ОБ ОДНОМ ТИПЕ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК

Н. С. Ландкоф

Для простоты формулировок мы будем рассматривать компакты в трехмерном пространстве. Результат без труда обобщается на случай любого борелевского множества в n-мерном пространстве и с соответствующими изменениями остается справедливым при замене ньютонового ядра $|x|^{2-n}$ ядром М. Рисса $|x|^{\alpha-n}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

Пусть K есть компакт в пространстве R^3. Рассмотрим точку $x \notin K$ и меру Дирака ε_x с носителем в этой точке. Существует единственная мера ε'_x, сосредоточенная на K и обладающая тем свойством, что равенство

$$\frac{1}{|x-y|} = \int \frac{d\varepsilon'_x(z)}{|z-y|} \tag{1}$$

выполняется квази всюду на K, т. е. всюду за возможным исключением множества нулевой емкости. Будем говорить, что мера ε'_x получена *выметанием* ε_x на K и называть ее мерой Грина. Пусть теперь $x \in K$. Может случиться, что, кроме меры ε_x, не существует другой меры ε'_x, удовлетворяющей соотношению (1). В этом случае точку x будем называть *регулярной*. Если же существует мера $\varepsilon'_x \neq \varepsilon_x$, то точка x называется иррегулярной. В этом случае мерой Грина ε'_x будем называть единственную C — абсолютно непрерывную меру*, удовлетворяющую (1).

Необходимое и достаточное условие иррегулярности точки было дано Винером (см., например [1]) и может быть сформулировано следующим образом.

Пусть $0 < q < 1$, и

$$K_n = K \cap \{x : q^{n+1} \leqslant |x - x_0| \leqslant q^n\}.$$

Тогда для иррегулярности точки x_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(K_n)}{q^n} < \infty, \tag{2}$$

где $C(K_n)$ обозначает емкость K_n.

Можно показать (см. [2]), что (2) эквивалентно условию

$$\int_0^1 \frac{c(\rho)}{\rho^2} d\rho < \infty, \tag{3}$$

где $c(\rho)$ обозначает емкость компакта

$$K \cap \{x : |x - x_0| \leqslant \rho\}.$$

---

* Так мы называем меру, равную нулю на любом множестве нулевой емкости.

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Для того, чтобы мера Грина* ε'_{x_0} *имела конечную энергию* $\|\varepsilon'_{x_0}\|$ *, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(K_n)}{q^{2n}} < \infty \tag{4}$$

или, в эквивалентной форме,

$$\int_0^1 \frac{c(\rho)}{\rho^3}\, d\rho < \infty. \tag{5}$$

Предпошлем доказательству две леммы.

Лемма 1. *Пусть* K_1, K_2 *— два компакта и* $d > 0$ *расстояние между ними. Тогда*

$$C(K_1) + C(K_2) \leqslant C(K_1 \cup K_2)\left[1 + \frac{1}{d}\max\{C(K_1),\ C(K_2)\}\right].$$

Доказательство. Пусть γ_1, γ_2 — равновесные меры на K_1 и K_2:

$$\int d\gamma_1 = C(K_1), \quad \int d\gamma_2 = C(K_2).$$

Тогда $\gamma_1 + \gamma_2$ есть мера, сосредоточенная на $K_1 \cup K_2$, причем в любой точке $K_1 \cup K_2$ имеем для потенциала $U^{\gamma_1+\gamma_2}$ меры $\gamma_1 + \gamma_2$ неравенство

$$U^{\gamma_1+\gamma_2}(x) \leqslant 1 + \frac{1}{d}\max\left\{\int d\gamma_1,\ \int d\gamma_2\right\}.$$

Следовательно,

$$C(K_1 \cup K_2) \geqslant [C(K_1) + C(K_2)]\left[1 + \frac{1}{d}\max\{C(K_1),\ C(K_2)\}\right]^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть* F *— неограниченное замкнутое множество,* $\{r_n\}$ *— монотонно возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_{n+1} - r_n} < \infty, \tag{6}$$

а

$$F_n = F \cap \{x : r_n \leqslant |x - x_0| \leqslant r_{n+1}\}.$$

Тогда условие

$$C(F) < \infty \tag{7}$$

эквивалентно условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} C(F_n) < \infty. \tag{8}$$

Доказательство. То, что из (8) следует (7), вытекает из полуаддитивности емкости. Будем доказывать обратное. Для этого установим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} C(F_{2k-1}) < \infty \tag{8'}$$

* Напомним, что $\|\varepsilon'_{x_0}\|^2 = \iint \frac{d\varepsilon'_{x_0}(x)\, d\varepsilon'_{x_0}(y)}{|x-y|}$.

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} C(F_{2k}) < \infty. \qquad (8'')$$

Так как доказательства (8′) и (8″) совершенно одинаковы, то ограничимся проверкой (8′).

Положим $C(F) = M$. Применяя лемму 1, получим

$$C(F_1) + C(F_3) \leqslant C(F_1 \cup F_3)\left(1 + \frac{M}{r_3 - r_2}\right).$$

Повторное ее применение дает

$$C(F_1) + C(F_3) + C(F_5) \leqslant C(F_1 \cup F_3)\left(1 + \frac{M}{r_3 - r_2}\right) + C(F_5) \leqslant$$

$$\leqslant [C(F_1 \cup F_2) + C(F_5)]\left(1 + \frac{M}{r_3 - r_2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C(F_1 \cup F_3 \cup F_5)\left(1 + \frac{M}{r_3 - r_2}\right)\left(1 + \frac{M}{r_5 - r_4}\right).$$

С помощью индукции получаем при любом натуральном N неравенство

$$\sum_{k=1}^{N} C(F_{2k-1}) \leqslant M \prod_{k=1}^{N}\left(1 + \frac{M}{r_{2k+1} - r_{2k}}\right).$$

Но из (6) вытекает сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{M}{r_{2k+1} - r_{2k}}\right)$$

и вместе с тем утверждение (8′). Лемма доказана.

Заметим, что условие (6) будет выполнено, если положить

$$r_n = q^n, \quad (q > 1).$$

Доказательство теоремы. Произведем инверсию пространства с центром в точке $x_0 \in K$ и радиусом единица. При этом K перейдет в замкнутое неограниченное множество F. Одновременно с этим произведем над мерой ε'_{x_0} преобразование Кельвина, т. е. заменим ее мерой γ, сосредоточенной на F и определяемой формулой

$$d\gamma(x^*) = \frac{1}{|x - x_0|}\, d\varepsilon'_{x_0}(x),$$

где $x^* \in F$ получается инверсией из точки $x \in K$.

Тогда нетрудно видеть, что (см. [3])

$$U^{\gamma}(x^*) = |x - x_0|\, U^{\varepsilon'_{x_0}}(x).$$

Далее можно показать, что при инверсии множество нулевой емкости переходит снова в множество нулевой емкости, и поэтому

$$U^{\gamma}(x^*) = 1$$

квази всюду на F. Кроме того, легко видеть, что

$$\|\varepsilon'_{x_0}\|^2 = \|\gamma\|^2 = \int U^{\gamma}(x^*)\, d\gamma(x^*) = \int d\gamma = C(F).$$

Отсюда и из леммы 2 следует, что условие $\| \varepsilon'_{x_0} \| < \infty$ эквивалентно такому

$$\sum_{n=1}^{\infty} C(F_n) < \infty, \tag{8}$$

где

$$F_n = F \cap \{x : q^{-n} \leqslant |x - x_0| \leqslant q^{-n-1}\}, \quad 0 < q < 1.$$

При инверсии множество F_n переходит в

$$K_n = K \cap \{x : q^{n+1} \leqslant |x - x_0| \leqslant q^n\}.$$

Если заметить еще, что для любой пары точек x, $y \in K_n$ справедливо неравенство

$$q^{-2n} |x - y| \leqslant |x^* - y^*| \leqslant q^{-2n-2} |x - y|,$$

где x^*, y^* — образы x, y при инверсии, то нетрудно будет получить следующую оценку для емкостей:

$$q^{-2n} C(K_n) \leqslant C(F_n) \leqslant q^{-2n-2} C(K_n),$$

что вместе с (8) доказывает необходимость и достаточность условия (4). Переход к условию (5) происходит так же, как переход от (2) к (3) (см. [2]).

Заметим в заключение, что таким же способом можно вывести и критерий Винера (2), если предварительно доказать, что для существования равновесной меры γ на неограниченном замкнутом множестве F необходимо и достаточно условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n C(F_n) < \infty, \quad 0 < q < 1.$$

Примечание. Во время печатания настоящей заметки автор получил письменное сообщение М. Брело, в котором указывается, что доказанная нами теорема может быть иным способом получена из результатов М. Брело (Bull. sci. Math., 68 (1944), 1—25).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. УМН, старая серия, 8, 171—292, 1941.

2. O. D. Kellogg and F. Vasilesco. A contribution to the theory of capacity. Amer. Journ. Math., 51 (1929).

3. M. Riesz. Intégrales de Riemann — Liouville et potentiels. Acta Szeged, 9, 1—42 (1938).