

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ Харківський  
національний університет імені В.Н. Каразіна ННІ «Фізико-технічний  
факультет» Кафедра медичної фізики**

**Пояснювальна записка**

до дипломної роботи бакалавра

---

на тему (укр. мова) Роздільна здатність ультразвукової діагностичної  
системи, що використовує компаундінг пласких хвиль

---

---

на тему (англ. мова) The resolution of an ultrasound diagnostic system using  
plane wave compounding

---

Виконав: студент 4 курсу, групи ТЛ-41

Напрямок підготовки 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»



Артем КУСТОВІНОВ

(підпис, прізвище та ініціали)

Науковий керівник:



Євген БАРАННИК

---

(підпис, прізвище та ініціали)

Рецензент:



Сергій КОНОНЕНКО

---

(підпис, прізвище та ініціали)

## АНОТАЦІЯ

Кустовінов А.М. – Роздільна здатність ультразвукової діагностичної системи, що використовує компаундінг плоских хвиль

Дипломна робота бакалавра за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» – Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків, 2023.

Дослідження фокусується на підвищенні роздільної здатності плоских хвиль.

В рамках простої моделі функції чутливості розглянуто доплерівські спектри для різних способів генерування сигналів відгуку з використанням компаундування плоских хвиль. Отримано доплерівський спектр для когерентного складання сигналів, отриманих при різних кутах повороту хвиль протягом періоду їхньої зміни. У порівнянні з традиційними діагностичними системами, ширина доплерівського спектра збільшується лише за рахунок обмеження тривалості сигналів. Додаткового збільшення ширини спектра не відбувається, якщо сполука утворюються шляхом додавання з циклічною перестановкою, в якій сигнали з кожного нового кута хвилі складаються. Коли доплерівський сигнал формується безпосередньо з доплерівських сигналів під різними кутами повороту, ширина спектра збільшується як у порівнянні з традиційним методом зондування стаціонарними сфокусованими ультразвуковими полями, так і з випадком когерентного ущільнення сигналу. Отримане збільшення ширини спектра має фізичний сенс. Збільшення ширини пов'язане з динамічною зміною доплерівського кута, що збільшує інтервал видимих проєкцій швидкостей руху неоднорідностей вздовж напрямку поширення плоскої хвилі.

## ABSTRACT

Kustovinov A.M. - Resolution of ultrasound diagnostic system using plane wave compounding

Bachelor's thesis in the speciality 105 'Applied Physics and Nanomaterials' - V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2023.

The research focuses on improving the resolution of plane waves.

Within the framework of a simple model of the sensitivity function, Doppler spectra for different methods of generating response signals using plane wave compounding are considered. The Doppler spectrum for coherent compounding of signals obtained at different angles of wave rotation during the period of their change is obtained. Compared to conventional diagnostic systems, the width of the Doppler spectrum is increased only by limiting the duration of the signals. No additional increase in spectral width occurs if the compound is formed by cyclic addition, in which the signals from each new wave angle are added together. When a Doppler signal is formed directly from Doppler signals at different rotation angles, the spectral width is increased both in comparison to the traditional method of sensing with stationary focused ultrasound fields and to the case of coherent signal compaction. The resulting increase in spectral width makes physical sense. The increase in the width is associated with a dynamic change in the Doppler angle, which increases the interval of visible projections of the velocities of heterogeneities along the direction of propagation of a plane wave.

## ЗМІСТ

<i>РОЗДІЛ 1. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ</i> .....	9
1.1. Загальна фізична модель спектральних властивостей сигналів ультразвукового доплерівського відгуку .....	9
1.2. Модель з використанням ультразвукових полів випромінювання-прийому пласких хвиль .....	11
<i>РОЗДІЛ 2. Роздільна здатність з використанням технології компаундінга пласких хвиль</i> .....	15
2.1. Огинаюча імпульсів пласких хвиль .....	15
2.2. Фаза ультразвукового поля випромінювання-прийому .....	17
2.3. Фур'є образ ультразвукового поля випромінювання-прийому .....	18
<i>РОЗДІЛ 3. РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ФІЗИЧНИЙ СЕНС</i> .....	20
3.1. Роздільна здатність за відсутності компаундінгу відгук .....	20
3.2. Роздільна здатність при наявності когерентного накопичення сигналів відгуку .....	21
<i>ВИСНОВКИ</i> .....	24
<i>ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ</i> .....	25

## ВСТУП

Ультразвукове дослідження (УЗД) – це метод, який є більш поширеним, ніж інші методи візуалізації, оскільки він дешевший, доступніший, безпечний, простий у використанні та, найважливіше, та візуалізує в реальному часі.

УЗД використовується для візуалізації внутрішніх структур тіла, таких як судини, м'язи, органи та суглоби. Воно ефективно візуалізує м'які тканини тіла.

Методологія дослідження достатньо проста – ультразвукові хвилі проникають через тканини пацієнта, частина з них відбивається та повертається до ультразвукового перетворювача. Сигнали від послідовних імпульсів, що повернулися, об'єднуються та обробляються, з них створюється зображення. Принципи роботи такі самі, як і в сонара.

Ультразвукова хвиля генерується п'єзоелектриком. Фокусування в площинні, перпендикулярній, до площини дослідження, здійснюється завдяки акустичній лінзи. Фокусування у площинні дослідження здійснюється за допомогою фазованих решіток або увігнутої форми.

В традиційних схемах використовується статична акустична лінза. Тобто поле, що створюється ультразвуковим перетворювачем має фіксовану фокусну відстань [1,2]. Але за допомогою фазованої решітки можна сфокусуватися на іншій глибині.

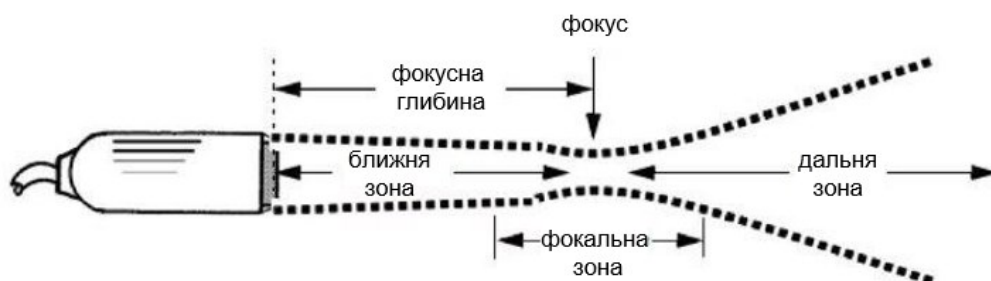


Рис. 1. Ультразвуковий ручний зонд та поле сфокусованого пучка ультразвукових хвиль

Зображення, що отримані за допомогою ультразвукових систем мають бути якісними. Показником придатності до роботи є такі параметри, як контрастна роздільна здатність та просторова роздільна здатність. Контрастна роздільна здатність залежить від рівня бічних пелюсток падаючих та відбитих хвиль.

Просторова роздільна здатність поділяється на поперечну – ширина вимірюваного об'єму – та поздовжню – тривалість імпульсу.

Традиційний перетворювач генерує хвилі з однаковою геометрією, та напрямком. Це має свої недоліки, такі як обмеження роздільної здатності, обмеження кількості даних щодо швидкостей потоків та можливість фокусування випромінювання лише на визначеній глибині. Має місце обмеження на частоту кадрів зображення через те, що зображення формується послідовно на одній лінії. А це викликає обмеження щодо зображення об'єктів, що достатньо швидко рухаються (такі як клапани серця), їх відображення в реальному часі ускладнене, тому це негативно впливає на діагностику.

УЗД можна покращити за допомогою використання ефекту Доплера. Користуючись цим ефектом можна оцінити рух рідин та об'єктів (швидкість та напрямком). Ці методи активно використовують для мапування руху крові (зокрема – детальне дослідження серцево-судинної системи).

Інший спосіб – використання різних варіантів синтетичної апертури. Ідея цього методу був розроблений під час Другої світової війни як метод радіоспостереження. А втілений він був у 1951 році Карлом Вайлізом. Він запропонував наступне: передавати електромагнітні хвилі послідовно в послідовні моменти часу. Тим самим можна отримати синтезовану апертуру, розміри якої більші за антени радара. Цей метод має місце бути і в апаратах УЗД.

Ідея застосування синтезованої апертури в ультразвукових дослідженнях – когерентне об'єднання відбитих сигналів для малих ракурсів. Це відрізняється від звичайного формування сигналів відгуку, де випромінювання фокусується завдовжки однієї лінії дослідження. Для створення фінального зображення відгуку, отримані з кожної точки простору. Фази сигналів однакові, отож складання є когерентним. Це, на відміну від некогерентного складання фази, дозволяє підвищити роздільну здатність, та, на жаль, призводить до появи спекл-шуму.

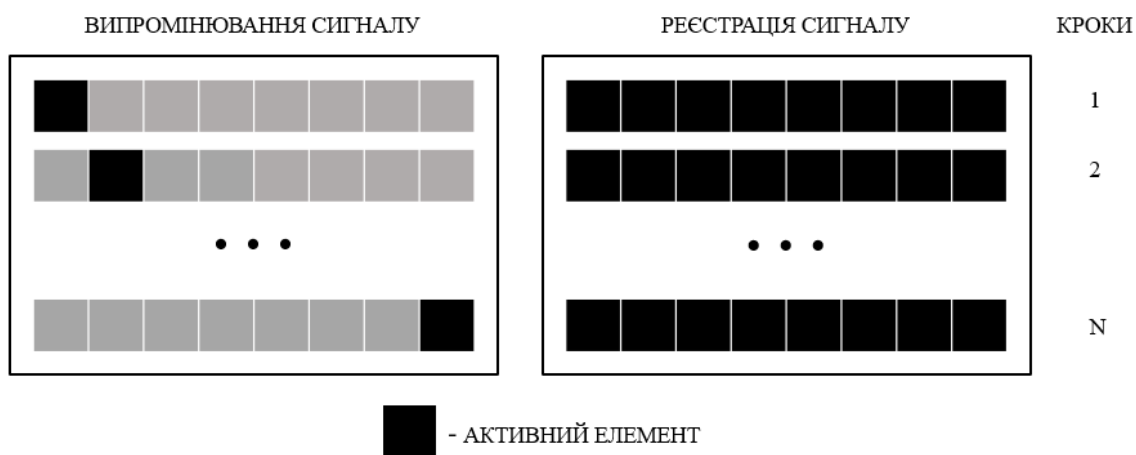


Рис. 2. Варіант використання методу синтезованої апертури, коли випромінювання та реєстрація здійснюються окремими фазованими решітками.

Метод синтетичної апертури потребує великої кількості обчислень, що значно збільшує ціну такого пристрою [6, 7]. Тому виникла потреба в методах, які можна було б застосувати у вже існуючих апаратах УЗД [8, 9]. Окрім цього стоїть задача покращити якість зображення, отриманого методом синтезованої апертури [10-17]. Ця задача полегшується через застосування паралельної обробки сигналів. Паралелізація обробки даних надає можливість краще візуалізувати кровоток (зокрема точніше визначати вектори швидкостей [18-20]) та доповнює усі доплерівські методики [21-23, 10].

Метою даної роботи є урахування нелінійності у часі при оцінці роздільної здатності ультразвукової діагностичної системи, що використовує для створення зображень та доплерівських досліджень біологічних середовищ технологію компаундинга плоских хвиль при різних способах накопичення та обробки сигналів ультразвукового відгуку. Проведення таких досліджень необхідне для оптимізації технології компаундинга плоских хвиль для медичних застосувань. Для досягнення цієї мети необхідно вирішити наступні задачі:

1. Провести аналіз сучасної наукової літератури щодо технології синтезованої апертури, яка використовує компаундинг плоских хвиль, та обрати на цій основі фізико-математичну модель найбільш придатну для оцінки роздільної здатності при застосуванні такої технології.

2. Дослідити властивості моделі відгуку, що спирається безпосередньо на ультразвукове поле випромінювання-прийому, а не на його функцію чутливості.
3. Визначити функцію, що описує огинаючу ультразвукових імпульсів.
4. Визначити функцію, що описує поле випромінювання-прийому.
5. Визначити функцію, що описує Фур'є-образ ультразвукового поля випромінювання-прийому
6. З урахуванням нелінійної залежності від часу ультразвукового поля в технології синтезованої апертури розрахувати роздільну здатність за відсутності компаундінгу відгука.
7. З урахуванням нелінійної залежності від часу ультразвукового поля в технології синтезованої апертури розрахувати роздільну здатність за наявності компаундінгу відгука.
8. Дати фізичну інтерпретацію отриманих результатів та зробити висновки щодо доцільності використання розглянутих способів обробки доплерівських сигналів.

## РОЗДІЛ 1. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

1.1. Загальна фізична модель спектральних властивостей сигналів  
ультразвукового доплерівського відгуку

Якщо розглядати кров в рамках континуальної моделі, то кров є слабонеоднорідним середовищем. А для нього працюватимуть наступні співвідношення:

$$\tilde{\rho}(\vec{r}, t) = [\rho(\vec{r}, t) - \rho_0]\rho^{-1}(\vec{r}, t) \ll 1 \quad (1.1)$$

$$\tilde{\beta}(\vec{r}, t) = [\beta(\vec{r}, t) - \beta_0]\beta_0^{-1} \ll 1 \quad (1.2)$$

Тут  $\rho_0$  та  $\beta_0$  – просторово-часові значення густини та стисливості усереднені за часом та простором. Через те, що неоднорідності малі, в подальших розрахунках будемо вважати, що розсіяння відбувається одноразово.

Через це наближення сигнал може бути представлений, як:

$$e_d(t) = k^2 \int_R e^{2i(\vec{k}\vec{r} + \vartheta_c)} G'_p(\vec{r}, t) \{ \tilde{\beta}(\vec{r}, t) - \rho(\vec{r}, t)\gamma(\vec{r}, t) \} d\vec{r} \quad (1.3)$$

Тут модуль хвильового вектора  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , а параметр, що характеризує відхилення від хвиль від плоских  $\gamma(\vec{r}) \cong 1$ .

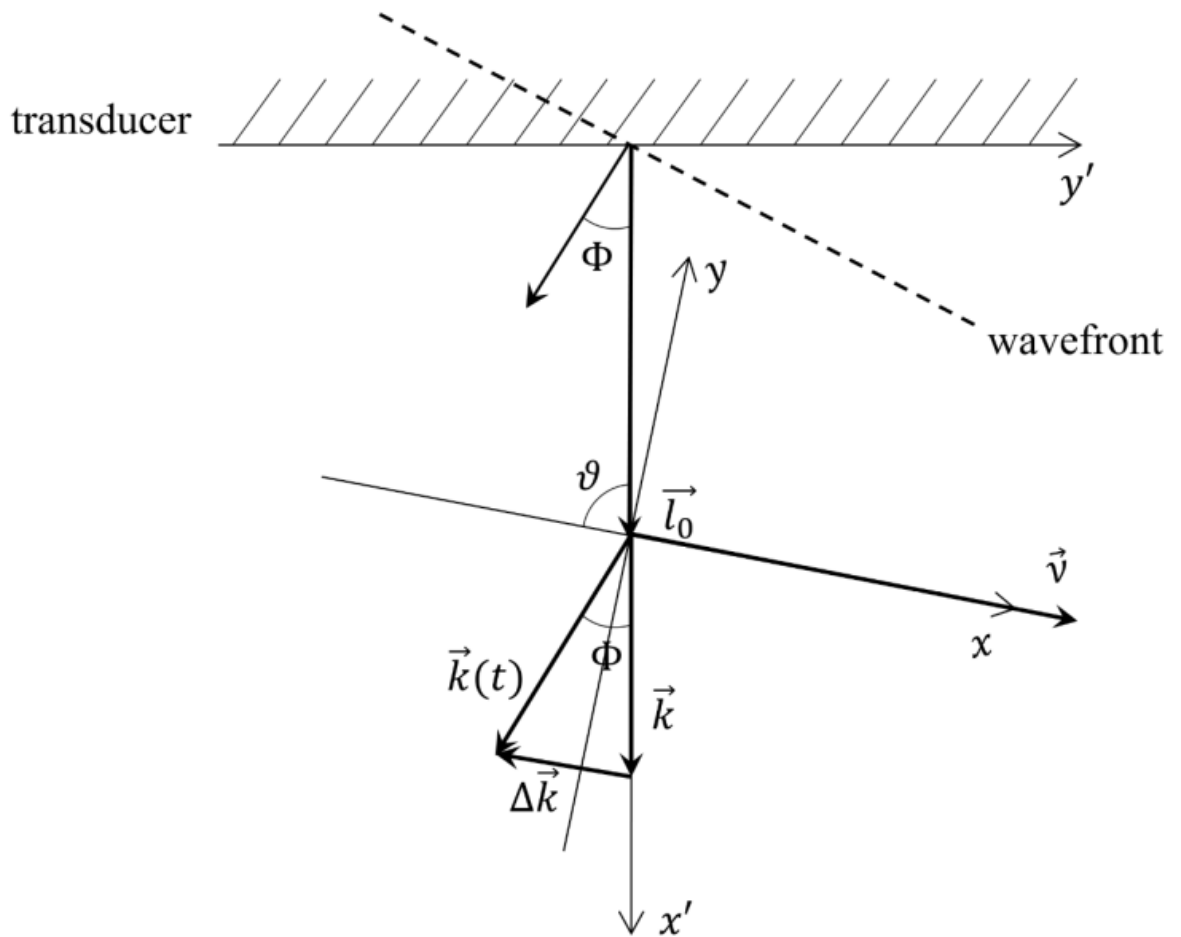


Рис. 1.1. Взаємне розташування штрихованої та нештрихованої систем координат. Штрихована пов'язана з об'єктом вимірювання, нештрихована – з ультразвуковим перетворювачем

В моделі, що розглядається, функція чутливості приймача не залежить від часу. В цій моделі функція відгуку має вигляд:

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \langle e_a^*(\vec{r}_0, t_0) e_a^*(\vec{r}_1, t_1) \rangle \\
 &= k^4 \iint_R e^{2i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)} \overline{G_p'^*(\vec{r}_0, t_0) G_p'(\vec{r}_1, t_1)} C(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau) d\vec{r}_0 d\vec{r}_1 \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

Тоді як функція неоднорідностей густини залежить тільки від часу та має вигляд:

$$C(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau) = \langle (\tilde{\beta}(\vec{r}_0, t_0) - \rho(\vec{r}_0, t_0)) (\tilde{\beta}(\vec{r}_1, t_1) - \rho(\vec{r}_1, t_1)) \rangle. \quad (1.5)$$

У рамках цієї моделі функція розподілу чутливості  $G_p'(\vec{r})$  вважається комплексною, та залежить від часу. Тому для її розрахунку використовуються комплексна амплітуда випромінення  $G_t'(\vec{r}, t)$  та комплексна функція чутливості до розсіяних хвиль  $G_r'(\vec{r})$ . Також треба врахувати затримку відносно кожного випроміненого імпульсу через введення глибини зондування  $c_0$ , швидкості поширення хвиль відносно вісі  $x' - c_0/\cos\Phi(t)$ , та огинаючого зондуючого імпульсу  $b(t)$ . Вираз набуває вигляд:

$$G_p'(\vec{r}) = G_t'(\vec{r}, t)G_r'(\vec{r})b\left(T_1 - \frac{x'}{c_0} - \frac{x'\cos\Phi(t)}{c_0}\right) \quad (1.6)$$

Густина потужності прийме вигляд  $S(\omega) = \int R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$  після застосування перетворення Фур'є.

Беручи до уваги принципи роботи більшості імпульсних систем (однакова геометрія послідовних імпульсів), а також проінтегрувавши чутливість за періодом зміни кутів, можна отримати вираз [38]:

$$S(\omega_p) = T^2 \frac{k^4}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} C(\vec{q}, \omega_p) |G(\vec{q} + 2\vec{k}, 0)|^2 \quad (1.7)$$

## 1.2. Модель з використанням ультразвукових полів випромінювання-прийому плоских хвиль

Насправді модель на основі функцій чутливості не є найбільш зручною і придатною саме у випадку синтезованої апертури за допомогою плоских хвиль. Треба враховувати відхилення розсіяних хвиль від плоских, та те, що функція чутливості є добутком комплексної функції чутливості приймача та комплексної амплітуди випромінювання з нахилом та без. Але при використанні в технології компаундінгу плоских хвиль для опису доцільно використовувати безпосередньо пласко хвильові поля випромінювання-прийому  $P(\vec{r}, t)$ . В такій запропонованій моделі формула ультразвукового відгуку (1.3) набуває вигляду:

$$e_d(t) = k^2 \int_R P(\vec{r}, t) \{ \tilde{\beta}(\vec{r}, t) - \rho(\vec{r}, t) \gamma(\vec{r}, t) \} d\vec{r}. \quad (1.8)$$

Далі послідовність обрахунків доплерівських спектрів подібна описаній в [37]. Відповідно до рівняння (1.8) автокореляційна функція (1.4) описується рівнянням

$$R(\tau) = k^4 \iint_R \overline{P(\vec{r}_1, t_1) P^*(\vec{r}_0, t_0)} C(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau) d\vec{r}_0 d\vec{r}_1, \quad (1.9)$$

де риска зверху означає усереднення за начальним моментом часу  $t_0$ . Кореляційна функція флуктуацій густини та стисливості  $C(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau) = \langle (\tilde{\beta}(\vec{r}_0, t_0) - \rho(\vec{r}_0, t_0)) (\tilde{\beta}(\vec{r}_1, t_1) - \rho(\vec{r}_1, t_1)) \rangle$  залежить тільки від різниці часу  $\tau = t_1 - t_0$ .

Як описано в п.1.1, реєстрація сигналів відбувається протягом обмеженого часу періоду зміни напрямків зондування  $T$ , тому доречним є періодичне продовження функцій шляхом розкладання в ряд Фур'є:

$$P^*(\vec{r}_0, t_0) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i j t_0}{T}} P\left(\frac{2\pi j}{T}, \vec{r}_0\right) \quad (1.10)$$

$$P(\vec{r}_1, t_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi i n t_1}{T}} P^*\left(\frac{2\pi n}{T}, \vec{r}_1\right) \quad (1.11)$$

В результаті отримуємо

$$R(\tau) = k^4 \iint_R \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{e^{-\frac{2\pi i n t_1}{T}} e^{\frac{2\pi i j t_0}{T}} P^*\left(\frac{2\pi n}{T}, \vec{r}_1\right) P\left(\frac{2\pi j}{T}, \vec{r}_0\right)} \times C(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau) d\vec{r}_0 d\vec{r}_1 \quad (1.12)$$

Аналогічно цьому корелятор флуктуацій неоднорідностей можна представити у вигляді:

$$C(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} e^{i\vec{q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i m \tau}{T}} C(\vec{q}, \omega_m) \quad (1.13)$$

Тоді вираз для спектру буде описуватися рівнянням:

$$S(\omega) = \frac{k^4}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} e^{i\vec{q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)} \int e^{i\omega_p \tau} d\tau \times \\ \times \overline{\int_R \sum_{j,n,m=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\pi i n t_1}{T}} e^{\frac{2\pi i j t_0}{T}} e^{\frac{2\pi i m \tau}{T}} P^*\left(\frac{2\pi n}{T}, \vec{r}_1\right) P\left(\frac{2\pi j}{T}, \vec{r}_0\right) C(\vec{q}, \omega_m)} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} & \text{Окремо можна виписати експоненти } e^{-\frac{2\pi i n t_1}{T}} e^{\frac{2\pi i j t_0}{T}} e^{\frac{2\pi i m \tau}{T}} = \\ & = e^{\frac{2\pi i}{T}(t_0(n-j) - \tau(n-m))}, \text{ і врахувати, що } \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\tau(\omega_p - \omega_j + \omega_m)} d\tau = \delta_{p+m,j}, \text{ та} \\ & \overline{e^{\frac{2\pi i}{T} t_0(n-j)}} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\frac{2\pi i}{T} t_0(n-j)} dt_0 = \frac{1}{2\pi i(n-j)} (e^{i\pi(n-j)} - e^{-i\pi(n-j)}) = \delta_{nj}. \end{aligned}$$

Тоді із врахуванням символів Кронекера можна провести сумування в (1.14).

Як результат, рахуючи доплерівський відгук за послідовні дискретні значення сигналів з послідовними різними кутами нахилу хвильового вектора, доплерівський спектр набуває вигляду:

$$S(\omega_p) = \frac{k^4}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_j} \int d\vec{q} C(\vec{q}, \omega_p - \omega_j) |P(\vec{q}, \omega_j)|^2 \quad (1.15)$$

Когерентно просумувавши сигнали за кутами повороту (беручи для кожного кута період  $T$ ), для дискретного способу генерації можна отримати:

$$S(\omega_p) = T^2 \frac{k^4}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} C(\vec{q}, \omega_p) |P(\vec{q}, 0)|^2 \quad (1.16)$$

Як і слідувало очікувати, формули (1.15) і (1.16) мають таку ж структуру, як відповідно формули (1.7) і (1.8).

## РОЗДІЛ 2. Роздільна здатність з використанням технології компаундінга плоских хвиль

### 2.1. Огинаюча імпульсів плоских хвиль

У випадку, коли при випромінюванні і прийомі використовують той же самий нахил хвильових векторів  $\vec{k}(t)$  плоских хвиль, ультразвукове поле випромінювання-прийому  $P(\vec{r}, t)$  має вигляд:

$$P(\vec{r}, t) = P_0 e^{2i\vec{k}(t)\vec{r}} b\left(T_1 - \frac{2x''}{c_0}\right) g(z) \quad (2.1)$$

$c_0$  – швидкість поширення фронту падаючих та відбитих плоских хвиль з кутом відхилення  $\Phi(t)$  хвильового вектора, як показано на Рис.5,  $b(t)$ –огинаюча зондуючого плоских хвиль імпульсу, яка зазвичай обирається у вигляді гаусівської функції,  $T_1$ – затримка у часі стробування відносно кожного моменту випромінювання імпульсу, яка визначає глибину зондування  $l_0'' = c_0 T/2$  і  $g(z)$  - розподіл поля випромінювання прийому вздовж вісі  $z$ . Для функції  $b(t)$  враховано, що хвилі розповсюджуються вздовж вісі  $x''$ , яка перпендикулярна до хвильових фронтів, як це показано на Рис.2.1.

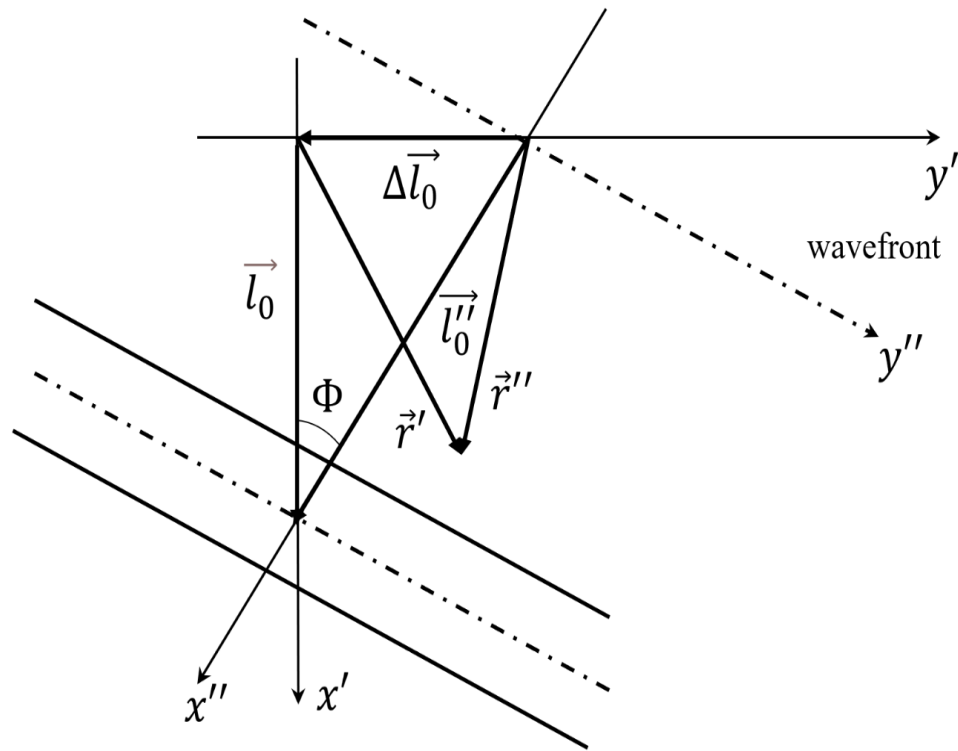


Рис. 2.1. Розташування двічі штрихованої системи координат, що пов'язана з ультразвуковим перетворювачем відносно лабораторної системи координат

Для винайдення роздільної здатності в рівнянні (2.1) для поля необхідно перейти до штрихованої системи координат, пов'язаної з ультразвуковим перетворювачем, як це показано на Рис. 1.1 і 2.1. Відповідно до малюнку виконується рівняння  $\Delta \vec{l}_0 + \vec{r}' = \vec{r}''$ , тоді:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{x''} \cdot \vec{r}'' &= x'' = \vec{e}_{x''} \Delta \vec{l}_0 + \vec{e}_{x''} \cdot \vec{r}' = \vec{e}_{x''} \cdot \Delta \vec{l}_0 + \vec{e}_{x''} x' \vec{e}_{x'} + \vec{e}_{x''} y' \vec{e}_{y'} = \\ &= \Delta l_0 \cos(90 - \Phi) + x' \cos \Phi + y' \cos(90 + \Phi). \end{aligned}$$

В результаті отримуємо

$$x'' = x' \cos \Phi + \Delta l_0 \sin \Phi - y' \sin \Phi \quad (2.2)$$

Також легко побачити, що:

$$l'' = l_0 \cos \Phi + \Delta l_0 \cos(90 - \Phi) = l_0 \cos \Phi + \Delta l_0 \sin \Phi \quad (2.3)$$

Огинаючи оберемо в експоненційному вигляді:

$$b\left(T_1 - \frac{2x''}{c_0}\right) = e^{-\frac{2(l_0'' - x'')^2}{a^2}} \quad (2.4)$$

Після підстановки у цю формулу рівнянь (11) і (12) отримуємо остаточну формулу для огинаючої ультразвукових імпульсів

$$b\left(T_1 - \frac{2x''}{c_0}\right) = e^{-\frac{2(l_0 \cos \Phi - x' \cos \Phi + y' \sin \Phi)^2}{a^2}} = e^{-\frac{2((l_0 - x') \cos \Phi + y' \sin \Phi)^2}{a^2}} \quad (2.5)$$

## 2.2. Фаза ультразвукового поля випромінювання-прийому

У формулі (Б) фаза комплексного поля випромінювання прийому визначається експоненційним множником з уявним показником. Тому необхідно винайти скалярний добуток

$$\begin{aligned} \vec{k}(t)\vec{r} &= k(t)_x x + k(t)_y y = k \cos(\vartheta + \Phi) x - k \sin(\vartheta + \Phi) y = \\ &= k(\cos \vartheta \cos \Phi - \sin \vartheta \sin \Phi) x - k(\sin \vartheta \cos \Phi + \cos \vartheta \sin \Phi) y \end{aligned} \quad (2.6)$$

або

$$\vec{k}(t)\vec{r} = k(\cos \vartheta x - \sin \vartheta y) \cos \Phi - k(\sin \vartheta x + \cos \vartheta y) \sin \Phi \quad (2.7)$$

Зв'язок штрихованих і нештрихованих координат відомий і дається рівняннями

$$\begin{cases} x' = x \cos \vartheta - y \sin \vartheta + l_0 \\ y' = x \sin \vartheta + y \cos \vartheta \end{cases},$$

звідки маємо:

$$\vec{k}(t)\vec{r} = -k((l_0 - x') \cos \Phi + y' \sin \Phi) \quad (2.8)$$

В результаті після підстановки (2.5) і (2.8) у рівняння (2.1) отримуємо остаточну формулу для поля випромінювання-прийому:

$$P(\vec{r}, t) = P_0 e^{-2ik((l_0 - x') \cos \Phi + y' \sin \Phi)} e^{-\frac{2((l_0 - x') \cos \Phi + y' \sin \Phi)^2}{a^2}} g(z) \quad (2.9)$$

де функцію  $g(z)$  можна вибрати у найбільш простому експоненційному вигляді

$$g(z) = e^{-\frac{2z^2}{a^2}} \quad (2.10)$$

З урахуванням цієї формули рівняння (2.9) дає можливість проаналізувати роздільну здатність ультразвукової доплерівської системи у випадку, коли доплерівський сигнал представляє собою послідовність відгуків з різних ракурсів без їхнього когерентного накопичення.

### 2.3. Фур'є образ ультразвукового поля випромінювання-прийому

Для оцінки Фур'є образу поля (Ж) скористаємося тим, що кут  $\Phi(t)$  завжди малий. Окремо розглянемо показник першої експоненти. Утримуючи тільки квадратичні по куту нахилу доданки, маємо:

$$\begin{aligned} (l_0 \cos\Phi - x' \cos\Phi + y' \sin\Phi)^2 &= \left( (l_0 - x') \left( 1 - \frac{\Phi^2}{2} \right) + y' \Phi \right)^2 = \\ &= (l_0 - x')^2 - (l_0 - x')^2 \Phi^2 + 2(l_0 - x')y' \Phi + y'^2 \Phi^2. \end{aligned}$$

Тепер врахуємо, що  $\Phi(t)$  малий і в першій експоненті:

$$\begin{aligned} (l_0 - x') \cos\Phi + y' \sin\Phi &= \left( 1 - \frac{\Phi^2}{2} \right) (x' - l_0) + \Phi y' = \\ &= (x' - l_0) - \frac{\Phi^2}{2} (x' - l_0) + \Phi y' \end{aligned}$$

У явному вигляді залежність від часу можна отримати, якщо зробити підстановку  $\Phi(t) = \Omega t$ , де  $\Omega$  – це кутова швидкість зміни у часі кута нахилу. З урахуванням такої підстановки у рівняння (2.9) отримуємо:

$$\begin{aligned} P(\vec{r}, t) &= P_0 e^{-2ik(x' - l_0) - \frac{2(l_0 - x')^2}{a^2} - \frac{2z^2}{a^2}} e^{-2ik\left(\frac{-\Omega^2 t^2}{2}(x' - l_0) + \Omega t y'\right)} \times \\ &\times e^{-\frac{2(y'^2 \Omega^2 t^2 + 2(l_0 - x')y' \Omega t - (l_0 - x')^2 \Omega^2 t^2)}{a^2}} e^{-\frac{2(l_0 - x')^2}{a^2} - 2ik(x' - l_0)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Як і в роботі [44], для оцінки Фур'є образу у часі поля випромінювання-прийому будемо використовувати вагове вікно з шириною  $2T_W$  по рівню  $e^{-1}$ . Крім того, зважаючи на гарну сходимість інтегралів із гаусівською функцією, межі інтегрування подовжимо до безкінечності. У цьому наближенні Фур'є образ ультразвукового поля має вигляд

$$P(\vec{r}, t) = P_0 e^{-2ik(x'-l_0) - \frac{2(l_0-x')^2}{a^2} - \frac{2z^2}{a^2}} T^{-1} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{t^2 \left( -ik\Omega^2(x'-l_0) + \frac{2y'^2\Omega^2}{a^2} - \frac{2(l_0-x')^2\Omega^2}{a^2} + \frac{1}{T_W^2} \right) + t \left( -i\omega_j + 2ik\Omega y' - \frac{4(l_0-x')y'\Omega}{a^2} \right) \right\}} dt$$

Цей інтеграл можна обчислити за допомогою методом перевалу, що в результаті дає остаточну формулу для Фур'є образу ультразвукового поля:

$$P(\vec{r}, t) = P_0 e^{-\frac{2(l_0-x')^2 - 2z^2}{a^2} - 2ik(x'-l_0)} T^{-1} \times \\ \times \sqrt{\frac{\pi}{-ik\Omega^2(x'-l_0) + \frac{2y'^2\Omega^2}{a^2} - \frac{2(l_0-x')^2\Omega^2}{a^2} + \frac{1}{T_W^2}}} \times \\ \times \frac{\left( 2ik\Omega y' - i\omega_j - \frac{4(l_0-x')y'\Omega}{a^2} \right)^2}{e^{4 \left( -ik\Omega^2(x'-l_0) + \frac{2y'^2\Omega^2}{a^2} - \frac{2(l_0-x')^2\Omega^2}{a^2} + \frac{1}{T_W^2} \right)}} \quad (2.12)$$

### РОЗДІЛ 3. РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ФІЗИЧНИЙ СЕНС

#### 3.1. Роздільна здатність за відсутності компаундінгу відгук

Роздільна здатність системи визначається модулем функції розподілу у просторі ультразвукового поля випромінювання-прийому оскільки фазовий множник не впливає на амплітуду поля. Модуль функції (16) просторового розподілу поля має вигляд:

$$|P(\vec{r}, t)| = P_0 e^{-\frac{2((l_0-x')\cos\Phi+y'\sin\Phi)^2}{a^2}} e^{-\frac{2z^2}{a^2}} \quad (3.1)$$

Цей вираз дає змогу проаналізувати роздільну здатність ультразвукової доплерівської системи у випадку, коли доплерівський сигнал представляє собою послідовність відгуків з різних ракурсів без їхнього когерентного накопичення.

Необхідно зразу зазначити, що роздільна здатність в напрямку вісі  $z$ , яка описується другою експонентою у формулі (3), не залежить від способу зондування і визначається виключно конструкційними особливостями ультразвукового перетворювача. Тому далі мова йде виключно про експоненту, показник степені якої є функцією  $x'$  та  $y'$ .

Згідно із формулою (3.1) перший доданок у показнику степені визначає довжину імпульсу по рівню  $e^{-1}$  при довільному куті  $\Phi(t)$  та координаті  $y'$

$$d_{x'} = \frac{\sqrt{2}a}{\cos\Phi} \quad (3.2)$$

тобто довжина імпульсу у напрямку  $x'$  від координати при всіх  $y'$  не залежить, як це видно з Рис.3.2.

Другий доданок показує, як залежить від координат  $y'$  та переміщення вздовж вісі  $x'$  центру імпульса, який визначається максимальним значенням амплітуди і має згідно (3.1) координату

$$x' = l_0 + y' \operatorname{tg} \Phi \quad (3.3)$$

Як витікає з формули (3.3) та видно з рисунку, зміна знаку кута або координати  $y'$  приводить до зміни напрямку переміщення центру імпульса.

Роздільна здатність по рівню  $e^{-1}$  вздовж вісі  $y'$  незалежно від положення (3.3) центру імпульса дорівнює:

$$d_{y'} = \frac{\sqrt{2}a}{\sin \Phi} \quad (3.4)$$

Як видно з цієї формули, зазначена роздільна здатність є найгіршою в ті моменти часу, при яких кут відхилення хвильового вектора  $\Phi(t) = 0$ . У цьому випадку  $d_{y'} \rightarrow \infty$  і це означає, що у поперечному напрямку вздовж вісі  $y'$  будь-яка роздільна здатність відсутня. За фізичним змістом вказані параметри визначають розподіл амплітуди ультразвукового поля випромінювання-прийому при заданому куту нахилу хвильового вектора  $\Phi(t)$ .

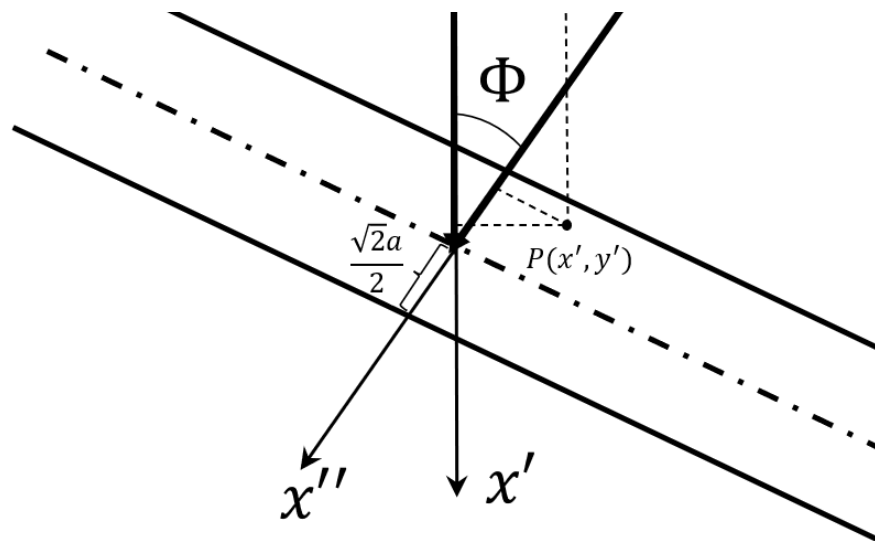


Рис. 3.1 Графічне представлення поширення ультразвукового імпульса

3.2. Роздільна здатність при наявності когерентного накопичення сигналів відгуку

Відповідно до формули (1.16) просторова здатність системи при наявності когерентного накопичення сигналів визначається модулем Фур'є образу поля випромінювання прийому при частоті  $\omega_j = 0$ . У даній дипломній роботі

обмежимося розглядом лінійного наближення, коли у рівнянні (2.12) враховуються тільки лінійні доданки. У цьому наближенні отримуємо:

$$P(\vec{r}, \omega_j) = P_0 e^{-\frac{2(l_0-x')^2-2z^2}{a^2}-2ik(x'-l_0)} T^{-1} \sqrt{\pi T_W^2} e^{\frac{T_W^2}{4} \left( 2ik\Omega y' - i\omega_j - \frac{4(l_0-x')y'\Omega}{a^2} \right)^2} \quad (3.5)$$

Тоді

$$\begin{aligned} |P(\vec{r}, 0)| &= P_0 e^{-\frac{2(l_0-x')^2-2z^2}{a^2}} T^{-1} \sqrt{\pi T_W^2} \left| e^{\frac{T_W^2}{4} \left( 2ik\Omega y' - \frac{4(l_0-x')y'\Omega}{a^2} \right)^2} \right| = \\ &= P_0 e^{-\frac{2(l_0-x')^2-2z^2}{a^2}} T^{-1} \sqrt{\pi T_W^2} e^{-T_W^2 (\Omega y')^2 \left( k^2 - \frac{4(l_0-x')^2}{a^4} \right)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Параметри в технологіях синтезованої апертури обирають таким чином, щоби роздільна здатність вздовж вісі  $y'$  була не гіршою, ніж в інших напрямках. Тому будемо вважати, що виконується рівність  $T_W \Omega = 2(ka)^{-1}$ . Тоді формулу (3.6) можна переписати у вигляді:

$$|P(\vec{r}, 0)| = P_0 T^{-1} \sqrt{\pi T_W^2} e^{-\frac{2(l_0-x')^2-2z^2}{a^2}} e^{-\frac{2y'^2}{a^2} \left( 1 - \frac{4(l_0-x')^2}{k^2 a^4} \right)} \quad (3.7)$$

Як витікає із рівняння (3.7), врахування для огинаючої імпульсів навіть лінійної складової залежності від часу приводить до висновку, що поперечна роздільна здатність вздовж вісі  $y'$  стає дещо гіршою. На рисунку можна побачити, що поперечна роздільна здатність визначається не тільки інтерференцією плоских хвиль, але й областю їх перетинання, ширина якої визначається амплітудним розподілом плоских хвиль. Роздільна здатність тим гірша, чим далі від фокусу і глибини зондування знаходиться координата  $x'$  точки спостереження.

Рівняння (3.8) можна переписати у вигляді

$$|P(\vec{r}, 0)| = P_0 T^{-1} \sqrt{\pi T_W^2} e^{-\frac{2(y'^2+z^2)}{a^2}} e^{-\frac{2(l_0-x')^2}{a^2} \left( 1 - \frac{4y'^2}{k^2 a^4} \right)} \quad (3.8)$$

з якого витікає, що врахування для огинаючої імпульсів навіть лінійної складової залежності від часу приводить до того, що продольна роздільна здатність вздовж вісі  $x'$  також стає дещо гіршою. У даному випадку, як видно з Рис.3.2, це обумовлено збільшенням області перетинання. Продольна здатність тим гірша, чим далі від вісі  $x'$  знаходиться координата  $y'$  точки спостереження.

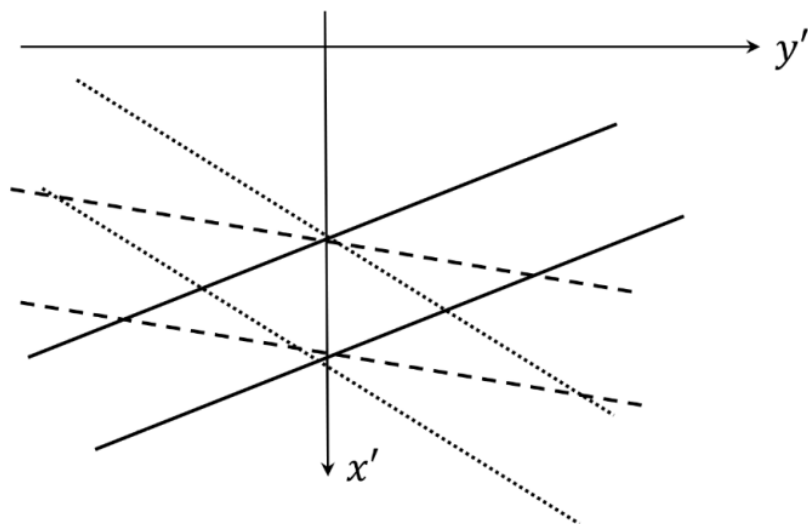


Рис. 3.2. Графічне представлення перетинання двох плоских хвиль.

## ВИСНОВКИ

В медичній справі широко використовується УЗД з використанням ефекту Допплера. Отож оцінка та покращення роздільної здатності апаратури є важливою задачею. З виконаної роботи можна зробити такі висновки:

1. Проаналізована сучасна наукова література щодо технологій синтезованої апертури з використанням компаундингу плоских хвиль. На основі цієї літератури обрана фізико-математична модель, що найбільш придатно описує роздільну здатність із застосуванням цієї технології
2. Досліджено властивості відгуку моделі, що спирається на ультразвукове поле випромінювання-прийому, а не на функцію чутливості.
3. Визначено функцію, що описує огинаючу ультразвукових імпульсів.
4. Визначено функцію, що описує поле випромінювання- прийому.
5. Визначено функцію, що описує Фур'є-образ ультразвукового поля випромінювання-прийому
6. Розраховано роздільну здатність за відсутності компаундингу відгука в технології синтезованої апертури, з урахування нелінійної залежності від часу ультразвукового поля.
7. Розраховано роздільну здатність за наявності компаундингу відгука в технології синтезованої апертури, з урахування нелінійної залежності від часу ультразвукового поля.
8. За фізичним змістом було показано, що введення огинаючої дозволяє підвищити роздільну здатність за близьконульових кутів дослідження, але знижує її для великих (на відміну від способу без використання компаундингу). Обговорюються шляхи покращення. Комбінування обох способів обробки сигналу дозволить покращити середню роздільну здатність.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Carovac, A., Smajlovic, F., & Junuzovic, D. (2011). Application of ultrasound in medicine. *Acta Informatica Medica*, 19(3), 168. DOI: 10.5455/aim.2011.19.168-171
2. Chan, V.; Perlas, A. Basics of Ultrasound Imaging. In *Atlas of Ultrasound-Guided Procedures in Interventional Pain Management*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2011; pp. 13–19. DOI: [10.1007/978-1-4419-1681-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1681-5_2)
3. P. R. Hoskins, K. Martin, and A. Thrush (eds.), *Diagnostic Ultrasound: Physics and Equipment*, 3rd ed. (CRC Press, Boca Raton, 2019), <https://doi.org/10.1201/9781138893603>.
4. P. T. Gough and D. W. Hawkins, "A short history of synthetic aperture sonar," *IGARSS '98. Sensing and Managing the Environment. 1998 IEEE International Geoscience and Remote Sensing. Symposium Proceedings. (Cat. No. 98CH36174)*, Seattle, WA, USA, 1998, pp. 618-620 vol.2, doi: 10.1109/IGARSS.1998.699529
5. Trots, I.; Nowicki, A.; Lewandowski, M.; Tasinkevych, Y. *Synthetic Aperture Method in Ultrasound Imaging*; IntechOpen: London, UK, 2011; ISBN 978-953-307-239-5. DOI: [10.5772/15986](https://doi.org/10.5772/15986)
6. S. I. Nikolov, B. G. Tomov and J. A. Jensen, 2006 Fortieth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2006, pp. 1548-1552, <https://doi.org/10.1109/ACSSC.2006.355018>
7. M. Tanter and M. Fink, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. 61(1), 102 (2014), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2014.6689779>
8. M. A. Lediju, G. E. Trahey, B. C. Byram and J. J. Dahl, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.* 58(7), 1377 (2011), <http://doi.org/10.1109/TUFFC.2011.1957>
9. Y.L. Li, J.J. Dahl, *J. Acoust. Soc. Am.* 141(3), 1582 (2017), <https://doi.org/10.1121/1.4976960>
10. J. Provost, C. Papadacci, C. Demene, J. Gennisson, M. Tanter and M. Pernot, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.* 62(8), 1467 (2015), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2015.007032>

11. G. Montaldo, M. Tanter, J. Bercoff, N. Benez, and M. Fink, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Contr. 56(3), 489 (2009), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2009.1067>
12. J. Jensen, M. B. Stuart, and J. A. Jensen, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 63(11), 1922 (2016), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2016.2591980>
13. C. Papadacci, M. Pernot, M. Couade, M. Fink and M. Tanter, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 61(2), 288 (2014), <http://doi.org/10.1109/TUFFC.2014.6722614>
14. J. Cheng and J.Y. Lu, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 53(5), 880 (2006), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2006.1632680>
15. N. Oddershede and J. A. Jensen, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 54(9), 1811 (2007), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2007.465>
16. B. Denari et al., IEEE Trans. Med. Imaging 32(7), 1265 (2013), <https://doi.org/10.1109/TMI.2013.2255310>
17. R. Moshavegh, J. Jensen, C. A. Villagómez-Hoyos, M. B. Stuart, M. C. Hemmsen and J. A. Jensen, in Proceedings of SPIE Medical Imaging (San Diego, California, United States, 2016) pp. 97900Z-97900Z-9, <https://doi.org/10.1117/12.2216506>
18. J. A. Jensen and N. Oddershede, IEEE Trans. Med. Imag. 25(12), 1637-1644 (2006), <https://doi.org/10.1109/TMI.2006.883087>
19. J. Udesen, F. Gran, K. L. Hansen, J. A. Jensen, C. Thomsen and M. B. Nielsen, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., 55(8), 1729 (2008), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2008.858>
20. S. Ricci, L. Bassi and P. Tortoli, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 61(2), 314 (2014), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2014.6722616>
21. Y.L. Li, J.J. Dahl, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 62(6), 1022 (2015), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2014.006793>
22. J. Bercoff, G. Montaldo, T. Loupas, D. Savery, F. Meziere, M. Fink, and M. Tanter, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 58(1), 134 (2011), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2011.1780>

23. Y. L. Li, D. Hyun, L. Abou-Elkacem, J. K. Willmann, J.J. Dahl, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 63(11), 1878 (2016), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2016.2616112>
24. D. Hyun, J.J. Dahl, J. Acoust. Soc. Am. 147(3), 1323 (2020), <https://doi.org/10.1121/10.0000809>
25. I.K. Ekroll, M.M. Voormolen, O.K.-V. Standal, J.M. Rauand L. Lovstakken, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 62(9), 1634 (2015), <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2015.007010>
26. J.A. Jensen, S.I. Nikolov, K.L. Gammelmarkand, and M.H. Pedersen, Ultrasonics, 44(1), e5 (2006),<https://doi.org/10.1016/j.ultras.2006.07.017>
27. M. Tanter, J. Bercoff, L. Sandrin, and M. Fink, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr.Freq. Contr.49(10), 1363(2002),<https://doi.org/10.1109/TUFFC.2002.1041078>
28. J.-I. Gennissonetal., IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 62(6), 1059 (2015),<https://doi.org/10.1109/TUFFC.2014.006936>
29. J. Bercoff, M. Tanter, and M. Fink, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 51(4), 396 (2004),<https://doi.org/10.1109/TUFFC.2004.1295425>
30. H. Hasegawa, and H. Kanai, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr. 55(12), 2626–2639 (2008),<https://doi.org/10.1109/TUFFC.2008.978>
31. J. Vappou, J. Luo, and E.E. Konofagou, Am. J. Hypertens. 23(4), 393–398 (2010),<https://doi.org/10.1038/ajh.2009.272>.
32. O. Couture, M. Fink, and M. Tanter, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec.Freq. Contr. 59(12), 2676–2683 (2012),O. Couture, M. Fink, and M. Tanter, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec.Freq. Contr. 59(12), 2676–2683 (2012),
33. C. Zheng, Q. Zha, L. Zhangand H. Peng, IEEE Access 6, 495 (2018), <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2768387>
34. Y.M. Benaneetal., 2017 IEEE InternationalUltrasonicsSymposium (IUS), 2017, pp. 1-4,<https://doi.org/10.1109/ULTSYM.2017.8091880>
35. C.-C. Shen, Y.-C. Chu, Sensors 21, 4856 (2021),<https://doi.org/10.3390/s21144856>
36. Sheina, I. V., &Barannik, E. A. (2022). Resolution of the Ultrasound Doppler System Using Coherent Plane-Wave Compounding Technique. *East*

*European Journal of Physics*, (1), 116-122. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2022-1-16>

37. E.A. Barannik and O.S. Matchenko, *EastEur. J. Phys.* 3(2) 61 (2016), <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2016-2-08>. (inRussian)

38. Sheina, I. V., Kiselov, O. B., & Barannik, E. A. (2020). Power Spectra of Doppler Response Signals from Biological Objects Using Synthetic Aperture Ultrasound. *East European Journal of Physics*, (4), 5-12. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2020-4-01>

39. C.R. Hill, J.C. Bamber, Methodology for clinical investigation, in: C.R. Hill, J.C., Bamber, G.R. terHaar (Eds.), *Physical Principles of Medical Ultrasonic*, seconded., John Wiley, 2004, pp. 255–302.

40. Barannik EA, Girnyk SA, Tovstiyk VV, et al. The influence of viscosity on the shear strain remotely induced by focused ultrasound in viscoelastic media. *J Acoust Soc Am* 2004;115(5):2358-2364.

41. E.A. Barannik, Optimum resolution of pulsed Doppler systems, *Acoust. Phys.* 43(1997) 387–390.

42. I.V. Skresanova and E.A. Barannik, *Ultrasonics* 52(5), 676-684 (2012), <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2012.01.014>.

43. C.A.C. Bastos, P.J. Fish, R. Steel, F. Vaz, Doppler power spectrum from a Gaussian sample volume, *Ultrasonics* 37 (9) (2000) 623–632.

44 Barannik E.A., M.O.Hrytsenko, Spectra of Ultrasound Doppler Response Using Plane-Wave Compounding Technique (2024) <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2024-1-52>