УДК 519.210

В. К. ДУБОВОЙ

ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШУРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. II.[1]

§ 5. Круги Вейля в задаче Шура

Дадим теперь геометрическое истолкование совокупности решений проблемы Шура.

Как было отмечено в § 3 ((3.5), (3.6)), множество всех решений проблемы Шура храктеризуется неравенством $[\theta(\zeta),\ I]\, B_n^{-1}(\zeta)\times$ $\times\, jB_n^{*-1}(\zeta)\begin{bmatrix}\theta^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix}\geqslant 0$ **(5.1)** или $[\theta^*(\zeta),\ I]\,\tilde{B}_n^{*-1}(\zeta)\,\tilde{j}\tilde{B}_n^{-1}(\zeta)\times$ $\times\begin{bmatrix}\theta(\zeta)\\ I\end{bmatrix}\geqslant 0$ **(5.2)**, где $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta)$ определяются соответственно по формулам (3.2) и (3.4). Введем обозначения

$$W_n = B_n^{-1}(\zeta)\, jB_n^{*-1}(\zeta)\ \ \mathbf{(5.3)},\quad \tilde{W}_n = \tilde{B}_n^{*-1}(\zeta)\,\tilde{j}\tilde{B}_n^{-1}(\zeta)\ \ \mathbf{(5.4)}$$

и будем, следуя работе [2], называть матрицы W_n и $\tilde{W}_n$ матрицами Вейля. В соответствии с (3.2) и (3.4) разобьем матрицы Вейля на блоки

$$W_n = \begin{pmatrix}-R_n & S_n^*\\ S_n & -T_n\end{pmatrix},\quad \tilde{W}_n = \begin{pmatrix}-\tilde{R}_n & \tilde{S}_n\\ \tilde{S}_n^* & -\tilde{T}_n\end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Из (5.3) и (5.4) с учетом (3.2) и (3.4) находим

$$R_n = I_q + (1-|\zeta|^2)\,\Lambda_{q,n}(\zeta)\,C_n^*A_n^{-1}C_n\Lambda_{q,n}^*(\zeta); \tag{5.6}$$

$$\tilde{R}_n = I_p + \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta|^2}\,\Lambda_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)A_n^{-1}\Lambda_{p,n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right), \tag{5.7}$$

где, как и ранее $A_n=(I-C_nC_n^*)^{-1}$. Из (5.6) и (5.7) следует, что в каждой фиксированной точке ζ_0 открытого единичного круга (отличной от нуля для $\tilde{R}_n$) матрицы R_n и $\tilde{R}_n$ строго положительны: $R_n\geqslant I$, $\tilde{R}_n > I$ **(5.8)**.

Из вида (3.2) и (3.4) матриц-функций $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta)$ следует $\tilde{B}_n(\zeta)=J^{-1}jB_n^{-1}(\zeta)jJ$, $J=\begin{pmatrix}0 & I_q\\ I_p & 0\end{pmatrix}$. Отсюда находим $\tilde{W}_n^{-1}=-J^{-1}\times$ $\times\, jW_njJ$.

Переходя к блочному виду (5.5), получаем

$$-\begin{pmatrix}T_n & S_n\\ S_n^* & R_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{R}_n & -\tilde{S}_n\\ -\tilde{S}_n^* & \tilde{T}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

[1] Первая часть статьи опубликована в сб. «Теория функций, функцион. анализ и их прил.», вып. 37.

Откуда, учитывая (5.8), приходим к равенствам

$$R_n^{-1}=\tilde{S}_n^*\tilde{R}_n^{-1}\tilde{S}_n-\tilde{T}_n \quad \mathbf{(5.10)}; \quad \tilde{R}_n^{-1}=S_nR_n^{-1}S_n^*-T_n \quad \mathbf{(5.11)},$$

$$\tilde{R}_n^{-1}\tilde{S}_n=S_nR_n^{-1}. \tag{5.12}$$

В данном случае выполнены все условия, необходимые для построения теории Вейля [2], а именно:

1) каждая матрица W_n представляется в виде $W_n=B_n^{-1}(\zeta)\times \times jB_n^{*-1}(\zeta)=\begin{pmatrix}-R_n & S_n^*\\ S_n & -T_n\end{pmatrix}$, где $B_n(\zeta)$ — неособенная j-растягивающая (при $|\zeta|<1$) матрица-функция;

2) j-формы $j-B_n^{-1}(\zeta)jB_n^{*-1}(\zeta)$ монотонно не убывают с возрастанием n;

3) блок R_n неособенный.

Поэтому, как и в работе [2], могут быть доказаны следующие утверждения:

Теорема 5.1. *Совокупность матриц $\theta\in L_{p,q}$, удовлетворяющих неравенству $[\theta, I]W_n\begin{bmatrix}\theta^*\\ I\end{bmatrix}\geqslant 0$* **(5.13)**, *образует матричный круг K_n: $\theta=C_n+\rho_{g,n}^{\frac{1}{2}}u\rho_{d,n}^{\frac{1}{2}}$, $uu^*\leqslant I$, $u\in L_{p,q}$, с центром $C_n=S_nR_n^{-1}$, правым радиусом $\rho_{d,n}=R_n^{-1}$ и левым радиусом $\rho_{g,n}=S_nR_n^{-1}S_n^*-T_n$.*

Теорема 5.2. *С возрастанием параметра n круги K_n вкладываются друг в друга, правый и левый радиусы монотонно убывают.*

Здесь круг Вейля (5.13) описан в терминах матрицы W_n. Аналогичное описание может быть проведено в терминах матрицы $\tilde{W}_n$.

Полученные результаты позволяют поставить в соответствие матрицы-функции $\theta(\zeta)\in S_{p,q}$ $\theta(\zeta)=c_0+c_1\zeta+c_2\zeta^2+\ldots+c_n\zeta^n+\ldots$, для которой $\mathrm{A}_n>0$, $n=0, 1, 2, \ldots$, в каждой точке $\zeta\in D$ последовательность вложенных друг в друга кругов Вейля $K_0\subset K_1\subset\ldots\subset K_n\subset\ldots$ Устремляя $n\to\infty$, приходим к предельному кругу Вейля

$$\theta=C_\infty+\rho_{g,\infty}^{\frac{1}{2}}u\rho_{d,\infty}^{\frac{1}{2}},\ uu^*\leqslant I,\ u\in L_{p,q}, \tag{5.14}$$

где $C_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}C_n$, $\rho_{g,\infty}=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{g,n}$, $\rho_{d,\infty}=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{d,n}$. Отметим, что в данном случае $\rho_{g,\infty}=0$ **(5.15)**. Действительно, из теоремы 5.1, равенств (5.7) и (5.11) находим

$$\rho_{g,n}^{-1}(\zeta)=I_p+\frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta|^2}\Lambda_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)A_n^{-1}\Lambda_{p,n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right). \tag{5.16}$$

Так как $A_n^{-1}\geqslant I$, то

$$\rho_{g,n}^{-1}(\zeta)\geqslant I_p+\frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta|^2}\Lambda_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\Lambda_{p,n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)=\frac{1}{|\zeta|^{2n+2}}I_p.$$

Откуда следует (5.15). Это полностью согласуется с тем, что «бесконечная» задача Шура имеет единственное решение.

Предельный круг Вейля K_∞ стягивается в точку в силу обращения в нуль своего левого радиуса. Но специфика задачи Шура, рассматриваемой в матричном случае, характерна тем, что наряду с левым радиусом $\rho_{g,\infty} = 0$ предельный круг Вейля K_∞ характеризуется и своим правым радиусом $\rho_{d,\infty}$, который, как показывают дальнейшие рассуждения, отличен от нуля.

§ 6. Исследование ранга радиусов предельного круга Вейля

1. Из теоремы 5.1 и (5.6) имеем

$$\rho_{d,n}^{-1}(\zeta) = I_q + (1-|\zeta|^2)\Lambda_{q,n}(\zeta)C_n^* A_n^{-1} C_n \Lambda_{q,n}^*(\zeta). \quad (6.1)$$

Отсюда, учитывая, что $C_n^* A_n^{-1} C_n = (I - C_n^* C_n) - I$, находим

$$\rho_{d,n}^{-1}(\zeta) = |\zeta|^{2n+2} I_q + (1-|\zeta|^2)\Lambda_{q,n}(\zeta)(I - C_n^* C_n)^{-1}\Lambda_{q,n}^*(\zeta). \quad (6.2)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на установлении связи между радиусами кругов Вейля для функций $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ и $\hat{\theta}(\zeta) = \theta^*(\bar{\zeta}) \in S_{q,p}$. Поэтому там, где это будет необходимо, радиусы кругов Вейля для функции $\theta(\zeta)$ будем обозначать $\rho_{g,n}(\zeta,\theta)$ и $\rho_{d,n}(\zeta,\theta)$.

Определение. *Матрицу-функцию* $r_{g,n}(\zeta,\theta) = (1/|\zeta|^{2n+2}) \times \rho_{g,n}(\zeta,\theta)$, $0 < |\zeta| < 1$ **(6.3)**, *будем называть нормированным левым радиусом.*

Введенное определение оправдывает следующая

Теорема 6.1. *Имеют место равенства* $\rho_{d,n}(\zeta,\hat{\theta}) = r_{g,n}(\bar{\zeta},\theta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ **(6.4)**

Доказательство. Если $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \ldots + c_n\zeta^n + \ldots$, то $\hat{\theta}(\zeta) = c_0^* + c_1^*\zeta + \ldots + c_n^*\zeta^n + \ldots$ Поэтому информационные блоки для функции $\hat{\theta}(\zeta)$ имеют вид $A_n = I - \hat{C}_n \hat{C}_n^*$,

$$\text{где } \hat{C}_n = \begin{pmatrix} c_0^* & & & \\ c_1^* & c_0^* & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \\ c_n^* & c_{n-1}^* & \ldots & c_0^* \end{pmatrix}.$$

Если $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$, то, очевидно,

$$\hat{C}_n = U_q C_n^* U_p, \quad U_p = \begin{pmatrix} 0 & & I_p \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} I_p & \\ I_p & & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Из (6.2), учитывая (6.5), получаем $\rho_{d,n}^{-1}(\zeta,\hat{\theta}) = |\zeta|^{2n+2} I_p + (1-|\zeta|^2)\Lambda_{p,n}(\zeta) U_p (I - C_n C_n^*)^{-1} U_p \Lambda_{p,n}^*(\zeta)$. Так как $1/\zeta^n \times$

$\times \Lambda_{p,n}(\zeta) U_p = \Lambda_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, то $1/|\zeta|^{2n+2} \rho_{d,n}^{-1}(\zeta, \hat{\theta}) = I_p + (1-|\zeta|)^2/|\zeta|^2 \times$ $\times \Lambda_{p,n}(1/\zeta) A_n^{-1} \overset{*}{\Lambda}_{p,n}(1/\zeta)$. Сравнивая с (5.16), находим $\frac{1}{|\zeta|^{2n+2}} \times$ $\times \rho_{d,n}^{-1}(\zeta, \hat{\theta}) = \rho_{g,n}^{-1}(\bar{\zeta}, \theta)$. Учитывая теперь (6.3), приходим к (6.4).

Равенство (6.4) позволяет доопределить функцию $r_{g,n}(\zeta, \theta)$ в точке $\zeta = 0$, полагая $r_{g,n}(0, \theta) = \rho_{d,n}(0, \hat{\theta})$. Кроме того, из доказанной теоремы следует, что существует предел $r_{g,\infty}(\zeta, \theta) = \lim\limits_{n\to\infty} r_{g,n}(\zeta, \theta)$, $|\zeta| < 1$; при этом имеет место равенство $\rho_{d,\infty}(\zeta, \hat{\theta}) = r_{g,\infty}(\bar{\zeta}, \theta)$, $|\zeta| < 1$ **(6.6)**. Матрицу-функцию $r_{g,\infty}(\zeta, \theta)$ будем называть нормированным левым радиусом предельного круга Вейля.

Теорема 6.2. *Справедливы равенства* $\det \rho_{d,n}(\zeta, \theta) = \det r_{g,n}(\zeta, \theta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ **(6.7)**.

Доказательство. Из (5.5) следует, что матрицу Вейля W_n при помощи треугольного преобразования можно привести к диагональному виду

$$W_n = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ -S_n R_n^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_n & 0 \\ 0 & S_n R_n^{-1} S_n^* - T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & -R_n^{-1} S_n^* \\ 0 & I_p \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Так как $\rho_{d,n}(\zeta, \theta) = R_n^{-1}$, $\rho_{g,n}(\zeta, \theta) = S_n R_n^{-1} S_n^* - T_n$, то из (6.8) находим $\det W_n = (-1)^q \det \rho_{d,n}^{-1}(\zeta, \theta) \det \rho_{g,n}(\zeta, \theta)$ **(6.9)**. Согласно (5.3)

$$W_n = B_n^{-1}(\zeta)\, j\, B_n^{*-1}(\zeta), \quad B_n(\zeta) = \overset{\frown}{\prod_{\kappa=0}^{n}} b_\kappa(\zeta), \quad (6.10)$$

при этом из (4.8) следует, что $b_\kappa(\zeta) = I + (1-\zeta) P_\kappa/\zeta$, где матрица P_κ выражается через соответствующий параметр Шура $c_0^{(\kappa)}$ по формулам (2.8), (2.9) и удовлетворяет условиям (2.10). Учитывая, что $b_\kappa^{-1}(\zeta) = j b_\kappa^*(1/\bar{\zeta})\, j = I - (1-\zeta) P_\kappa$, получаем $b_\kappa^{-1}(\zeta)\, j b_\kappa^{*-1}(\zeta) = (I - (1-|\zeta|^2) P_\kappa)\, j$. Поэтому из (6.10) и свойств матриц P_κ, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots, n$ следует $\det W_n = (\det j) \prod\limits_{\kappa=0}^{n} \det (I - (1-|\zeta|^2) P_\kappa) = (\det j) \prod\limits_{\kappa=0}^{n} |\zeta|^{2p} = (-1)^q |\zeta|^{2p(n+1)}$. Откуда с учетом (6.9) находим $\det \rho_{d,n}(\zeta, \theta) = (-1)^q (\det W_n)^{-1} \det \rho_{g,n}(\zeta, \theta) = \frac{1}{|\zeta|^{2p(n+1)}} \det \rho_{g,n}(\zeta, \theta) = \det r_{g,n}(\zeta, \theta)$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Имеют место равенства* $\det \rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = \det r_{g,\infty}(\zeta, \theta) = \det \rho_{d,\infty}(\bar{\zeta}, \theta)$ **(6.11)**.

Из фундаментальной теоремы С. А. Орлова [3] следует, в частности, что $\operatorname{rang} \rho_{d,\infty}(\zeta, \theta)$, а значит, и $\operatorname{rang} \rho_{d,\infty}(\zeta, \acute{\theta})$ не зависят от выбора точки $\zeta \in D$. Поэтому $\operatorname{rang} \rho_{d,\infty}(\zeta, \theta)$ и $\operatorname{rang} r_{g,\infty}(\zeta, \theta)$

представляют собой постоянные величины при $\zeta \in D$ и для их вычисления точку $\zeta \in D$ можно выбирать произвольным образом. Следовательно, появляется возможность классифицировать «бесконечные» задачи Шура, а вместе с ними и функции $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ по значениям рангов предельных радиусов $\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta)$ и $r_{g,\infty}(\zeta, \theta)$. Оставшаяся часть статьи посвящена изучению этой классификации,

Отметим в связи с этим, что из (6.11) следует

Теорема 6.3. *Если один из предельных радиусов* $\rho_{d,\infty}(\xi, \theta)$ *или* $r_{g,\infty}(\xi, \theta)$ *имеет полный ранг, то этим же свойством обладает и другой.*

2. Рассмотрим случай $p = q$. Повторяя рассуждения, проведенные в работе [4], можно получить следующие два утверждения, играющие существенную роль в дальнейшем.

Теорема 6.4. *Пусть задано произведение конечного числа двучленных j-сжимающих множителей полного ранга*

$$B_n^{-1}(\zeta) = \overset{\frown}{\prod_{\kappa=0}^{n}} b_\kappa^{-1}(\zeta) = \overset{\frown}{\prod_{\kappa}^{n}} (I - (1-\zeta) P_\kappa), \text{ и пусть } W_\kappa =$$

$$= B_\kappa^{-1}(\zeta_0)\, j\, B_\kappa^{*-1}(\zeta_0) = \begin{pmatrix} -R_\kappa & S_\kappa^* \\ S_\kappa & -T_\kappa \end{pmatrix}, \quad \kappa = 0,\ 1, \dots,\ n.$$

Определим последовательно матрицы $r_0, u_0, v_0; \tau_1, r_1, u_1, v_1; \tau_2, r_2, u_2, v_2; \dots; \tau_n, r_n, u_n, v_n$ с помощью следующего рекуррентного процесса

$$P_0 = \begin{bmatrix} \xi_0^* \\ \eta_0^* \end{bmatrix} [\xi_0, \eta_0]\, j; \quad r_0 = I + (1 - |\zeta_0|^2)\ \xi_0\ \xi_0^*, \quad \xi_0 = (\xi_0 \xi_0^*)^{-\frac{1}{2}} u_0, \quad \eta_0 =$$

$$= (\eta_0 \eta_0^*)^{-\frac{1}{2}} v_0; \quad \tau_\kappa = \begin{pmatrix} r_{\kappa-1}^{-\frac{1}{2}} u_{\kappa-1} r_{\kappa-2}^{-\frac{1}{2}} u_{\kappa-2} \dots r_0^{-\frac{1}{2}} u_0 & 0 \\ 0 & |\zeta_0|^{-\kappa} r_{\kappa-1}^{\frac{1}{2}} v_{\kappa-1} r_{\kappa-2}^{\frac{1}{2}} {}_{\kappa-2} \dots r_0^{\frac{1}{2}} v_0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ S_{\kappa-1} R_{\kappa-1}^{-1} & I \end{pmatrix} B_{\kappa-1}^{-1}(\zeta_0); \quad \tau_\kappa P_\kappa \tau_\kappa^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_\kappa^* \\ \eta_\kappa^* \end{bmatrix} [\xi_\kappa,\ \eta_\kappa]\, j; \quad r_\kappa = I + (1 -$$

$$- |\zeta_0|^2)\, \xi_\kappa \xi_\kappa^*; \quad \xi_\kappa = (\xi_\kappa \xi_\kappa^*)\, u_\kappa, \quad \eta_\kappa = (\eta_\kappa \eta_\kappa^*)^{2}\, v_\kappa, \quad 1 \leqslant \kappa \leqslant n,$$

при этом матрицы u_κ, v_κ, $0 \leqslant \kappa \leqslant n$ предполагаются унитарными. Тогда радиусы круга Вейля $K_n(\zeta_0)$ вычисляем по формулам

$$\rho_{d,n}(\zeta_0) = u_0^* r_0^{-\frac{1}{2}} u_1^* r_1^{-\frac{1}{2}} \dots u_n^* r_n^{-1} u_n \dots r_1^{-\frac{1}{2}} u_1 r_0^{-\frac{1}{2}} u_0; \tag{6.12}$$

$$\rho_{g,n}(\zeta_0) = |\zeta_0|^{2n+2} v_0^* r_0^{-\frac{1}{2}} v_1^* r_1^{-\frac{1}{2}} \dots v_n^* r_n^{-1} v_n \dots r_1^{-\frac{1}{2}} v_1 r_0^{-\frac{1}{2}} v_0; \tag{6.13}$$

и, значит,

$$r_{g,n}(\zeta_0) = v_0^* r_0^{-\frac{1}{2}} v_1^* r_1^{-\frac{1}{2}} \dots v_n^* r_n^{-1} v_n \dots r_1^{-\frac{1}{2}} v_1 r_0^{-\frac{1}{2}} v_0. \tag{6.14}$$

Теорему 6.4 дополняет

Теорема 6.5. *Пусть $\zeta_0 \in D$. Для произвольного набора эрмитовых матриц $r_\kappa \geqslant I$, $0 \leqslant \kappa \leqslant n$ и унитарных матриц u_κ, v_κ, $0 \leqslant \kappa \leqslant n$ существует проблема Шура, для которой правый и левый радиусы круга Вейля $K_n(\zeta_0)$ определяются формулами* (6.12) *и* (6.13).

Используя теорему, как и в проблеме Неванлинны—Пика [4] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 6.6. *Пусть* α и β — *целые числа, удовлетворяющие условию* $0 \leqslant \alpha \leqslant p-1$ *и* $0 \leqslant \beta \leqslant p-1$. *Тогда существует* $\theta(\zeta) \in \in S_{p,p}$, *для которой* $\operatorname{rang} r_{g,\infty}(\zeta) = \alpha$, $\operatorname{rang} \rho_{d,\infty}(\zeta) = \beta$.

Очевидно, теоремы 6.3 и 6.6 описывают все возможные в случае $p = q$ ситуации.

3. При исследовании общего случая представляет интерес следующая

Лемма 6.1. *Пусть* $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ *и* $\omega_1(\zeta) \in S_{p,q_1}$, $\omega_2(\zeta) \in S_{p_1,q}$ *связаны с* $\theta(\zeta)$ *следующим образом* $\omega_1(\zeta) = [\theta(\zeta),\ 0]$, $\omega_2(\zeta) = \begin{bmatrix}\theta(\zeta)\\ 0\end{bmatrix}$. Тогда при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеют место равенства

$$\rho_{d,n}(\zeta, \omega_1) = \begin{pmatrix}\rho_{d,n}(\zeta,\theta) & 0\\ 0 & I_{q_1-q}\end{pmatrix}; \tag{6.15}$$

$$r_{g,n}(\zeta,\ \omega_1) = r_{g,n}(\zeta,\theta)\ \ \textbf{(6.16)};\ \ \rho_{d,n}(\zeta,\ \omega_2) = \rho_{d,n}(\zeta,\theta); \tag{6.17}$$

$$r_{g,n}(\zeta, \omega_2) = \begin{pmatrix}r_{g,n}(\zeta,\theta) & 0\\ 0 & I_{p_1-p}\end{pmatrix}. \tag{6.18}$$

Достаточно доказать соотношения (6.15) и (6.16), так как (6.17) и (6.18) следуют из них взятием операции сопряжения над функцией $\theta(\zeta)$. Пусть

$\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots$ $\omega_1(\zeta) = d_0 + d_1\zeta + d_2\zeta^2 + \ldots$ Очевидно, $d_\kappa = [c_\kappa,\ 0]$, $d_\kappa^* d_\kappa = \begin{pmatrix}c_\kappa^* c_\kappa & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $d_\kappa d_\kappa^* = c_\kappa c_\kappa^*$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$

Поэтому (6.15) и (6.16) следуют соответственно из (6.2) и (5.16)

Теорема 6.7. *Для того чтобы* $\omega(\zeta) \in S_{p,r}$ *имела вид* $\omega(\zeta) = [\theta(\zeta), 0]$, *где* $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$, *необходимо, чтобы при любом* $\zeta \in D$ *и достаточно, чтобы при каком-либо* $\zeta \in D$ *выполнялись равенства*

$$\rho_{d,n}(\zeta, \omega) = \begin{pmatrix}* & 0\\ 0 & I_{r-q}\end{pmatrix},\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{6.19}$$

Необходимость следует из леммы 6.1. Остановимся на доказательстве достаточности. Пусть $\omega(\zeta) = d_0 + d_1\zeta + d_2\zeta^2 + \ldots$,

$$D_n = \begin{bmatrix} d_0 & & & 0\\ d_1 & d_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_n & d_{n-1} & \ldots & d_0\end{bmatrix},\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{6.20}$$

Тогда согласно (6.1) $\rho_{d,n}(\zeta,\omega)=I_r+(1-|\zeta|^2)\Lambda_{r,n}(\zeta)D_n^*(I-D_nD_n^*)^{-1}D_n\Lambda_{r,n}^*(\zeta)$ (6.21). Пусть равенства (6.19) выполняются в точке $\zeta_0\in D$. Тогда из (6.21) следует $\Lambda_{r,n}(\zeta_0)D_n^*(I-D_nD_n^*)^{-1}D_n\Lambda_{r,n}^*(\zeta_0)=\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0_{r-q}\end{pmatrix}$, $n=0, 1, 2,\ldots$ Отсюда, учитывая, что $(I-D_nD_n^*)^{-1}\geqslant I$, получаем $\Lambda_{r,n}(\zeta_0)D_n^*D_n\Lambda_{r,n}^*(\zeta_0)=\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0_{r-q}\end{pmatrix}$, $n=0, 1, 2,\ldots$ Из вида (6.20) матрицы D_n находим

$$D_n^*D_n=\begin{pmatrix}\tilde{d}_n & [d_1^*,\ldots, d_n^*]\,D_{n-1} \\ * & D_{n-1}^*D_{n-1}\end{pmatrix},$$

где $\tilde{d}_n=d_0^*d_0+d_1^*d_1+\ldots+d_n^*d_n$. Учитывая это, из (6.22) нетрудно получить $\tilde{d}_n=\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0_{r-q}\end{pmatrix}$, $n=0, 1, 2,\ldots$ Значит, $d_n^*d_n=\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0_{r-q}\end{pmatrix}$, $n=0, 1, 2,\ldots$ Следовательно, $d_n=[c_n, 0]$, $c_n\in L_{p,q}$, $n=0, 1, 2,\ldots$ Таким образом, $\omega(\zeta)=[\theta(\zeta), 0]$, где $\theta(\zeta)\in S_{p,q}$ и $\theta(\zeta)=c_0+c_1\zeta+c_2\zeta^2+\ldots$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается

Теорема 6.8. *Для того, чтобы $\omega(\zeta)\in S_{r,q}$ имела вид $\omega(\zeta)=\begin{bmatrix}\theta(\zeta) \\ 0\end{bmatrix}$, где $\theta(\zeta)\in S_{p,q}$ необходимо, чтобы при любом $\zeta\in D$ и достаточно, чтобы при каком-либо $\zeta\in D$ выполнялись равенства $r_{g,n}(\zeta,\omega)=\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & I_{r-p}\end{pmatrix}$, $n=0, 1, 2,\ldots$*

Одним из основных утверждений данного пункта является

Теорема 6.9. *Пусть p и q — целые положительные числа. Тогда для любых целых чисел α и β, удовлетворяющих условиям $0\leqslant\alpha\leqslant p-1$, $0\leqslant\beta\leqslant q-1$, существует $\theta(\zeta)\in S_{p,q}$, для которой* $\operatorname{rang} r_{g,\infty}(\zeta)=\alpha$, $\operatorname{rang}\rho_{d,\infty}(\zeta)=\beta$.

Доказательство. Если $p=q$, то данное утверждение следует из теоремы 6.6.

Пусть теперь $p>q$ и α, β — целые числа, удовлетворяющие условиям $0\leqslant\alpha\leqslant p-1$, $0\leqslant\beta\leqslant q-1$. Рассмотрим класс $S_{p,p}$. Согласно теореме 6.4 радиусы кругов Вейля $K_n(\zeta_0)$ вычисляются для функции этого класса по формулам (6.12) и (6.13), при этом согласно теореме 6.5 параметры r_κ, u_κ, v_κ, $\kappa=0, 1, 2,\ldots$, входящие в эти формулы, можно выбирать произвольным образом. Согласно теореме 6.6 по этим параметрам можно выбрать функцию $\omega(\zeta)\in S_{p,p}$, для которой $\operatorname{rang} r_{g,\infty}(\zeta,\omega)=\alpha$, $\operatorname{rang}\rho_{d,\infty}(\zeta)=\beta+p-q$ (6.23).

Отметим, что при выборе $\omega(\zeta)$ параметры r_κ, u_κ, $\kappa=0, 1, 2, \ldots$ можно выбрать следующим образом

$$r_\kappa=\begin{pmatrix}\hat{r}_\kappa & 0 \\ 0 & I_{p-q}\end{pmatrix},\quad u_\kappa=\begin{pmatrix}\hat{u}_\kappa & 0 \\ 0 & I_{p-q}\end{pmatrix},$$

Откуда, согласно формуле (6.12), имеем

$$\rho_{d.n}(\zeta_0, \omega) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & I_{p-q} \end{pmatrix}, \ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Но тогда из теоремы 6.7 следует, что $\omega(\zeta) = [\theta(\zeta), 0]$, $\theta(\zeta) \in \in S_{p,q}$. Формулы (6.15) и (6.16) в данном случае дают

$$\rho_{d,n}(\zeta, \omega) = \begin{pmatrix} \rho_{d.n}(\zeta, \theta) & 0 \\ 0 & I_{p-q} \end{pmatrix}, \ r_{g.n}(\zeta, \omega) = r_{g,n}(\zeta, \theta).$$

Осуществляя в этих равенствах предельный переход при $n \to \infty$ и учитывая равенства (6.23), получаем $\operatorname{rang} r_{g,\infty}(\zeta, \theta) = \alpha$, $\operatorname{rang} \rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = \beta$. Таким образом, для случая $p > q$ теорема доказана. Отметим, что случай $p < q$ сводится к случаю $p > q$ взятием операции сопряжения над функцией $\theta(\zeta)$.

Очевидно, теоремы 6.3 и 6.9 описывают все возможные ситуации.

Замечание. Из проведенных рассуждений следует, что круг Вейля $K_n(\zeta)$ удобно записать в виде $C_n(\zeta) + |\zeta|^{n+1} r_{g,n}^{\frac{1}{2}}(\zeta) \times \times u \rho_{d,n}^{\frac{1}{2}}(\zeta)$, $uu^* \leqslant I$, $u \in L_{p,q}$.

Здесь выделен множитель $|\zeta|^{n+1}$, за счет которого круг $K_n(\zeta)$ стягивается в точку. Далее эта запись в силу (6.4) инвариантна относительно взятия операции сопряжения.

Определение. *Будем называть числа*

$$\delta_\theta = \operatorname{rang} \rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) \ \mathbf{(6.24)}, \quad \delta_{\theta^*} = \operatorname{rang} \rho_{d,\infty}(\zeta, \hat{\theta}) \qquad (6.25)$$

дефектными числами сжимающей матрицы-функции $\theta(\zeta)$.

В дальнейших работах будет выяснена роль, которую играют дефектные числа при исследовании сжимающих матриц-функций и соответствующих им операторов сжатия в гильбертовом пространстве.

Список литературы: *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций I. — Теория функций, функц. анализ и их прил. 1982, вып. 37, 2. *Ковалишина И. В.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач. — Изв. АН СССР, 1981, сер. Математика, 45, №1, с. 23. 3. *Орлов С. А.* Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов. — Изв. АН. СССР, 1976, 40, № 3, с. 593—644. 4. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны—Пика. — В кн.: Исследования по теории операторов и их приложения. Киев: Наук. думка, 1981, с. 17—26.

Поступила в редколлегию 12.05.80.