

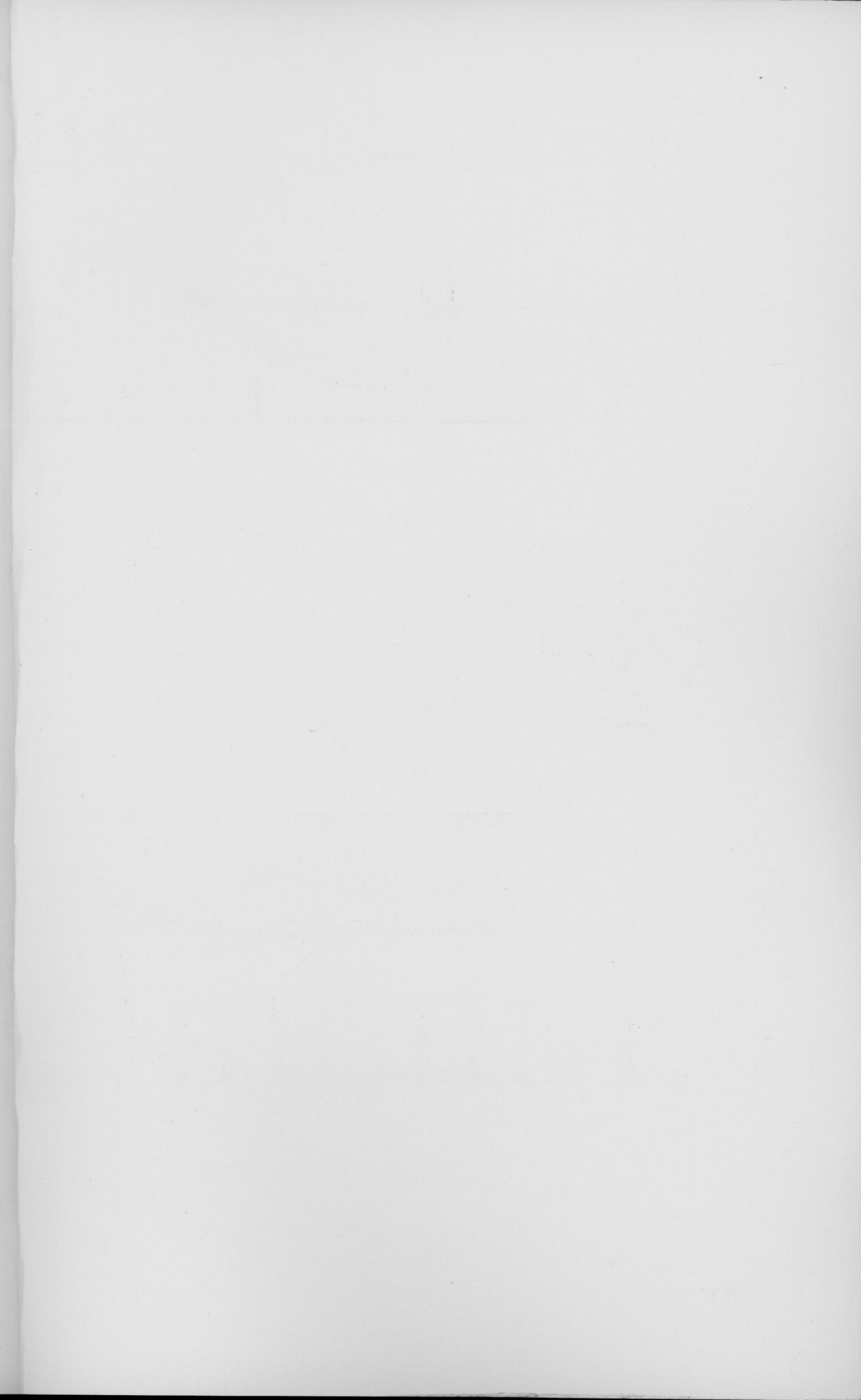
# ВІСНИК

Харківського національного  
університету



№ 703

Харків  
2005





ISSN 0453 8048

Міністерство освіти та науки України  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Заснований у 1965 р.

# ВІСНИК

Харківського національного  
університету



№ 703

Серія

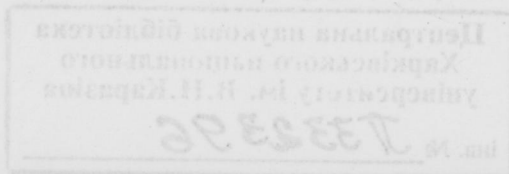
«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 5

Харків  
2005



УДК 519.6+004.652/.942+519.217:681.3+621.793.184.06+378.1:159.816

До випуску увійшли статті, присвячені дослідженням у галузі математичного моделювання, інформаційних технологій та автоматизованих систем управління.

Збірка включає статті, що були подані до розгляду редакції у період з 15.06.2005 по 15.09.2005 року.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

**Редакційна колегія:**

**Азаренков М.О.**, (гол. редактор), д.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Гандель Ю.В.**, д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Жолткевич Г.М.**, (заст. гол. редактора), д.т.н., с.н.с., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Золотарьов В.О.**, д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Куклін В.М.**, д.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Лазурик В.Т.**, д.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Любарський М.Г.**, д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Мацевитий Ю.М.**, д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Міщенко В.О.**, (відпов. секретар), к.ф.-м.н., доц., ММФ і ФКН ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Раскін Л.Г.**, д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

**Стрельникова О.О.**, д.т.н., Ін-т проблем машинобудування НАН України

**Руткас А.Г.**, д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Соколов О.Ю.**, д.т.н., проф., Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського "ХАІ"

**Стервєсдов М.Г.**, к.т.н., доц., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Целуйко О.Ф.**, к.ф.-м.н., доц., ФКН ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Черваньов І.Г.**, д.т.н., проф., геолого-географічний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Шейко Т.В.**, д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Щербина В.А.**, д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

**Адреса редакційної колегії:** 61077, м. Харків, пл. Свободи, 4, ХНУ імені В.Н. Каразіна, каф. Математичної фізики та обчислювальної математики, к.6-28

Тел. +38 (057) 707-52-02, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (Протокол № 11 від 30.09.05)

Свідцтво про державну реєстрацію КВ № 4063 від 02.03.2000 р.

© Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, 2005

*Ж-1403Р*

Центральна наукова бібліотека  
Харківського національного  
університету ім. В.Н.Каразіна

інв. № *П332396*

## Від редакційної колегії

Процес широкого використання інформаційних технологій у різних сферах людської діяльності, що розпочався в останні десятиріччя двадцятого століття, довгий час не торкався освіти. Останні десять років характеризуються пошуками шляхів ефективного використання інформаційних технологій у сфері освіти. Ці пошуки охоплюють широкий спектр досліджень, серед яких і проблеми використання обчислювальної техніки в організації навчального процесу, і з'ясування форм використання сучасних мультимедійних засобів в процесі формування знань, вмінь та навичок, і створення віртуальних діяльних середовищ для посилення креативної компоненти навчання тощо.

В той же час важливим напрямом використання сучасних інформаційних технологій в освіті є створення автоматизованих систем управління вищими навчальними закладами, забезпечення ефективного обміну управлінською інформацією між університетами та державними органами управління, зокрема міністерством освіти і науки України. Актуальність цього напрямку значно посилилася у зв'язку приєднанням України у травні цього року до Болонського процесу. Нові вимоги до якості управління освітою, що стали наслідком цієї події, не можуть бути реалізовані в рамках традиційної паперової технології обміну інформацією. Все це призводить до необхідності модернізації систем управління університетами і галуззю в цілому, спираючись на можливості, які надають сучасні інформаційні і телекомунікаційні технології.

Саме на вирішення цієї проблеми спрямований міжнародний проект „Інформаційні технології в управлінні освітою України”, який підтриманий європейською програмою TEMPUS TACIS як проект МР JEP 23010-2003. Значна частина досліджень, результати яких публікуються у цьому випуску була виконана за підтримки в рамках цього проекту.

Крім того, редакційна колегія вважала за потрібне об'єднати статті, що були отримані нею та стосувалися проблем автоматизації управління та обміну інформацією, в один випуск Вісника Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна серії «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління».

Редакційна колегія вдячна також колегам професорам Л. Адріані, Ф. Лоіру з університету Ніцци – Софії Антіполіс (Франція) та професорам Б. Хейні та Е. Грею з університету Каледонія в Глазго (Велика Британія), які люб'язно згодні прийняти участь у рецензуванні статей цього випуску.

## From Editorial Board

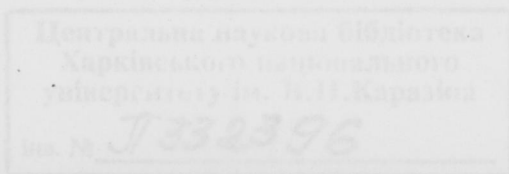
For a long time education has been out of information technology sphere. The last decade is characterized by intensive search of ways to use information technology in education. These search activities cover the wide spectrum of research including the problems of using computers in educational process organization, defining the ways of using multimedia tools in training of learning skills and development of virtual activity environments to enforce the creative component of education.

At the same time the problem of creating the automatic university management system and providing effective business information interchange between universities and government organizations such as Ministry of Education and Science of Ukraine is of great importance in the field of using information technology in education. The urgency of this problem has increased with joining the Ukraine to Bologna process in May 2005. The new requirements to the quality of educational management which stem from this event could not be satisfied within the traditional "paper" technology of information interchange. All this leads to the necessity of reengineering the current university management systems and the field in whole on the base of modern information and telecommunication technology.

The international project "Information technology in university management in Ukraine" supported by European TEMPUS TACIS program as MP JEP 23010-2003 project is directed on solving exactly this problem. The main part of research the results of which are published in this bulletin was done within this project.

Besides the editorial board considers to be expedient to include all the papers concerning with the problems of university management automatization and information interchange into one issue of Bulletin of V. Karazin Kharkov National University, series "Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems".

The editorial board is grateful to colleagues professors L. Adriani, F. Louir from the university of Nice-Antipolice (France) and professors B Hainey and E. Grey from the Caledonian Glasgow university ( UK) for their agreement to review the papers of this issue.





## Имитационное моделирование ИПС, построенных на основании архитектуры клиент/сервер

Ахмед Али (Абдель Карим) Альмхерат

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Украина*

Simulating models for retrieval system with homogeneous and heterogeneous query flows are built at the article. Model experiments were showed that models qualitative behavior corresponded with qualitative behavior of real system.

### 1. Введение

Информационно-поисковые системы (ИПС) представляют важный класс программного обеспечения, предназначенного для поддержки процессов принятия решений. Особенностью этого класса информационных систем является относительная статичность базы данных (БД) при необходимости обработки интенсивного потока запросов различного типа. Критичными характеристиками распределенной ИПС с архитектурой клиент/сервер являются вероятность потери запроса и среднее время ожидания ответа на запрос. В этой ситуации при проектировании системы необходимо оценить возможные значения для этих характеристик, что позволяет дать обоснованный ответ на вопрос о целесообразности реализации архитектуры клиент/сервер для проектируемой ИПС.

Вероятностные свойства потоков заявок на обслуживание являются предметом изучения теории массового обслуживания [1]. Применение результатов этой теории к проектированию компьютерных сетей достаточно подробно освещено в [2]. Однако специфика потоков заявок на обслуживание, соответствующих потокам запросов в ИПС, построенных на основе архитектуры клиент/сервер, не нашла отражения в моделях, рассмотренных и изученных в литературе.

Целью настоящей работы является разработка имитационных моделей обслуживания однородных и неоднородных потоков запросов в ИПС, построенной на основании архитектуры клиент/сервер.

### 2. Изложение результатов

Для исследования потоков запросов к ИПС в работе построены имитационные модели, описание которых на языке системы GPSS World (ограниченная версия системы и документация к ней доступна на сайте <http://www.minutemansoftware.com>) приведено ниже.

Для модели однородного потока заявок используется поток Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ :



$$P(\xi_i = k) = e^{-\lambda_i} \frac{(\lambda_i)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Для моделирования неоднородного потока заявок, содержащего заявки  $n$  различных типов с интенсивностями  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  соответственно используется поток со следующей функцией распределения вероятностей:

$$\begin{cases} P(\xi_i = 0) = e^{-\lambda_i} \\ P(\xi_i = (i_1, i_2, \dots, i_k)) = e^{-\lambda_i} \left( \prod_{j=1}^k \frac{\lambda_{i_j}}{\lambda} \right) \frac{(\lambda_i)^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2)$$

В формулах (2)  $\lambda$  определяется как сумма  $\lambda_i$ :  $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .

В обоих моделях предполагается, что время обработки распределено равномерно на интервале  $[\tau - \Delta\tau, \tau + \Delta\tau]$  так, чтобы отношение  $\delta = \frac{\sigma_\tau}{\tau}$  было равно 0,01. Таким образом, величина  $\Delta\tau$  определяется по формуле  $\Delta\tau = \delta \cdot \tau \sqrt{3}$ .

В тексте описания модели с однородным потоком используются следующие объекты.

#### Константы:

- Delta —  $\delta$ , при моделировании принимается значение 1%;
- MaxTime — общее время наблюдения, при моделировании принимается значение 10000 с (около суток).

#### Варьируемые факторы:

- CRate — интенсивность потока запросов к ИПС, при моделировании варьируется в диапазоне от 0,01 до 10 1/с;
- BLen — длина буфера, при моделировании варьируется обычно от 0 до 100;
- HTMean — среднее время обработки запроса, при моделировании варьируется в диапазоне от 0,01 до 10 с.

#### Изучаемые характеристики:

- RFreq — вероятность потери запроса;
- WTime — среднее время ожидания выполнения запроса.

\*\*\*\*\*

; Model constants:

Delta EQU 0.01 ; handling time relative error  
MaxTime EQU 10000

\*\*\*\*\*

; Model factors and their default values:

CRate EQU 1 ; calling rate  
BLen EQU 50 ; buffer length  
HTMean EQU 1 ; handling time mean

\*\*\*\*\*

; Initialization section

\*\*\*\*\*

GENERATE , , 0,1,10

```

; Initialization of studying parameters:
    SAVEVALUE RFreq,0      ; rejecting frequency
    SAVEVALUE WTime,0      ; waiting time
; Working variables:
    ; set half of handling time range
    SAVEVALUE HTRange,(Delta#X$HTMean#Sqr(3))
    SAVEVALUE QGen,0        ; quantity of generated
                                ; queries
    SAVEVALUE QHandled,0    ; quantity of handled
                                ; queries
    SAVEVALUE QLost,0       ; quantity of lost queries
    TERMINATE
*****
;                               Model section
*****
    GENERATE (Exponential(1,0,1/CRate)) ; queries flow
                                           ; generator
    SAVEVALUE QGen+,1
    TEST LE (Q$Accepted),BLen,Rejected ; test buffer
                                           ; overflow
    QUEUE Accepted ; start handling
    SEIZE Server
    ADVANCE HTMean,X$HTRange
    RELEASE Server
    DEPART Accepted ; end handling
    ; begin of WTime calculating
    SAVEVALUE QHandled+,1
    SAVEVALUE OldWTime,X$WTime
    SAVEVALUE WTime+,(M1-X$OldWTime)/X$QHandled
    ; end of WTime calculating
    TRANSFER ,Destroy
    ; begin of RFreq calculating
Rejected SAVEVALUE QLost+,1
    SAVEVALUE RFreq,(X$QLost/X$QGen)
    ; end of RFreq calculating
Destroy TERMINATE
*****
;                               Timer section
*****
    GENERATE MaxTime, , ,1 ; Halting time = MaxTime s
    TERMINATE 1
*****

```

Как видно из исходного текста модель состоит из трех сегментов: сегмента инициализации, сегмента основной модели и сегмента таймера. Такая структура делает модель устойчивой по отношению к изменениям условий экспериментов.

С целью качественной проверки поведения модели был поставлен ряд экспериментов.

1. Выяснение зависимости вероятности потери запроса от длины буфера при разных интенсивностях потоков запросов ( $CR$ ) и фиксированном (на уровне

1,0 с) среднем времени обработки. Результат эксперимента представлен на рис. 1.

2. Выяснение зависимости вероятности потери запроса от длины буфера при разных временах обработки запросов ( $HTime$ ) при фиксированной (на уровне 1,0 1/с) интенсивности потока заявок. Результат эксперимента представлен на рис. 2.

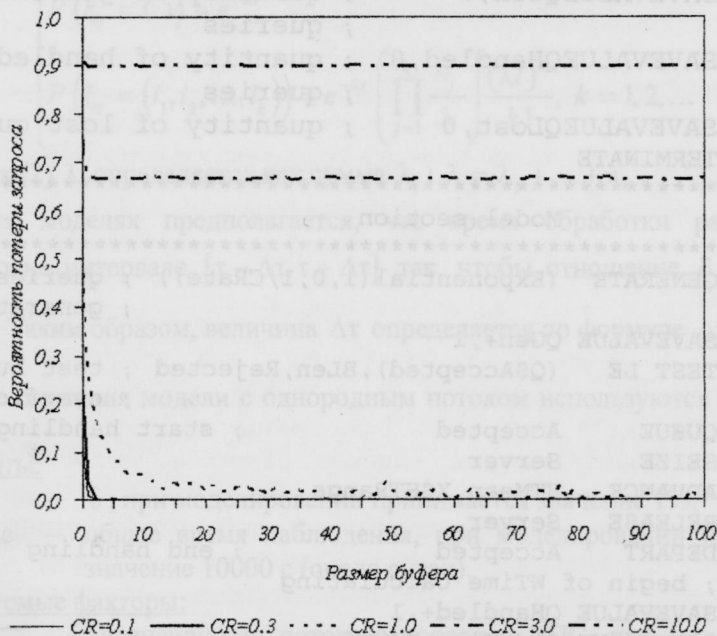


Рис. 1. Зависимость вероятности потери запроса от длины буфера при разных интенсивностях потоков запросов

Из графиков на рис. 1, рис. 2 видно, что с ростом интенсивности потока запросов при фиксированном времени обработки запроса, либо времени обработки запроса при фиксированной интенсивности потока запросов, происходит увеличение вероятности потери запроса. Кроме того, видно, что увеличение буфера уменьшает вероятность потери запроса. Иными словами, результаты экспериментов на имитационной модели согласуются с ожидаемым качественным поведением ИПС.

В тексте описания модели с неоднородным потоком параметры модели читаются из внешнего файла, содержащего интенсивности потоков заявок каждого типа и среднее время их обработки ИПС. Текст самой модели приведен ниже.

```
*****
; Model constants:
Delta    EQU    0.01 ; handling time relative error
MaxTime  EQU    10000
*****
; Model factors and their default values:
CRate    EQU    1 ; calling rate
BLen     EQU    50 ; buffer length
```

HTMean EQU 1 ; handling time mean

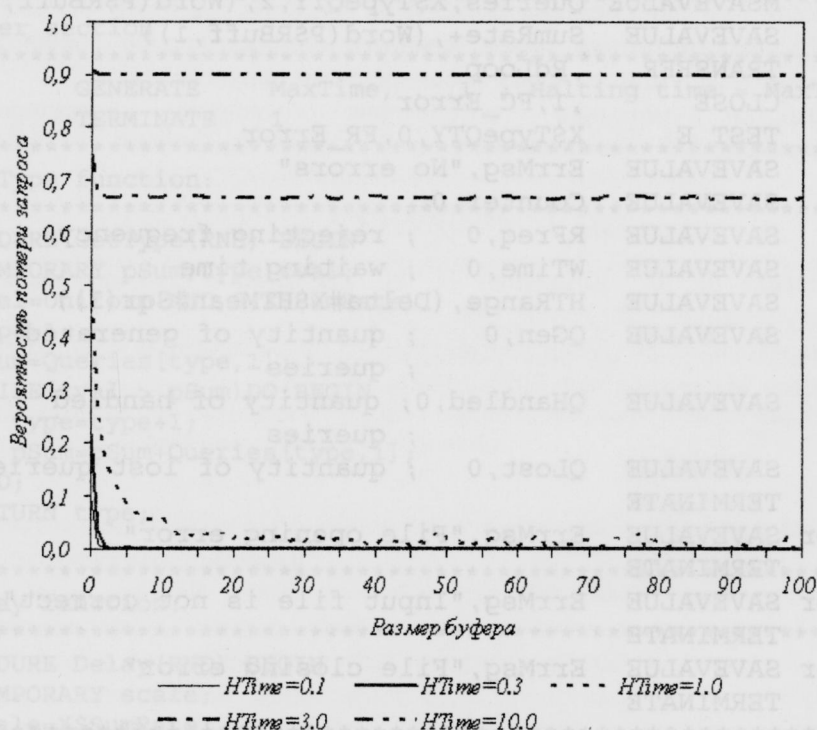


Рис. 2. Зависимость вероятности потери запроса от длины буфера при разных временах обработки запросов

```
*****
* Input section:
*   Quantity of query types (TypeQTY) and
*   correspondent calling rates (matrix Queries) are
*   got at the section
*****
* TypeQTY: quantity of query types
* Queries: queries characteristics TypeQTY x 2 - matrix
*   Queries[i,1] - i-th query calling rate
*   Queries[i,2] - i-th query handling time
* SumRate:
*   storage for the sum of query calling rates
*****
Queries MATRIX          ,100,2
*****
Input  GENERATE      , ,0,1,10      ; Section priority = 10
       OPEN          ("params.txt"),1,FO_Error
       SAVEVALUE     TypeQTY,0
RdLoop READ          RBuff,1,EOF
       SAVEVALUE     TypeQTY+,1
```



```

MSAVEVALUE Queries,X$TypeQTY,1,(Word(P$RBuff,1))
MSAVEVALUE Queries,X$TypeQTY,2,(Word(P$RBuff,2))
SAVEVALUE SumRate+,(Word(P$RBuff,1))
TRANSFER ,RdLoop
EOF CLOSE ,1,FC_Error
TEST E X$TypeQTY,0,FR_Error
SAVEVALUE ErrMsg,"No errors"
SAVEVALUE Counter,0
SAVEVALUE RFreq,0 ; rejecting frequency
SAVEVALUE WTime,0 ; waiting time
SAVEVALUE HTRange,(Delta#X$HTMean#Sqr(3))
SAVEVALUE QGen,0 ; quantity of generated
; queries
SAVEVALUE QHandled,0; quantity of handled
; queries
SAVEVALUE QLost,0 ; quantity of lost queries
TERMINATE
FO_Error SAVEVALUE ErrMsg,"File opening error"
TERMINATE
FR_Error SAVEVALUE ErrMsg,"Input file is not correct"
TERMINATE
FC_Error SAVEVALUE ErrMsg,"File closing error"
TERMINATE

```

```

*****
* Model section:
*****

```

```

GENERATE (Delay(1))
SAVEVALUE QGen+,1
TEST LE (Q$Accepted),BLen,Rejected ; test buffer
QUEUE Accepted ; start handling
ASSIGN Type,(GetType(2))
SEIZE Server
ADVANCE (ServiceTime(3))
RELEASE Server
DEPART Accepted ; end handling
; begin of WTime calculating
SAVEVALUE QHandled+,1
SAVEVALUE OldWTime,X$WTime
SAVEVALUE WTime+,(M1-X$OldWTime)/X$QHandled)
; end of WTime calculating
TRANSFER ,Destroy
; begin of RFreq calculating
Rejected SAVEVALUE QLost+,1
SAVEVALUE RFreq,(X$QLost/X$QGen)
; end of RFreq calculating
Destroy TERMINATE

```

```

*****
; Timer section
*****
      GENERATE      MaxTime, , ,1 ; Halting time = MaxTime s
      TERMINATE     1
*****
* GetType function:
*****
PROCEDURE GetType(RND) BEGIN
  TEMPORARY pSum,type,tval;
  tval=Uniform(RND,0,X$SumRate);
  type=1;
  pSum=Queries[type,1];
  WHILE(tval > pSum)DO BEGIN
    type=type+1;
    pSum=pSum+Queries[type,1];
  END;
  RETURN type;
END;
*****
* Delay function:
*****
PROCEDURE Delay(RND) BEGIN
  TEMPORARY scale;
  scale=X$SumRate;
  IF(scale>0)THEN RETURN Exponential(RND,0,scale);
  ELSE RETURN 1;
END;
*****
* Service function:
*****
PROCEDURE ServiceTime(RND) BEGIN
  TEMPORARY tmp;
  tmp=Queries[P$Type,2];
  RETURN Uniform(RND,0.9#tmp,1.1#tmp);
END;
*****

```

### 3. Выводы

Таким образом, в статье построены имитационные модели для информационно-поисковых систем, построенных на основании архитектуры клиент/сервер для однородных и неоднородных потоков запросов. Поставлены численные эксперименты и приведены их результаты, которые показывают, что качественное поведение построенных моделей соответствует ожидаемому.

В дальнейшем планируется проведение на этих моделях исследований с целью:

1. Выяснения характера зависимости вероятности потери запроса и среднего времени ожидания реакции системы от основных факторов – интенсивности потока заявок, среднего времени обработки и размера буфера для системы с однородными запросами.

2. Выяснения характера зависимости вероятности потери запроса и среднего времени ожидания реакции системы от основных факторов – суммарной интенсивности потока заявок, среднего средних времен обработки и размера буфера для системы с неоднородными запросами.
3. Разработки методики определения основных характеристик информационно-поисковых систем при их проектировании.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко В. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
2. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003 – 506 с.

## Математическое моделирование деятельности экономического кластера и взаимодействия с вузами

Али Найф Халил АльХужж, П. А. Иващенко

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

In the article the regional aspect of activity of economic clusters is considered and the attempt of construction of economic-mathematical model of a cluster of a regional level is done(made). The problem of interaction of firms of a cluster with high schools is researched with the purpose of support by frames. As the concrete object of research the project of the Poltava economic cluster is taken.

### 1. Постановка проблемы в общем виде и её связь с важными научными или практическими задачами

Кластерная теория экономического развития насчитывает более чем двадцатипятилетнюю историю. Основателем этой теории считается М. Портер [1]. Глубокий и всесторонний анализ производственных систем глобализации приведен в капитальной монографии С.И. Соколенко [3]. Территориально-производственный уровень финансовой интеграции на примере конкретного региона отражен в монографии [9]. Элементы кластерной теории экономического развития освещены в статье [15]. Во всех упомянутых публикациях описание кластеров выполнено на качественном уровне. Имеется значительный опыт экономико-математического моделирования финансово-промышленных структур (см. [4, 5, 8]). Они по своей организационной природе являются наиболее близкими к экономическим кластерам. Однако проблема экономико-математического моделирования деятельности экономического кластера, исследования свойств моделей раскрыта недостаточно.

Задача состоит в построении экономико-математической модели экономического кластера.

В [2, с. 64] предлагается следующая трактовка термина «кластер». Это – «территориально-отраслевая форма ассоциации субъектов хозяйствования, включающая в свой состав расположенные в регионе, обладающие отраслевой технологической общностью предприятия и организации (поставщики, основные производители, покупатели), а также обслуживающие их объекты финансовой системы, производственной, научно-технической, рыночной, информационной, социальной инфраструктуры региона». Из определения следует, что в кластер входят однородные по отраслевому признаку субъекты хозяйствования и разнородные с точки зрения инфраструктуры.



*Моделирование процессов взаимодействия в экономическом кластере (макроуровень)*

Экономический кластер как объект моделирования представляет собой систему, сложность которой определяется количеством входящих в нее элементов (предприятий, организаций, субъектов социально-экономического, научно-технического назначения и др.), связями между ними, а также взаимоотношениями с внешней средой. Ассоциативная интеграция элементов в кластер предполагает наличие общих целей и интересов. При этом элементы кластера имеют собственные цели и стремятся их достигнуть.

По образному выражению С.И. Соколенко кластеры – это детище зависимости «глобализация-локализация» [3, с. 61].

Состав элементов кластера, способы их ассоциативного объединения и отношения между ними определяют структуру кластера как экономической системы. Процесс функционирования кластера может быть представлен протекающими в нем материально-вещественными, финансовыми и информационными потоками.

Подход к моделированию процессов взаимодействия элементов в экономическом кластере, предлагаемый в настоящей статье, состоит в следующем. Вместо детального описания моделей каждого элемента кластера предлагается разработка укрупненной экономико-математической модели экономического кластера. Авторы дают себе отчет, что такое представление весьма условно. Например, объекты региональной инфраструктуры могут быть одновременно и потребителями продукции кластера. Предлагаемый макроподход имеет своей целью выявление и моделирование основных закономерностей функционирования экономического кластера, который должен доказать его жизнеспособность. Представляется, что анализируемый экономический кластер обладает корпоративными свойствами. Примером может служить то, что его элементы потребляют электроэнергию, производимую внутри кластера, естественно по ценам ниже рыночных. Возможны и другие примеры корпоративного взаимодействия.

Попытаемся реализовать один из основных методологических принципов системного анализа, состоящий в возможно более адекватном определении и описании входных действий на систему (экономический кластер), ее выходных характеристик, состояний процесса функционирования, а также определении механизма функционирования элементов системы.

Экономический кластер предлагается рассматривать как некоторую управляемую динамическую систему, состояние которой  $x(t)$  в момент времени  $t$  может быть изменено под воздействием управляющих параметров  $u(t)$ , которые называют управлениями [10, с. 45].

В силу представления кластера небольшим составом элементов размерность вектора  $x(t)$  также будет небольшой. То же самое можно сказать и о векторе  $u(t)$ .

Изменение состояния системы, которую представляет экономический кластер, в общем случае можно описать системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad (1)$$

где управления  $u(t)$  выбираются из условия достижения некоторых целей. Одна из возможных допустимых постановок задач оптимизации деятельности экономического кластера как управляемой динамической системы может быть сформулирована следующим образом. Требуется за отрезок времени  $\Delta t_{HK} = t_K - t_H$  переместить систему из начального состояния  $x(t_H) = x_H$  в конечное  $x(t_K) = x_K$ . При этом должен достигаться максимум критерия эффективности системы

$$J = \int_{t_H}^{t_K} \Phi(x, u, t) dt \rightarrow \max_{u(t) \in U}. \quad (2)$$

В приведенных соотношениях обозначения имеют следующий смысл:

$t_H$  – время начала процесса;  $t_K$  – время его окончания;  $\Phi(x, u, t)$  – функционал, характеризующий мгновенную эффективность системы; управление  $u(t)$  – отражает формализацию способа достижения цели, которая должна находиться в пределах плановых установок;  $U$  – множество допустимых управлений;  $x(t)$  – фазовая координата, принадлежащая множеству допустимых состояний системы  $X$ .

Информация о внутренней структуре экономического кластера, взаимосвязях между его элементами, взаимодействиях, отражена в вектор-функции  $f(x, u, t)$  и функционале  $\Phi(x, u, t)$ .

Необходимо отметить, что приведенная выше постановка задачи оптимизации функционирования экономического кластера носит абстрактный характер. Чтобы обеспечить максимальную адекватность и содержательность описания моделей функционирования экономического кластера необходимо, используя имеющийся опыт экономико-математического моделирования (см. [4, 6, 8, 11]), детализировать модель (1)-(2), дополнив ее описанием механизмов взаимодействия участников кластера.

Представляется очевидным, что функционирование экономического кластера характеризуется действиями его участников. Это означает, что описанный моделью (1)-(2) динамический процесс изменения состояния всей системы зависит от поведения его участников, в распоряжении которых находятся собственные управляющие воздействия  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . С учетом сделанного замечания система (1) может быть представлена в виде:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u_1(t), \dots, u_n(t), t). \quad (3)$$

При этом управление  $u_i(t)$  каждый участник выбирает, руководствуясь своим критерием  $J_i$ , отражающим собственные интересы. Таким образом, приходим к еще одной проблеме – отыскания разумных условий компромисса между участниками при наличии общих интересов.

Одна из целей ассоциированного объединения субъектов хозяйствования в кластер состоит в консолидации финансовых капиталов, ориентированной на

реализацию совместных проектов. Более частными по сравнению с экономическими кластерами структурами являются промышленно-финансовые группы, корпорации (в России они называются финансово-промышленными). Для них характерны ситуации объединения вокруг банка-инвестора, который в состоянии финансировать совместные проекты. Экономический кластер может иметь другие формы взаимодействия членов (партнерство, ассоциация, вертикальная интеграция, холдинг и др.). Поскольку объектом нашего исследования является проект нефтегазового кластера, имеющего единую технологическую цепочку, нас будут интересовать механизмы вертикальной интеграции, которым посвящено достаточное количество публикаций (см. ссылки в [4, 7]). Привлекательность вертикальной интеграции участников кластера заключается в том, что в этом случае для них возможно сокращение прямых производственных издержек, снижение цен на товары, уменьшение кредитных ставок (проявляется синергетический эффект).

Разнообразие состава участников кластера может создать ситуацию, характеризующуюся наличием противоречивых интересов. Например, поставщики для увеличения своей прибыли заинтересованы в снижении издержек при добыче сырья (нефти и газа и др.), повышении цен на поставляемое сырье. Производители, естественно, наоборот, заинтересованы в снижении этих цен и увеличении за счет этого своей прибыли. Если банк владеет акциями и поставщиков, и производителей, то ему приходится «разрываться» между противоположными интересами поставщиков и производителей.

Одна из задач, таким образом, заключается в определении условий, при которых участники (даже имея противоположные интересы) ассоциируются в кластер. При этом необходимо отыскать значения параметров системы (кластера), которые устраивают всех участников. Очевидно, что такой поиск следует начинать, рассматривая сначала смежные пары участников, затем тройки и т.д. В.Е. Дементьевым доказана для статического варианта возможность наличия равновесия для троек участников (поставщик, производитель, банк) [13].

Наша задача – разработать инструментарий, позволяющий оценивать эффективность функционирования пар, троек и т.д. участников кластера на некотором интервале времени (например, несколько лет).

Если в качестве критерия эффективности экономического кластера рассматривается суммарная дисконтная прибыль участников (за исключением неприбыльных организаций) к моменту времени  $t_k$ , то суть решения задачи состоит в выборе таких значений параметров, характеризующих взаимодействие участников кластера, которые обеспечивают максимальные значения прибыли для каждого участника, являющегося прибыльной организацией и соответствующие значения для остальных участников. Если этот показатель для каждого из участников выше соответствующего значения показателя при их независимой друг от друга деятельности, то такую группу (пару, тройку) будем называть устойчивой на планируемом интервале  $[t_n, t_k]$ .

Основная цель моделирования процесса взаимодействия участников экономического кластера состоит в определении его экономической

эффективности, а также условий, необходимых для ее повышения. Предполагаем, что кластер функционирует в условиях стабильной рыночной экономики.

В понятие «экономическая эффективность» мы будем вкладывать смысл, отвечающий характеру экономики, в которой функционирует моделируемый объект, целям исследования и назначению исследуемой системы. Экономический кластер можно отнести к классу мезоэкономических объектов. Применительно к таким объектам: «Понятие экономической эффективности опирается на учет платежеспособного спроса, предъявляемого тем или иным рынком в соответствии с полезностью результата деятельности (продукции) данной системы, и связанные с этим спросом равновесные (рыночные) цены» [14, с. 114]

В качестве основного показателя эффективности будем рассматривать прибыль, которая рассчитывается с использованием равновесных рыночных цен. Показатель экономической эффективности зависит от объема используемых ресурсов (материальных и нематериальных), цен на них, на продукцию. Она должна опираться на представление способа функционирования кластера в виде цепочки: затраты  $\rightarrow$  результаты  $\rightarrow$  цели. Жизненность такого подхода обеспечивается возможностями измерения или оценивания размеров затрат и результатов, определения степени достижения цели.

Ниже предлагается экономико-математическое описание укрупненной модели экономического кластера. Чтобы сконструировать модель экономического кластера (ЭК), необходимо сформулировать и учесть систему предпосылок, определяющих содержание и принципы построения модели, описать параметры модели, разделив их на постоянные и переменные. Предпосылки должны опираться на основные характеристики деятельности участников ЭК и взаимодействия между ними.

Производители А осуществляют добычу нефтегазопродуктов (продукция). При этом они обладают производственными мощностями, приобретают необходимые ресурсы. Производственные возможности А определяются особенностями технологии добычи и транспортировки. Это означает наличие зависимости между затратами ресурсов и выпуском продукции, которую необходимо сконструировать.

Чтобы отразить характерные особенности деятельности предприятий и отраслей, которые напрямую связаны с добычей природных ресурсов, можно воспользоваться типовой неоднородной нелинейной функцией убывающей эффективности затрат вида

$$V(y) = \varphi \times y^{\eta} + P. \quad (4)$$

При этом выполнено условие

$$\frac{d^2 V(y)}{dy^2} > 0.$$

В функции (4): первое слагаемое играет роль переменных издержек, второе – постоянных. В целом она характеризует общие издержки при производстве продукции.



Далее временно, пока не будет оговорено обратное, предполагаем, что параметры  $\varphi, P, \eta$  постоянны, а  $\eta > 0$ .

Обычно к переменным затратам относят затраты на сырье, материалы, топливо, энергию, транспортные расходы, заработную плату. В постоянные расходы включают расходы на содержание производственных помещений, машин, оборудования, рентные платежи, страховые взносы и другие статьи (например, издержки, не зависящие от объемов производства). Относительно математических свойств функции (4) предполагаем, что  $V(y)$  достаточно гладкая функция, обладающая не менее чем двумя первыми производными. Такие требования характерны для условий добычи, когда для увеличения объемов переходят к эксплуатации более сложных месторождений, например, с увеличением глубины залегания полезного ископаемого, или обеднения содержания добываемых компонентов.

Для дальнейшего анализа потребуется переход к функциям удельных и предельных затрат. Их можно ввести следующим образом. Удельные затраты – это затраты, отнесенные к единице продукции, выраженные в денежных единицах. Их можно определить так:

$$c(y) = \frac{V(y)}{y} = \varphi \times y^{\eta-1} + \frac{P}{y}.$$

Введем упрощающее обозначение  $\beta = \eta - 1$ .

Шагом, связывающим финансовые ресурсы с производственными, будет рассмотрение ситуации, когда снижение затрат на производство продукции обеспечивается размером вкладываемого финансового ресурса  $x$ . Тогда (4) приобретает следующий вид:

$$v(x, y) = \varphi(x) y^{\eta} + P, \quad (5)$$

где вновь  $\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} > 0$ . К функции  $\varphi(x)$  предъявим следующие требования:

- а) она является непрерывной, убывающей и ограниченной снизу функцией;
- б)  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \varphi_{\infty}$ ;
- в)  $\varphi(x)$  дважды дифференцируема и при этом

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} < 0, \quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} > 0.$$

Удельные затраты окажутся равными:

$$c(x, y) = \varphi(x) y^{\beta} + \frac{P}{y}, \quad 0 < \beta < 1. \quad (6)$$

Во введенных обозначениях и ограничениях на форму функции  $v(x, y)$  предельные затраты на производство продукции в размере  $y$  будут равными

$$d(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = (1 + \beta) \varphi(x) y^{\beta}. \quad (7)$$

Очевидно, что  $d(x, y) \geq 0$ . В рамках нашего подхода параметры  $\beta$  и  $P$  выступают внешними (заданными извне).

Чтобы полнее отразить характер зависимостей (5)-(7), рассмотрим пример. Прежде всего конкретизируем вид функции  $\varphi(x)$ . Покажем, что трехпараметрическая функция вида  $\varphi(x) = A(x+x_0)^{-B} + C$ , где  $A, B, C > 0$ , удовлетворяет всем предъявленным к ней требованиям. Вначале воспользуемся граничными условиями (требование б)). Имеем

$$\varphi(0) = \varphi_0 = Ax_0^{-B} + C$$

и

$$\varphi(\infty) = \varphi_\infty = C.$$

Откуда  $A = (\varphi_0 - \varphi_\infty)x_0^B$ . Таким образом, получаем

$$\varphi(x) = (\varphi_0 - \varphi_\infty)x_0^B(x+x_0)^{-B} + \varphi_\infty = (\varphi_0 - \varphi_\infty)\left(\frac{x_0}{x+x_0}\right)^B + \varphi_\infty \quad (8)$$

Далее

$$\varphi'_x = -B(\varphi_0 - \varphi_\infty)x_0^B(x+x_0)^{-B-1} < 0,$$

$$\varphi''_{xx} = B(B+1)(\varphi_0 - \varphi_\infty)x_0^B(x+x_0)^{-B-2} > 0.$$

Ниже нам понадобится обратная к  $\varphi(x)$  функция. Найдём её. Положим  $z = \varphi(x)$ . Тогда после выполнения цепочки преобразований вида

$$z = (\varphi_0 - \varphi_\infty)\left(\frac{x_0}{x+x_0}\right)^B + \varphi_\infty \Rightarrow$$

$$\frac{z - \varphi_\infty}{\varphi_0 - \varphi_\infty} = \left(\frac{x_0}{x+x_0}\right)^B \Rightarrow$$

$$\left(\frac{z - \varphi_\infty}{\varphi_0 - \varphi_\infty}\right)^{\frac{1}{B}} = \frac{x_0}{x+x_0} \Rightarrow$$

$$x+x_0 = \frac{x_0}{\left(\frac{z - \varphi_\infty}{\varphi_0 - \varphi_\infty}\right)^{\frac{1}{B}}}$$

получаем окончательный вид выражения  $x = \varphi^{-1}(z)$

$$x = \left[ \left( \frac{z - \varphi_\infty}{\varphi_0 - \varphi_\infty} \right)^{-\frac{1}{B}} - 1 \right] x_0. \quad (9)$$

Дробь в круглых скобках и выражение в квадратных в (9) должны быть положительными. Это означает выполнение двойного неравенства

$$\varphi_0 < z < \varphi_\infty,$$

что очевидным образом следует из способа задания функции  $\varphi(x)$ .

В [4, с. 52] утверждается, что увеличение финансового ресурса  $x$ , который вкладывается в снижение затрат, оправдано лишь до некоторого предела  $x_\Gamma$ . Выше него вложения оказываются неэффективными. Относительно снижения удельных затрат на единицу вложенного капитала  $x$  при фиксированном объеме продукции  $y$  необходимо отметить следующее. Должна существовать норма  $x_\Gamma$ , для которой абсолютная величина предельного по  $x$  значения удельных затрат будет не меньшей некоторой величины  $\Delta c_{\min}$ . Ю.В. Косачев предлагает норму  $x_\Gamma$  определять исходя из условия  $\left| \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} \right| = \Delta c_{\min}$  [4, с. 52]. В принципе с таким предложением можно согласиться. Однако в аналитических и численных расчетах с функцией модуля работать неудобно. Поэтому мы предлагаем следующий подход, позволяющий в ряде случаев получать оценку нормы  $x_\Gamma$  в явной форме.

Из (6) получаем

$$\frac{\partial c(x, y)}{\partial x} = \varphi'(x) y^\beta. \quad (10)$$

Но с учетом условия в) и трехпараметрической конкретизации функции  $\varphi(x)$  получаем, что уравнение  $\left| \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} \right| = \Delta c_{\min}$  эквивалентно следующему уравнению  $\varphi'(x) = -\frac{\Delta c_{\min}}{y^\beta}$ , которое можно разрешить относительно  $x$  в явном виде путем интегрирования. Выполним эту процедуру

$$\begin{aligned} \int_0^{x_\Gamma} \varphi'(x) dx &= -\frac{\Delta c_{\min}}{y^\beta} \int_0^{x_\Gamma} dx \Rightarrow \\ \varphi(x_\Gamma) - \varphi(0) &= -\frac{\Delta c_{\min}}{y^\beta} x_\Gamma \Rightarrow \\ \varphi(x_\Gamma) &= \varphi_0 - \frac{\Delta c_{\min}}{y^\beta} x_\Gamma. \end{aligned}$$

Так как

$$\varphi(x_\Gamma) = (\varphi_0 - \varphi_\infty) \left( \frac{x_0}{x_\Gamma + x_0} \right)^B + \varphi_\infty,$$

то

$$(\varphi_0 - \varphi_\infty) \left( \frac{x_0}{x_\Gamma + x_0} \right)^B + \varphi_\infty = \varphi_0 - \frac{\Delta c_{\min}}{y^\beta} x_\Gamma \quad (11)$$

или с учетом (9)

$$x_{\Gamma} = \left[ \left( \frac{\varphi_0 - \varphi_{\infty} - \frac{\Delta c_{\min}}{y^{\beta}} x_{\Gamma}}{\varphi_0 - \varphi_{\infty}} \right)^{-\frac{1}{B}} - 1 \right] x_0. \quad (12)$$

И (11) и (12) являются нелинейными уравнениями относительно  $x_{\Gamma}$ . Решая одно из них, получаем искомое значение  $x_{\Gamma}$ .

Рассмотрим условный численный пример. Положим  $\varphi_0=10$ ,  $\varphi_{\infty}=5$ ,  $B=1,5$ ,  $\Delta c_{\min}=1000$ ,  $y=100000$ ,  $\beta=1,5$ ,  $x_0=1000000$ . Тогда решением уравнения (12) будет  $x_{\Gamma}=131852,6$ . При этом

$$\varphi(x_{\Gamma}) = (\varphi_0 - \varphi_{\infty}) \left( \frac{x_0}{x_{\Gamma} + x_0} \right)^B + \varphi_{\infty} = 9,2.$$

Поведение левой и правой частей уравнения (12) показано на рис. 1.

Если обозначить через  $p_0$  рыночную цену на продукцию  $y$ , которую выпускают производители  $A$ , то ее объем в стоимостном исчислении будет равным  $p_0 y$ . При этом доход производителей  $A$  от реализации продукции на рынке – это разность между выручкой  $p_0 y$  и общими затратами  $c(x, y)y$ :

$$\pi_A(x, y) = (p_0 - c(x, y))y. \quad (13)$$

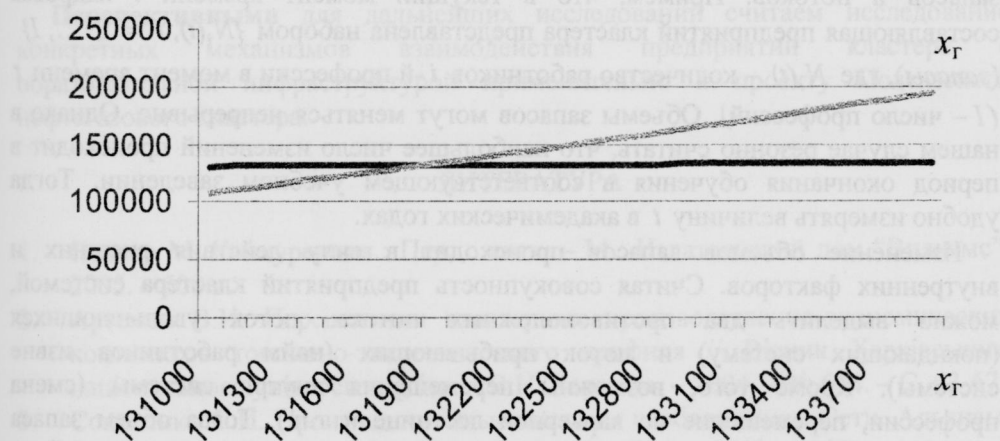


Рис. 1. Поведение левой и правой частей уравнения (12).

Максимум прибыли получается из уравнения

$$(\pi_A(x, y))'_y = [(p_0 - c(x, y))y]'_y = 0. \quad (14)$$

С учетом (5) уравнение (14) примет вид



$$[(p_0 - \varphi(x)y^\beta - \frac{P}{y})y]'_{y=p_0 - (\beta+1)\varphi(x)y^\beta} = 0.$$

$$\text{Откуда } y = \left[ \frac{p_0}{(1+\beta)\varphi(x)} \right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Используя данные примера, получаем, что максимальная прибыль  $\pi_A(x_T, y_{opt}) = 7852557$  д.ед. для  $y_{opt} = 3786$  ед.

Завершая описание производственной деятельности производителей А, необходимо отметить, что основным источником увеличения доходов производителей А является снижение затрат на производимую продукцию. На обеспечение снижения затрат требуются инвестиции, которые производители А могут получать в виде банковского кредита  $K(t)$  под банковскую процентную ставку  $\tau(t)$  или используя собственные средства  $S(t)$  (например, в виде отчислений от прибыли). Кроме того считаем, что рыночная стоимость производителей А в момент времени  $t$  равна  $Q_A(t)$ , а банк Б имеет в своем портфеле некоторую долю собственности предприятий-производителей А, которую обозначим как  $\alpha_A$ . Отсюда стоимость этой доли в момент времени  $t$  равна  $\alpha_A Q_A(t)$ .

Перейдем к математическому описанию взаимодействия предприятий кластера с кадровой составляющей инфраструктуры кластера. Представляется разумным описывать взаимодействие вузов, техникумов и профессионально-технических училищ с предприятиями кластера в логистических терминах запасов и потоков. Примем, что в текущий момент времени  $t$  кадровая составляющая предприятий кластера представлена набором  $\{N_i(t), i = 1, \dots, I\}$  (запасы), где  $N_i(t)$  – количество работников  $i$ -й профессии в момент времени  $t$  ( $I$  – число профессий). Объемы запасов могут меняться непрерывно. Однако в нашем случае резонно считать, что наибольшее число изменений происходит в период окончания обучения в соответствующем учебном заведении. Тогда удобно измерять величину  $t$  в академических годах.

Изменение объемов запасов происходит в силу действия внешних и внутренних факторов. Считая совокупность предприятий кластера системой, можно выделить два противоположных потока: поток увольняющихся (покидающих систему) и поток прибывающих (найм работников извне системы). Кроме того, возможны перемещения внутри системы (смена профессии, перемещение по карьерной лестнице и т.п.). Тогда объем запаса работников  $i$ -й профессии к моменту времени  $t+1$  определяем как объем запаса  $i$ -й профессии к моменту времени  $t$  плюс вновь прибывшие (их количество обозначаем как  $N_{0i}(t)$ ) плюс сменившие профессию  $j$  на профессию  $i$  (обозначаем как  $\sum N_{ji}(t)$  по всем  $j \neq i$  индекс суммирования опускаем) минус покидающие (обозначаем как  $\sum N_{i,j+1}(t)$ ). Имеем, таким образом, балансовое соотношение:

$$N_i(t+1) = N_i(t) + N_{0i}(t) + \sum N_{i,j}(t) - \sum N_{i,I+1}(t). \quad (14)$$

Три последних слагаемых в правой части соотношения (14) называем *потоками*. Потоки вызывают изменения в запасах, поэтому необходимо ввести допущения относительно механизмов перемещений.

В условиях рыночной экономики предприятия кластера формируют спрос на рабочую силу (обозначаем как  $C_i(t)$ ), образовательная инфраструктура – предложение (обозначаем как  $\Pi_i(t)$ ). Таким образом, объем запасов на момент времени  $t+1$  зависит от значений спроса и предложения в текущий момент времени  $t$ :

$$N_i(t+1) = G(N_i(t), N_{0i}(t), \sum N_{i,j}(t), \sum N_{i,I+1}(t), C_i(t), \Pi_i(t)). \quad (15)$$

В нашей ситуации спрос и предложение могут выступать управляющими воздействиями, которые (например, через центры занятости) и определяют механизм взаимодействия предприятий кластера с образовательной инфраструктурой.

**Результатами** проведенного исследования являются:

1. Построение экономико-математической модели поставщиков экономического кластера;
2. Исследование ее характерных особенностей;
3. Формирование механизма взаимодействия предприятий кластера с образовательной инфраструктурой.

**Перспективными** для дальнейших исследований считаем исследование конкретных механизмов взаимодействия предприятий кластера с образовательной инфраструктурой применительно к проекту Полтавского нефтегазового кластера.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Портер М. Конкуренция.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2005. – 608 с.
2. Артемов В.И. Перспективы кластерных производственно-экономических комплексов топливно-энергетического профиля // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. – 2004. – № 634. – С. 63-67.
3. Соколенко С.И. Производственные системы глобализации: Сети. Альянсы. Партнерства. Кластеры: Укр. Контекст. – К.: Логос, 2002. – 645 с.
4. Косачев Ю.В. Экономико-математические модели эффективности финансово-промышленных структур. – М.: Логос, 2004. – 248 с.
5. Чухланцев Д.О. Моделирование организации расчетов между предприятиями в условиях кризиса платежей // Финансовая математика. – М.: ТЕИС, 2001. – С. 333-337.

6. Новоселов М.В., Попов Е.В. Моделирование инновационной деятельности корпоративной структуры. Препринт. Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН, 2003. – 42 с.
7. Чухланцев Д.О. Моделирование финансовых потоков в вертикально интегрированной компании и рационализация ее взаиморасчетов с контрагентами. – М.: Диссертация, 2002. – 182 с.
8. Плещинский А.С. Эффективные схемы межфирменных взаимодействий: механизм равновесных трансфертных цен. / Препринт # WP / 2000 / 099. – М.: ЦЭМИ РАН, 2000. – 90 с.
9. Артемов В.И., Галуза С.Г., Торопов В.Д., Чернобровка И.В. Территориальная производственно-финансовая интеграция. – Х.: ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2000. – 134 с.
10. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 194 с.
11. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 264 с.
12. Кучин Б.Л., Якушева Е.В. Управление развитием экономических систем: технический прогресс, устойчивость. – М.: Экономика, 1990. – 157 с.
13. Дементьев В.Е. Интеграция предприятий и экономическое развитие (препринт). – М.: ЦЭМИ РАН, 1998 – 80 с.
14. Мезоэкономика переходного периода: рынки, отрасли, предприятия. – М.: Наука, 2001. – 570 с.
15. Цихан Т.В. Кластерная теория экономического развития // «Теория и практика управления», №5, 2003 г.

## Математическая модель на базе МДО многоэлементной полосковой антенны на экранированной диэлектрической подложке

А. В. Антоненц

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

In this paper, we present new method for the modeling of printed strip gratings. Our general approach for finite perfectly electric conducting (PEC) strip gratings printed on a dielectric substrate with a PEC ground plane is based on the parametric representations of the integral and pseudo-differential operators and Method of Discrete Singularities (MDS). Diffraction problem is first reduced to hypersingular integral equation. Then this equation is solved using the MDS. Finite-order Cantorian set strip grating is investigated numerically. Some of obtained results are presented.

### 1. Введение

Задаче дифракции электромагнитных волн (ЭМВ) на бесконечно тонких ленточных решетках посвящено большое количество работ, в частности монографии [1,2], где имеется подробная библиография. В данной статье используется метод дискретных особенностей (МДО), приложение которого для задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках, а также замкнутых или открытых цилиндрических поверхностях тщательно проработано и обосновано [3-5]. Основные идеи МДО подробно изложены в [6]. Этот метод состоит в сведении краевой задачи к системе сингулярных или гиперсингулярных интегральных уравнений и последующему численному решению ее с помощью квадратурных формул интерполяционного типа. Таким образом, метод позволяет получать результаты с высокой точностью при относительно небольших затратах на вычисления. В данной работе МДО используется наряду с техникой параметрического представления псевдодифференциальных и интегральных операторов [7,8] для решения задачи дифракции ЭМВ на идеально проводящей предфрактальной многоэлементной решетке, нанесенной на диэлектрическую подложку с идеально проводящим экраном. Следует также отметить, что данная работа является первым шагом в применении МДО для анализа плоских ленточных решеток в слоистых средах. Математическая модель на базе МДО в задаче дифракции плоской монохроматической волны на предканторовой решетке изложена в работе [9], а на предканторовой решетке, расположенной перед идеально проводящим экраном (без диэлектрической подложки), проводился автором и был изложен в [10].



## 2. Постановка задачи

Рассматривается задача дифракции плоской монохроматической Н-поляризованной волны на конечной решетке, состоящей из бесконечно тонких идеально проводящих лент, расположенных на диэлектрической подложке с идеально проводящим экраном. Зависимость величин от времени задается множителем  $e^{-i\omega t}$ . На рис. 1 приведено сечение рассматриваемой структуры плоскостью, перпендикулярной направляющим решетке. Сечение решетки образует предканторово множество конечного порядка на отрезке  $[-l, l]$ . Дальнейшее изложение проводится для произвольного набора лент

$$L = \bigcup_{q=1}^m (a_q, b_q), \quad -\infty < a_1 < b_1 < \dots < a_m < b_m < +\infty.$$

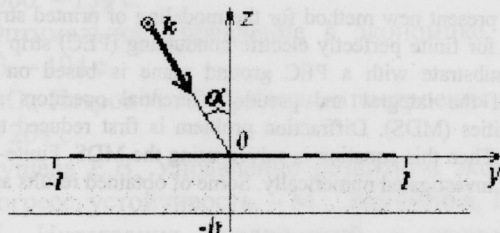


Рис. 1. Геометрия задачи

Подложка имеет толщину  $h$  и относительную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon^-$ . Относительную диэлектрическую проницаемость свободного пространства обозначим  $\varepsilon^+ (\varepsilon^+ = 1)$ , а волновое число  $k = \omega(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ .

Введем обозначения для областей подложки и свободного пространства:  $\Omega^- = \{y \in \mathbf{R}, -h < z < 0\}$  и  $\Omega^+ = \{y \in \mathbf{R}, z > 0\}$  соответственно. В рассматриваемом случае электрический и магнитный векторы представимы в виде

$$E = (0, E_y, E_z); \quad H = (H_x, 0, 0)$$

Единственную отличную от нуля компоненту вектора  $H$  обозначим  $u(y, z)$ , тогда

$$E_y = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon^\pm} \frac{\partial u}{\partial z}; \quad E_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon^\pm} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (y, z) \in \Omega^\pm.$$

Функция  $u(y, z)$  должна удовлетворять уравнениям Гельмгольца в соответствующих подобластях:

$$\Delta u + \varepsilon^\pm k^2 u = 0, \quad (y, z) \in \Omega^\pm; \quad (1)$$

условиям сопряжения на границе свободное пространство/диэлектрик, которые мы получаем из условий непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей:

$$u(y, z)|_{z \downarrow 0} = u(y, z)|_{z \uparrow 0}, \quad y \in \mathbf{R} \setminus L, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^+} \frac{\partial}{\partial z} u(y, z) \Big|_{z \downarrow 0} = \frac{1}{\varepsilon^-} \frac{\partial}{\partial z} u(y, z) \Big|_{z \uparrow 0}, \quad y \in \mathbf{R} \setminus L; \quad (3)$$

граничным условиям на идеально проводящих поверхностях (лентах и экране):

$$\frac{1}{\varepsilon^+} \frac{\partial}{\partial z} u(y, z) \Big|_{z \downarrow 0} = \frac{1}{\varepsilon^-} \frac{\partial}{\partial z} u(y, z) \Big|_{z \uparrow 0} = 0, \quad y \in L, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u = 0, \quad z = -h, \quad y \in \mathbf{R}; \quad (5)$$

условию Майкснера конечности энергии в окрестности ребер решеток и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности.

### 3. Вывод гиперсингулярного интегрального уравнения

Будем искать функцию  $u$  в виде

$$u(y, z) = \begin{cases} u_0(y, z) + u^+(y, z), & z > 0, \\ u_0(y, z) + u^-(y, z), & -h < z < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $u_0(y, z)$  – решение задачи дифракции плоской электромагнитной Н-поляризованной волны на экранированной подложке без решетки. Это решение легко найти аналитически.

Функции  $u^+$  и  $u^-$  будем искать в виде Фурье подобных представлений:

$$u^+(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^+(\lambda) e^{i\lambda y - \gamma^+(\lambda)z} d\lambda, \quad (7)$$

$$u^-(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^-(\lambda) e^{i\lambda y} \frac{\text{ch}[\gamma^-(\lambda)(z+h)]}{\text{ch}[\gamma^-(\lambda)h]} d\lambda, \quad (8)$$

где  $\gamma^\pm(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \varepsilon^\pm k^2}$ , а ветвь радикала выбирается таким образом, что  $\text{Re} \gamma^\pm \geq 0, \text{Im} \gamma^\pm \leq 0$ .

Таким выбором вида решения мы удовлетворили уравнению Гельмгольца (1), граничному условию (5), а также условию излучения Зоммерфельда. Оставшиеся условия (2)-(4) приводят к системе парных интегральных уравнений

$$\frac{1}{\varepsilon^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\gamma^+(\lambda)) C^+(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{1}{\varepsilon^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^-(\lambda) C^-(\lambda) \text{th}[\gamma^-(\lambda)h] e^{i\lambda y} d\lambda = f(y), \quad (9)$$

$$y \in L,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^+} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\gamma^+(\lambda)) C^+(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{1}{\varepsilon^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^-(\lambda) C^-(\lambda) \text{th}[\gamma^-(\lambda)h] e^{i\lambda y} d\lambda, \quad (10)$$

$$y \in \mathbf{R} \setminus L,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^+(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} C^-(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in \mathbf{R} \setminus L. \quad (11)$$

где  $f(y) = -\frac{1}{\varepsilon^+} \frac{\partial}{\partial z} u_0(y, z) \Big|_{z \downarrow 0}$  – известная функция.

Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$F(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} (C^+(\lambda) - C^-(\lambda)) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad y \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

Из условия (11) получаем:  $F(y) \equiv 0, y \in \mathbf{R} \setminus L$ .

Из условий (9) и (10) вытекает, что

$$\frac{1}{\varepsilon^+} (-\gamma^+(\lambda)) C^+(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon^-} \gamma^-(\lambda) C^-(\lambda) \operatorname{th} [\gamma^-(\lambda) h],$$

и, следовательно,

$$C^-(\lambda) = -\frac{\varepsilon^- \gamma^+(\lambda)}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda)} C^+(\lambda) \operatorname{cth} [\gamma^-(\lambda) h].$$

Тогда,

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) + \varepsilon^- \gamma^+(\lambda) \operatorname{cth} [\gamma^-(\lambda) h]}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda)} C^+(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad (13)$$

Обозначим  $\tilde{F}(\lambda)$  – преобразование Фурье функции  $F(y)$ :

$$\tilde{F}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) e^{-i\lambda y} d\lambda. \quad (14)$$

Из равенства (13) получаем, что

$$C^+(\lambda) = \frac{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh} [\gamma^-(\lambda) h]}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh} [\gamma^-(\lambda) h] + \varepsilon^- \gamma^+(\lambda) \operatorname{ch} [\gamma^-(\lambda) h]} \tilde{F}(\lambda). \quad (15)$$

Следовательно, уравнение (9) можно переписать в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\gamma^+(\lambda) \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh} [\gamma^-(\lambda) h]}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh} [\gamma^-(\lambda) h] + \varepsilon^- \gamma^+(\lambda) \operatorname{ch} [\gamma^-(\lambda) h]} \tilde{F}(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = f(y), \quad y \in L. \quad (16)$$

Преобразуем выражение:

$$D(\lambda) := \frac{-\gamma^+(\lambda) \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh} [\gamma^-(\lambda) h]}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) \operatorname{sh} [\gamma^-(\lambda) h] + \varepsilon^- \gamma^+(\lambda) \operatorname{ch} [\gamma^-(\lambda) h]},$$

выделив главные члены асимптотики при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Получим:

$$D(\lambda) = -\frac{1}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-} |\lambda| + \frac{k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \left( \frac{(\varepsilon^+)^2}{\gamma^+(\lambda)} + \frac{(\varepsilon^-)^2}{\gamma^-(\lambda)} \right) + Q(\lambda), \quad (17)$$

где  $Q(\lambda) = O(|\lambda|^{-3})$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  (для функции  $Q(\lambda)$  имеется явное аналитическое выражение).

Воспользуемся параметрическими представлениями для интегральных операторов с символами  $-|\lambda|$  и  $(\gamma^\pm(\lambda))^{-1}$  соответственно:

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F(\xi)}{(\xi - y)^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (-|\lambda|) \tilde{F}(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad (18)$$

где интеграл в левой части понимается в смысле конечной части по Адамару, и

$$\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon^\pm} k |\xi - y|) F(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma^\pm(\lambda))^{-1} \tilde{F}(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda. \quad (19)$$

Таким образом, первый член разложения (17) – гиперсингулярный интеграл, второй – интеграл с логарифмической особенностью в ядре, а третий – интеграл с гладким ядром

$$K_1(|\xi - y|) = \int_0^{+\infty} Q(\lambda) \cos(\lambda|\xi - y|) d\lambda.$$

Следовательно, уравнение (16) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-} \frac{1}{\pi} \int_L \frac{F(\xi)}{(\xi - y)^2} d\xi - \frac{\left( (\varepsilon^+)^2 + (\varepsilon^-)^2 \right) k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \frac{1}{\pi} \int_L F(\xi) \ln(|\xi - y|) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_L K(|\xi - y|) F(\xi) d\xi = f(y), \quad y \in L, \quad (20)$$

где для гладкого ядра  $K(\zeta)$  имеем выражение

$$K(\zeta) = \frac{(\varepsilon^+)^2 k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon^+} k \zeta) + \frac{(\varepsilon^-)^2 k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon^-} k \zeta) +$$

$$+ \frac{\left( (\varepsilon^+)^2 + (\varepsilon^-)^2 \right) k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \ln \zeta + K_1(\zeta). \quad (21)$$

Решение гиперсингулярного уравнения (20) будем искать в классе функций  $F(\xi), \xi \in L$ , сужение которых на отрезки  $(a_q, b_q)$  имеет вид

$$F(\xi)|_{\xi \in (a_q, b_q)} = V_q(\xi) \sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)}, \quad q = 1 \dots m, \quad (22)$$

где  $V_q(\xi), \xi \in [a_q, b_q]$  – непрерывная по Гельдеру функция. При этом выполняются условия Майкснера на ребре. Таким образом, гиперсингулярное уравнение (20) на системе отрезков сводится к системе гиперсингулярных уравнений



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-} \frac{1}{\pi} \int_{a_q}^{b_q} \frac{V_q(\xi)}{(\xi - y)} \sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)} d\xi + \\
& + \frac{\left( (\varepsilon^+)^2 + (\varepsilon^-)^2 \right) k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \frac{1}{\pi} \int_{a_q}^{b_q} V_q(\xi) \ln(|\xi - y|) \sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)} d\xi + \\
& + \sum_{p=1}^m \frac{1}{\pi} \int_{a_p}^{b_p} K_{p,q}(\xi, y) V_q(\xi) \sqrt{(\xi - a_q)(b_q - \xi)} d\xi = f_q(y), \quad y \in (a_q, b_q), \quad q = \overline{1, m},
\end{aligned} \quad (23)$$

где  $f_q(y) = f(y)|_{y \in (a_q, b_q)}$ , а ядра  $K_{q,p}(\xi, y)$  являются гладкими функциями на отрезках  $(a_q, b_q)$  и имеют вид:

$$K_{q,p}(\xi, y) = \begin{cases} K(|\xi - y|), & p = q, \\ \frac{1}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-} \frac{1}{(\xi - y)^2} + \frac{\left( (\varepsilon^+)^2 + (\varepsilon^-)^2 \right) k^2}{2(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)^2} \ln(|\xi - y|) + K(|\xi - y|), & p \neq q. \end{cases}$$

#### 4. Дискретная математическая модель

Дискретная математическая модель задачи получим из системы уравнений (23) с помощью квадратурных формул интерполяционного типа. Для этого на отрезках  $(a_q, b_q)$  вводятся узловые точки

$$\theta_{qj}^{n_q} = g_q \left( t_j^{n_q} \right), \quad t_j^{n_q} = \cos \frac{j}{n_q} \pi; \quad j = 1, \dots, n_q - 1, \quad q = 1, \dots, m;$$

где

$$g_s : (-1, 1) \mapsto (a_s, b_s) : t \mapsto g_s(t) = \frac{b_s - a_s}{2} t + \frac{b_s + a_s}{2}.$$

Будем искать функции  $V_q(\xi)$  в виде полиномов Чебышева второго рода по узлам  $\theta_{qj}^{n_q}, j = 1, \dots, n_q - 1$ . Гладкое ядро  $K_{q,p}(\xi, y)$  также заменим его интерполяционным полиномом Чебышева второго рода по той же системе узлов. Тогда, применив к интегралам квадратурные формулы интерполяционного типа [4], мы сведем систему гиперсингулярных интегральных уравнений (23) к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функций  $V_q(\xi)$  в узлах интерполяции. Решая данную СЛАУ, мы получим приближенные значения искомой функции в узлах интерполяции. Используя затем построенные по этим значениям интерполяционные полиномы, можно получить приближенные значения физических характеристик антенны.

### 5. Результаты численного эксперимента

При проведении численного эксперимента строились диаграммы направленности рассматриваемой полосковой антенны. Используя метод стационарной фазы, из выражений (7) и (13) получаем следующее выражение для диаграммы направленности поля в дальней зоне:

$$\Phi(\varphi) = \frac{\sqrt{\varepsilon^+ k}}{\sqrt{2\pi}} W\left(\sqrt{\varepsilon^+ k} \sin \varphi\right) \cos \varphi \int_L F(\xi) e^{-i\sqrt{\varepsilon^+ k} \sin \varphi \xi} d\xi, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (24)$$

где  $W(\lambda) = \frac{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda)}{\varepsilon^+ \gamma^-(\lambda) + \varepsilon^- \gamma^+(\lambda) \operatorname{cth}[\gamma^-(\lambda)h]}.$

Заменяя в (24) функцию  $F(\xi)$  интерполяционным полиномом, построенным по значениям, полученным при решении СЛАУ, мы получаем приближенные значения для диаграммы направленности.

На рис.2-7 изображены диаграммы направленности для решетки, в сечении представляющей собой предканторово множество 4го порядка. Для всех случаев базовый размер для множества равен 10 мм, толщина диэлектрической подложки – 5 мм, а ее относительная диэлектрическая проницаемость – 2.1 единицы. Частота и угол падения волны указаны для каждой диаграммы.

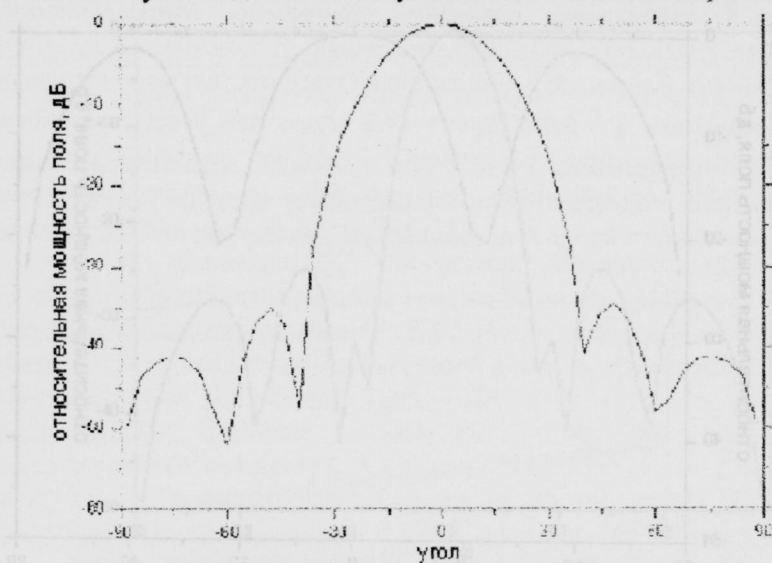


Рис.2. Частота 30 ГГц, угол падения  $0^\circ$ .

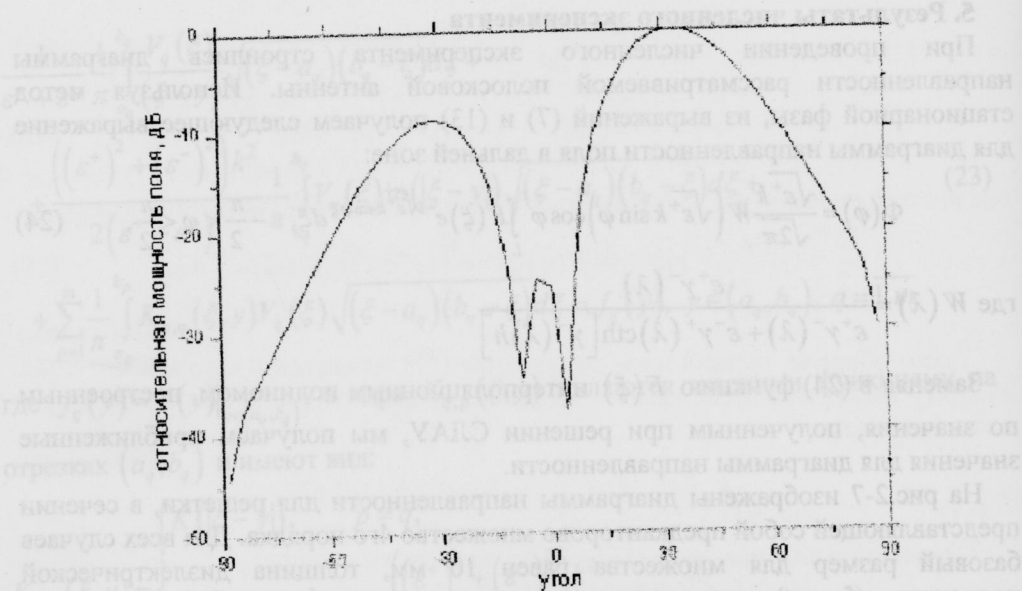


Рис.3. Частота 30 ГГц, угол падения  $45^\circ$ .

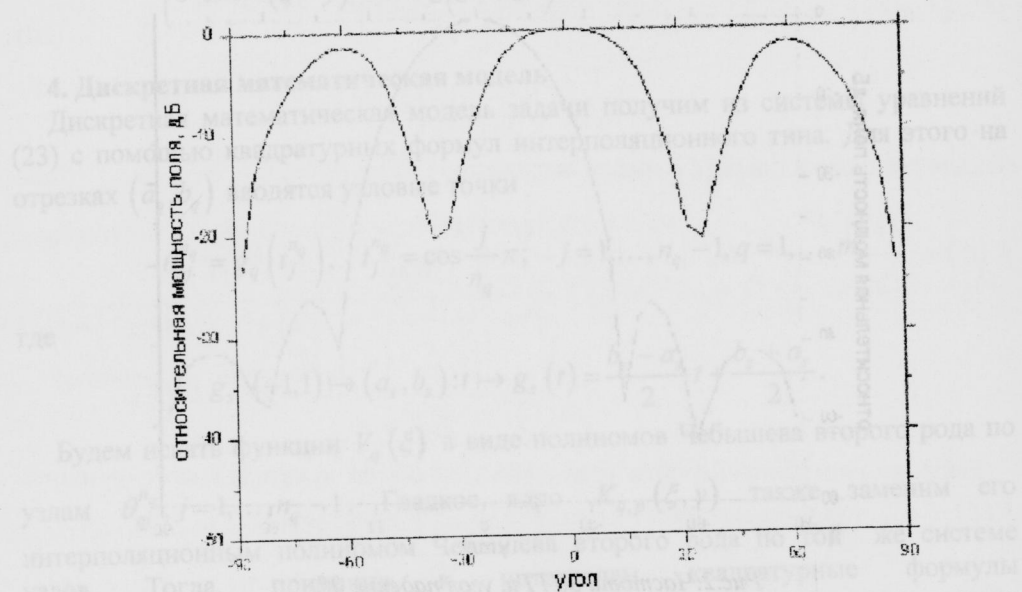


Рис.4. Частота 40 ГГц, угол падения  $0^\circ$ .

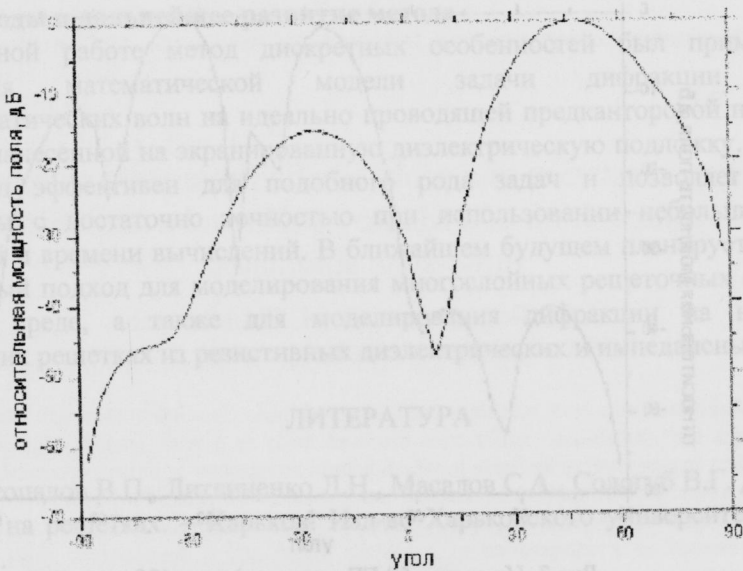


Рис.5. Частота 40 ГГц, угол падения 45°.

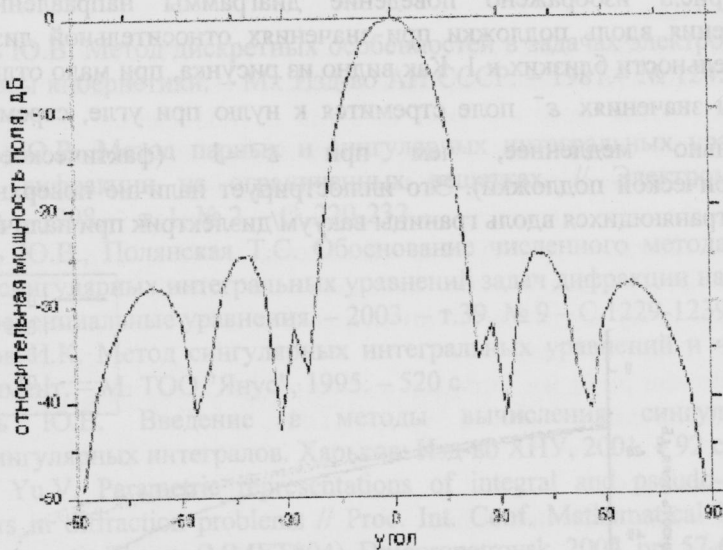


Рис.6. Частота 50 ГГц, угол падения 0°.



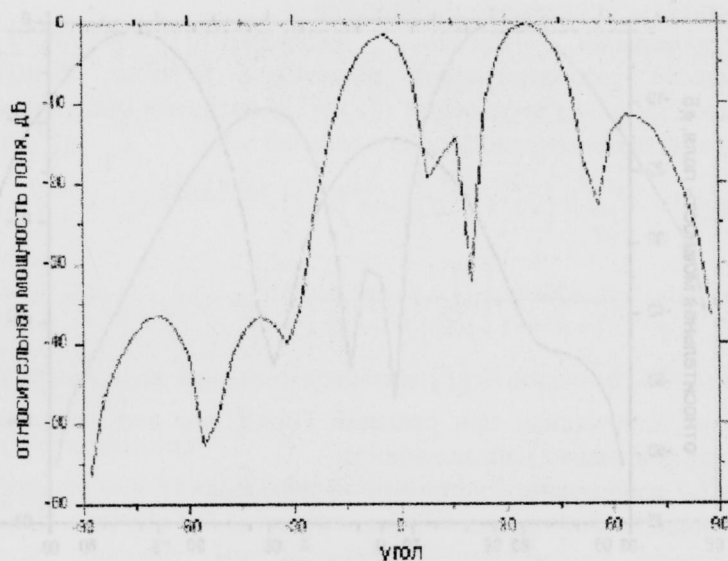


Рис.7. Частота 50 ГГц, угол падения 45°.

На рис.8 изображено поведение диаграммы направленности вблизи направления вдоль подложки при значениях относительной диэлектрической отрицательности близких к 1. Как видно из рисунка, при мало отличающихся от единицы значениях  $\epsilon^-$  поле стремится к нулю при угле, стремящемся к 90°, значительно медленнее, чем при  $\epsilon^- = 1$  (фактическое отсутствие диэлектрической подложки). Это иллюстрирует наличие поверхностных волн, распространяющихся вдоль границы вакуум/диэлектрик при наличии подложки.

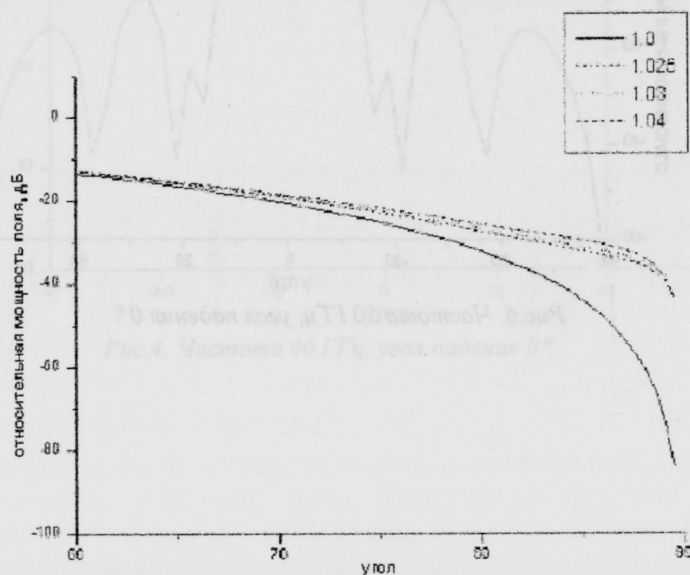


Рис.8. Поведение диаграммы направленности вблизи горизонтального направления при  $\epsilon^+$ , близких к 1.

## 6. Выводы и дальнейшее развитие метода

В данной работе метод дискретных особенностей был применен для построения математической модели задачи дифракции плоских монохроматических волн на идеально проводящей предканторовой полосковой антенне, нанесенной на экранированную диэлектрическую подложку. Показано, что метод эффективен для подобного рода задач и позволяет получать результаты с достаточно точностью при использовании небольшого числа уравнений и времени вычислений. В ближайшем будущем планируется развить изложенный подход для моделирования многослойных решеточных структур в слоистой среде, а также для моделирования дифракции на неидеально проводящих решетках из резистивных диэлектрических и импедансных лент.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопапов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1973. – 287 с.
2. Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. – Киев: Наукова думка, 1984. – 240 с.
3. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. – М.: Изд-во АН СССР. – 1981. – № 124. – С. 166-183.
4. Гандель Ю.В. Метод парных и сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решетках. // Электромагнитные явления. – 1998. – т. 1, № 2. – С. 220-232.
5. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Обоснование численного метода решения систем сингулярных интегральных уравнений задач дифракции на решетках // Дифференциальные уравнения. – 2003. – т.39, № 9 – С.1229-1239.
6. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М. ТОО "Янус", 1995. – 520 с.
7. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Харьков: Изд-во ХНУ, 2001. – 92 с.
8. Gandel Yu.V. Parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems // Proc. Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET\*04), Dniepropetrovsk, 2004, pp. 57-62.
9. Варшавская Н.А., Гандель Ю.В. Дифракция плоской монохроматической волны на предканторовых решетках. // Электромагнитные явления. – 1998. – т. 1, № 4. – С. 455-464.
10. Антонець А.В. Метод дискретних вихорів у задачі дифракції електромагнітних хвиль на передфрактальних структурах // Десята Міжнародна конференція ім. Академіка М. Кравчука, 13-15 трав. 2004 р., Київ: Матеріали конф. – К.: Задруга, 2004. – С. 20.

## On representation of a probabilistic finite-state automaton as a composition of a Markov chain and a deterministic finite-state automaton

S. M. Bogomolov, G. M. Zholtkevych

*V. N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine*

Probabilistic finite-state machines such as probabilistic finite-state automata, Markov chains and probabilistic suffix trees are used today in a wide amount of fields in pattern recognition, or in fields to which pattern recognition is linked: computational linguistics, bioinformatics and machine translation. In the present paper we formulate a criterion for determining when a probabilistic finite-state automaton can be represented as a composition of a Markov chain and a deterministic finite-state automaton.

### Introduction

Probabilistic finite-state machines such as probabilistic finite-state machines such as probabilistic finite-state automata, hidden Markov models, Markov chains, probabilistic suffix trees are used today in a wide amount of fields in pattern recognition, or in fields to which pattern recognition is linked: computational linguistics, bioinformatics and machine translation [1-4].

One of the most interesting and perspective research objects is a probabilistic finite-state automaton (PFA). The characteristics of a finite-state deterministic automaton (DFA) and a Markov chain (MC) are quite well studied. That's why it makes sense to try to reduce the investigation of a PFA to the investigation of the behavior of these machines.

In the present paper we formulate a criterion for determining when a PFA can be represented as a composition of a MC and a DFA.

### Initial concepts

Let's introduce a few definitions.

#### Definition 1

Probabilistic finite-state automaton (PFA) is a 5-tuple

$$M = (Q_M, \Sigma_M, P, q_{0M}, F_M) \quad (1)$$

$Q_M$  – a finite set of states;

$\Sigma_M$  – a finite alphabet;

$P$  – a mapping defining the transition probability function

$$P: Q_M \times \Sigma_M \times Q_M \rightarrow R^+$$

$$R^+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$$

$$\left( \forall (q', a) \in Q \times \Sigma \right) \left( \sum_{q'' \in Q} P(q', a, q'') = 1 \right)$$

$q_{0M}$  – an initial state;

$F_M$  – a set of admissible states.

### Definition 2

Deterministic finite-state automaton (DFA) is a 5-tuple

$$D = (Q_D, \Sigma_D, T, q_{0D}, F_D) \quad (2)$$

$Q_D$  – a finite set of states;

$\Sigma_D$  – a finite alphabet;

$T$  – a mapping defining the transition function. For convenience we may consider that  $T$  represents a transition graph between states.

$$T: Q_D \times \Sigma_D \rightarrow Q_D$$

$q_{0D}$  – an initial state,

$F_D$  – a set of admissible states.

So the main difference between a DFA and a PFA is their transition function.

### Definition 3

Markov chain (MC)  $p$  is defined by a transition matrix:

$$p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix} \quad (3)$$

where  $p_{ij}$  is a probability of a transition from state  $q_i$  to state  $q_j$

We may notice that defining matrix  $p$  means defining a function

$$p: Q_p \times Q_p \rightarrow R^+, p(q_i, q_j) = p_{ij}$$

$Q_p$  – a finite set of states.

$$\left( \forall q' \in Q_\pi \right) \left( \sum_{q'' \in Q_\pi} \pi(q', q'') = 1 \right)$$

### Definition 4

Let

$$(q_1, a_1) \approx (q_2, a_2), \text{ when } (\forall q \in Q) (P(q_1, a_1, q) = P(q_2, a_2, q)).$$



This relation is an equivalence relation. Hence, it breaks set  $U = \{(q, a) \in Q \times \Sigma\}$  into equivalence classes  $U = \bigcup_{i=1}^{i=k} U_i$  where

$$U_i = \{(q_i, a_i) \in Q \times \Sigma \mid (\forall \{(q', a'), (q'', a'')\} \subset U_i) ((q', a') \approx (q'', a''))\}$$

### Definition 5

In order to consider a composition of automata we need that  $(\Sigma_M = \Sigma_D = \Sigma) \wedge (Q_M = Q_D = Q_\pi = Q) \wedge (F_M = F_D = F)$ .

PFA (1) can be represented as a composition of DFA (2) and a MC (3) if such functions  $T$  and  $\pi$  exist that  $(\forall (q', a, q'') \in Q \times \Sigma \times Q) (P(q', a, q'') = \pi(T(q', a), q''))$ .

### Main part

#### Lemma

If PFA  $M$  is a composition of MC  $\pi$  and DFA  $D$ , then for  $T$  the following relationship holds true:

$$(\forall \{(q_1, a_1), (q_2, a_2) \in Q \times \Sigma, (q_1, a_1) \neq (q_2, a_2)\})$$

$$(T(q_1, a_1) = T(q_2, a_2) \Rightarrow (q_1, a_1) \approx (q_2, a_2))$$

□

Assume the contrary:

$$(\exists \{(q_1, a_1), (q_2, a_2) \in Q \times \Sigma, (q_1, a_1) \neq (q_2, a_2)\})$$

$$(T(q_1, a_1) = T(q_2, a_2) \wedge \overline{(q_1, a_1) \approx (q_2, a_2)})$$

$$\text{Let } T(q_1, a_1) = T(q_2, a_2) = q'.$$

$$(q_1, a_1) \approx (q_2, a_2) \Leftrightarrow (\exists q'' \in Q) (P(q_1, a_1, q'') \neq P(q_2, a_2, q'')) \quad (*)$$

$$P' = P(q_1, a_1, q'') = \pi(T(q_1, a_1), q'') = \pi(q', q'')$$

$$P'' = P(q_2, a_2, q'') = \pi(T(q_2, a_2), q'') = \pi(q', q'')$$

We obtain that  $P' = P''$ . However, according to (\*)  $P' \neq P''$ .

We have a contradiction.

■

Let's consider the following bipartite graph  $G = \langle V, E \rangle$ :

(4)

$$X = U$$

$$Y = Q$$

$$V = X \cup Y$$

$$E = \{(x, y) \in X \times Y\}$$

**Theorem** (criterion for determining when a PFA can be represented as a composition of a MC and a DFA)

A PFA (1) may be represented as a composition of a DFA (2) and a MC (3) if and only if a matching of the graph (4) exists which contains  $|X|$  edges.

□

1. (Necessity)

By hypothesis PFA M is represented as a composition of DFA D and MC  $\pi$ .

$$\text{Let } W = \{(U_i, T(q, a)) \mid U_i \in U, (q, a) \in U_i\}.$$

Then  $W$  is a desired matching,  
since

$$1) |W| = |X|;$$

$$2) (\forall q \in Q) ((\exists U_i \in U : (U_i, q) \in W) \Rightarrow (\exists ! U_i \in U \mid (U_i, q) \in W)).$$

Let us assume the contrary.

$$\text{Then } (\exists q \in Q) (\exists U_i \in U \wedge \exists U_j \in U \mid U_i \neq U_j, (U_i, q) \in W, (U_j, q) \in W).$$

From the definition of  $W$  we may conclude that

$$(\exists (q', a') \in U_i, \exists (q'', a'') \in U_j) (T(q', a') = q \wedge T(q'', a'') = q).$$

Using Lemma we obtain that  $(q', a') \approx (q'', a'')$  but  $U_i \neq U_j$ .

We reach a contradiction.

2. (Sufficiency)

Let  $W = \{(U_i, q'_i)\}_{i=1}^{|X|}$  be a matching which consists of  $|X|$  edges.

$$U_i = \{(q_i, a_i) \in Q \times \Sigma \mid (\forall \{(q', a'), (q'', a'')\} \subset U_i) ((q', a') \approx (q'', a''))\}$$

$$\text{Let } (\forall i \in [1, |X|]) (\forall (q, a) \in U_i) (T(q, a) = q'),$$

$$\pi(q', q'') = \begin{cases} \pi(T(q_i, a_i), q'') = P(q_i, a_i, q'') \text{ if } (\exists (U_i, q') \in W, (q_i, a_i) \in U_i) \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Therefore, from the construction follows  $P(q', a, q'') = \pi(T(q', a), q'')$ .

■

**Corollary**

A PFA (1) may be represented as a composition of a DFA (2) and a MC (3) if and only if  $|U| \leq |Q|$ .

□

It is obvious that the matching of the graph (4) which consists of  $|X|$  edges exists if and only if  $|U| \leq |Q|$ .

■

It is also interesting to consider a question: how many ways are there to represent a PFA as a composition of a DFA and a MC?

**Theorem**

If a PFA (1) may be represented as a composition of a DFA (2) and a MC (3) then there are  $A_{|Q|}^{|U|}$  ways to do this.

□

From the construction of the graph (4) one can easily see that there are  $A_{|Q|}^{|U|}$  matchings.

■

Now examine an example.

Let us consider a PFA shown in Fig. 1. In this case  $|U| = 4$ ,  $|Q| = 5$ . So  $|Q| > |U|$  and we may conclude that this PFA can be represented as a composition of a DFA and a MC.

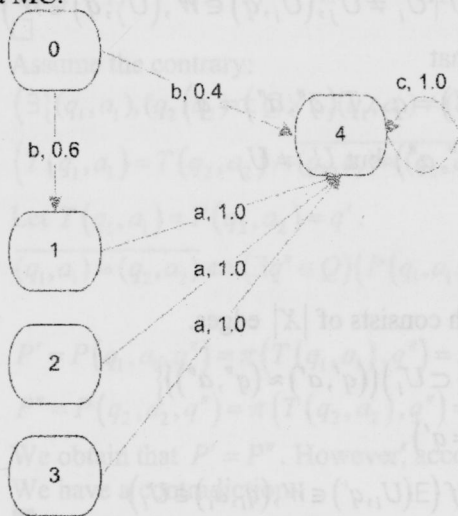


Fig. 1 Example of a PFA

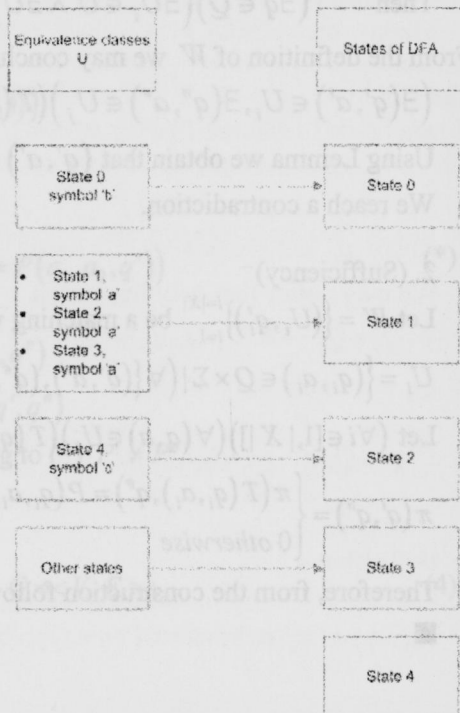


Fig. 2 Correspondence between equivalence classes  $U$  and states of a DFA

Let us find  $T$  and  $\pi$ . In order to do this we need to set up a correspondence between equivalence classes  $U$  and states of a DFA. The example of such a correspondence is shown in Fig. 2.

Table 1. Matrix  $T$ 

| State \ Input symbol | a | b | c |
|----------------------|---|---|---|
| 0                    | 3 | 0 | 3 |
| 1                    | 1 | 3 | 3 |
| 2                    | 1 | 3 | 3 |
| 3                    | 1 | 3 | 3 |
| 4                    | 3 | 3 | 2 |

Table 2. Matrix  $\pi$ 

| State \ State | 0 | 1   | 2 | 3 | 4   |
|---------------|---|-----|---|---|-----|
| 0             | 0 | 0   | 0 | 0 | 0.4 |
| 1             | 0 | 0   | 0 | 0 | 1.0 |
| 2             | 0 | 0   | 0 | 0 | 1.0 |
| 3             | 0 | 0.6 | 0 | 0 | 0   |
| 4             | 0 | 0   | 0 | 0 | 0   |

Using a few examples let us examine if the found values of functions  $T$  and  $\pi$  satisfy definition 5:

$$P(q_0, b, q_4) = P(T(q_0, b), q_4) = P(q_0, q_4) = 0.4$$

$$P(q_0, b, q_1) = P(T(q_0, b), q_1) = P(q_3, q_1) = 0.6$$

$$P(q_1, a, q_4) = P(T(q_1, a), q_4) = P(q_1, q_4) = 1.0$$

### Summary

The theorem proved in this paper gives a desired criterion for determining when a PFA can be represented as a composition of a MC and a DFA

### REFERENCES

1. Хопкрофт Дж. Э., Мотвани Р., Ульман Дж. Д. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений, 2-е изд.. М.: Вильямс, 2002. – 528 с.
2. Трахтенброт Б. А., Барздин Я. М. Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970. – 400 с.
3. Paz, A. Introduction to Probabilistic Automata, Academic Press Inc., 1971.
4. Rabin, M. O. Probabilistic Automata, Information and Control, vol. 6, no. 3, pp. 230-245, 1963.



## Представление объектов и знаний в информационной среде «Система анализа форм отчетности»

С. Н. Богомолов, Ахмад Ибрахим, П. А. Иващенко

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина*

The algorithm of performance of the arbitrary form of the reporting by the way systems of trees is offered. Is considered frames performance of the making forms of the reporting. The algorithm of creation of the production rules in to the «System of the analysis of the forms of the reporting» is given.

### 1. Введение

Создание и эксплуатация форм отчетности, адекватно и полно отражающих социально-экономическую действительность, – это проблема, которая всегда является актуальной для предприятий, учреждений любой страны. Формы отчетности (ФО) постоянно совершенствуются, приближаясь к международным стандартам [1, 2]. Проблема заключается в обеспечении возможности выявления направлений подобного совершенствования. Одно из направлений ее решения состоит в построении и использовании соответствующего инструментария. По нашему мнению, он должен включать в себя:

аналитическую составляющую, назначение которой – обеспечить анализ адекватности и полноты отражения информации, представленной в ФО;

информационно-математическую составляющую, которая позволяет систему используемых в ФО показателей представить в виде информационных (фреймы) и математических объектов (лес деревьев), хранимых на физическом уровне списком;

графическую составляющую (редактор графов), обеспечивающую визуализацию информационных представлений ФО.

В целом такой инструментарий может характеризоваться как система поддержки принятия решений (СППР), ориентированная на анализ и проектирование форм отчетности. В статье рассматривается подход к алгоритмизации представления ФО в виде списков, а также фреймовый инструментарий, обеспечивающий формирование правил вывода.

### 2. Анализ достижений и публикаций по теме исследования данной проблемы.

ФО содержат социально-экономическую информацию, организованную специальным образом. В них количественно отражена фотография субъекта хозяйственной деятельности за определенный период. От качества и полноты информационного представления зависит правильность восприятия и качество

выводов и принимаемых решений вышестоящими органами управления [1, с.184; 2, с. 27].

Аналитическая составляющая СППР – это наименее формализованный блок, использующий информационные представления из информационно-математического блока. Рассмотрим подробнее существующие подходы к графовым представлениям информации.

Под графовой визуализацией понимают такое представление сложной структуры, которое изображается, например, в виде набора точек (вершин графа) и системы связей между ними (дуг-ориентированных ребер). Автоматизация систем визуализации происходит в двух направлениях [5, с.414]. Первое направление связано со специализацией, ориентированной на графовые модели с определенной семантикой и топологией. Второе представлено универсальными системами обработки графовых моделей. Примерами могут служить программы Graph, VIZ и др.<sup>1</sup>. Для наших целей важным при изображении иерархической графовой модели представляется возможность наглядного представления свойств, которые могут быть связаны с двойственной ролью фрагмента (свойства типа «часть-целое»). Иначе говоря, в одной ситуации фрагмент может быть графом, в другой – вершиной.

Представляется актуальной разработка адекватных методов информационного моделирования предметной области системы анализа форм отчетности с помощью теории фреймов.

Несмотря на наличие большого количества приложений концепции фреймов к решению задач искусственного интеллекта и, в частности, к экспертным системам, формального определения фрейма не существует [6, с. 113]. В основу каждой из систем искусственного интеллекта закладывают собственную информационную структуру для реализации базовых концепций. Она базируется на представлении знаний с помощью фреймовой модели. Однако подходы, сходные с фреймовой моделью, развиваются. Если объединить концепцию фреймов с указанными подходами, то можно разработать законченную теорию построения информационных моделей, соответствующих предметной области системы анализа форм отчетности (САФО).

Трудностью представления знаний и языка фреймов является отсутствие формальной семантики. Это затрудняет сравнение свойств представления знаний различных языков фреймов, а также полное логическое объяснение языка фреймов.

Целью настоящей статьи является исследование возможности представления *любой* формы отчетности (документа) фреймовыми конструкциями для получения информации о качестве, как самой формы отчетности, так и о точности (безошибочности) ее заполнения.

Для модели представления знаний в САФО предлагается использовать продукционно-фреймовый формализм [6, с. 235-269; 7, с. 324-330; 8, с. 68-75]. Выбор и разработка такой гибридной модели представления знаний были осуществлены в результате исследования объекта (формы отчетности), анализа

состава и характера задач оценки эффективности (информативности) форм отчетности (ФО) [3, 4].

### 3. Постановка задачи

Задача состоит, во-первых, в построении алгоритма, реализующего преобразование представления ФО как части электронной таблицы с адресом

<адрес\_начального\_столбца\_адрес\_начальной\_строки :

адрес\_последнего\_столбца\_адрес\_последней\_строки>

в виде набора списков. Каждый элемент списка – это ветвь дерева, ассоциированная с показателем. Показателем в данной ситуации выступает информационная единица, состоящая из набора реквизитов-признаков и одного реквизита-основания. Во-вторых, в разработке фреймовых конструкций ФО, ориентированных на получение информации о качестве как самой ФО, так и о точности (безошибочности) ее заполнения.

### 3. Основной материал

Форма отчетности представляет собой документ, содержащий заголовок, тело (таблицу) ФО и заключительную часть, которая представлена атрибутами руководителя и лица, отвечающего за подготовку ФО (главный бухгалтер, начальник планово-финансового отдела и т.п.). ФО может быть представлена на бумажном носителе и в электронном виде (в электронной таблице).

Как объект электронной таблицы ФО представляет собой совокупность ячеек. Некоторые из них объединены.

Поскольку предполагается анализировать любую ФО (из состава действующих), то считаем, что структура подлежащего (включая число строк) и структура сказуемого (включая число столбцов) заранее неизвестны. Наличие блока объединенных ячеек учитывается адресом его левой верхней ячейки.

Рассмотрим форматы и структуры данных, используемых при алгоритмизации и программировании задачи построения леса деревьев формы отчетности.

По содержанию ФО ее анализ может быть выполнен как по отдельным ячейкам, так и по совокупностям связанных ячеек. При этом могут учитываться не только строки и столбцы, но и их части.

Наряду со стандартным набором форматов ячеек, предусмотренных в Excel, данный подход требует использования нескольких форматов пользователя, которые учитывали бы такие особенности как незаполняемость, пустота ячеек и др.

Получающиеся в результате применения алгоритма связывания ячеек списки естественным образом могут быть объединены в группы по смысловым критериям. Совокупность списков однозначно характеризует лес деревьев.

Сформулируем детальнее требования к алгоритмам и программному обеспечению (ПО), используемым для анализа ФО.

ПО должно обеспечивать следующие возможности:

добавлять связь между двумя ячейками (в нашей терминологии: вершинами);

редактировать атрибуты (пользовательские форматы) ячеек;

просматривать список путей, начинающихся в данной вершине.

Добавление вершин: после двух последовательных щелчков по двум ячейкам должна добавляться связь между вершинами, соответствующим этим ячейкам.

Результатом таких действий должно быть дерево, показывающее отношения между вершинами.

Редактирование атрибутов ячеек: для каждой ячейки необходимо, чтобы ПО позволяло изменять атрибуты вершины (например, вершина может соответствовать пустой ячейке, ячейке, содержащей число или текст).

Просмотр списка путей: необходимо, чтобы программа могла перечислять пути, начинающиеся в требуемой ячейке (т.е, собственно, строить дерево путей).

Авторами разработана надстройка над Excel, реализующая указанные требования.

Решение второй подзадачи состоит в следующем.

Аналогично [8] предлагается трехуровневая структура модели представления знаний (МПЗ). Первым (нижним) уровнем МПЗ выступает модель мира САФО, в котором отражены декларативные, экстенциональные и фактологические знания относительно проблемной области (альбом форм отчетности), пользователях системы (работниках бухгалтерий, планово-финансовых отделов и других служб предприятий, организаций, фирм). Возможность использования фреймового формализма в представлении знаний в модели мира САФО выражена в том, что вербальные знания групп профессионалов (экспертов) о структуре и строении предметной области допускают иерархическое, взаимосвязанное, вложенное описание (пример будет рассмотрен ниже).

Второй (средний) уровень МПЗ представлен базой правил (БП), в которой отражены знания процедурального и интенционального характера (методики заполнения ФО, характерные ошибки и др. информация). База правил должна быть структурирована в однозначном соответствии с составом предметной области (разделов ФО) и допускает представление в виде совокупности пакетов правил, являющихся независимыми продукционными системами.

Наконец, третий (верхний) уровень МПЗ содержит метазнания. Они отражают собственно характер и структуру знаний САФО. Метаправила позволяют осуществлять координацию работы с пакетами правил в БП. Метазнания позволяют облегчать процессы создания, отладки и поддержания в актуальном состоянии базы знаний (БЗ) для предметной области САФО.

Предлагается определить МПЗ четверкой

$$B = \langle F, R, M, I \rangle,$$

где  $F$  – модель мира САФО, представленная множеством фреймов ( $F = \{f_i, i = 1, \dots, Z\}$ );

$R$  – база правил;

$M$  – совокупность метазнаний;

$I$  – механизм вывода.

Каждый фрейм  $f_i$  определяется как пара:

$$f_i = \langle N_i^f, S_i^f \rangle,$$

где  $N_i^f$  – имя фрейма  $f_i$ ;

$S_i^f$  – слоты фрейма  $f_i$ .



Слоты фрейма  $f_i$  представлены множеством

$$S_i^f = \{(S_j^{f_i}), j = 1, \dots, J\}.$$

Каждый слот – это тройка:

$$S_j^{f_i} = \langle L_j^{f_i}, V_j^{f_i}, U_j^{f_i} \rangle,$$

где  $L_j^{f_i}$ , – имя слота  $S_j^{f_i}$ ;

$V_j^{f_i}$ , – значение слота  $S_j^{f_i}$ ;

$U_j^{f_i}$  – величина достоверности значения слота  $S_j^{f_i}$ .

База правил представлена множеством пакетов правил

$$R = (r_k), k = 1, \dots, K.$$

Каждое правило  $r_k$  – это пятерка

$$r_k = \langle N_k^r, A_k^r, K_k^r, W_k^r, E_k^r \rangle,$$

где  $N_k^r$  – имя правила  $r_k$ ;

$A_k^r$  – антецедент правила  $r_k$ ;

$K_k^r$  – консеквент правила  $r_k$ ;

$W_k^r$  – вес правила  $r_k$ ;

$E_k^r$  – трактовка (интерпретация, объяснение) правила  $r_k$ .

Антецедент правила  $r_k$  – это упорядоченное множество

$$A_k^r = \{(A_m^{r_k}), m = 1, \dots, M\},$$

где  $A_m^{r_k}$  – условный элемент антецедента.

Консеквент правила  $r_k$  – это упорядоченное множество

$$K_k^r = \{(K_n^{r_k}), n = 1, \dots, N\},$$

где  $K_n^{r_k}$  – действия в правой части правила.

Метазнания – это пара

$$M = \langle D^m, P^m \rangle,$$

где  $D^m$  – декларативные метазнания;

$P^m$  – процедуральные метазнания.

Декларативные метазнания – это множество

$$D^m = \{(F_p^m), p = 1, \dots, P\},$$

где  $F_p^m$  – метафрейм.

Процедуральные метазнания – это множество

$$P^m = \{(P_s^m), s = 1, \dots, S\},$$

где  $P_s^m$  – метаправило.

Механизм вывода – это множество способов рассуждений

$$I = \{(I_r), r = 1, \dots, R\},$$



где  $I_r$  – способ рассуждений.

Трехуровневая структура САФО может быть представлена рис. 1 (ср. с рис.11.2 из [8, с. 327]).

На рис. 1 приведен фрагмент БЗ из САФО. Первый уровень, как отмечено выше, содержит знания о структуре САФО, индивидуальные модели пользователей, совокупность решаемых задач и другую информацию. Объектами модели мира САФО являются формы отчетности, документы табличного типа, которые представлены в виде вложенных фреймов. В их слотах содержится информация фактографического и процедурного характера, описывающая объекты. Обычно несколько начальных слотов (а иногда и все) имеют жестко закрепленную семантику. С помощью некоторых слотов можно придать конкретную смысловую характеристику (интерпретацию) составляющих предметной области. Для ФО – это, в основном, древовидные, иерархические, родовидовые отношения между объектами.

Рассмотрим конкретный пример структуры базы знаний САФО относительно действующей ФО «Бухгалтерский баланс (Форма отчетности № 1)». Поскольку структура анализируемой ФО является типовой, достаточно рассмотреть лишь некоторые ее разделы.

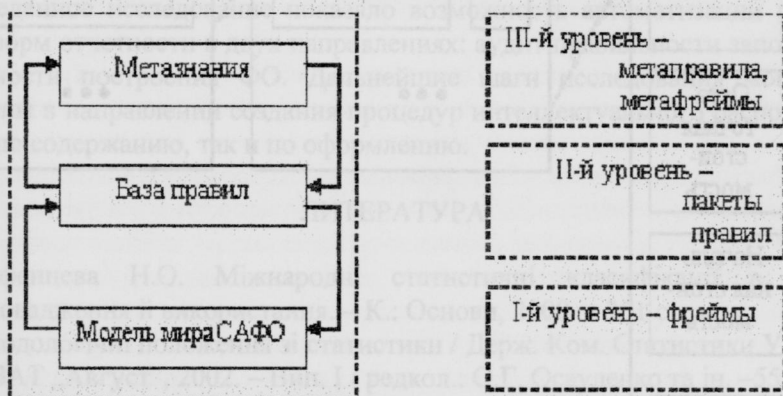


Рис. 1. Структура базы знаний САФО

Фрагмент реализации БЗ САФО представлен на рис. 2. На нем представлен раздел «Актив» «Бухгалтерского баланса» и часть раздела «Актив» – «Необоротные активы». С целью конкретизации базы правил в «Необоротных активах» представлены «Основные средства», состоящие из «Остаточной стоимости», «Начальной стоимости» и «Износа». Все записи относятся к началу отчетного периода.

Одной из задач САФО является интеллектуальный контроль правильности (корректности) заполнения ФО. Его суть, например, может состоять в системной проверке правильности заполнения ФО и расчетов. В нашем случае требуется проверить выполнение соотношения:

$$\text{Остаточная стоимость} = \text{Начальная стоимость} - \text{Износ}. \quad (1)$$

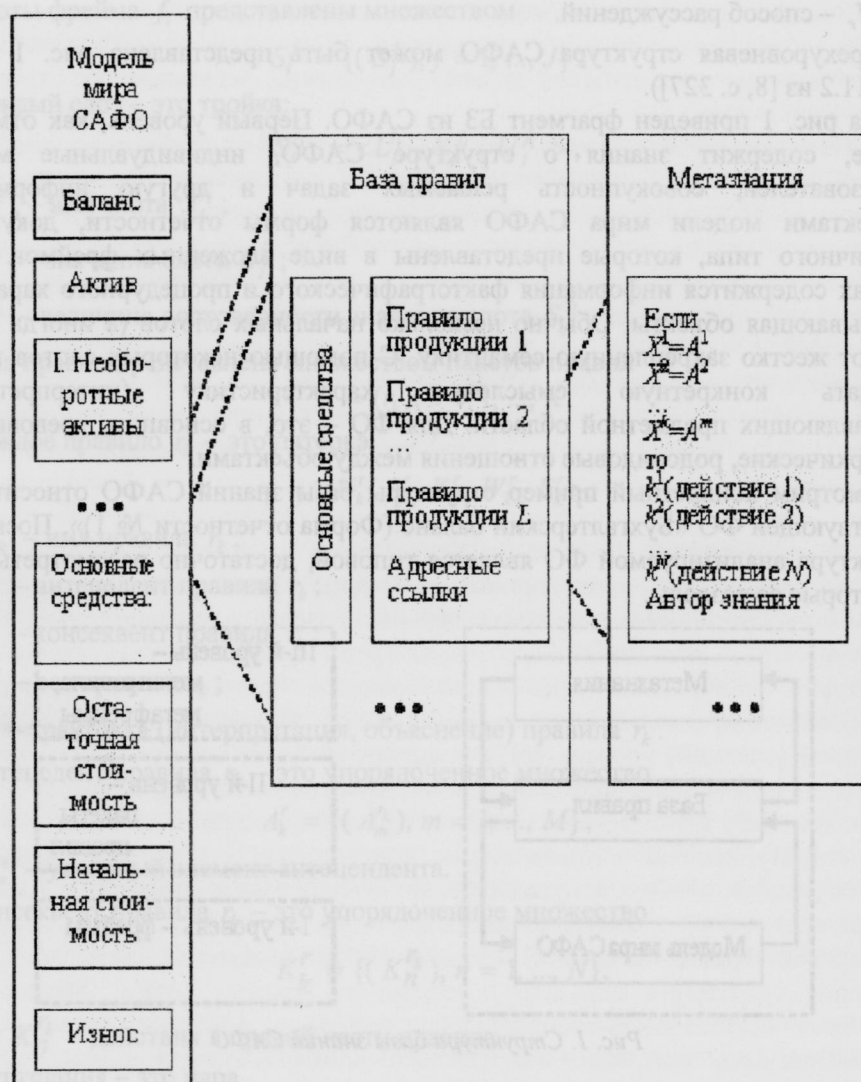


Рис. 2. Фрагмент реализации БЗ САФО

Интеллектуальность контроля правильности заполнения ФО состоит в предоставлении САФО возможных причин невыполнения соотношения (1) и выдаче рекомендаций по исправлению. Совокупность правил интеллектуального контроля может выглядеть следующим образом (в данном случае предполагаем единственность (1) в ФО):

Если соотношение (1) истинно, остановиться. Иначе:

1. Проверить правильность формулы (1). Если она верна, перейти к п. 2. Иначе рекомендовать ее исправить и затем перейти к п.1.
2. Проверить правильность формирования записи «Начальная стоимость» (Дебет счета 10). Если запись верна, перейти к п.3. Иначе рекомендовать

пользователю выполнить необходимые исправления. После корректировки перейти к п.2.

3. Проверить правильность формирования записи «Износ» (Кредит счета 131). Если запись верна, перейти к п.4. Иначе рекомендовать пользователю выполнить необходимые исправления. После корректировки перейти к п.3.

4. Выдать заключение о выполненных изменениях и остановиться.

Заметим, что многократная проверка в пп. 1-3 необходима для защиты от повторных ошибок.

Идеология рассмотренного алгоритма может быть легко распространена на всю ФО «Бухгалтерский баланс (форма отчетности № 1)».

На основе алгоритма вводятся предикаты, состояниям и действиям контролирующего алгоритма, формулируются правила вывода и стандартизируются. В результате образуется механизм логического вывода, который может быть использован в САФО в качестве инструментария аудита ФО.

#### **5. Выводы по данному исследованию и перспективы дальнейших исследований в данном направлении.**

Проведенное исследование показало возможность автоматизации процедур аудита форм отчетности в двух направлениях: аудит правильности заполнения и корректности построения ФО. Дальнейшие шаги исследования могут быть выполнены в направлении создания процедур интеллектуального распознавания ФО как по содержанию, так и по оформлению.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Парфенцева Н.О. Міжнародні статистичні класифікації в Україні. Впровадження й використання. – К.: Основи, 2000. – 351 с.
2. Методологічні положення зі статистики / Держ. Ком. Статистики України. – К.: ЗАТ „Август”, 2002. – Вип. I / редкол.: О.Г. Осауленко та ін. – 552 с.
3. Лазаренкова Г.М. Методологія оцінки вартості економічної інформації // Вісник ХНУ імені В.Н. Каразіна. Серія економічна. – № 580. – 2003. – С. 179-181.
4. Ахмад Ибрахим. Способ оценки эффективности информации форм отчетности // Вісник ХНУ імені В.Н. Каразіна. Серія економічна. – № 634. – 2003. – С. 107-110.
5. Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
6. Жолткевич Г.Н. Автоматизация проектирования технологической оснастки: теория и практика. К.: – Техніка, 1998. – 263 с.
7. Романов В.П. Интеллектуальные информационные системы. – М.: Экзамен, 2003. – 496 с.
8. Абдикеев Н.М. Проектирование интеллектуальных систем в экономике. – М.: Экзамен, 2004. – 528 с.

## Совместное применение метода малого параметра и метода граничных элементов для численного решения эллиптических задач с малыми возмущениями

Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков  
*Днепропетровский национальный университет, Украина*

Most of numerical methods are not applicable for analysis of disturbances less, than discretization parameters. In the present paper the solutions of such problems are searched as a series with respect to small parameter, which is the reference scale of the disturbance. The following solutions of relevant elliptical boundary-value problems are made by boundary element method. Small domain shape disturbances, boundary condition disturbances and fundamental solution disturbances are considered. Due to high accuracy of the boundary element method the proposed approach is enough effective, what was proved by numerical experiments

### 1. Общая постановка задачи и её актуальность

В настоящее время интенсивное развитие микроэлектроники, микромеханики и биотехнологий делает весьма актуальной проблему малых возмущений, то есть проблему определения влияния эффектов, которыми раньше пренебрегали из-за малости их характерных параметров или малости области действия. Не останавливаясь подробно на физических аспектах подобных задач, отметим только, что в механике сплошной среды и теории тепломассообмена сформировалось отдельное направление, названное «многомасштабные явления» (термин является прямым переводом с английского «multiscale phenomena» и, может быть, не совсем удачен). Традиционно в механике многофазных сред пользовались разного рода приемами осреднения, обзор которых можно найти, например, в монографии [1]. Однако в последнее время все чаще стали прибегать к прямому моделированию малых эффектов и разработке соответствующих численных методов на основе лагранжевых [2, 3] и эйлеровых [4] подходов. Эта же идея была распространена на метод граничных элементов [5] и, естественно, стимулировала интерес к возможности учета малых возмущений в методе граничных элементов.

### 2. Истоки исследования авторов

В теории численных методов существует устоявшаяся точка зрения на проблему малых возмущений, которая сводится к тому, что так называемые подсеточные эффекты в рамках численного метода не могут быть проанализированы. Этот тезис явно и очевидно сформулирован для эйлеровых, преимущественно сеточных подходов и неявно, с трудом прослеживается для лагранжевых, преимущественно бессеточных подходов (последняя трудность скорее терминологическая – сетки нет, а подсеточные эффекты есть, в этом случае правильнее было бы называть такие эффекты мелкомасштабными).



Указанный тезис приводит к очевидному выводу: чем меньший эффект следует исследовать, тем более подробную дискретизацию следует ввести. Такой подход привел даже к развитию специального направления в численных методах — многосеточных методов.

Хотя идея использовать методы теории возмущений и асимптотические разложения при построении численных алгоритмов, вообще говоря, достаточно очевидна и упоминалась во многих книгах [6-8], она не получила достаточного развития, по-видимому, из-за трудностей с доказательством сходимости асимптотических разложений и из-за того, что фактически сводила сформулированную краевую задачу к последовательности других краевых задач, что явно малоэффективно. В результате, быстрый прогресс численных методов оставил данную идею не востребованной. Не останавливаясь подробно на истории и тенденциях развития численных методов, поскольку это требует отдельного анализа, отметим только, что в настоящее время появились высокоточные численные методы, среди которых следует выделить численные методы теории потенциала, например, метод граничных элементов, метод дискретных вихрей и разного рода их модификации [2, 3, 9, 10]. Специальные алгоритмы метода граничных элементов могут обеспечить исключительно высокую точность решения линейных эллиптических задач [11, 12].

### 3. Нерешенные проблемы и цели работы

Целью настоящей работы является применение асимптотических разложений по малому параметру совместно с численным методом, в данном случае методом граничных элементов, для анализа малых возмущений в эллиптических задачах. Основная идея данного подхода достаточно очевидна и основывается на хорошо известном факте — для метода высокого порядка точности погрешность результатов применения метода оказывается много меньшей, нежели погрешности исходных аппроксимаций. Этот факт установлен как теоретически [7], так и экспериментально [11, 12] для ряда численных методов. Пусть в параметры, определяющие краевую задачу (в настоящей статье имеется в виду эллиптическая краевая задача, но данный подход может быть применен к краевой задаче любого типа), внесено возмущений  $\varepsilon f(x)$ , где  $\varepsilon$  — малая величина,  $f \sim 1$  — некоторая функция от координат  $x$  (в общем случае от независимых переменных, в которых задача определена, как непосредственно, так и в виде нелинейности). Тогда будем отыскивать решение краевой задачи и в виде следующего ряда

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (3.1)$$

Традиционно в асимптотических методах функции  $u_i$  определялись аналитически. Как сказано выше, идея настоящей работы заключается в том, чтобы определить  $u_i$  при помощи численного метода, в частности, метода граничных элементов, который считается наиболее точным для эллиптических задач, здесь рассматриваемых. В классических численных методах для решения данной возмущенной задачи требовалось бы произвести дискретизацию таким образом, чтобы погрешность дискретизации  $\delta < \varepsilon$ , а желательно  $\delta \ll \varepsilon$ . Обозначим погрешность численного определения функции  $u_0$  через  $\Delta$  (как

будет показано ниже, как правило, все функции  $u_i$  удовлетворяют аналогичным краевым задачам, поэтому следует ожидать, что все эти функции будут определены примерно с той же самой погрешностью  $\Delta$ ). Для современных численных методов, по меньшей мере,  $\Delta < \delta$ , а как правило,  $\Delta \ll \delta$ . Полагая функцию  $u$ , ограниченной и дополнительно полагая для простоты  $u_1 \sim u_0$  (что, вообще говоря, необязательно), получим, что применение разложения (3.1) позволяет снизить требования к параметрам дискретизации до  $\delta > \varepsilon > \Delta$ , то есть, весьма существенно.

Замечание. Обоснованием предложенного подхода может служить доказательство сходимости ряда (3.1), однако, как и для большинства асимптотических разложений, доказать этот факт очень сложно и, по-видимому, в общем виде невозможно, поэтому примем в качестве обоснования метода результаты численных экспериментов на тестовых задачах, что, конечно, не может считаться строгим обоснованием.

Поставленная выше задача вплотную примыкает к известной проблеме чувствительности численного метода к малым возмущениям. Чувствительность здесь понимается как изменение результатов вычислений после внесения в задачу малых возмущений. Иногда под чувствительностью понимают производную изменения решения по возмущению, но, поскольку в настоящей работе основной интерес представляет пороговая чувствительность, то есть, предельный случай, когда определение такой производной затруднительно, то и использование определения чувствительности как производной представляется нецелесообразным. Далее в настоящей работе будет проведено исследование пороговой чувствительности метода граничных элементов, хотя полный анализ чувствительности метода требует отдельного исследования и в цели данной работы не входит (первые попытки такого исследования были предприняты в работе [13]). Для исследования чувствительности и анализа влияния малых возмущений принципиальное значение имеет методика тестирования программ и алгоритмов.

#### 4. Методика тестирования граничноэлементных программ

Методика тестирования программного обеспечения представляется исключительно важным моментом разработки, на который, как правило, не обращают должного внимания. Однако, правильная методика тестирования может вскрыть ряд свойств алгоритма, которые вообще не изучались в теоретических исследованиях. Общие вопросы тестирования программного обеспечения рассмотрены в книге [14].

Тестирование программ, предназначенных для численного решения задач теории потенциала, отличается рядом специфических аспектов, поскольку сами алгоритмы имеют весьма специфические особенности, например, полностью заполненные матрицы систем линейных алгебраических уравнений, сильная зависимость погрешности метода от формы области.

Рассмотрим методику тестирования метода граничных элементов. Как показано в работе [11], основной вклад в погрешность метода вносит аппроксимация границы области решения, однако эту погрешность легко можно исключить, равно как и погрешность, вызванную аппроксимацией функций,

известных из граничных условий. Объединим оба эти вида погрешности одним термином – устранимая погрешность. (Поскольку интеграл по реальной границе приходится определять численно, определенная погрешность вычисления интегралов, включающих функции, известные из граничных условий, все-таки остается, но благодаря современным возможностям численного интегрирования погрешность эту можно уменьшить до достаточно малой величины.) Сформулируем первое правило тестирования, относящееся к устранимой погрешности. Для анализа устранимой погрешности необходимо сравнить результаты расчета на различных граничноэлементных сетках. Например, очень удобно уменьшить в два раза размер граничного элемента. Если погрешность аппроксимации границы исключена, измельчение сетки можно заменить применением интегрирования выражений, содержащих известные граничные функции, по более точным квадратурным формулам. Отметим также, что в ряде случаев, в том числе и в случае исключения погрешности аппроксимации границы, коэффициенты при неизвестных произволах, входящих в аппроксимацию неизвестных граничных функций, приходится определять численно, то есть, вносится определенная погрешность, которая по форме влияния на общую погрешность близка к погрешности аппроксимации границы, но, как правило, много меньше ее. Для исследования роли указанной погрешности также можно предложить как пересчет на удвоенной граничноэлементной сетке, так и применение более точных квадратурных формул. К сожалению, все три указанных вида погрешности входят в итоговую погрешность метода не напрямую, а после решения системы линейных алгебраических уравнений, а при увеличении числа граничных элементов собственная погрешность решения системы линейных алгебраических уравнений растет, то есть, непосредственный вклад рассматриваемых видов погрешности можно оценить только качественно на основе тенденций изменения (если при решении системы линейных алгебраических уравнений определяется число обусловленности, то в первом приближении рост погрешности, связанной с решением системы линейных алгебраических уравнений при увеличении числа граничных элементов, можно оценить по отношению чисел обусловленности матриц).

Замечание. В настоящее время широкое распространение получили системы аналитического программирования, которые позволяют производить операции дифференцирования и интегрирования аналитически, то есть, без погрешности. Если алгоритм метода граничных элементов реализован в подобной системе, то три вышеназванных вида погрешности (погрешность аппроксимации границы, погрешность вычисления интегралов, содержащих известные из граничных условий функции, погрешность вычисления интегралов, входящих в коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений) могут быть исключены полностью, то есть, в системах аналитического программирования все эти три вида погрешности должны быть отнесены к устранимой погрешности.

Наиболее сложным моментом тестирования граничноэлементных комплексов является определение вклада погрешности, связанной с аппроксимацией неизвестных функций. Повышение порядка аппроксимации «портит» свойства матрицы системы, вплоть до нарушения принципа диагонального преобладания



в матрице системы. Чтобы отделить непосредственный эффект аппроксимации неизвестных функций от суммарной погрешности, возникающей при решении полной задачи, введем понятие внутренней погрешности метода. Пусть  $u$  – некоторая функция, удовлетворяющая рассматриваемому дифференциальному уравнению, используем функцию  $u$  как тестовое решение, тогда легко получить необходимое граничное выражение для функции  $u$ , соответствующее типу граничных условий актуальной задачи. Подставим в интегральное представление для функции  $u$  вместо неизвестных (по граничным условиям актуальной задачи) функций аппроксимации этих функций для  $u$ , полученные согласно применяемого алгоритма, (другие источники ошибки метода, в частности, устраняемая погрешность также включаются в рассмотрение согласно применяемого алгоритма). Разность между аналитическим решением  $u$  и полученным указанным образом приближенным значением  $u$  в заданном наборе точек называется внутренней погрешностью метода. Сформулируем второе правило тестирования. Чтобы оценить погрешность, вносимую на этапе решения системы линейных алгебраических уравнений, следует сравнить погрешность метода с внутренней погрешностью метода для одной и той же тестовой задачи в одном и том же наборе точек.

Назовем тривиальной тестовой задачей тестовую задачу, для которой аппроксимирующие функции метода совпадают по виду с искомой функцией, например, для уравнения Лапласа в качестве тестовой выбрана линейная функция, тогда при аппроксимации неизвестной функции на граничном элементе линейной, квадратичной функцией или полиномом более высокого порядка такая тестовая задача будет тривиальной. Сформулируем третье правило тестирования. Наиболее явно погрешность, вносимая на этапе решения системы линейных алгебраических уравнений, наблюдается при сравнении погрешности метода с внутренней погрешностью метода для тривиальной тестовой задачи. Действительно в этом случае погрешность аппроксимации неизвестных функций будет минимальна (собственно погрешность будет отсутствовать, а ее роль сыграет погрешность вычисления соответствующих интегралов, которую можно уменьшать, повышая точность квадратурной формулы), поэтому решение тривиальной тестовой задачи можно считать решением без погрешности аппроксимации неизвестных функций. С другой стороны, для данного варианта алгоритма, для того же типа граничных условий, в той же области тривиальная тестовая задача имеет ту же матрицу, что и любая актуальная задача. Однако, невозможно сделать полное заключение о характере погрешности метода, основываясь только на тривиальных тестовых задачах.

Погрешность метода граничных элементов существенным образом зависит от выбора набора точек, в которых она определяется. Общая закономерность в этом вопросе такова – чем ближе граница, тем больше погрешность, на границе погрешность максимальна, эта закономерность является естественным следствием принципа максимума, но имеет место также и для задач, для которых не выполняется принцип максимума. Сформулируем четвертое правило тестирования. Выбор набора точек, в которых анализируется погрешность, определяется множеством точек, в которых должно быть получено решение актуальной задачи.



Отметим, что выбор формы оценки погрешности также определяется требованиями актуальной задачи, но в методе граничных элементов кроме традиционных среднеквадратичных и максимальных норм погрешности, может быть введена еще интегральная норма погрешности

$$\|\delta\| = \int_D \rho(x)(u - \bar{u})dx, \quad (4.1)$$

где  $u$  – точное решение,  $\bar{u}$  – приближенное,  $\rho(x)$  – весовая функция.

Введение нормы (4.1) возможно, поскольку формально  $\bar{u}$  – функция, заданная в аналитическом виде. Варьирование функции  $\rho$  позволяет более точно удовлетворить критериям актуальной задачи (но, как правило, выбирается  $\rho \equiv 1$ ).

Погрешность, вносимая на этапе решения системы линейных алгебраических уравнений, в значительной мере зависит от формы области решения и граничноэлементной сетки. В зависимости от выпуклости области, а в случае невыпуклой области в зависимости от отношения «ширины узких мест» к характерному размеру области, погрешность может изменяться в достаточно широком диапазоне (может изменяться даже порядок погрешности). Поэтому сформулируем пятое правило тестирования. Полное тестирование алгоритма обязательно должно включать тестовые расчеты в невыпуклых и многосвязных областях.

Проблема зависимости общей погрешности метода граничных элементов от формы области решения тесно связана с проблемой оптимизации граничноэлементной сетки. В плоском случае построение граничноэлементной сетки с наперед заданными свойствами трудностей не вызывает. Определив общую длину участка границы

$$L_1 = \int_{t_0}^{t_N} h(t)dt, \quad (4.2)$$

где  $h(t)$  – функция формы кривой,  $t$  – обобщенная координата. Можно любым образом задать правило построения последовательности длин граничных элементов  $S_k, k = 1, N$ , таких, что

$$\sum_{k=1}^N S_k = L, \quad (4.3)$$

и  $S_k$  удовлетворяет некоторому правилу, например,  $S_{k+1}/S_k = \beta$  или  $S_{k+1} = S_k + \delta_k$ . Тогда, если определена «верхняя» граница элемента  $S_k$ , то для определения конца  $(k+1)$ -го элемента  $S_{k+1}$  следует численно решить трансцендентное уравнение

$$\int_{t_k}^t h(t)dt = S_{k+1}. \quad (4.4)$$

В пространственном случае дело обстоит намного сложнее и необходимы специальные алгоритмы сгущения сетки. Но даже в плоском случае, основываясь на уравнении (4.4), оптимизировать сетку весьма сложно, поскольку речь идет о минимизации погрешности решения тестовой задачи,

определенной на заданном наборе точек и зависящей от  $N$  переменных  $S_k$ . Задача минимизации такого функционала не представляет принципиальных трудностей, но исключительно трудоемка. Оптимальность же построенной сетки для актуальной задачи можно обосновать лишь эвристическими соображениями, хотя минимизация погрешности, вносимой при решении системы линейных алгебраических уравнений, в этом случае, безусловно, будет достигнута.

### 5. Проблема погрешности фундаментального решения

Проблема погрешности, вносимой в общую погрешность метода граничных элементов вследствие использования приближенного фундаментального решения (функции Грина), очень мало изучена в настоящее время. Возможны три вида возмущения фундаментального решения (функции Грина):

1) регулярное возмущение, то есть вместо истинного фундаментального решения  $\varphi$  используется фундаментальное решение  $\varphi^*$ , которое связано с решением  $\varphi$  соотношением

$$\varphi^* = \varphi + \alpha f_r, \quad (5.1)$$

где  $\alpha$  – малый параметр,  $f_r$  – регулярная ограниченная функция;

2) сингулярное возмущение того же типа, то есть

$$\varphi^* = \varphi(1 + \alpha f_r), \quad (5.2)$$

где  $\alpha$  – малый параметр,  $f_r$  – регулярная ограниченная функция;

в) сингулярное возмущение другого типа, то есть

$$\varphi^* = \varphi + \alpha f_s, \quad (5.3)$$

где  $\alpha$  – малый параметр,  $f_s$  – сингулярная функция, отличающаяся от  $\varphi$  по виду сингулярности.

Хотелось бы отметить, что в случае чисто граничной регулярной формулировки сингулярные возмущения регуляризуются и сводятся к виду (5.1). К сожалению, в реальных задачах известен только параметр  $\alpha$  (а нередко только его порядок), а функции  $f_r, f_s$  неизвестны; поэтому представления (5.1)–(5.3) невозможно использовать для анализа погрешностей. Однако можно пойти иным путем, и исследовать поведение решения, предварительно задав функции  $f_r, f_s$ , тогда для любой тестовой задачи путем численного эксперимента можно получить влияние погрешности фундаментального решения. Для реальной задачи, в которой используется приближенное фундаментальное решение, полученный таким образом результат укажет лишь возможные пределы погрешности, вызванной неточностью фундаментального решения, а для модельных задач указанный прием является мощным средством экспериментального исследования свойств алгоритма. Если же оценки погрешности фундаментального решения не получены вообще, то, выбирая разные функции  $f_r$  или  $f_s$ , можно определить общие тенденции изменения погрешности метода в зависимости от возмущения фундаментального решения.

Представления (5.1)-(5.3) при заданных функциях  $f_2, f_s$  позволяют провести и теоретическое исследование погрешности. Следуя методу малого параметра, будем отыскивать решение в виде

$$u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots, \quad (5.4)$$

тогда для представления (5.1)

$$\begin{aligned} c(x_0)(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots) = \\ = \int_{\Gamma} (\varphi + \alpha f_r) \frac{\partial(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots)}{\partial n} ds - \\ - \int_{\Gamma} (u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots) \frac{\partial(\varphi + \alpha f_r)}{\partial n} ds, \end{aligned} \quad (5.5)$$

В силу произвольности параметра  $\alpha$  для выполнения равенства (5.5), необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях  $\alpha$ :

$$c(x_0)u_0 = \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial u_0}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \quad (5.6)$$

$$c(x_0)u_1 = \int_{\Gamma} \left( \varphi \frac{\partial u_1}{\partial n} + f_r \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) ds - \int_{\Gamma} \left( u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_0 \frac{\partial f_r}{\partial n} \right) ds, \quad (5.7)$$

$$c(x_0)u_2 = \int_{\Gamma} \left( \varphi \frac{\partial u_2}{\partial n} + f_r \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds - \int_{\Gamma} \left( u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_1 \frac{\partial f_r}{\partial n} \right) ds, \quad (5.8)$$

$$\dots\dots\dots c(x_0)u_k = \int_{\Gamma} \left( \varphi \frac{\partial u_k}{\partial n} + f_r \frac{\partial u_{k-1}}{\partial n} \right) ds - \int_{\Gamma} \left( u_k \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_{k-1} \frac{\partial f_r}{\partial n} \right) ds, \quad (5.9)$$

Очевидно, что  $u_0$  — точное решение, и может быть найдено как решение уравнения (5.6), которое имеет ту же структуру, что и уравнение (5.7), все последующие уравнения имеют аналогичную структуру. Таким образом, соотношения (5.4) и уравнения (5.6)-(5.7) дают оценку погрешности решения, вызванной возмущением фундаментального решения. Заменяя (5.1) на

$$\varphi^* = \varphi(1 + \alpha f_r), \quad (5.10)$$

и внося соответствующие изменения в (5.5)-(5.9), можно получить оценку погрешности по построенному приближенному решению и заданной функции  $f_r$ .

Аналогично для (5.2) получим аналог (5.9)

$$\begin{aligned} c(x_0)(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots) = \\ = \int_{\Gamma} (1 + \alpha f_r) \varphi \frac{\partial(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots)}{\partial n} ds - \\ - \int_{\Gamma} (u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots) \frac{\partial(1 + \alpha f_r) \varphi}{\partial n} ds, \end{aligned} \quad (5.11)$$

из (5.11) по аналогичным соображениям имеем

$$c(x_0)u_0 = \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial u_0}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \quad (5.12)$$

$$c(x_0)u_1 = \int_{\Gamma} \left( \varphi \frac{\partial u_1}{\partial n} + f_r \varphi \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) ds - \int_{\Gamma} \left( u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_1 \frac{\partial f_r \varphi}{\partial n} \right) ds, \quad (5.13)$$

$$c(x_0)u_2 = \int_{\Gamma} \left( \varphi \frac{\partial u_2}{\partial n} + f_r \varphi \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) ds - \int_{\Gamma} \left( u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_1 \frac{\partial f_r \varphi}{\partial n} \right) ds, \quad (5.14)$$

$$c(x_0)u_k = \int_{\Gamma} \left( \varphi \frac{\partial u_k}{\partial n} + f_r \varphi \frac{\partial u_{k-1}}{\partial n} \right) ds - \int_{\Gamma} \left( u_k \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u_{k-1} \frac{\partial f_r \varphi}{\partial n} \right) ds, \quad (5.15)$$

Отличия системы уравнений (5.12)-(5.15) от системы (5.6)-(5.9) минимальны. Аналогичной будет и система построения для представления (5.3), за исключением вопроса об интегрируемости функции  $f_s$ .

## 6. Тестирование чувствительности алгоритма

Тестирование может разрешить вопрос об устойчивости алгоритма и его чувствительности к возмущениям. Возмущения фундаментального решения, которые представляют собой отдельную проблему, были рассмотрены выше, остальные виды возмущений можно разделить на два основных типа: глобальные и локальные. Кроме того возмущения могут быть внесены в граничные и начальные (если таковые имеются) условия, в форму области и в источники членy. Возмущения, вносимые в коэффициенты дифференциального оператора, относятся к возмущениям фундаментального решения. В принципе, возмущения могут быть как сингулярные, так и регулярные, но ограничим данное рассмотрение практически важным случаем малых возмущений. Определим пороговую чувствительность метода к возмущению как величину возмущения, при которой начинает меняться суммарная погрешность решения тестовой задачи. Понятно, что определение величины пороговой чувствительности метода зависит не только от свойств метода, но и от способа определения погрешности, то есть набора точек, в которых погрешность определяется, и использования максимальной, среднеквадратичной или интегральной нормы погрешности. Пороговая чувствительность может существенно отличаться по величине в зависимости от тестовой задачи, для того, чтобы уменьшить разброс значений пороговой чувствительности, желательно использовать нормированные некоторым образом решения тестовых задач. Следует различать пороговую чувствительность к локальным и глобальным возмущениям. Чем меньше по модулю величина пороговой чувствительности, тем лучшим следует считать алгоритм. При анализе эффективности метода следует соотносить пороговую чувствительность с общей погрешностью метода. Пороговая чувствительность определяет необходимую для получения данной точности решения точность задания входных данных задачи, поэтому более эффективным следует считать алгоритм, который при достаточно больших значениях пороговой чувствительности обеспечивает более высокую точность (здесь имеется расхождение в определении лучшего, в смысле более чувствительного, и эффективного алгоритма). Кроме того, пороговая чувствительность по определенному



возмущению ограничивает величину ошибки, допустимой при аппроксимации соответствующей функции. Если пороговая чувствительность меньше, чем ошибка аппроксимации, то такой алгоритм следует считать неудачным. Если при определении локальной или глобальной пороговой чувствительности малому возмущению соответствует конечное изменение погрешности, то алгоритм является неустойчивым (это довольно редкое явление). Можно ввести количественный критерий чувствительности (соответственно устойчивости) алгоритма, как численно определенную производную суммарной погрешности по возмущению. Сформулируем шестое правило тестирования. Для нескольких тестовых задач должна быть определена пороговая чувствительность алгоритма, как и для суммарной погрешности метода, так и для внутренней погрешности метода, для малых локальных и глобальных возмущений граничных условий, формы области, источников членов и начальных условий, полученные результаты необходимо сравнить с ошибками, вносимыми соответствующими аппроксимациями. Если метод граничных элементов используется как часть вычислительного процесса, то параметры шагов внешнего вычислительного процесса должны подбираться так, чтобы изменения входных данных метода граничных элементов хотя бы в несколько раз превышали пороговую чувствительность метода граничных элементов по соответствующему возмущению.

Иногда при исследовании свойств численного метода помимо пороговой чувствительности целесообразно вводить также понятие пороговой корректности. Действительно пороговая чувствительность отражает только изменение суммарной погрешности, но не гарантирует, что такое изменение правильно, поскольку малое возмущение, взаимодействуя с разного рода источниками погрешности метода, может привести к некорректному изменению численного решения. Определим пороговую корректность метода к возмущению как величину возмущения, при которой суммарная погрешность решения тестовой задачи начинает меняться в соответствии с аналитическим решением. Очевидно, что определение пороговой корректности намного сложнее, чем определение пороговой чувствительности, поэтому используется оно намного реже, однако использование его в данной статье представляется целесообразным.

Наконец, рассмотрим вопрос об эффективности метода, то есть о затратах ресурсов ЭВМ, в первую очередь, машинного времени, для получения решения тестовой задачи с нужной точностью. Следует отметить, что эффективность алгоритма помимо свойств собственно алгоритма зависит еще и от типа ЭВМ, используемого программного обеспечения и стиля программирования. Несмотря на очевидный принцип: максимальную точность за минимальное время, в определений эффективности много субъективного, прежде всего в том, какое увеличение затрат ресурсов ЭВМ приемлемо для достижения заданного увеличения точности. Поэтому для определения эффективности невозможно сформулировать какое-либо строгое правило, и следует исходить из требований, которые сформулированы явно или неявно при постановке актуальной задачи, например, допустимые затраты машинного времени, возможность использования оперативной памяти и дискового пространства ЭВМ и так далее, а с другой стороны требований к точности искомого решения. Надо отметить,

что в конкретных областях вычислительной механики и прикладной математики в целом сформировались более устойчивые критерии эффективности алгоритмов, основанные на особенностях решаемых задач. Не вдаваясь в подробности, отметим, что метод граничных элементов высоко эффективен практически для всех линейных эллиптических задач. Упомянутые трудности в определении эффективности не снимаются при теоретическом определении эффективности, основанном на теоретической оценке количества арифметических операций, необходимых для выполнения расчета. Хотя такие оценки не зависят от конкретной программной реализации, зачастую они весьма далеки от результатов реальных расчетов вследствие использования очень грубых оценок. Тем не менее, для полноты тестирования алгоритма обязательно надо включить некоторую оценку его эффективности на различных сетках, или хотя бы указать затраты машинного времени.

В заключение еще раз хотелось бы подчеркнуть, что результаты тестирования не дают доказанных оценок точности и не могут гарантировать точность решения актуальной задачи, но тестирование на правильно подобранном наборе тестовых задач может служить основой для выработки практических рекомендаций и повышает достоверность результатов численного решения актуальной задачи.

## 7. Другие виды возмущений

Наибольший интерес при решении прикладных задач вызывают не возмущения фундаментальных решений, а возмущения формы границы области решения и граничных условий. В традиционных дифференциальных постановках анализ малых возмущений граничных условий в линейных задачах не составляет особого труда и сводится к простому разложению возмущения граничного условия в ряд по малому параметру с последующим применением обычной процедуры метода малого параметра. То есть, различия между применением асимптотических методов для анализа малых возмущений граничных условий в дифференциальной и интегральной формулировках невелики. В то же время, в дифференциальной формулировке крайне затруднительно анализировать возмущение формы области решения, а в интегральной формулировке, как будет показано ниже, такой анализ немногим сложнее анализа возмущения граничных условий.

Пусть заданы невозмущенное, в смысле возмущения границы (7.1) и возмущенное (7.2) граничные интегральные уравнения

$$c(x_0, y_0)u(x_0, y_0) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds(x, y) - \int_{\Gamma} u(x, y) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} ds(x, y), \quad (7.1)$$

$$c(x_0, y_0)u^*(x_0, y_0) = \int_{\gamma} \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial n^*} \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds^*(x, y) - \\ - \int_{\gamma} u^*(x, y) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n^*} ds^*(x, y). \quad (7.2)$$

Целью в данной задаче является установление связи между этими уравнениями, если возмущение известно и может быть представлено в виде

$$\varepsilon f(x, y),$$

где  $\varepsilon$  – некоторый малый параметр,  $f$  – некоторая, по меньшей мере, кусочно-непрерывная функция порядка  $O(1)$ .

Возмущения границы области решения и граничных условий могут быть включены в уравнение (7.2). Тогда представим функцию формы возмущенной границы в виде следующего разложения в ряд

$$h^*(t) = h^{*0}(t) + \varepsilon h^{*1}(t) + \varepsilon^2 h^{*2}(t) + \dots + \varepsilon^k h^{*k}(t) + \dots, \quad (7.3)$$

где  $t$  – внутренний параметр кривой (в простейшем случае он совпадает с длиной кривой  $s$ ). Аналогичным образом представим и граничные значения искомой функции и ее нормальной производной (возмущение которых может быть следствием возмущения границы или иметь иную, отдельную причину)

$$u^*(t) = u^{*0}(t) + \varepsilon u^{*1}(t) + \varepsilon^2 u^{*2}(t) + \dots + \varepsilon^k u^{*k}(t) + \dots, \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial u^*(t)}{\partial n} = \frac{\partial u^{*0}(t)}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial u^{*1}(t)}{\partial n} + \varepsilon^2 \frac{\partial u^{*2}(t)}{\partial n} + \dots + \varepsilon^k \frac{\partial u^{*k}(t)}{\partial n} + \dots. \quad (7.5)$$

После подстановки представлений (7.3)-(7.5) в уравнение (7.2) получим

$$c(x_0, y_0)(u^{*0}(x_0, y_0) + \varepsilon u^{*1}(x_0, y_0) + \varepsilon^2 u^{*2}(x_0, y_0) + \dots) = \\ = \int_{\gamma} \left\{ \frac{\partial(u^{*0}(x, y) + \varepsilon u^{*1}(x, y) + \varepsilon^2 u^{*2}(x, y) + \dots)}{\partial n} \varphi_0(x, x_0, y, y_0) \times \right. \\ \times (h^{*0}(x, y) + \varepsilon h^{*1}(x, y) + \varepsilon^2 h^{*2}(x, y) + \dots) \} ds(x, y) - \\ - \int_{\gamma} (u^{*0}(x, y) + \varepsilon u^{*1}(x, y) + \varepsilon^2 u^{*2}(x, y) + \dots) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} \times \\ \times (h^{*0}(x, y) + \varepsilon h^{*1}(x, y) + \varepsilon^2 h^{*2}(x, y) + \dots) ds(x, y). \quad (7.6)$$

Как и ранее, поскольку параметр  $\varepsilon$ , вообще говоря, произвольный, то чтобы уравнение (7.6) выполнялось при любом значении параметра  $\varepsilon$ , следует потребовать равенства коэффициентов при каждой степени параметра  $\varepsilon$ , в результате нулевое приближение имеет вид

$$c(x_0, y_0)u^{*0}(x_0, y_0) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^{*0}(x, y)}{\partial n} \varphi_0(x, x_0, y, y_0) h^{*0}(x, y) ds(x, y) - \\ - \int_{\Gamma} u^{*0}(x, y) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} h^{*0}(x, y) ds(x, y). \quad (7.7)$$

Интегрирование в уравнении (7.7) выполняется вдоль невозмущенной границы  $\Gamma$ , поскольку  $h^{*0}$  совпадает с функцией формы невозмущенной границы. Отметим, что нулевое приближение (7.7) фактически совпадает с невозмущенным уравнением (7.1). Первое приближение имеет вид

$$\begin{aligned} c(x_0, y_0)u^{*1}(x_0, y_0) = \\ = \int_{\gamma} \left( \frac{\partial u^{*0}(x, y)}{\partial n} h^{*1}(x, y) + \frac{\partial u^{*1}(x, y)}{\partial n} h^{*0}(x, y) \right) \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds(x, y) - \\ - \int_{\gamma} (u^{*0}(x, y) h^{*1}(x, y) + u^{*1}(x, y) h^{*0}(x, y)) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} ds(x, y). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Тут следует провести различия между возмущенной  $\gamma$  и невозмущенной  $\Gamma$  кривыми. После подстановки в интеграл функции формы указание этих кривых означает лишь изменение пределов интегрирования, и, если эти пределы совпадают, а это лишь вопрос техники описания кривой, то возмущенная и невозмущенная кривая в этом смысле уже неразличимы. Умножив и разделив подынтегральные выражения на  $h^{*0}$  и сгруппировав сомножители, можно формально перейти к интегрированию по невозмущенной кривой  $\Gamma$ .

Если  $u^{*0}$  известно, пусть даже приближенно, из решения уравнения (7.7), то соотношение (7.8) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно  $u^{*1}$  (если  $\frac{\partial u^{*1}}{\partial n}$  известно из граничных условий) или  $\frac{\partial u^{*1}}{\partial n}$  (если  $u^{*1}$  известно из граничных условий). Таким образом, уравнение (7.8) также подобно уравнению (7.1) (за исключением неоднородного члена).

Наконец, сформулируем  $m$ -ое уравнение:

$$\begin{aligned} c(x_0, y_0)u^{*m}(x_0, y_0) = \\ = \int_{\gamma} \left( \sum_{k=0}^m \frac{\partial u^{*k}(x, y)}{\partial n} h^{*m-k}(x, y) \right) \varphi_0(x, x_0, y, y_0) ds(x, y) - \\ - \int_{\gamma} \left( \sum_{k=0}^m (u^{*k}(x, y) h^{*m-k}(x, y)) \right) \frac{\partial \varphi_0(x, x_0, y, y_0)}{\partial n} ds(x, y). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Все заключения, сделанные для граничных интегральных уравнений (7.7) и (7.8) справедливы для граничного интегрального уравнения (7.9).

Очевидно, что случай малых возмущений граничных условий является частным случаем возмущения границы. Действительно, если граница области не была возмущена, то в разложение (7.3) все члены, начиная с члена первого порядка, равны 0, и это разложение вырождается в простое тождество. Однако разложения (7.4) и (7.5) формально никак не связаны с возмущением границы, поэтому в них может быть учтено возмущение граничных условий. Соответствующая последовательность граничных интегральных уравнений может быть получена из последовательности (7.7)-(7.9) занулением слагаемых, связанных с возмущением границы области решения.



### 8. Анализ полученных результатов

Основываясь на описанной выше методике тестирования программ, были произведены тестовые расчеты. В качестве тестовой была выбрана задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (8.1)$$

$$u|_{\Gamma} = g(x, y). \quad (8.2)$$

В качестве тестовых были выбраны следующие гармонические функции

$$u_1(x, y) = (x + y)/2, \quad (8.3)$$

$$u_2(x, y) = x^2 - y^2, \quad (8.4)$$

$$u_3(x, y) = e^{x-1} \cos y, \quad (8.5)$$

определенные в квадрате ( $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$ ) или круге единичного радиуса с центром в начале координат.

Очевидно, что полное исследование рассматриваемых алгоритмов по описанной выше схеме достаточно трудоемко и не может быть выполнено в ограниченных рамках настоящей работы. Например, при использовании метода граничных элементов нулевого порядка точности (то есть, аппроксимации известных и неизвестных величин на граничном элементе постоянными величинами), который применялся в данной работе, ни для одной из приведенных тестовых функций нельзя сформулировать тривиальную тестовую задачу. Определение внутренней погрешности метода также не представляется необходимым, хотя для определенных случаев глобальных возмущений оно может быть выполнено без труда.

Ситуация осложняется тем, что, если для глобального возмущения тестовая функция подбирается элементарно для любой формы области, например, в виде

$$u(x, y) = u_i + \varepsilon u_j, \quad (8.6)$$

где функции в правой части (8.6) определены соотношениями (8.3)-(8.5), то для локального возмущения граничных условий тестовую задачу можно построить только в области, для которой известны достаточно простые выражения функций Грина, то есть, круга, полосы, полуполосы. Что же касается возмущения формы области, то подобрать в этом случае корректную тестовую задачу достаточно сложно из-за необходимости определять и возмущения граничных условий.

Все, приведенные ниже, расчеты были выполнены в единичном квадрате с использованием сетки  $50 \times 50$  граничных элементов нулевого порядка, при этом максимальная погрешность метода для основной тестовой функции, определенной (8.5), равномерно расположенных узлах сетки внутри области составила  $0.68023800E-05$ , а среднеквадратичная погрешность  $0.23669210E-07$ .

В таблице 1 приведены результаты расчетов при помощи предложенного метода тестовой задачи Дирихле для функции (8.6) в случае глобального возмущения граничных условий. В этом случае отклик на возмущение может быть определен аналитически. Очевидно, что приведенные величины ошибок отклика соответствуют теоретически ожидаемым значениям. Как только величина возмущения оказывается сравнимой с погрешностью метода

граничных элементов, использовавшегося для решения краевых задач, относительная ошибка определения отклика начинает резко возрастать. В таблицах 2 и 3 приведены результаты расчетов локальных возмущений граничных условий для классического метода граничных элементов и алгоритма, предложенного в данной статье. Очевидно, что предложенный алгоритм оказался чувствительнее к возмущениям.

Табл. 1. Глобальное возмущение граничных условий. Расчет произведен комбинированным методом малого параметра (учет первого приближения) и граничных элементов.

| Возмущение  | Максимум отклика | Среднеквадратичный отклик | Максимум ошибки отклика | Среднеквадратичная ошибка отклика |
|-------------|------------------|---------------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| .100000E-01 | .2662778E-01     | .3169073E-03              | .1472421E-05            | .7365684E-08                      |
| .999999E-03 | .2662659E-02     | .3169046E-04              | .1393026E-05            | .7268259E-08                      |
| .999999E-04 | .2665520E-03     | .3169177E-05              | .1502704E-05            | .7467075E-08                      |
| .999999E-05 | .2694130E-04     | .3172049E-06              | .1623745E-05            | .7217615E-08                      |
| .999999E-06 | .3337860E-05     | .3232388E-07              | .1187220E-05            | .5772337E-08                      |
| .999999E-07 | .1072884E-05     | .5991153E-08              | .9698707E-06            | .4077066E-08                      |
| .999999E-08 | .9536743E-06     | .4546245E-08              | .9397531E-06            | .4327189E-08                      |

Табл. 2. Локальное возмущение граничных условий. Расчет произведен методом граничных элементов.

| Возмущение    | Максимум отклика | Среднеквадратичный отклик |
|---------------|------------------|---------------------------|
| .10000000E-01 | .25033280E-02    | .22570830E-05             |
| .99999990E-03 | .25025760E-03    | .22577660E-06             |
| .99999990E-04 | .24951990E-04    | .23158120E-07             |
| .99999990E-05 | .24735930E-05    | .56874050E-08             |
| .99999990E-06 | .95367430E-06    | .49376350E-08             |
| .99999990E-07 | .83446500E-06    | .44488610E-08             |
| .99999990E-09 | .00000000        | .00000000                 |

Табл. 3. Локальное возмущение граничных условий. Расчет произведен комбинированным методом малого параметра (учет первого приближения) и граничных элементов.

| Возмущение    | Максимум отклика | Среднеквадратичный отклик |
|---------------|------------------|---------------------------|
| .10000000E-01 | .25033360E-02    | .22570510E-05             |
| .99999990E-03 | .25033370E-03    | .22570500E-06             |
| .99999990E-05 | .25033360E-05    | .22570480E-08             |
| .99999990E-06 | .28370880E-06    | .29762680E-09             |
| .99999990E-07 | .25033370E-07    | .22570560E-10             |
| .99999990E-08 | .25033380E-08    | .22570530E-11             |

Таблицы 4 и 5 содержат аналогичные результаты для случая возмущения границы области решения. Как и ранее, предложенный алгоритм оказался чувствительнее к возмущениям.

Табл.4. Локальное возмущение границы. Расчет произведен методом граничных элементов.

| Возмущение    | Максимум отклика | Среднеквадратичный отклик |
|---------------|------------------|---------------------------|
| .10000000E-01 | .78861560E-02    | .78465500E-05             |
| .99999990E-03 | .29973690E-03    | .29012160E-06             |
| .99999990E-04 | .23178760E-04    | .33003970E-07             |
| .99999990E-05 | .70855020E-05    | .23870020E-07             |
| .99999990E-06 | .68880620E-05    | .23678410E-07             |
| .99999990E-07 | .68284570E-05    | .23644730E-07             |

Табл.5. Локальное возмущение границы. Расчет произведен комбинированным методом малого параметра (учет первого приближения) и граничных элементов.

| Возмущение    | Максимум отклика | Среднеквадратичный отклик |
|---------------|------------------|---------------------------|
| .10000000E-01 | .71920044E-02    | .72663500E-05             |
| .99999990E-03 | .28376910E-03    | .28333180E-06             |
| .99999990E-04 | .23447680E-04    | .33310090E-07             |
| .99999990E-05 | .69143420E-05    | .13956750E-07             |
| .99999990E-06 | .11147700E-05    | .78645340E-08             |
| .99999990E-07 | .68145870E-06    | .69585622E-08             |

## 9. Выводы

В настоящей работе предложен комбинированный алгоритм методов малого параметра и граничных элементов. Выше показана эффективность применения предложенного подхода для анализа малых возмущений. Показано, что точность, достигаемая при помощи предложенного алгоритма намного выше, нежели точность классического метода граничных элементов и достаточна для многих практических целей. Таким образом, данная работа имеет методическое значение для проведения инженерных расчетов.

Научная новизна данной работы заключается в предложенном подходе к численному исследованию малых возмущений и других малых эффектов.

Перспективы развития данной работы, как и возможности использования ее результатов, достаточно очевидны, и заключаются в применении предложенного подхода для построения эффективных расчетных схем с их дальнейшим применением в различных областях науки и техники. В первую очередь результаты настоящей работы представляют интерес для построения численных алгоритмов гидродинамики и тепломассообмена в многофазных средах, механики композитных материалов, микроэлектроники, однако, учитывая универсальный характер предложенного подхода, он может быть использован и в других областях, например, микробиологии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред, - М.: Наука, 1987. – ч. 1 – 464с., ч. 2 – 360с.
2. Белоцерковский С. М., Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров П. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел, - М.: Наука, 1988. – 309с.
3. Белоцерковский С. М., Гиневский А. С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей, - М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 1995. – 368с.
4. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков, - М.: Мир, 1990. – 660 с.
5. Yevdokymov D. V. Boundary element method application to some multiphase flows // Continuum Models and Discrete Systems. NATO Science Series. II. Mathematics, Physics and Chemistry – Vol. 158. D.J. Bergman, E. Inan (Ed.). Kluwer Academic Publishers, 2004 – P. 181-182
6. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики, том 1. - М.: Изд-во иностранной лит., 1958. – 930 с., том 2. - М.: Изд-во иностранной лит., 1960. – 886 с.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 576с.
8. Бабенко К. И. Основы численного анализа, - М.: Наука, 1986. – 744с..
9. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках, - М.: Мир, 1984. – 494с.
10. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов, - М.: Мир, 1987. – 524с.
11. Евдокимов Д. В. Об одном варианте регулярного метода граничных элементов. // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. Випуск 2. Том 1. – Днепропетровск, 1999. – С. 150-156.
12. Бевза Э. К., Евдокимов Д. В. Особенности применения комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения плоских внешних задач гидродинамики // Труды X Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» - Херсон, 2001 – С. 51-55.
13. Yevdokymov D. V. Comparison of Numerical Method Sensitivity by Numerical Experiment // Annual Scientific Conference GAMM 2004, Dresden 2004. – p. 249.
14. Ван Тассел Д. Стиль, разработка, эффективность, отладка и испытание программ, - М.: Мир, 1985. – 332с.



## К вопросу о стратегическом планировании качества образования

М. В. Владимирова, А. В. Спиваковский  
*Херсонский государственный университет*

The purpose of the article is the analysis of the data for determining problems and the methods of the modelling of the university activities strategic planning mechanism in order to improve the quality of education. The general formulation of the problem of the quality control of bachelors and masters training at University, the current state of the object University and determining impact for changing the state of the object has been considered.

### Введение

Современная экономика требует от любого предприятия, в том числе и от учебных заведений, своевременной реакции на изменение внешней среды. Без использования информационных технологий невозможно быстро выявлять необходимую информацию и обрабатывать ее для правильного принятия решений.

Краеугольный камень существования любого ВУЗа - сочетание учебных и научных целей. А главная учебная цель - постоянное усовершенствование качества обучения при заданных ресурсах. Для достижения поставленной цели необходимо разработать и совершенствовать две главные составляющие:

- определение задач и методов моделирования механизмов стратегического планирования деятельности ВУЗа по улучшению качества обучения;
- построение модели управления деятельностью ВУЗа в соответствии с разработанным планом.

Учитывая глобальность поставленных задач, в данной статье остановимся только на некоторых вопросах стратегического планирования.

Стратегия есть определение основных долгосрочных целей и задач, принятие курса действий и распределение ресурсов, необходимых для выполнения поставленных целей. Стратегическая альтернатива определяется путем сопоставления возможностей и ресурсов с учетом приемлемого уровня риска.

Таким образом, в результате стратегического планирования должны быть решены следующие задачи:

- выбор приоритетных направлений деятельности, которые нужно развивать для достижения в будущем основной цели;
- методы, с помощью которых можно наиболее эффективно прийти к желаемым результатам по каждому из направлений;
- прогнозирование затрат по каждому из направлений;
- прогнозируемая отдача по направлениям;
- прогнозирование рисков и разработка стратегии по их минимизации;
- построение модели организации учебного процесса в университетах;

выявление объектов внешней среды и построение имитационной модели взаимодействия Университета с этими объектами.

#### Постановка задачи в общем виде

Пусть  $x_t$  - состояние объекта в заданный момент времени;

$u_t$  - управление, возникающее на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$ .

Тогда эволюция объекта управления описывается:

$$x_{t+1} = X(x_t, u_t, r_t, s_t, q_t), \quad (1)$$

где  $X(\cdot)$  - некоторый оператор;

$r_t$  - выявленные помехи на момент времени  $t_k$ ;

$s_t$  - помехи, неучтенные в моделях;

$q_t$  - параметры объекта.

Очевидно, что для того, чтобы состояние объекта в момент времени  $t+1$  приняло значение  $x_{t+1}$  необходимо к моменту  $t_k$  определить, какие помехи  $r_t$  и  $s_t$  будут действовать на объект на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$  и какие управляющие воздействия не обходимо предпринять, чтобы объект достиг требуемых параметров, описывающих его функционирование. Задачей планирования на дискретных интервалах времени является построение плановой траектории на период  $[t_k, t_{k+1}]$  в соответствии с заданными целями, с учетом ресурсов и помех со стороны внешней среды. Необходимо, чтобы система планирования была снабжена системами учета, анализа и прогнозирования. Процесс прогнозирования в общем виде описывается сенсорным уравнением:

$$Y_k = Y(x_t, x_{t+1}, u_t, r_{t+1}, s_t),$$

Где  $Y(\cdot)$  - оператор, отражающий работу задач прогнозирования.

В результате работы оператора  $Y(\cdot)$  формируется плановая траектория на  $k+1$  период функционирования. Расчет плановой траектории, осуществляемый системой планирования, задается уравнением:

$$x_{t+1} = P(Y_k, G^*, w_{k+1}^n),$$

где  $P(\cdot)$  - оператор расчета плановой траектории;

$Y_k$  - данные, полученные в результате работы системы учета, анализа и прогнозирования;

$w_{k+1}^n$  - параметры модели планирования;

$G^*$  - набор показателей, характеризующих план.

#### Модель взаимодействия объектов внешней среды с объектом Университет на настоящий момент

Рассмотрим одну из задач, решаемых в рамках стратегического планирования - выявление объектов внешней среды и построение модели взаимодействия Вуза с этими объектами.

Итак,  $x_t$  - состояние объекта (Университета) в момент времени  $t$ . Пусть  $t=t_0$ , где  $t_0$  - настоящий момент. Пусть  $z_k$  - объекты внешней среды. Выделим следующие объекты:

$z_1$  - МОНУ;

$z_2$  - гос. институты (Центры занятости управления образования и науки, областная администрация);

$z_3$  – рынок труда;

$z_4$  – независимые агентства;

$z_5$  – средние учебные заведения.

Перечислим основные ролевые функции каждого объекта.

МОНУ. Формирование государственного заказа, финансирование, регулирование, контроль, аккредитация, лицензирование деятельности университетов, печать диплома.

Государственные институты. Трудоустройство, контроль за соблюдением законности, формирование групп для переподготовки и повышения квалификации.

Рынок труда. Производство высокотехнологических продуктов, в структуре которых преобладают низкая себестоимость материальных ресурсов;

Независимые агентства. Рейтинг, публикация, независимая оценка деятельности университетов, трудоустройство.

Университеты. Социальная, поступление, обучение, оценивание, выдача дипломов, распределение, переподготовка и повышение квалификации, селекция.

Представим каждый из объектов как вершину графа, ребра - взаимодействие между объектами. Поскольку в настоящий момент взаимодействие объектов неравнозначно, выделим три типа связей – слабые, средние, сильные. Получаем ориентированный граф с весами ребер  $H = \{h_i, i=1..3\}$ . На рисунке 1 представлены основные игроки внешней среды  $\{x_i, z_k, k=1..5\}$  и связи между ними.

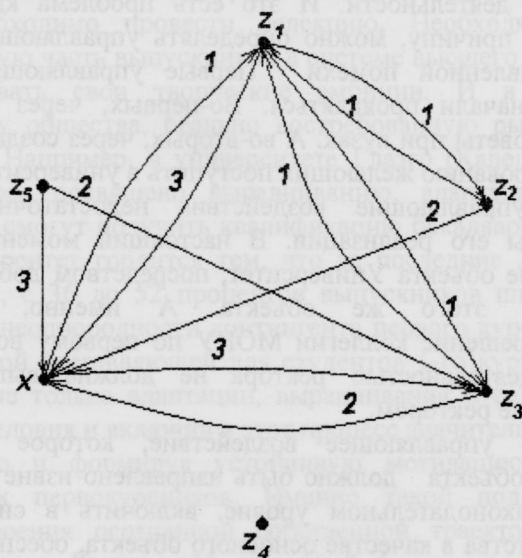


Рис.1 Взаимодействие объектов внешней среды с объектом Университет

Первичный анализ представленного на рис. 1 графа, а именно: наличие изолированных вершин, большой разрыв между весами из  $i$ -ой в  $j$ -ую вершину и из  $j$ -ой в  $i$ -ую, требует проведения более детального анализа взаимодействия

объектов и позволяет выявить и помехи  $g_t$  и параметры управления  $u_t$ , возникающее на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$ , связанные с взаимодействием объекта Университет с внешней средой.

Рассмотрим несколько примеров.

#### Пример 1.

Слабая обратная (1) и сильная прямая (3) связи МОНУ и Университетов говорит о фактическом отсутствии автономии Университета и вместе с тем возможностью ректора единолично управлять учреждением без особой оглядки на мнение Ученого Совета. Такая ситуация на сегодняшний момент устраивает элиту МОНУ и Университетов, поскольку ректор реально зависит только от мнения Министра. При такой схеме взаимодействия, смена «хозяина» университета происходит тогда и только тогда, когда волюнтаризм принимаемых личных решений руководителя становится понятным всем, включая министерских чиновников

#### Пример 2.

Проведем анализ отсутствия на момент времени  $t_0$  связей между вершиной  $z_4$  («Независимые агентства») и другими объектами. Очевидно, что хотя бы между  $z_4$  и  $z_1$  (МОНУ),  $z_4$  и  $x$  (Университет) связь должна существовать.

На сегодняшний момент отсутствие связи может быть обусловлено несколькими причинами. Одна из причин (помех), на наш взгляд, заключается в том, что МОНУ на сегодняшний день не торопится делегировать часть своих, сформированных еще в советское время, полномочий публичным структурам, а университеты не хотят подвергаться процедурам открытой, честной, публичной экспертизы своей деятельности. И это есть проблема качества подготовки студентов. А зная причину, можно определять управляющее воздействие для минимизации выявленной помехи. Первые управляющие воздействия со стороны МОНУ начали проявляться. Во-первых, через намерение создать наблюдательные советы при вузах. А во-вторых, через создание национального агентства по тестированию желающих поступить в университеты.

Но выявить управляющие воздействия недостаточно, необходимо и определить методы его реализации. В настоящий момент МОНУ пытается изменить состояние объекта Университет, посредством добавления еще одной функциональности этого же объекта. А именно, если посмотреть соответствующее решение коллегии МОНУ по первому вопросу, выполнение наблюдения за деятельностью ректора не должна выполнять структура, назначаемая этим же ректором.

Очевидно, что управляющее воздействие, которое должно изменить поведение самого объекта должно быть направлено извне и нам видится, что необходимо на законодательном уровне, включить в систему образования Независимые агентства в качестве основного объекта, обеспечивающего баланс в качестве подготовки студентов, передав им часть полномочий.

Связь между объектами может появиться и за счет изменения (добавления) функциональности двух связываемых объектов.

Рассмотрим такую функциональность, как лицензирование деятельности образовательных учреждений МОНУ. Действительно, это ролевая функция должна остаться за МОНУ с акцентом на исследование ресурсов университета



(материально-технических, кадровых, организационных и т.д.). Но оставлять этот направление без обратной связи, так как это происходит сейчас, означает не только утрату контроля качества, но и реальной связи с потребностями общества. Поэтому, на наш взгляд, очень важно делегировать объекту Государственные институты функцию лицензирования профессиональной деятельности выпускников. Таким образом, наличие диплома должно являться только необходимым условием для осуществления профессиональной деятельности. Выпускнику вуза необходимо будет получать еще и лицензию. Для ее получения выпускнику надо будет проходить тестирование в специально созданных государством комиссиях. И если система тестирования выявляет определенное количество, например 5, рекламаций по данной специальности из данного вуза, то МОНУ обязано аннулировать аккредитацию этого вуза на подготовку специалистов по данной специальности. Таким образом, система управления качеством замыкается в рамках контроля компетенций бакалавров и магистров независимыми объектами. Аналогично можно принимать рекламации от предприятий по специалистам, где лицензирования профессиональной деятельности нецелесообразно.

### **Пример 3.**

Обратим внимание на сильную связь между объектом Школа и Университет и отсутствием обратной связи.

Система высшего образования, помимо образовательной функции, играет существенную социальную роль. Это буфер между выпускниками школ и рынком труда. Не может реальный рынок труда одномоментно переварить 486 тысяч выпускников школ, имеющих приблизительно равные профессиональные компетенции. Необходимо провести селекцию. Необходимо «растворить» наиболее талантливую часть выпускников в системе высшего образования. Дать им шанс реализовать свои творческие амбиции. И в конечном итоге сформировать элиту общества, реально востребованную рынком труда через высокую зарплату. Например, в университете Глазго (Каледония) фактически обучение на 1-курсе посвящено выравниванию, адаптации и отбору тех студентов, которые смогут получить квалификацию бакалавра на последующих курсах. Этот университет гордится тем, что за последние 20 лет контингент существенно вырос, с 36 до 52 процентов выпускников школ. Да, при этом возникла проблема неоднородности контингента первого курса. Однако, сделав акцент на социальной составляющей для студентов 1-го курса, администрация решает проблемы не только адаптации, выравнивания и селекции, обеспечив соответствующие условия и включив в этот процесс значительное число лучших учителей школ, но и формируя устойчивую мотивацию образовательной деятельности своих первокурсников. Именно такой подход обеспечивает возможность построения осознанной собственной траектории обучения на старших курсах. Кроме Киево – Могилянской Академии, которая реализует такой подход только в первом семестре, я не знаю ни одного украинского вуза, целенаправленно реализующего свою социальную селективные роли.

### Предлагаемая модель взаимодействия объектов внешней среды с объектом Университет

Для того чтобы принять правильное решение, необходимо проанализировать функциональности каждого объекта с учетом его состояния на текущий момент времени, построить имитационную модель взаимодействия объектов и модель изменения состояния самого объекта для достижения поставленной цели. В данной статье мы сделали общую постановку задачи и указали возможные пути анализа и изменения текущей ситуации. Но уже предварительный анализ позволяет предложить другую схему взаимодействия, которая на наш взгляд, позволит не только улучшить систему управления качеством подготовки студентов, но и приблизить украинскую образовательную систему к европейской или американской.

В результате проведенного анализа предлагаются следующие изменения.

Первый тип изменений касается взаимодействия объектов: в графе отсутствуют изолированные вершины, появились новые ребра. Влияние одного объекта на другой имеет обратную связь и эта связь имеет то же весовое значение. На рисунке 2 представлен неориентированный граф, отражающий желательное взаимодействие объектов внешней среды.

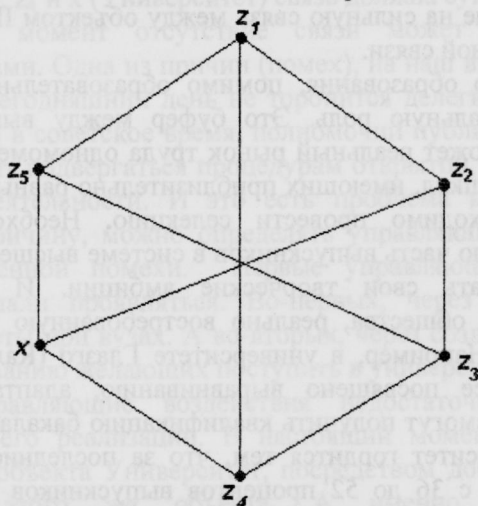


Рис.2. Схема взаимодействия объектов предполагаемой образовательной системы Украины.

Второй тип изменений касается изменений ролевых функций участников.

Перечислим предлагаемые ролевые функции участников. Жирным шрифтом выделены новые роли, роли которые переходят другим объектам зачеркнуты.

**МОНУ.** Формирование государственного заказа, финансирование, регулирование, контроль, аккредитация, лицензирование деятельности университетов, печать диплома.

Государственные институты. Трудоустройство, контроль за соблюдением законности, формирование групп для переподготовки и повышения квалификации, **выдача лицензий на осуществление профессиональной деятельности, рекламации В МОНУ.**

Рынок труда. Производство высокотехнологических продуктов, в структуре которых преобладают низкая себестоимость материальных ресурсов, **рекламации В МОНУ.**

Независимые агентства. Рейтинг, публикация, независимая оценка деятельности университетов, трудоустройство, **выдача лицензий на осуществление профессиональной деятельности.**

Университеты. Социальная, поступление, обучение, оценивание, **печать дипломов, выдача дипломов, помощь в нахождении рабочего места, переподготовка и повышение квалификации, селекция.**

### Заключение

Необходимо понять, что срочно требуется серьезный, капитальный ремонт всего здания системы образования Украины и переход к современным моделям, обеспечивающим наличие адекватной системы управления качеством подготовки будущего нашей страны. И делать это не нужно не эпизодически, латая прорехи, а, используя системный подход, учитывая внутреннюю структуру высшей школы на данный момент, взаимодействие ее с внешней средой, определить задачи и методы моделирования механизмов стратегического планирования деятельности ВУЗа, разработав модели управления деятельностью ВУЗа в соответствии с разработанным планом.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Співаковський О.В., Глущенко О.О., Кудас Н.А., Федорова Я.Б., Чаловська Н.М., Щедролосьєв Д.С. Інформаційні технології в управлінні вищими навчальними закладами: Методичний посібник. – Херсон: Айлант, 2005. – 152 с.
2. Гуржий А.Н., Кривцов В.С., Кулик А.С., Мирная Е.В., Нечипорук Н.В., Чухрай А.Г. Информационно-аналитические модели управления техническими высшими учебными заведениями. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьковский авиационный институт», 2004. – 387 с.
3. Рішення колегії Міністерства освіти і науки України від 24 березня 2004 року, Протокол № 3/2 -4.
4. Михайлов В.С. Теорія управління.- К.: Вища школа, Головное издательство, 1988.- 312 с.: 80 ил.
5. Терехов В.А., Куценко В.А., Сиднев С.П. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении.- Киев: Вища школа. Головное издательство, 1984.- 231 с.: ил.
6. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. – М.: Наука, 1978. – 270 с.