NZI} – довжина хвилі, при якій n наближається до 0, а λ_0 – довжина хвилі у вільному просторі); таким чином, коли показник заломлення n малий, довжина хвилі різко збільшується. Наслідком цього є малий, майже незначний, зсув фази ($kL = 2\pi L/\lambda_{NZI} \rightarrow 0$) хвилі, що поширюється через плівку NZI з товщиною L , набагато більшою, ніж довжина хвилі у вільному просторі. Явище розширення довжини хвилі у матеріалах NZI спостерігалось з використанням гофрованої хвилеводної структури, яка досягала стану NZI за рахунок оптичної дисперсії конуса Дірака [22]. Коли довжина хвилі збудження на обох кінцях хвилеводу була налаштована на точку індексу нульової моди, спостерігалася інтерференційна картина з довжиною биття, що розходиться, що вказує на незначне випередження фази на великих відстанях. Цікаво, що це явище легко спостерігати за допомогою стандартних об'єктивів, оскільки розширення довжини хвилі призводить до появи стоячих хвиль з вузлами, розмірами, що перевищують дифракційну межу у вільному просторі. Цей ефект довжини хвилі, що розходиться, використовувався для створення нелінійних оптичних пристроїв без фазового синхронізму, суперзв'язку, резонансного закріплення антени і геометрично інваріантних резонаторів.

1.2.2 Конуси Дірака

Графен є двовимірним одношаровим розташуванням атомів вуглецю в гексагональній решітці, що має конічну форму потенційної ями у валентній зоні та зоні провідності. Ці конуси перетинаються в спільній точці, що називають точкою Дірака [23, 24]. Дисперсія біля точки Дірака є лінійною, $E = \hbar k v_f$, де E це енергія, k – хвильовий вектор, v_f – швидкість Фермі, а $\hbar = (h/2\pi)$ це приведена стала Планка. Через лінійну дисперсію поведінка електронів провідності в графені відрізняється від такої в ізоляторах та металах, які є параболічними дисперсійними матеріалами.

Вчені проаналізувавши можливість конусів Дірака і дійшли, що для реалізації нульового показника заломлення ідеальною є оптична система, яка підтримує подвійні конуси Дірака і демонструє діраківську лінійну

дисперсію, Рис. 1.2 [25 26]. Автори [29,30] назвали такі середовища (Рис. 1.2 б) середовищами з від'ємним-нуль-додатним показником заломлення (negative-zero-positive index, NZPI) і виступили за використання метаматеріалу з низькими втратами для цієї мети.

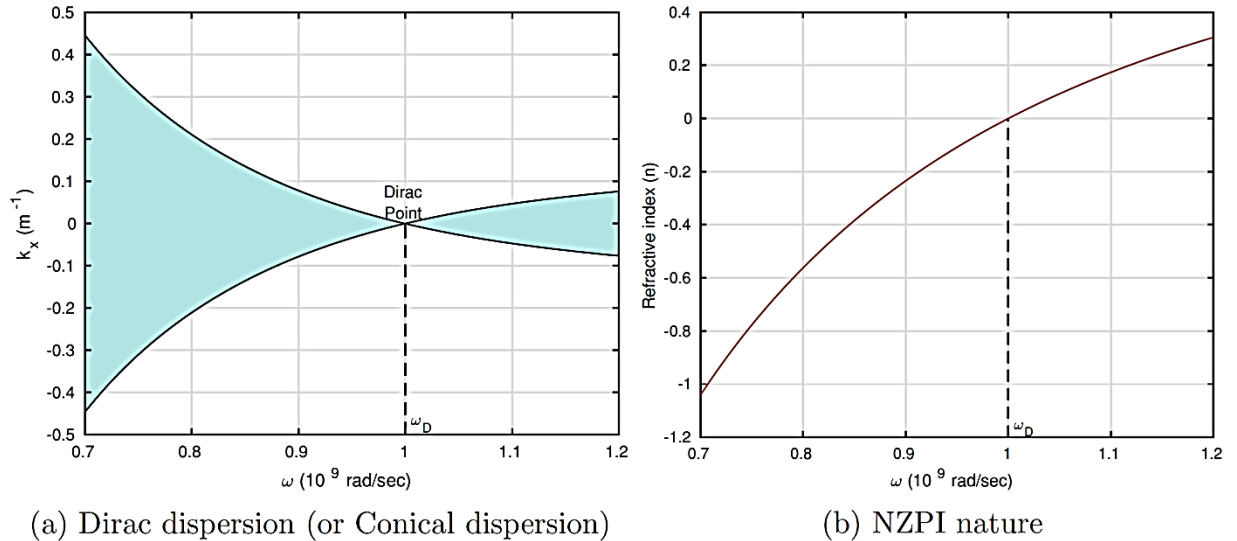


Рис. 1.2. (а) Діраківська дисперсія в метаматеріалі з негативним нульовим позитивним показником заломлення (очевидна конічна форма) і (б) відповідна крива показника заломлення [27]

Для реалізації такого матеріалу, потрібно, щоб і діелектрична і магнітна проникність мали дисперсійні властивості, наприклад, коли ефективна діелектрична (ϵ_{eff}) і магнітна (μ_{eff}) проникність задані моделлю Друде [31]:

$$\epsilon_{eff}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{ep}^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}, \quad \mu_{eff}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{mp}^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \quad (1.7)$$

де ω_{ep} і ω_{mp} – електрична та магнітна плазмові частоти, а γ ($\ll \omega_{ep}, \omega_{mp}$) – коефіцієнт втрат. Видно, що при $\omega \rightarrow \omega_{ep}$, $\epsilon_{eff}(\omega) \rightarrow 0$ і при $\omega \rightarrow \omega_{mp}$, $\mu_{eff}(\omega) \rightarrow 0$, то якщо магнітна і електрична плазмові частоти мають одне й те саме значення, $\omega_{mp} = \omega_{ep} = \omega_D$, і у відсутності втрат, тоді для $\omega = \omega_D$ обидва ϵ_{eff} і μ_{eff} стають нульовими. У результаті на частоті точки Дірака $\omega = \omega_D$ ефективний показник заломлення $n_{eff} = \sqrt{\epsilon_{eff}}\sqrt{\mu_{eff}}$ також стає

нульовим. На Рис. 1.2 зображено саме таку систему, $\omega_{mp} = \omega_{ep} = \omega_D = 1 \times 10^9 \text{ rad/c}$ і $\gamma = 10^{-5}\omega_D$. На Рис. 1.2. (а) показано його дисперсійну діаграму, на якій можна спостерігати конуси Дірака та точку Дірака, а на Рис.1.2. (б) зображено результуючий ефективний показник заломлення, який дорівнює нулю при на плазмовій частоті ω_D . Рис. 1.3 [25] ілюструє розподіл електричного поля в такому середовищі, коли кругова частота хвилі менше, більше або дорівнює плазмовій частоті ω_D .

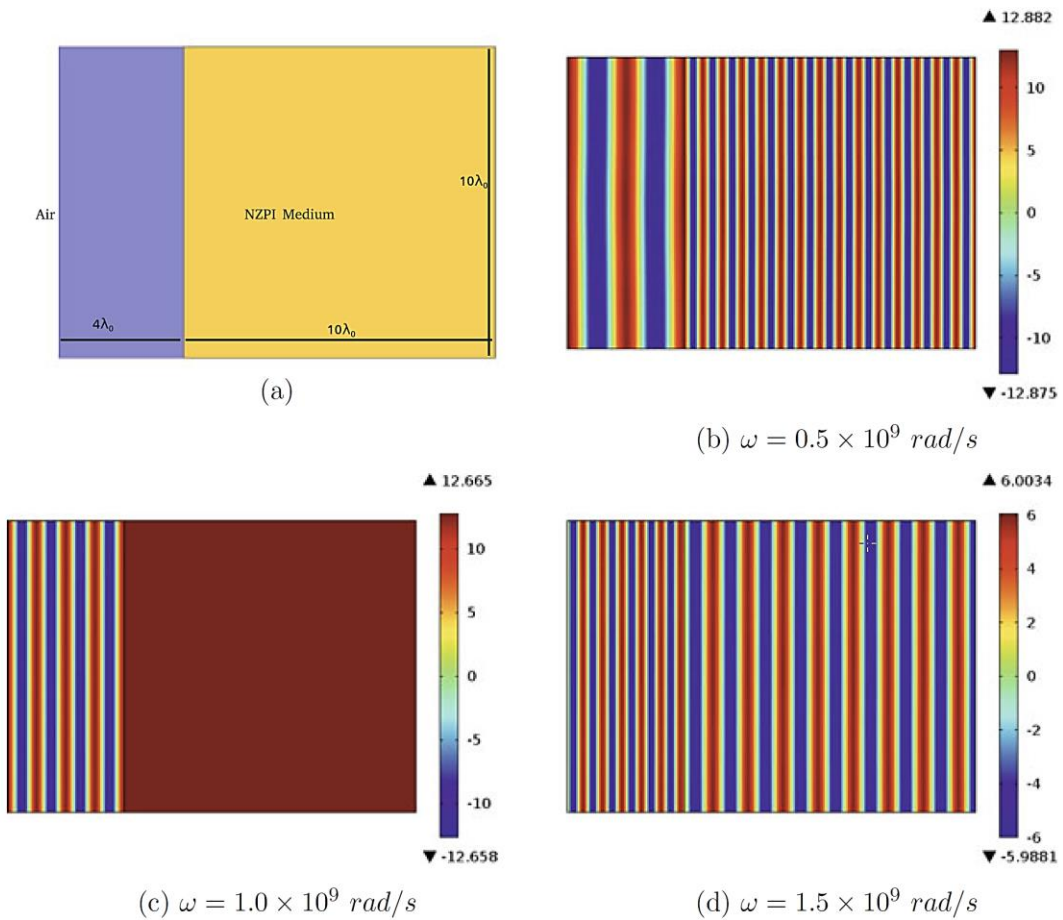


Рис. 1.3. Розподіл електричного поля в середовищі NZPI на різних частотах

Саме такий опис дисперсії будемо використовувати далі, під час розглядання задачі об електромагнітних полях в заповненому резонаторі з ідеально провідними стінками.

1.2.3 Посилення поля

Посилення електричного поля (E) відбувається у матеріалі через електромагнітні граничні умови [32], що вимагають, щоб нормальна складова електричного поля через кордон у вільній від заряду області в ізотропному матеріалі підкорялася співвідношенню $\varepsilon_1 E_1^\perp = \varepsilon_2 E_2^\perp$. Це призводить до збільшення нормальної складової E всередині матеріалу NZI, E_2^\perp , у $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ разів. Оскільки $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, реалізується ефективне утримання енергії усередині шару NZI. Цей ефект ілюструється на прикладі фотонної моди, що розповсюджується, в кремнієвому хвилеводі, покритому повітрям. Коли невеликий шар матеріалу NZI міститься поверх хвилеводу, спостерігається різка область сильного електричного поля, у якій утримується світло. Цей ефект був використаний шляхом об'єднання високорухомого, динамічно змінюваного шару оксиду кадмію з гібридним плазмонним хвилеводом [33]. Коли електричне поле прикладалося до шару CdO, електрони накопичувалися всередині матеріалу і утворювали тонку область NZI, яка через граничні умови, пов'язані з матеріалами NZI, призводила до того, що більша частина світла утримувалася всередині динамічного шару CdO. На відміну від попередніх експериментів, у яких аналогічні пристрої використовувалися для створення амплітудної модуляції, CdO з високою рухливістю може забезпечити робочий режим з низькими втратами, що уможливорює ефективну фазову модуляцію. Було передбачено, що ефективність модуляції $V_\pi L_\pi$ складе 0.005 В·см порівняно з 1.8 В·см у модуляторах з ніобіту літію [34]. Цей ефект обмеження зіграв центральну роль посиленні взаємодій світла і матерії, що дозволило створити екстремальну нелінійну оптику та інтегровані нанофотонні пристрої [35], ключовою особливістю яких є можливість динамічного управління NZI, або ε -близько-нульовий стан (ENZ), електричними або оптичними засобами.

1.2.4 Створення матеріалів із майже нульовим індексом

Існує безліч підходів до реалізації властивостей NZI, кожен із яких має свої недоліки. Структуровані матеріали (метаматеріали, композити і

хвилеводи) мають такі переваги, як виняткова можливість налаштування в умовах, близьких до нуля, і ширина смуги пропускання, яку можна створити шляхом управління геометрією та складовими матеріалами. Крім того, здатність контролювати як магнітну проникність, так і діелектричну проникність деяких структур дозволяє домогтися фазової швидкості, що розходиться, з кінцевою груповою швидкістю і імпедансом, що призводить до створення матеріалів NZI, серед яких можна визначити матеріали з ϵ , що наближається до нуля з ненульовим μ (epsilon-near-zero, ENZ) [12], матеріали з μ , що наближається до нуля з ненульовою діелектричною проникністю ϵ (mu-near-zero, MNZ) [36], або, відповідно, матеріали, де і ϵ , і μ наближаються до нуля разом (epsilon-and-mu-near-zero, EMNZ) [11, 37]. Це важливо для додатків, у яких бажана ефективна передача через рівень NZI, таких як хвилевід, нелінійне перетворення частоти та формування оптичних імпульсів. Тим не менш, ці переваги досягаються за рахунок значного збільшення витрат на виготовлення та складності.

Ефекти NZI можуть бути імітовані і в інших структурованих матеріалах, у яких вони мають інше походження. Наприклад, випадкові фотонні структури можуть викликати сильні взаємодії світла і матерії [38]: явища багаторазового розсіювання можна як ефективно зменшення груповий швидкості світла, що проходить через матеріал. Аналогічно, фотонні кристали можуть демонструвати явища вкрай повільного світла [39]. Коли частота світла наближається до краю смуги матеріалу, дисперсія мод усередині кристала вирівнюється (через зв'язок мод, що поширюються вперед і назад), зменшуючи групову швидкість більш ніж 100 разів, зберігаючи при цьому кінцевий імпульс [39].

Однак структуровані матеріали можуть забезпечити поведінку NZI лише як ефективну властивість, що виявляється на відстанях, що перевищують розмір структурної одиниці. І навпаки, однорідні (неструктуровані) матеріали NZI, що зустрічаються в природі, набувають цієї властивості локально, що корисно для поєднання явищ NZI з

нанорезонаторами і квантовими емітерами. Більше того, їх можна реалізувати у вигляді простої тонкої плівки з відносно невеликими втратами, яку можна легко комбінувати з іншими структурами, такими як метаповерхні та спрямовуючі структури [35]. Однак ключовим обмеженням однорідних матеріалів є невідповідність імпедансів, що виникає при реалізації матеріалів NZI з низькими втратами, оскільки імпеданс прагне нуля або нескінченності ($Z = \sqrt{\epsilon/\mu}$).

З цієї точки зору матеріали NZI можна розглядати як підмножину більш загального класу матеріалів, які реалізують посилення електромагнітних полів та світла та матерії за рахунок повільних електромагнітних хвиль, і оптимальний підхід залежить від застосування та бажаного результату.

1.2.5 Фононні матеріали

Фононні матеріали демонструють коливальні резонанси, які можуть призвести до утворення металеві області у матеріалі [40]. Зазвичай це відбувається між резонансними частотами поздовжніх і поперечних оптичних фононів в області. Ефект можна змоделювати з використанням формалізму Лоренца [40] і він забезпечує прямий підхід до досягнення властивостей NZI і ENZ в інфрачервоному спектральному діапазоні, оскільки ефект природно виникає в гетерополярних напівпровідниках і деяких 2D-матеріалах. Одна з ключових переваг фононних матеріалів полягає у їх виключно низьких втратах у точці переходу. В результаті багато фононних матеріалів досягають не тільки ENZ, але і глибоких NZI-ефектів.

Ключовою сферою інтересів фононних матеріалів NZI та ENZ було вивчення мод ENZ та Берремана для пов'язаних взаємодій світла та матерії. Ці моди демонструють унікальну майже плоску дисперсію на межі діелектричної проникності, що корисно для створення різких резонансних мод з ідеальним поглинанням. Початкові дослідження були зосереджені на взаємодії плоских метаматеріалів і напівпровідникових легованих наночастинок на довжинах хвиль ближнього і середнього інфрачервоного діапазону [13]. У

цих системах спостерігалось велике розщеплення Рабі через сильний зв'язок між резонаторами метаматеріалу та ENZ-моду наношарів. Нещодавно було продемонстровано сильний зв'язок між одноповерхневим фонон-поляритоном на межі SiC/AlN та фонон-поляритоном ENZ в ультра тонкій плівці AlN, і було показано, що вона демонструє гібридні особливості складових мод, а саме велику довжину поширення та надвисоке обмеження поля.

Крім того, кілька теоретичних робіт проілюстрували потенціал фононних матеріалів як NZI. Наприклад, карбід кремнію є перспективним матеріалом підвищення просторової когерентності теплового випромінювання. При розміщенні теплового випромінювача всередині порожнини ENZ велика фазова швидкість призводить до майже однорідної фази по всій порожнині, що підвищує когерентність. Однак при включенні всередину резонатора додаткової резонансної структури, такий як високоіндексний стрижень або сфера [41], навіть при випадкових збудженнях повне випромінюване поле є однорідним за величиною та фазою на поверхні з посиленням випромінюванням. У умовах характер випромінювання визначається формою резонатора, що дозволяє ефективніше контролювати теплове випромінювання. Ця унікальна властивість плівок NZI була використана для розробки селективних теплових випромінювачів і випромінювачів середнього інфрачервоного діапазону, що складаються з ультра тонких плівок легованих напівпровідників, або фононних матеріалів, для створення випромінювальної стопки тонких плівок .

Також передбачалося, що електрична левітація з використанням матеріалів ENZ досяжна, оскільки розподіл електричного поля аналогічний розподілу магнітного поля, що забезпечує магнітну левітацію з надпровідниками [42]. Електричне поле, створюване диполем, що коливається, поміщеним поблизу середовища ENZ, буде паралельно поверхні, так як його нормальна складова буде прагнути до нуля через безперервність

нормального поля електричних зміщень. Результуюча середня сила, що діє на частинку, дорівнюватиме

$$F_{z,avg} \propto \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{sub}}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{sub}} \right) \left(\frac{h}{\lambda} \right)^{-4} P_{dipole}$$

де ε_{sub} - діелектрична проникність підкладки ENZ, h - відстань між диполем і підкладкою, а P_{dipole} – випромінювана потужність диполя. В результаті на відстанях, менших за довжину хвилі, на частинку діятиме результуюча позитивна сила. Хоча для радіочастот відстані та значення, пов'язані з умовою левітації, малі, вони досяжні ($f = 1$ ГГц, $I = 6$ А, $h = \lambda/100 \approx 3$ мм), якщо буде знайдений відповідний матеріал EN. В оптичному діапазоні малі необхідні відстані створюють додаткові проблеми, такі як ефекти сил Ван-дер-Ваальса, сил Казимира та сил оптичного збудження випромінювача, які ускладнюють реалізацію електричної левітації.

Хоча низькі втрати фононних матеріалів є ключовими для багатьох програм, висока добротність фононних резонансів ($Q \approx 200$ [43]) робить їх особливо привабливими для перемикаючих пристроїв. Однак резонанс виникає через коливальні моди всередині матеріалу, і статично налаштувати положення точок NZI або ENZ складно. Основними методами налаштування резонансу є деформація, товщина та контроль діелектричного середовища [43], але існують також методи динамічного управління резонансом. Фононні матеріали нині є найкращим наближенням матеріалів із нульовим індексом; таким чином, вони надають майданчик для перевірки фундаментальних фізичних явищ та меж взаємодії електромагнітного поля та матерії.

1.2.6 Міжсмугові матеріали

Інший цікавий та значною мірою недостатньо вивчений підхід до досягнення властивостей NZI та ENZ – це використання резонансів лоренцевого типу, таких як міжзонні переходи або міжпідзонні переходи. На синій стороні резонансу Лоренца діелектрична проникність має провал. Ця особливість може призвести до появи області ENZ для матеріалів з сильним резонансом та низькою фоновою діелектричною проникністю. Через ці дві

вимоги очікується, що такі властивості будуть у синій і ультрафіолетовій областях, де переважають міжзонні переходи, а фонові діелектрична проникність основного матеріалу знижується. Природно, в цьому матеріалі також існує перехід діелектричної проникності при 200 нм ($\epsilon_{co}'' = 3$) і 660 нм ($\epsilon_{co}'' = 26$).

Хоча область ENZ можна виявити в міжзонних матеріалах, оптичні втрати поблизу резонансу є проблемою. В результаті досягти ефекту NZI важко. Однак область ENZ може бути корисною для посилення ефектів оптичного поглинання.

1.3 Обговорення та перспективи

Широкий спектр матеріалів NZI та ENZ, однорідних та структурованих, був розглянутий в цьому огляді, що відкриває шлях для кількох цікавих майбутніх напрямків досліджень як щодо самих метаматеріалів так і щодо їх використання. Для багатьох описаних матеріалів вищі втрати спостерігаються при більш коротких перетинах довжин хвиль. Відносно плоска дисперсія у поєднанні з ефектами ENZ може забезпечити доступ до ефективного ширококутового поглинання без структурування. Цього можна досягти шляхом контролю стехіометрії матеріалу, легування кількох матеріалів різними областями ENZ або шляхом створення ультратонких (кілька атомних шарів) плівок з властивостями, проміжними між властивостями 2D- та 3D-матеріалів, які особливо чутливі до методів динамічного налаштування, таких як електричні накопичення, оптична модуляція, механічна напруга та деформація. Більш того, відкриття та дослідження нових двовимірних та інших матеріалів Ван-дер-Ваальса [43] призводить до появи безлічі нових екзотичних та пов'язаних поляритонних мод у таких матеріалах, як GaAs та чорний фосфор. Такі матеріали можуть створювати умови дисперсії, аналогічні умовам дисперсії об'ємних матеріалів NZI і ENZ, що може відкрити нові можливості для досліджень та розробок.

У літературі наголошується про застосування матеріалів NZI для посилення широкого спектру нелінійних взаємодій. Однак слід зазначити, що ключовою причиною посилення нелінійних явищ є зменшення групової швидкості, що спостерігається у матеріалах NZI [44]. Повільне світло також можна отримати за допомогою різних підходів, таких як фотонні кристали, хвилеводи, випадкові середовища та оптичні резонатори. Фактично деякі з цих методів дозволяють досягти ефектів уповільнення світла зі значно меншими втратами, ніж у гомогенних матеріалів NZI. В результаті структури можуть забезпечити вузький резонанс з високою добротністю та викликати помітні зміни оптичних властивостей у відповідь на невеликі обурення ($\Delta n \approx 1 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{-2}$), що корисно для розробки чутливих нелінійних датчиків, перемикачів та фільтрів [45]. Однак велика добротність і повільна релаксація можуть утруднити застосування високошвидкісних та широкосмугових додатків. Альтернативно, ефект повільного світла у поєднанні з резонансом з низькою добротністю в однорідних матеріалах NZI та ENZ може бути корисним у ситуаціях, коли бажані втрати, широка смуга посилення та локальні ефекти NZI, наприклад, при ідеальному поглинанні, збиранні оптичної енергії, поглинанні. -керовані нелінійні ефекти (наприклад, ефекти вільних несучих) та надшвидкі нелінійні пристрої. Хоча високо контрастне перемикання в матеріалах NZI вимагає великої зміни оптичних властивостей або роботи поблизу резонансу, радикальні модуляції індексу можливі ($\Delta n \approx 0,1 - 1$) і дозволяють змістити точку перетину на стільки ж як ~ 100 нм [46] переходи між металевими та діелектричними матеріалами [47]. Поєднання цих властивостей однорідних матеріалів NZI та ENZ з простотою їх виготовлення, гарною статичною налаштованістю та широким діапазоном довжин хвиль забезпечує можливість покращення взаємодії світла та речовини в деяких, хоча й не у всіх сферах застосування.

З погляду додатків, нелінійності, посилені NZI, є дуже цікавим напрямком досліджень. Великі нелінійності, що спостерігаються в прозорих провідних оксидних плівках NZI, потенційно можуть дозволити створити

надзвичайно швидкі та ефективні модулятори для внутрішньокристалічних нанофотонних додатків, у яких надмалі довжини поширення зменшують властивий їм фактор втрат; відкрити захоплюючі можливості для моделювання космологічних ефектів ; і посилюють квантові взаємодії [48]. Поєднання матеріалів NZI з резонансними структурами може бути корисним для дослідження сильного зв'язку, що може допомогти контролювати випромінювання та додатково покращити налаштованість пристроїв. Зокрема, було б цікаво вивчити сильний зв'язок NZI у контексті резонансів Фано, вбудованих власних станів та пов'язаних станів у континуумі [49] для фотонних та плазмонних систем, в яких втрати, як функцію сили зв'язку, можна контролювати. У цьому сенсі матеріали NZI є унікальною платформою для об'єднання розробки матеріалів з електродинамікою та просування як фундаментальних, так і прикладних досліджень.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЇЇ РОЗВ'ЯЗОК

В цьому розділі, в рамках методу модового базису (ММБ) (еволюційного підходу до розв'язання задач електродинаміки в часовій області, Evolutionary Approach to Electromagnetics in Time Domain (EAE)), розробленого для аналізу електромагнітних полів в часовій області, які збуджені в об'ємних резонаторах з ідеально провідними стінками і довільним однорідним ізотропним заповненням [51], розглянуто задачу про поведінку електромагнітних полів у випадку заповнення резонатора дисперсійним у часі середовищем, таким, що в певному діапазоні частот його показник заломлення близький до нуля.

2.1 Представлення електромагнітних полів в резонаторі, який заповнено середовищем в рамках EAE

Еволюційний підхід до розв'язання задач електродинаміки в часовій області представляє напруженості електричного та магнітного полів в резонаторі довільної форми з ідеально провідними стінками, що заповнений середовищем, як розкладання вигляду:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha}(t) \nabla \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}), \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\beta=1}^{\infty} b_{\beta}(t) \nabla \Psi_{\beta}(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (2.1)$$

де $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ – напруженість електричного поля, як функція часу та координат; $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$ – напруженість магнітного поля; $e_n(t)$, $h_n(t)$, $a_{\alpha}(t)$, $b_{\beta}(t)$ – модові амплітуди розкладання. $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$, $\nabla \Phi_{\alpha}(\mathbf{r})$, $\nabla \Psi_{\beta}(\mathbf{r})$ є базисними векторами розкладання. Причому, вихрові вектори $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$, та $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ є, власне, резонаторними модами пусого резонатору. Набір вихрових та невихрових базисних векторів $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$, $\nabla \Phi_{\alpha}(\mathbf{r})$, $\nabla \Psi_{\beta}(\mathbf{r})$ для всіх n , α , β формує повний базис у просторі розв'язань внутрішніх задач електродинаміки $L_2(V)$.

Базисні вектори $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$, та потенціали $\Phi_{\alpha}(\mathbf{r})$, $\Psi_{\beta}(\mathbf{r})$ є рішенням векторних та скалярних задач на власні значення з граничними умовами

Діріхле (2.2), (2.4) або Неймана (2.3), (2.5) та складають повний набір вихрових (2.2), (2.3) та невихрових (2.4), (2.5) власних векторів:

$$(\nabla^2 + k_n^2 \varepsilon_0 \mu_0) \mathbf{E}_n = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_n = 0, \quad \mathbf{N} \times \mathbf{E}_n|_S = 0, \quad \mathbf{H}_n = \frac{-i \nabla \times \mathbf{E}_n}{k_n \mu_0} \quad (2.2)$$

$$(\nabla^2 + k_n^2 \varepsilon_0 \mu_0) \mathbf{H}_n = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_n = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{H}_n|_S = 0, \quad \mathbf{E}_n = \frac{i \nabla \times \mathbf{H}_n}{k_n \varepsilon_0}. \quad (2.3)$$

$$(\nabla^2 + \eta_\alpha^2) \Phi_\alpha = 0, \quad \Phi_\alpha|_S = 0, \quad \frac{\eta_\alpha^2 \varepsilon_0}{V} \int_V |\Phi_\alpha|^2 dV = 1 \quad (2.4)$$

$$(\nabla^2 + \nu_\alpha^2) \Psi_\beta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial N} \Psi_\beta \Big|_S = 0, \quad \frac{\nu_\alpha^2 \mu_0}{V} \int_V |\Psi_\beta|^2 dV = 1, \quad (2.5)$$

де $k_n > 0$, $\eta_\alpha > 0$ та $\nu_\alpha > 0$ – власні числа. Всі власні вектори задовільняють умовам ортогональності й нормування [51].

Оскільки вихрові власні вектори є резонаторними модами пустого резонатору, вони визначають існування ТЕ- або ТМ- коливань у резонаторі. Невихрові потенціали (невихрові моди), відповідно, відповідають частині поля обумовленої присутністю зарядів та струмів в об'ємі резонатора – нестационарним полям Кулона та Ампера. Власні числа k_n крайової задачі (2.2) або (2.3) є круговою власною частотою відповідної моди порожнього резонатора [51], і залежить від геометричних розмірів.

2.2 Еволюційні рівняння

Граничні задачі (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) визначають просторову частину електромагнітного поля в резонаторі, що заповнений лінійним ізотропним однорідним середовищем. Для багатьох геометричних форм, таких як прямокутний або циліндричний резонатор, які широко використовуються в мікрохвильовій техніці, розв'язки цих граничних задач добре відомі. Часова частина електромагнітних полів міститься у скалярних модових амплітудах, коефіцієнтах розкладань (2.1). Вихрові та невихрові модові амплітуди є розв'язками еволюційних рівнянь, отриманих проєктуванням рівнянь Максвелла на модовий базис (2.2) – (2.5) [51]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} e_n(t) + ik_n h_n(t) = -j_n^e(t) - \frac{1}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(\mathcal{E}) + \mathcal{J}_\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{H}) \right\} \mathbf{E}_n^*(\mathbf{r}) dV; \\ \frac{d}{dt} h_n(t) + ik_n e_n(t) = -j_n^h(t) - \frac{\mu_0}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(\mathcal{H}) \right\} \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r}) dV; \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt} a_\alpha(t) = -j_\alpha^e(t) + \frac{1}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathcal{J}_\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mathcal{H}}) \right\} \nabla \Phi_\alpha^*(\mathbf{r}) dV; \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt} b_\beta(t) = -j_\beta^h(t) + \frac{\mu_0}{V} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}(\boldsymbol{\mathcal{H}}) \right\} \nabla \Psi_\beta^*(\mathbf{r}) dV. \quad (2.8)$$

Рівняння (2.6) є системою, а (2.7) та (2.8) окремими інтегро-диференціальними рівняннями другого порядку, які визначають поведінку вихрових та невихрових, електричних та магнітних модових амплітуд. Ці рівняння доповнюються початковими умовами (2.9) для модових амплітуд, які є проекцією початкового розподілу електромагнітного поля (2.1), на базисні вектори.

$$\begin{aligned} e_n(0) &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{r}) \mathbf{E}_n^*(\mathbf{r}) dv = e_n^0; & h_0(0) &= \frac{\mu_0}{V} \int_V \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(\mathbf{r}) \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r}) dv = h_n^0 \\ a_\alpha(0) &= -\frac{\varepsilon_0}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_0(\mathbf{r}) \nabla \Phi_\alpha^*(\mathbf{r}) dv = a_\alpha^0; & & \\ b_\beta(0) &= -\frac{\mu_0}{V} \int_V \boldsymbol{\mathcal{H}}_0(\mathbf{r}) \nabla \Psi_\beta^*(\mathbf{r}) dv = b_\beta^0. & & \end{aligned} \quad (2.9)$$

Інші електродинамічні величини, такі як вектори об'ємної щільності сторонніх струмів, вектор об'ємної щільності поляризації, вектор об'ємної щільності намагніченості та їх похідні за часом також можуть бути представлені у вигляді розкладів, аналогічних (2.1), оскільки набір векторів, що визначаються граничними задачами (2.2) – (2.5) становить повний базис у просторі рішень внутрішніх задач електродинаміки (у просторі векторних функцій, що задовольняють відповідним граничним умовам). Відповідно, розкладання векторів об'ємної щільності сторонніх струмів за базисними векторами має вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{-1} \mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} j_n^e(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} j_\alpha^e(t) \nabla \Phi_\alpha(\mathbf{r}); \\ \mu_0^{-1} \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} j_n^h(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\beta=1}^{\infty} j_\beta^h(t) \nabla \Psi_\beta(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

а модові амплітуди сторонніх струмів визначаються проекцією векторів об'ємної щільності сторонніх струмів на базисні вектори, подібно початковим умовам:

$$\begin{aligned} j_n^e(t) &= \frac{1}{V} \int_V \mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_n^*(\mathbf{r}) dv; & j_n^h(t) &= \frac{1}{V} \int_V \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r}) dv \\ j_\alpha^e(t) &= -\frac{1}{V} \int_V \mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) \nabla \Phi_\alpha^*(\mathbf{r}) dv; & j_\beta^h(t) &= -\frac{1}{V} \int_V \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi_\beta^*(\mathbf{r}) dv \end{aligned} \quad (2.11)$$

Система рівнянь (2.6) – (2.8) з початковими умовами (2.9), описує поведінку часової частини електромагнітного поля в резонаторі з лінійним, однорідним ізотропним заповненням через часові модові амплітуди. Такий підхід до внутрішніх задач електродинаміки зручно використовувати коли або характеристики середовища, що заповнює резонатор, є змінювані у часі чи дисперсійні, або ми маємо негармонічні часові залежності збуджувальних струмів. Використавши еволюційний підхід у випадку однорідного, ізотропного, але нестационарного, або дисперсійного середовища, ми повністю відокремили просторову та часову задачі для довільної часової залежності полів і матеріальних параметрів середовища. В результаті ми маємо змогу отримати достатньо прості аналітичні розв'язки. Але на даному етапі розв'язку система рівнянь (2.6) – (2.8) не є повною, бо не містить опису взаємодії середовища з електромагнітним полем у резонаторі, і, відповідно, потребує доповнення матеріальними рівняннями.

2.3 Еволюційні рівняння для електромагнітного поля в резонаторі, який заповнено дисперсійним середовищем з показником заломлення близьким до нуля у певному діапазоні частот

Частіше за все, дисперсійні явища розглядаються у частотній області, і показник заломлення середовища може бути близьким до нуля в тих випадках коли або ефективна діелектрична проникність $\varepsilon(\omega)$, або ефективна магнітна проникність $\mu(\omega)$ штучного матеріала, або вони обидві мають значення близькі до нуля [50, 25]. За цією ознакою NZI матеріали поділяються на три категорії: матеріали з ε , що наближається до нуля з ненульовим μ (epsilon-near-zero, ENZ) [12], матеріали з μ , що наближається до нуля з ненульовою діелектричною проникністю ε (mu-near-zero, MNZ) [36], або, відповідно, матеріали, де і ε , і μ наближаються до нуля разом (epsilon-and-mu-near-zero, EMNZ) [11, 37]. Кожен тип має свої особливості і властивості, але ми будемо розглядати для опису заповнювача резонатора модель останнього типу середовища, EMNZ, яка має кінцеве значення

ефективного хвильового імпедансу середовища $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, на відміну від ENZ ($Z = \infty$) та MNZ ($Z = 0$). Раніше було докладно розглянуто схему побудови еволюційних рівнянь у випадку довільного середовища з часовою дисперсією [53, 54, 55], але в опублікованих роботах враховано тільки моделювання магнітної проникності за допомогою полюсів Лоренца, яка може описувати поведінку природного матеріалу. Коли ми розглядаємо штучний метаматеріал, ми не обмежені тільки моделлю полюсів Лоренца для магнітної проникності. Одним з найяскравіших прикладів EMNZ середовища є метаматеріал, що демонструє діраківську дисперсію, [25, 26], і модель якого складається з одного полюсу Друде для діелектричної проникності і одного полюсу Друде для магнітної проникності, які в частотній області описуються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{eff}(\omega) &= 1 + \frac{\chi_e \omega_e^2}{i\omega(i\omega + \gamma_e)}, \quad \mu_{eff}(\omega) = 1 + \frac{\chi_h \omega_h^2}{i\omega(i\omega + \gamma_h)}, \\ n_{eff}(\omega) &= \sqrt{\varepsilon_{eff}(\omega)\mu_{eff}(\omega)}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

де ω_e, ω_h – плазмові кругові частоти, γ_e, γ_h – коефіцієнти втрат, а χ_e, χ_h – амплітуди полюсів. Вважається, що існують відповідні ефективні вектори об'ємної щільності поляризації та намагніченості

$$\mathcal{P}_{eff}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_e(\omega)\mathcal{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathcal{M}_{eff}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_h(\omega)\mathcal{H}(\mathbf{r}, \omega).$$

У часовій області виразам (2.12) відповідають диференціальні рівняння другого порядку для цих ефективних векторів об'ємної щільності поляризації та намагніченості [53]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{P}_{eff}(\mathbf{r}, t) + \gamma_e \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}_{eff}(\mathbf{r}, t) &= \chi_e \omega_e^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{M}_{eff}(\mathbf{r}, t) + \gamma_h \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}_{eff}(\mathbf{r}, t) &= \chi_h \omega_h^2 \mathcal{H}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\quad (2.13)$$

Для випадку, що розглядається у даній роботі і відповідає дисперсії Дірака [25, 26], параметри електричного і магнітного полюсів однакові, $\gamma_e = \gamma_h = \gamma$, $\omega_e = \omega_h = \omega_p$, $\chi_e = \chi_h = \chi$. Треба зазначити, що полюсна модель Друде для діелектричної проникності відповідає присутності електричної провідності в матеріалі, але для магнітної проникності такої відповідності в

природі не існує, і таке середовище може бути виключно штучним. Такий опис моделі середовища носить дещо абстрактний характер і не заглиблюється у питання обміну імпульсом всередині таких матеріалів [56], але дає достатньо повні уявлення про процеси, що відбуваються.

Ефективні вектори об'ємної щільності поляризації та намагніченості та їх похідні можна представити у вигляді розкладань за базисними векторами, аналогічно (2.1) та (2.10), [53]

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{eff}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \varepsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{\infty} d_{\alpha}(t) \nabla \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}), \\
\frac{\partial \mathcal{P}_{eff}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \varepsilon_0 \sum_{\alpha=1}^{\infty} \tilde{d}_{\alpha}(t) \nabla \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}), \\
\mathcal{M}_{eff}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} m_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\beta=1}^{\infty} g_{\beta}(t) \nabla \Psi_{\beta}(\mathbf{r}), \\
\frac{\partial \mathcal{M}_{eff}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\beta=1}^{\infty} \tilde{g}_{\beta}(t) \nabla \Psi_{\beta}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

де $p_n(t)$, $\tilde{p}_n(t)$, $m_n(t)$, $\tilde{m}_n(t)$, $d_{\alpha}(t)$, $\tilde{d}_{\alpha}(t)$, $g_{\beta}(t)$, $\tilde{g}_{\beta}(t)$ відповідно вихрові та невихрові модові амплітуди розкладання векторів об'ємної щільності поляризації та намагніченості та їх часових похідних.

Проекція на модовий базис рівнянь (2.13), з урахуванням розкладань (2.14) та умов ортогональності та нормування базисних векторів дає додаткові рівняння для модових амплітуд поляризації та намагніченості. Таким чином, вихрову (2.6) та невихрову (2.7), (2.8) системи еволюційних рівнянь з початковими умовами, представлені в матричному вигляді, можна записати

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} e_n(t) \\ ih_n(t) \\ \tilde{p}_n(t) \\ i\tilde{m}_n(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k_n & 1 & 0 \\ -k_n & 0 & 0 & 1 \\ -\chi\omega_p^2 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -\chi\omega_p^2 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_{sol}} \cdot \begin{pmatrix} e_n(t) \\ ih_n(t) \\ \tilde{p}_n(t) \\ i\tilde{m}_n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -j_n^e(t) \\ -ij_n^h(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{sol}(t)}, \\
\mathbf{X}(t)|_{t=0} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_n^0 \\ ih_n^0 \\ \tilde{p}_n^0 \\ i\tilde{m}_n^0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_0},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} a_\alpha(t) \\ \tilde{d}_\alpha(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}^e(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\chi\omega_p^2 & \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_{irr}^e} \cdot \begin{pmatrix} a_\alpha(t) \\ \tilde{d}_\alpha(t) \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -j_\alpha^e(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{irr}^e(t)}, \quad \mathbf{Y}^e(t)|_{t=0} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_\alpha^0 \\ \tilde{d}_\alpha^0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}_0^e}, \\ \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} b_\beta(t) \\ \tilde{g}_\beta(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}^h(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\chi\omega_p^2 & \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_{irr}^h} \cdot \begin{pmatrix} b_\beta(t) \\ \tilde{g}_\beta(t) \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -j_\beta^h(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{irr}^h(t)}, \quad \mathbf{Y}^h(t)|_{t=0} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_\beta^0 \\ \tilde{g}_\beta^0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}_0^h}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Матриці \mathbf{Q}_{sol} , \mathbf{Q}_{irr}^e , \mathbf{Q}_{irr}^h , позначені в (2.15), (2.16), є матрицями постійних коефіцієнтів. Вони містять параметри діелектричної та магнітної проникності середовища та інформацію про геометрію резонатора, а саме власні частоти порожнього резонатора $k_n = 2\pi f_{0n}$, які є власними значеннями граничних задач Діріхле та Неймана (2.2), (2.3).

2.4 Розв'язок еволюційних рівнянь (2.15) – (2.16) у випадку гармонічних у часі сторонніх струмів.

Загальний розв'язок систем (2.15), (2.16) шукаємо у вигляді [58, 53]:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=1}^{M_{sol}} \mathbf{K}(\lambda_k^{sol}) \left(e^{-\lambda_k^{sol} t} \mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{-(t-t') \cdot \lambda_k^{sol}} \mathbf{F}_{sol}(t') dt' \right), \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^e(t) &= \sum_{k=1}^{M_{irr}^e} \mathbf{K}(\lambda_k^{irr(e)}) \left(e^{-\lambda_k^{irr(e)} t} \mathbf{Y}_0^e + \int_0^t e^{-(t-t') \cdot \lambda_k^{irr(e)}} \mathbf{F}_{irr}^e(t') dt' \right), \\ \mathbf{Y}^h(t) &= \sum_{k=1}^{M_{irr}^h} \mathbf{K}(\lambda_k^{irr(h)}) \left(e^{-\lambda_k^{irr(h)} t} \mathbf{Y}_0^h + \int_0^t e^{-(t-t') \cdot \lambda_k^{irr(h)}} \mathbf{F}_{irr}^h(t') dt' \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

де λ є власними числами відповідних характеристичних матриць систем (2.15), (2.16), порядок систем відповідно $M_{sol} = 4$, $M_{irr}^e = M_{irr}^{eh} = 2$, а допоміжні матриці $\mathbf{K}(\lambda)$ визначаються за формулою [58]

$$\mathbf{K}(\lambda_k) = \prod_{s=1..M}^{s \neq k} \frac{\lambda_s \mathbf{I} - \mathbf{Q}}{\lambda_s - \lambda_k} \quad (2.19)$$

Вирази (2.17) для вихрових модових амплітуд є загальним аналітично-числовим розв'язком, в якому власні числа λ_k^{sol} матриці \mathbf{Q}_{sol} та допоміжні матриці $\mathbf{K}(\lambda)$ знаходяться за допомогою числових розрахунків. Власні числа λ є коренями рівняння 4-го порядку

$$\lambda^4 - 2\gamma\lambda^3 + (2\chi\omega_p^2 + \gamma^2 + k_n^2)\lambda^2 - 2\gamma(\chi\omega_p^2 + k_n^2)\lambda + \chi^2\omega_p^4 + \gamma^2 k_n^2 = 0, \quad (2.20)$$

і являють собою дві пари комплексно спряжених чисел. Поведінка власних чисел λ характеристичної матриці системи \mathbf{Q}_{sol} описує поведінку власних

характеристик резонатора, який заповнений середовищем, що розглядається, характеристичне рівняння (2.20) є аналогом звичайного дисперсійного рівняння частотної області, де корені λ рівняння (2.20) і комплексні частоти $\tilde{\omega}$ співвідносяться як $Im(\lambda) = Re(\tilde{\omega})$, $Re(\lambda) = Im(\tilde{\omega})$. Відповідно, уявна частина λ визначає власну кругову частоту в резонаторі з відповідним заповненням, а дійсна частина відповідає за втрати на цій резонансній частоті. Виходячи з того, що ми маємо, як розв'язок рівняння (2.20), дві пари комплексно спряжених чисел, далі ми будемо мати справу з двома резонансними частотами заповненого середовищем (2.12) резонатора які відповідають конкретній круговій частоті порожнього резонатора k_n .

Не вихрові еволюційні системи рівнянь (2.16) мають лише другий порядок і їх власні характеристичні числа та матриці $\mathbf{K}(\lambda)$ для розв'язку (2.18) отримані аналітично, причому числа $\lambda_k^{irr(e,h)}$ є дійсними:

$$\lambda_1^{irr(e,h)} = \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad \lambda_2^{irr(e,h)} = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}},$$

$$\mathbf{K}(\lambda_1^{irr(e,h)}) = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}} & -1 \\ -\chi\omega_p^2 & -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \end{pmatrix}}{2\sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}}}, \quad \mathbf{K}(\lambda_2^{irr(e,h)}) = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}} & 1 \\ \chi\omega_p^2 & \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \end{pmatrix}}{2\sqrt{\chi\omega_p^2 + \frac{\gamma^2}{4}}}.$$

Також треба зазначити, що завдяки однаковим значенням параметрів діелектричного і магнітного полюсів Друде, розв'язок для невихрових електричних і невихрових магнітних модових амплітуд буде повністю ідентичний.

Далі ми зосередимося на вимушених коливаннях поля у резонаторі, тому початкові умови обираємо нульовими. Сторонні струми, які збуджують резонатор, будемо вважати такими, що тільки модова амплітуда $j_n^e(t)$ однієї резонаторної моди є ненульовою, це дасть змогу обмежитися тільки одним відповідним доданком розкладання (2.1). Таким чином, маємо $j_n^e(t) = A_n \sin \Omega_n t$, $j_n^h(t) = j_\beta^h(t) = j_\alpha^e(t) = 0$, в даному контексті n просто позначає номер власного вектору $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ або $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$, для якого модова амплітуда сторонніх струмів ненульова. В такому випадку невихрові модові амплітуди

є нульовими і невихрові поля в резонаторі відсутні, а вихрові модові амплітуди описуються аналітично-числовим виразом

$$\begin{pmatrix} e_n(t) \\ ih_n(t) \\ \tilde{p}_n(t) \\ i\tilde{m}_n(t) \end{pmatrix} = A_n \left[\sum_{k=1}^4 \frac{\Omega_n \cos \Omega_n t - \lambda_k^{sol} \sin \Omega_n t - \Omega_n \exp(-\lambda_k^{sol} t)}{\lambda_k^{sol} - \Omega_n} \mathbf{K}(\lambda_k^{sol}) \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

де λ_k^{sol} та $\mathbf{K}(\lambda_k^{sol})$ обчислюються відповідно конкретним значенням параметрів середовища і власної частоти порожнього резонатора. Також можна записати вирази для напруженості електричного і магнітного полів

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= A_n \left[\sum_{k=1}^4 \frac{\Omega_n \cos \Omega_n t - \lambda_k^{sol} \sin \Omega_n t - \Omega_n \exp(-\lambda_k^{sol} t)}{\lambda_k^{sol} - \Omega_n} \mathbf{K}(\lambda_k^{sol}) \right]_{1,1} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}); \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= -iA_n \left[\sum_{k=1}^4 \frac{\Omega_n \cos \Omega_n t - \lambda_k^{sol} \sin \Omega_n t - \Omega_n \exp(-\lambda_k^{sol} t)}{\lambda_k^{sol} - \Omega_n} \mathbf{K}(\lambda_k^{sol}) \right]_{2,1} \mathbf{H}_n(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (12)$$

де $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ та $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ визначаються відомими задачами Діріхле та Неймана (2.2), (2.3) на власні значення і мають вигляд відповідно геометрії резонатора.

3 ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Для числового моделювання будемо розглядати електромагнітне поле у прямокутному резонаторі, і, як сказано вище, вважаємо що в резонаторі збуджується одна, основна, мода, просторовий розподіл якої для прямокутного резонатора добре відомий. Власна частота коливань у порожньому резонаторі визначається його геометричними розмірами $f_{n0} = \frac{1}{2\pi} k_n \equiv \frac{1}{2\pi} k_{nmp} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{w^2} + \frac{p^2}{h^2}\right)} / \epsilon_0 \mu_0$, де l – довжина, w – ширина, h – висота прямокутного резонатора, у нашому числовому моделюванні вона складає $f_{n0} = 10.09$ ГГц. Часова частина електромагнітного поля описується модовими амплітудами (2.21) і на їх поведінці та характеристиках ми і зосередимо нашу увагу.

3.1 Параметри середовища і власні параметри заповненого резонатора

Розглянуто і порівняно результати у випадку кількох наборів параметрів середовища, згідно [25, 26]. На Рис. 3.1 наведено залежність показника заломлення від частоти за функціональною залежністю (2.12), для середовищ, що розглядаються, як заповнення резонатора. Параметри середовищ, які відрізняються наведено у Табл. 3.1. Амплітуди полюсів Друде для всіх середовищ однакові і дорівнюють 1.

Таблиця 3.1. Параметри середовищ, що розглядаються

	Плазмова частота, f_p , ГГц	Коефіцієнт втрат, $\gamma = 10^{-3} \omega_p$, с ⁻¹
Середовище 1	2.509	1.58×10^7
Середовище 2*	10.09	6.34×10^7
Середовище 3	25.09	15.76×10^7

* Плазмова частота цього середовища дорівнює власній частоті порожнього резонатора $f_{p2} = \frac{\omega_{p2}}{2\pi} = f_{n0} = \frac{k_n}{2\pi} = 10.09$ ГГц, який ми взяли для числового моделювання.

Середовище 4	75.09	47.18×10^7
--------------	-------	---------------------

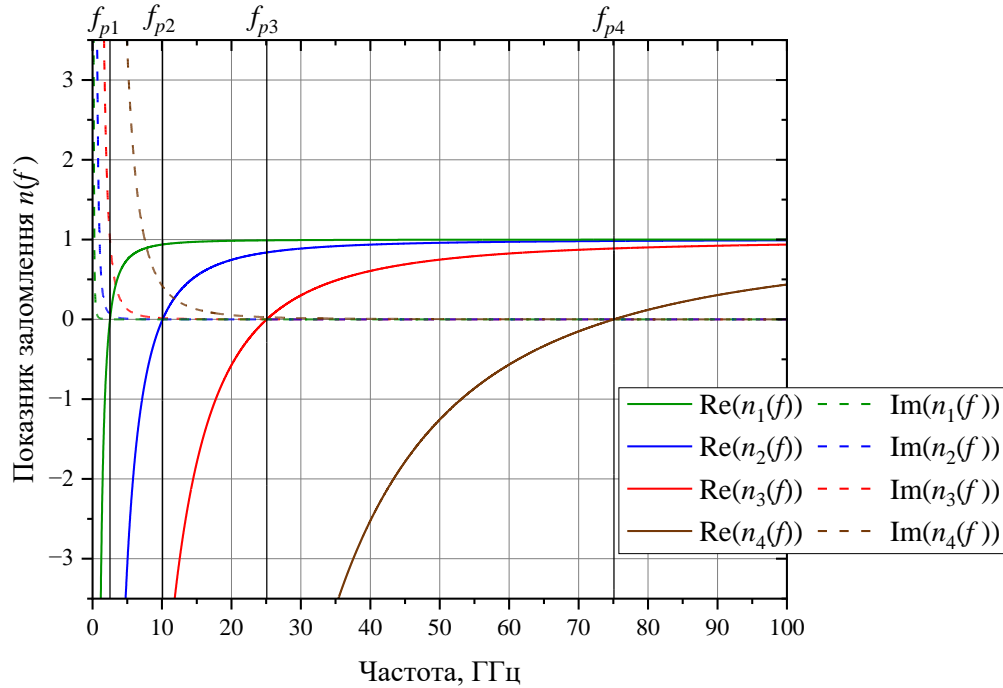


Рис. 3.1. Залежність від частоти показника заломлення середовищ, що заповнюють резонатор, відповідно (2.12), [26].

Як було вже вказано, підчас обговорення розв'язку (2.17), завдяки порядку матриці \mathbf{Q}_{sol} , ми отримуємо характеристичні числа λ^{sol} у вигляді двох пар комплексно спряжених чисел, де $\text{Im}(\lambda^{sol})$ визначає власну кругову частоту в резонаторі з відповідним заповненням, а $\text{Re}(\lambda^{sol})$ відповідає втратам на цій резонансній частоті. Позначимо одну пару власних чисел, з більшим значенням уявної частини власних чисел характеристичної матриці, індексом «с», іншу пару індексом «d». Хоча далі ми будемо розглядати коливання у конкретному резонаторі, геометричний розмір якого відповідає власній частоті порожнього резонатору $f_{n0} = k_n/2\pi = 10.09$ ГГц, переглянемо, як змінюватимуться власні частоти заповненого резонатору залежно від власної частоти порожнього резонатора, яка визначається тільки його геометричними розмірами. Для цього ми просто обчислимо значення коренів рівняння (2.20) для низки значень параметра $k_n/2\pi$. Результати для обчислених таким чином власних частот заповненого резонатора $\text{Im}(\lambda)/2\pi$

наведено на Рис. 3.2, а коефіцієнтів втрат, відповідно, на Рис 3.3. Криві на Рис.

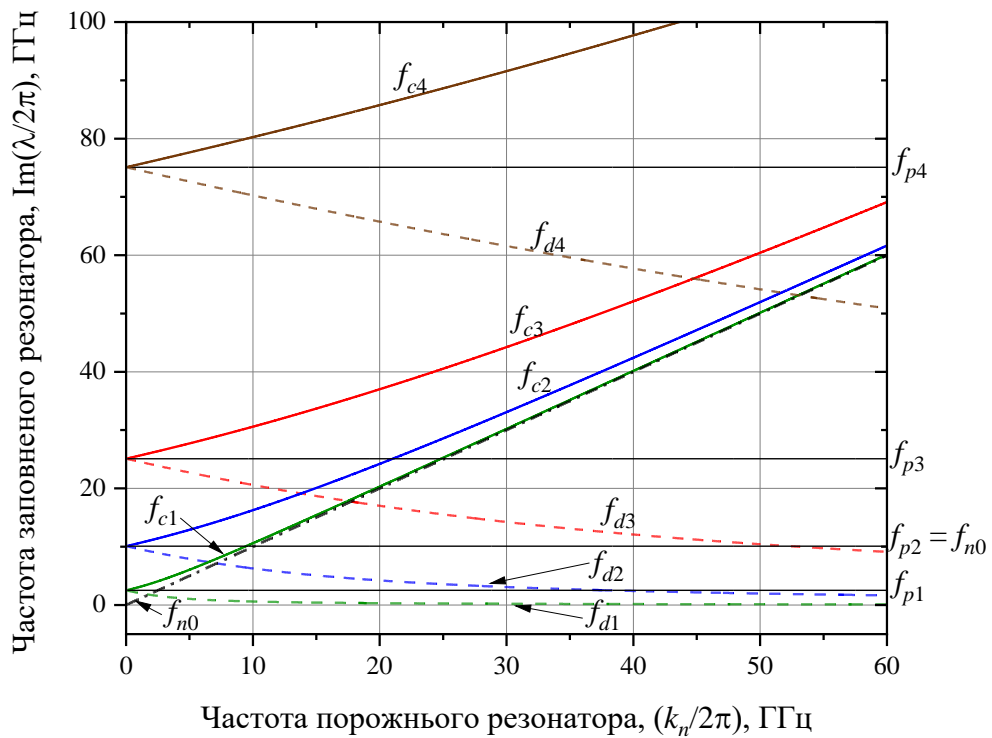


Рис. 3.2. Ілюстрація поведінки власних частот заповненого резонатора залежно від власної частоти порожнього резонатора.

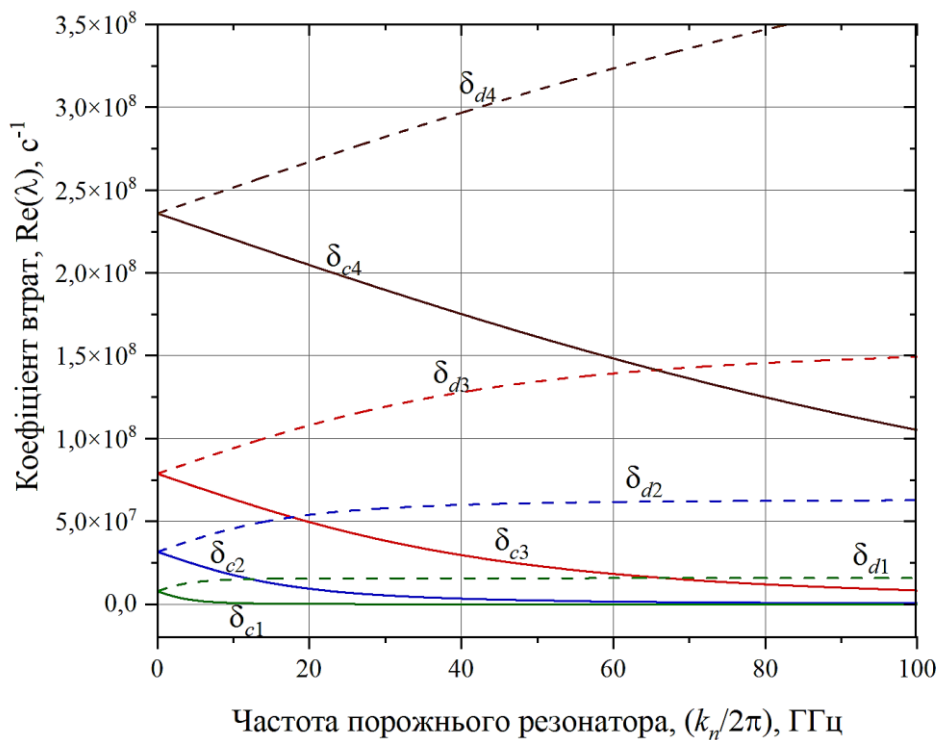


Рис. 3.3. Поведінка коефіцієнтів втрат резонансних частот резонатора, що заповнений середовищами 1-4.

Частоти з індексом «*c*» зростають з ростом власної частоти порожнього резонатора, це зумовлено тим що вони знаходяться у діапазоні додатних значень показника заломлення відповідного середовища, і, можна сказати, що вони більшою мірою зумовлені перевідбиттям електромагнітних хвиль між стінками резонатора. Як видно, особливо на прикладі середовища 1, пряма зростання власної частоти резонатора (позначена f_{n0} на Рис. 3.2), є асимптотою кривих що позначені індексом «*c*», що також говорить на користь останнього твердження. Частоти з індексом «*d*» знаходиться у діапазоні від'ємних значень показника заломлення відповідного середовища, цим фактом зумовлено їх спадання з ростом власної частоти порожнього резонатора, і, можна сказати, що їх поява та поведінка більшою мірою є наслідком взаємодії електромагнітного поля з середовищем. Це добре погоджується з попередніми результатами [53, 57], отриманими для полів у резонаторі, що заповнений довільним дисперсійним середовищем. Далі також будемо називати частоти з індексом «*c*» резонаторними (cavity) частоти з індексом «*d*» діелектричними чи дисперсійними (dielectric, dispersive) відповідно [53, 57].

Одним з основних цікавих результатів, що стосуються власних частот резонатора з таким заповненням, є те, що з найліпшою добротністю збуджуються саме частоти з індексом «*c*», Рис. 3.4, і ця добротність зменшується з ростом плазмової частоти середовища, а у частот з індексом «*d*» навпаки, власна добротність збільшується з ростом плазмової частоти. Заповнення таким діелектриком можна використовувати і для того, щоб значно збільшити робочу частоту резонатора за тих самих геометричних розмірів.

Перейдемо до власних характеристик (частот та коефіцієнтів втрат) заповненого резонатора, що притаманні конкретному резонатору з власною

частотою порожнього резонатора $f_{n0} = 10.09$ ГГц, вони наведені в Табл. 3.2. Останні два рядка представляють значення показника заломлення на власних частотах заповненого резонатора. Показник заломлення на резонаторній власній частоті заповненого резонатора завжди менше 1, бо в діапазоні частот більших за плазмову частоту (см. Рис 3.1) показник заломлення взагалі менший за 1. Що стосується дисперсійної власної частоти, то показник заломлення на цій резонансній частоті для різних значень плазмової частоти може мати досить велику низку значень. Але з отриманих результатів можна зробити висновок, що зі збільшенням значення плазмової частоти, більшої за частоту порожнього резонатора, показник заломлення середовища на обох резонансних частотах заповненого резонатора наближається до нуля. Так, для середовища 4, з найбільшою плазмовою частотою, показник заломлення як на частоті з індексом «с», так і на частоті з індексом «d» має найближчі один до одного за абсолютним значенням та найближчі до нуля значення, за всі розглянуті середовища.

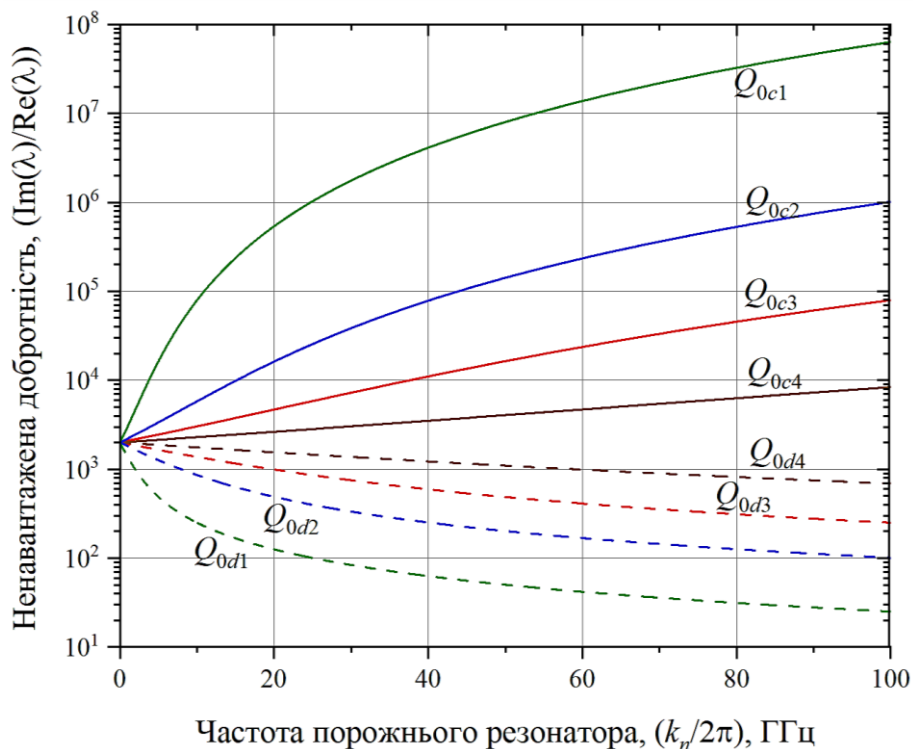


Рис. 3.4. Невантажена добротність коливань на власних частотах у випадку заповнення резонатора середовищами 1-4.

Вище описана поведінка власної добротності також підтверджується частотним відгуком системи на власних частотах, наведеному на Рис. 3.5. Видно, що зі зростанням плазмової частоти середовища, що заповнює резонатор, амплітуда частотного відгуку що відповідає резонаторній частоті вирівнюється з відгуком, що відповідає дисперсійній частоті. Для цих графіків, так само, як і для добротності, було взято логарифмічну шкалу осі ординат.

Таблиця 3.2. Власні параметри резонатора ($f_{n0} = 10.09$ ГГц), що заповнений середовищами з різними параметрами

	Середовище 1	Середовище 2*	Середовище 3	Середовище 4
f_p , ГГц	2.509	10.09	25.09	75.09
$\gamma = 10^{-3}\omega_p$, с ⁻¹	1.58×10^7	6.34×10^7	15.76×10^7	47.18×10^7
f_c , ГГц	10.68	16.33	30.64	80.30
f_d , ГГц	0.59	6.24	20.55	70.21
δ_c , с ⁻¹	8.25×10^5	1.75×10^7	6.33×10^7	22.0×10^7
δ_d , с ⁻¹	1.49×10^7	4.59×10^7	9.44×10^7	25.07×10^7
$n'(f_c)$	0,945	0,62	0,33	0,13
$n'(f_d)$	-17.118	-1.62	-0.49	-0.14

* Плазмова частота цього середовища дорівнює власній частоті порожнього резонатора $f_{p2} = \frac{\omega_{p2}}{2\pi} = f_{n0} = \frac{k_n}{2\pi} = 10.09$ ГГц, який ми взяли для числового моделювання.

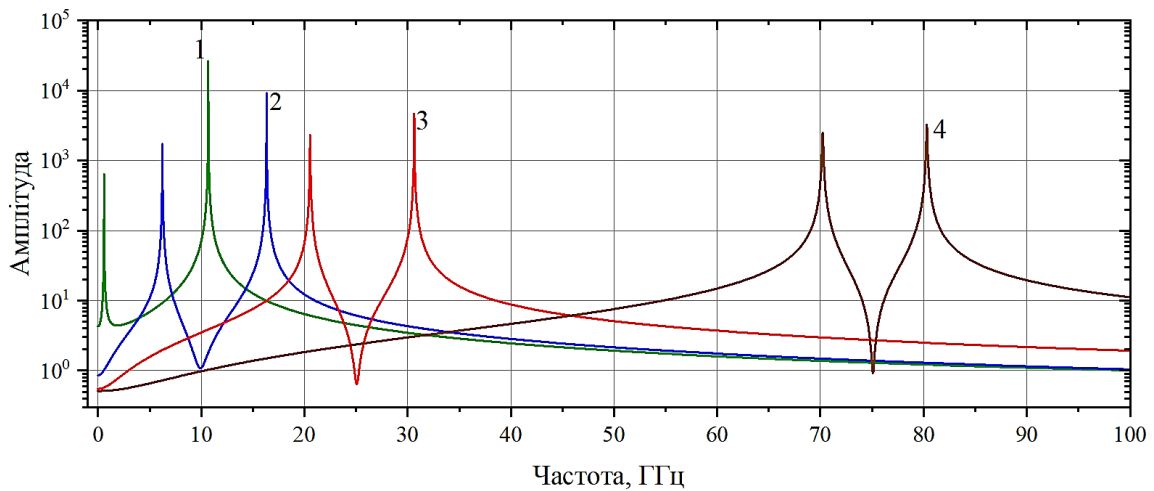


Рис. 3.5. Власний частотний відгук.

3.2 Параметри коливань, що збуджені в заповненому резонаторі

Розглянемо поведінку і характеристики модових амплітуд, які збуджені сторонніми струмами з модовою амплітудою $j_n^e(t) = A_n \sin \Omega_n t$. Значення Ω_n відповідає резонансній частоті відповідного середовища, як резонаторній, так і дисперсійній, тобто будемо використовувати значення $\Omega_n = 2\pi f_c$, $\Omega_n = 2\pi f_d$

Модові амплітуди полів визначаються формулою (2.21). На Рис. 3.6 а наведено спектри модової амплітуди $e_n(t)$ (зроблено перетворення Фур'є), у випадку $\Omega_n = 2\pi f_c$, цифри відповідають номеру середовища, що розглядається. Можна помітити, що у випадку, коли плазмова частота середовища менша за частоту порожнього резонатора при збудженні коливань на резонаторній частоті заповненого резонатора, складова, що відповідає дисперсійній власній частоті майже, або зовсім відсутня. Зі збільшенням плазмової частоти складова, що відповідає дисперсійній власній частоті, росте.

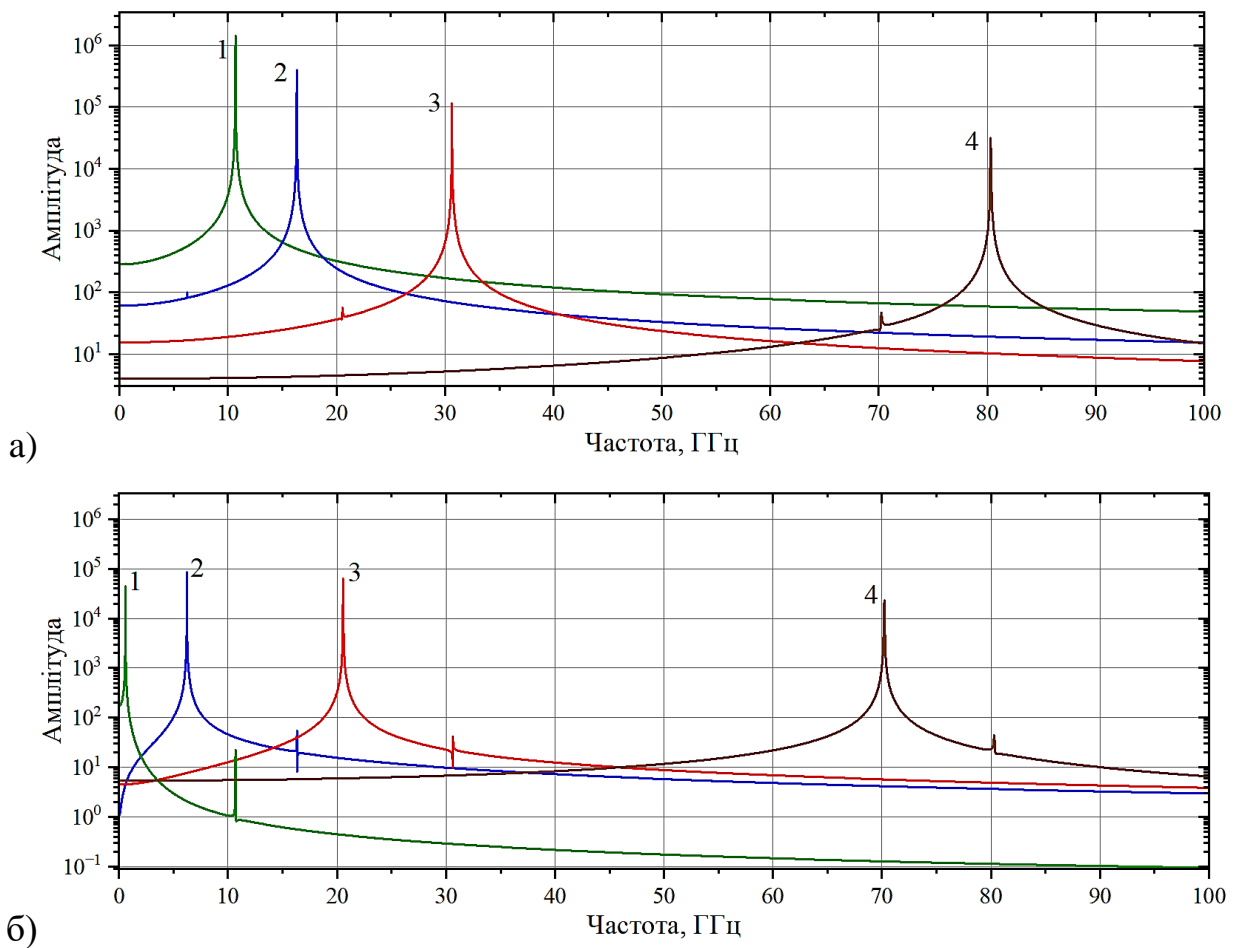


Рис. 3.6. Спектри модової амплітуди $e_n(t)$: а) $\Omega_n = 2\pi f_c$ б) $\Omega_n = 2\pi f_d$

На Рис. 3.6 б наведено спектри модової амплітуди $e_n(t)$, у випадку $\Omega_n = 2\pi f_d$, і видно, що на відміну від попереднього, складова що відповідає частоті f_c присутня для всіх обрахованих середовищ, і вона зменшується зі зростанням плазмової частоти. Для резонатора, що заповнений середовищем 4, складова частоти f_c при збудженні на частоті f_d приблизно така сама, що і складова частоти f_d при збудженні на частоті f_c , і вони обидві достатньо малі порівняно з основною частотною складовою спектру.

Щоб дослідити загальну поведінку амплітуди коливання, обчислили огинаючу модової амплітуди $e_n(t)$, за допомогою визначення аналітичного сигналу

$$s(t) = e_n(t) + iH(e_n(t)),$$

де $s(t)$ – аналітичний сигнал модової амплітуди $e_n(t)$, $H(e_n(t))$ – перетворення Гільберта від модової амплітуди $e_n(t)$. Модуль аналітичного

сигналу ($\sqrt{s^2(t)}$) в кожен момент часу і відтворює огинаючу коливання. Незважаючи на зайві осциляції, що отримані на початковому інтервалі, отримані функції дають уявлення про загальну поведінку амплітуд коливань, їх рівень і час встановлення, залежно від середовища і частоти збудження.

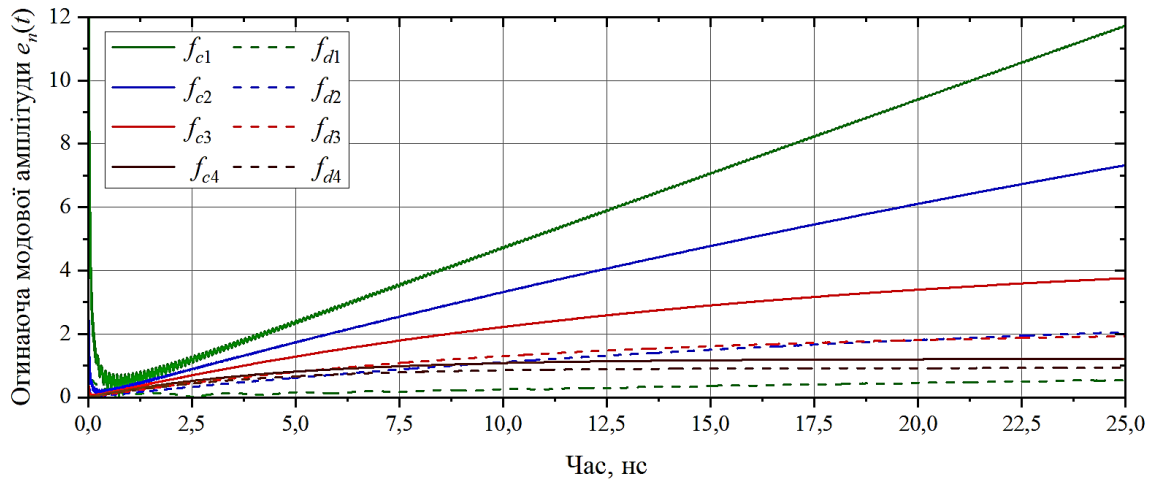
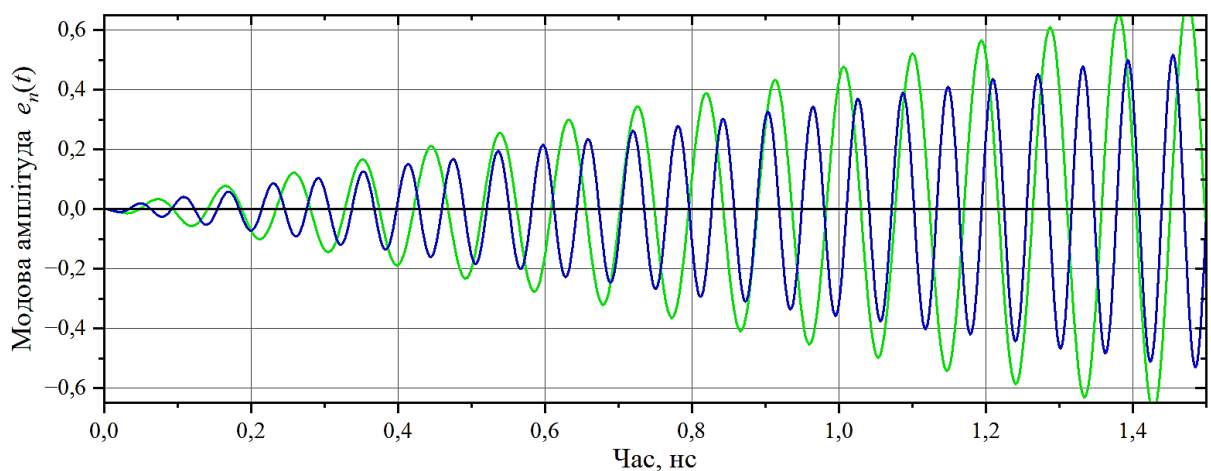
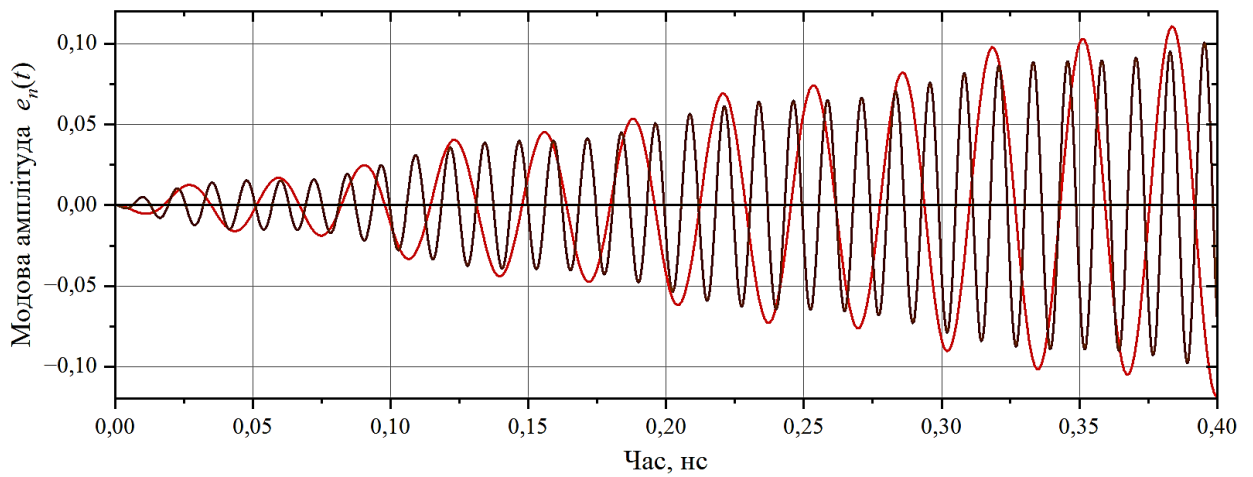


Рис. 3.7. Огинаючі модової амплітуди $e_n(t)$.

На Рис. 3.8 та Рис. 3.9 наведено безпосередньо коливання модової амплітуди $e_n(t)$ у випадку заповнення резонатора різними середовищами і збудження на різних частотах, що відповідають резонансним частотам відповідного середовища.

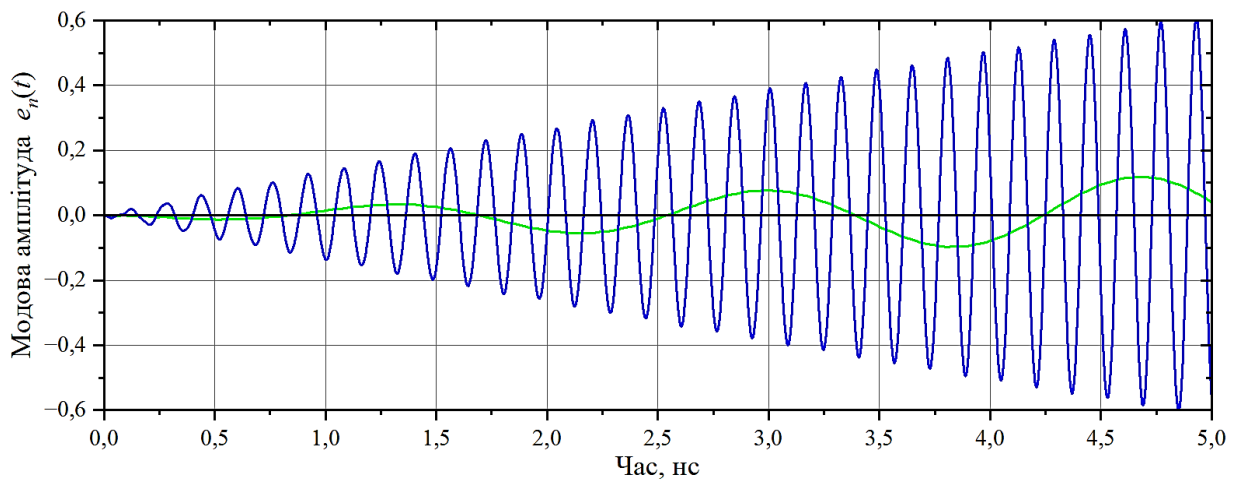


а)

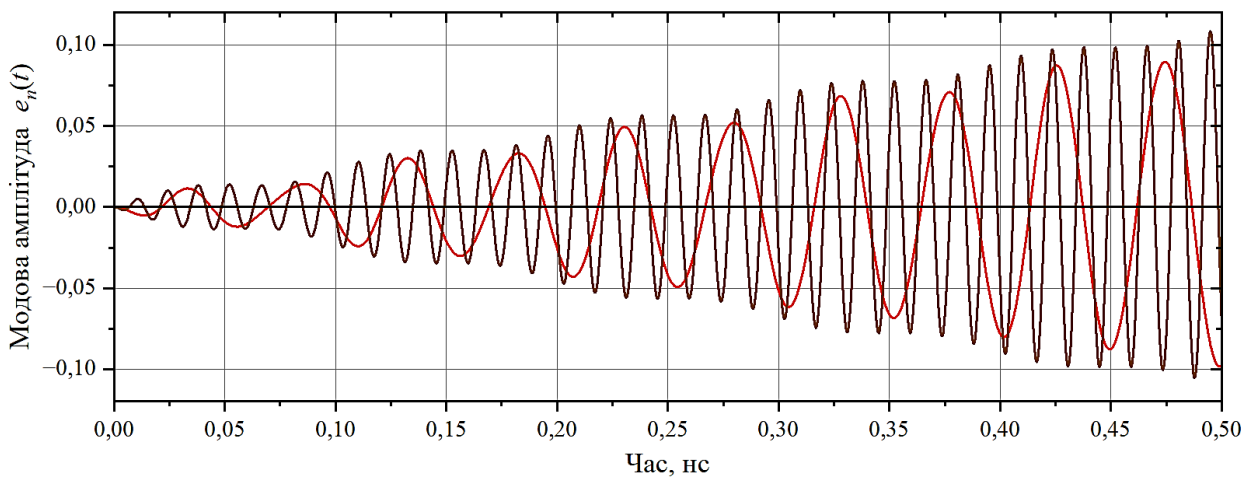


б)

Рис. 3.8. Часові залежності модових амплітуд $e_n(t)$ у випадку, коли модова амплітуда сторонніх струмів має частоту f_c а) 1 середовище (зелена лінія) та 2 середовище (синя лінія), б) 3 середовище (червона лінія) та 4 середовище (коричнева лінія).



а)



b)

Рис. 3.9. Часові залежності модових амплітуд $e_n(t)$ у випадку, коли модова амплітуда сторонніх струмів має частоту f_d а) 1 середовище (зелена лінія) та 2 середовище (синя лінія), б) 3 середовище (червона лінія) та 4 середовище (коричнева лінія).

ВИСНОВКИ

В кваліфікаційній роботі магістра розглянуто задачу про вимушені електромагнітні поля в резонаторі, що заповнений середовищем з показником заломлення близьким до нуля у певному діапазоні частот. Модель середовища складається з полюсу Друде для діелектричної і магнітної проникності, параметри полюсів (плазмова частота та коефіцієнт втрат) для електричного і магнітного полюсів повинні бути однакові, щоб отримати близькі до нуля значення дійсної частини показника заломлення за малих значень для уявної частини показника заломлення. Проаналізовано власні характеристики резонатора заповненого середовищами з різними значеннями параметрів. Розглянуто особливості збуджених на власних частотах часових складових полів.

З'ясовано, що

1. Показник заломлення на резонансних частотах заповненого резонатора наближається до надмалих значень, зі зростанням плазмової частоти середовища, більшої за власну частоту порожнього резонатора.
2. У випадку коли плазмова частота середовища менша за власну частоту порожнього резонатора резонаторна власна частота все одно має значення більші за частоту порожнього резонатора (показник заломлення в діапазоні на який приходить ця резонансна частота менший одиниці).
3. При збудженні коливань на резонаторній власній частоті, з ростом плазмової частоти середовища з'являється і зростає спектральна складова дисперсійної резонансної частоти.
4. При збудженні коливань на дисперсійній власній частоті, з ростом плазмової частоти середовища спадає спектральна складова резонаторної резонансної частоти.

5. При збудженні коливань на резонаторній власній частоті резонатора, що заповнений середовищем з плазмовою частотою меншою за власну частоту порожнього резонатора, складова, що відповідає дисперсійній власній частоті дуже мала, або зовсім відсутня.

У роботі сфокусовано увагу на часових модових амплітудах електромагнітного поля, але більш цікавим є часово-просторовий розподіл поля у такому резонаторі повністю, як у випадку збудження однієї моди у резонаторі так і поля, яке потрібно представляти сукупністю кількох складових модових розкладань. Також у перспективі використання такого резонатора, як перетворювача або роздільника частот, дуже важливим буде розподіл енергії поля, та питання перетворення мод чи збудження додаткових мод, якщо вони виникають. Ці та інші пов'язані питання будуть темами майбутніх досліджень.

ПОСИЛАННЯ

1. J.P. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, W.J. Stewart, Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, 47 (11) (1999), pp. 2075-2079
2. D.R. Smith, W.J. Padila, D.C. Nemat-Nasser, S. Schultz, Composite medium and simultaneously negative permeability and permittivity, *Phy. Rev. Lett.*, 84 (2000), pp. 4184-4187, [10.1103/PhysRevLett.84.4184](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4184)
3. T.J. Cui, D.R. Smith, R. Liu, *Metamaterials: Theory, Design and Applications* Springer-Verlag, New York, NY (2010)
4. P. Kumar, T. Ali, M.M.M. Pai, Electromagnetic Metamaterials: A New Paradigm of Antenna Design. *IEEE Access*, 2021 (9) (2021), pp. 18722-18751, <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3053100>
5. N. Engheta, Richard W. Ziolkowski, *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*. Wiley-Interscience: Hoboken, N.J, 2010
6. J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, I. Youngs, *Phys. Rev. Lett.* 76, 4773 (1996).
7. Ziolkowski, R. W. & Heyman, E. Wave propagation in media having negative permittivity and permeability. *Phys. Rev. E* **64**, 056625 (2001).
8. Nathaniel Kinsey , Clayton DeVault, Alexandra Boltasseva and Vladimir M. Shalaev, Near-zero-index materials for photonics. *Nat Rev Mater* **4**, 742–760 (2019). <https://doi.org/10.1038/s41578-019-0133-0>
9. Adams, D. C. et al. Funneling light through a subwavelength aperture with epsilon-near-zero materials. *Phys. Rev. Lett.* 107, 133901 (2011).
10. Ziolkowski, R. W. Propagation in and scattering from a matched metamaterial having a zero index of refraction. *Phys. Rev. E* 70, 046608 (2004)
11. A.M. Mahmoud, N. Engheta Wave–matter interactions in epsilon-and-mu-near-zero structures. *Nature Communications* [Internet]. 2014 Dec;5(1). <https://doi.org/10.1038/ncomms6638>

12. M. Silveirinha, N. Engheta Tunneling of Electromagnetic Energy through Subwavelength Channels and Bends using ϵ -Near-Zero Materials. *Physical Review Letters*. 2006 Oct 10; 97(15). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.157403>
13. Campione, S., Wendt, J. R., Keeler, G. A. & Luk, T. S. Near-infrared strong coupling between metamaterials and epsilon-near-zero modes in degenerately doped semiconductor nanolayers. *ACS Photonics* 3, 293–297 (2016).
14. Ziolkowski, R. W. & Heyman, E. Wave propagation in media having negative permittivity and permeability. *Phys. Rev. E* 64, 056625 (2001).
15. Suchowski, H. et al. Phase mismatch-free nonlinear propagation in optical zero-index materials. *Science* 342, 1223–1226 (2013).
16. Naik, G. V., Shalaev, V. M. & Boltasseva, A. Alternative plasmonic materials: beyond gold and silver. *Adv. Mater.* 25, 3264–3294 (2013).
17. Streyer, W., Feng, K., Zhong, Y., Hoffman, A. J. J. & Wasserman, D. Engineering the reststrahlen band with hybrid plasmon/phonon excitations. *MRS Commun.* 6, 1–8 (2016).
18. Vesseur, E. J. R., Coenen, T., Caglayan, H., Engheta, N. & Polman, A. Experimental verification of $n=0$ structures for visible light. *Phys. Rev. Lett.* 110, 013902 (2013).
19. Shcherbakov, M. R. et al. Ultrafast all-optical switching with magnetic resonances in nonlinear dielectric nanostructures. *Nano Lett.* 15, 6985–6990 (2015).
20. Garcia, N., Ponizovskaya, E. V. & Xiao, J. Q. Zero permittivity materials: band gaps at the visible. *Appl. Phys. Lett.* 80, 1120–1122 (2002).
21. Marini, A. & García de Abajo, F. J. Self-organization of frozen light in near-zero-index media with cubic nonlinearity. *Sci. Rep.* 6, 20088 (2016).
22. Reshef, O. et al. Direct observation of phase-free propagation in a silicon waveguide. *ACS Photonics* 4, 2385–2389 (2017).

- 23.M.I. Katsnelson, Zitterbewegung, chirality, and minimal conductivity in graphene. *Eur. Phys. J. B-Condens. Matter Complex Syst.* 51(2), 157–160 (2006)
- 24.A.K. Geim, K.S. Novoselov, The rise of graphene. *Nat. Mater.* 6(3), 183 (2007)
- 25.N. Shankhwar and R. K. Sinha, *Zero Index Metamaterials*, Springer eBooks. Nature Singapore Pte Ltd. 2021 <https://doi.org/10.1007/978-981-16-0189-7>
- 26.L.-G. Wang, Z.-G. Wang, J.-X. Zhang, S.-Y. Zhu, Realization of dirac point with double cones in optics. *Opt. Lett.* 34(10), 1510–1512 (2009)
- 27.E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 10th edn. (2009)
- 28.L.-G. Wang, Z.-G. Wang, J.-X. Zhang, S.-Y. Zhu, Realization of dirac point with double cones in optics. *Opt. Lett.* 34(10), 1510–1512 (2009)
29. F. Zhang, G. Houzet, E. Lheurette, D. Lippens, M. Chaubet, X. Zhao, Negative-zero-positive metamaterial with omega-type metal inclusions. *J. Appl. Phys.* 103(8), 084312 (2008)
- 30.D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (AAPT, 2005)
- 31.P. Drude, Zur elektronentheorie der metalle. *Annalen der physik* 306(3),566–613 (1900)
- 32.Cheng, D. *Field and Wave Electromagnetics*. (Addison-Wesley, 1983)
- 33.Reines, I. C., Wood, M. G., Luk, T. S., Serkland, D. K. & Campione, S. Compact epsilon-near-zero silicon photonic phase modulators. *Opt. Express* 26, 21594–21605 (2018).
- 34.Wang, C., Zhang, M., Stern, B., Lipson, M. & Lončar, M. Nanophotonic lithium niobate electro-optic modulators. *Opt. Express* 26, 1547–1555 (2018).
- 35.Babicheva, V. E. et al. Towards CMOS-compatible nanophotonics: Ultra-compact modulators using alternative plasmonic materials. *Opt. Express* 21, 27326–27337 (2013).

- 36.J. Marcos, M.G. Silveirinha, N. Engheta. μ -near-zero supercoupling. *Physical Review B*. 2015 May 11;91(19). <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.195112>
- 37.D.I. Vulis, O. Reshef, P. Camayd-Muñoz, E. Mazur. Manipulating the flow of light using Dirac-cone zero-index metamaterials. *Reports on Progress in Physics*. 2018 Nov 5;82(1):012001. [DOI: 10.1088/1361-6633/aad3e5](https://doi.org/10.1088/1361-6633/aad3e5)
- 38.Strudley, T. et al. Observation of intensity statistics of light transmitted through 3D random media. *Opt. Lett.* 39, 6347–6350 (2014).
- 39.Vlasov, Y. A., O’Boyle, M., Hamann, H. F. & McNab, S. J. Active control of slow light on a chip with photonic crystal waveguides. *Nature* 438, 65–69 (2005).
- 40.Fox, M. *Optical Properties of Solids* (Oxford University Press, 2010).
- 41.Liberal, I., Mahmoud, A. M., Li, Y., Edwards, B. & Engheta, N. Photonic doping of epsilon-near-zero media. *Science* 355, 1058–1062 (2017).
- 42.Rodríguez-Fortuño, F. J., Vakil, A. & Engheta, N. Electric levitation using ϵ -near-zero metamaterials. *Phys. Rev. Lett.* 112, 033902 (2014).
- 43.Basov, D. N., Fogler, M. M. & García de Abajo, F. J. Polaritons in van der Waals materials. *Science* 354, aag1992 (2016).
- 44.Kinsey, N. & Khurgin, J. Nonlinear epsilon-near-zero materials explained: opinion. *Opt. Mater. Express* 9, 2793–2796 (2019).
- 45.Khurgin, J. B. Slow light in various media: a tutorial. *Adv. Opt. Photonics* 2, 287–318 (2010).
- 46.Ziolkowski, R. W. Propagation in and scattering from a matched metamaterial having a zero index of refraction. *Phys. Rev. E* 70, 046608 (2004).
- 47.Kaipurath, R. M. et al. Optically induced metal-to-dielectric transition in epsilon-near-zero metamaterials. *Sci. Rep.* 6, 27700 (2016).
- 48.Fleury, R. & Alù, A. Enhanced superradiance in epsilon-near-zero plasmonic channels. *Phys. Rev. B* 87, 201101 (2013).

49. Minkov, M., Williamson, I. A. D., Xiao, M. & Fan, S. Zero-index bound states in the continuum. *Phys. Rev. Lett.* 121, 263901 (2018).
50. Liberal, N. Engheta Near-zero refractive index photonics. *Nature Photonics* [Internet]. 2017 Mar 11(3): pp 149–58. Available from: <https://www.nature.com/articles/nphoton.2017.13>
51. Tretyakov O. A. Essentials of nonstationary and nonlinear electromagnetic field theory / O. A. Tretyakov // Analytical and numerical methods in the Electromagnetic Wave Theory. In ed. by M. Hashimoto, M. Idemen, O. A. Tretyakov. – Science House Co., Ltd., Tokyo, 1993.
52. Aksoy S. Time-Domain Cavity Oscillations Supported by a Temporally Dispersive Dielectric / S. Aksoy, M. Antyufeyeva, E. Basaran, A. A. Ergin, O. A. Tretyakov // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques.* – 2005. – Vol. 53, № 8, p. 2465 – 2471.
53. M. S. Antyufeyeva, "Cavity with dispersive medium that refractive index is positive and negative," 2011 *Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium*, 2011, pp. 73-76, doi: 10.1109/MRRS.2011.6053604.
54. M. S. Antyufeyeva and O. A. Tretyakov, "Pulse excitation of a cavity with dispersive medium that refractive index is positive and negative," 2010 5th *International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*, 2010, pp. 134-135, doi: 10.1109/UWBUSIS.2010.5609163.
55. M. S. Antyufeyeva, "Electromagnetic field in a dispersive medium filled cavity under pulse train excitation," 2012 6th *International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*, 2012, pp. 302-304, doi: 10.1109/UWBUSIS.2012.6379812.
56. Michaël Lobet, Liberal I, Vertchenko L, Lavrinenko AV, Nader Engheta, Mazur E. Momentum considerations inside near-zero index materials. *Light-Science & Applications.* 2022 Apr 25;11(1). <https://doi.org/10.1038/s41377-022-00790-z>
57. M. S. Antyufeyeva, A. Yu. Butrym, O. A. Tretyakov. Transient electromagnetic fields in a cavity with dispersive double negative medium.

- Progress in Electromagnetics Research M. 2009 Jan 1;8:51–65.
<http://dx.doi.org/10.2528/PIERM09062307>
58. Hayashi S. Surges on Transmission Systems. 1955.
59. Shvartsburg A. B. Impuls Time-Domain Electromagnetics of Continuous Media / A. B. Shvartsburg. – Birkhäuser, Boston. – 1999. 168 P.
60. Bohren C. F. Absorption and scattering of light by small particles / C. F. Bohren, D. R. Huffman. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.