

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НЕПРИВОДИМЫХ СПИНОРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СОБСТВЕННОЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

В. Я. Голодец

Матричные элементы унитарных представлений собственной группы Лоренца G_+ изучались в работах [2], [5], [6]. В [5] были получены дифференциальные уравнения для матричных элементов конечномерных представлений этой группы. В данной заметке матричные элементы изучаемых представлений выражаются с помощью коэффициентов Клебша — Гордона группы вращений трехмерного пространства (G_3).

1. Известно, что неприводимое конечномерное представление группы G_+ ранга (k, n) , k и n — целые числа, является тензорным произведением двух неприводимых представлений ранга $(k, 0)$ и $(0, n)$, то есть

$$T_g^{(k, n)} = T_g^{(k, 0)} \times T_g^{(0, n)} \quad (1)$$

(см. [3], стр. 239).

Представление $T_g^{(k, n)}$ можно реализовать в пространстве $R_{k, n}$ многочленов $p(z, \bar{z})$ от комплексных переменных z и $\bar{z}$ степени $\leq k$ относительно z и $\leq n$ относительно $\bar{z}$. Если

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta = 1 \quad (2)$$

(α, β — комплексные числа)

и $p(z, \bar{z}) \in R_{k, n}$, то

$$T_g p(z, \bar{z}) = (\beta z + \delta)^k (\overline{\beta z + \delta})^n p\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}, \frac{\overline{\alpha z + \gamma}}{\overline{\beta z + \delta}}\right) \quad (3)$$

(см. [4]).

В силу (1) канонический базис $\xi_{lm}^{k, n}$ представления $T_g^{(k, n)}$ можно выразить через канонические базисы $\eta_{\frac{k}{2} m_1}$, $\bar{\eta}_{\frac{n}{2} m_2}$ представлений $T_g^{(k, 0)}$ и $T_g^{(0, n)}$ по формуле

$$\xi_{lm}^{k, n} = \sum_{m_1 + m_2 = m} \left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 | lm \right) \eta_{\frac{k}{2} m_1} \bar{\eta}_{\frac{n}{2} m_2}, \quad (4)$$

где $\left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 | lm \right)$ — коэффициенты Клебша—Гордона (см. [3]). Будем считать, что $\eta_{\frac{k}{2} m_1}$ и $\eta_{\frac{n}{2} m_2}$ имеют вид

$$\eta_{\frac{k}{2} m_1} = z^{\frac{k}{2} - m_1}, \quad \eta_{\frac{n}{2} m_2} = n^{\frac{n}{2} - m_2} \bar{z}^{\frac{n}{2} + m_2}, \quad (5)$$

$$n_{\frac{k}{2} m_1} = \frac{(-1)^{\frac{k}{2} - m_1}}{\sqrt{\left(\frac{k}{2} + m_1\right)! \left(\frac{k}{2} - m_1\right)!}} \quad (6)$$

(см. [4]).

Тогда полиномы $\xi_{lm}^{kn} \in R_{k,n}$. Эти функции весьма просто выражаются через полиномы Якоби, что легко следует из результатов работы [1].

Используем полиномы (4) для изучения матричных элементов. Заметим, что любую матрицу g вида (2) можно представить как

$$g = u_1 \varepsilon u_2,$$

где u_1, u_2 — унитарные, а $\varepsilon = \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{\tau} \end{pmatrix}$ (см. [4]).

Матричные элементы неприводимого конечномерного представления (k, n) соответственно можно выразить

$$U_{sl}^{pr}(g) = \sum_{l=-\min(p,r)}^{\min(p,r)} L_{sl}^p(u_1) K_l^{pr}(\tau) M_{lt}^r(u_2) \quad (7)$$

(см. [5]),

где L_{sl}^p и M_{lt}^r — матричные элементы неприводимых представлений группы G_3 веса p и r соответственно. Выражения для этих функций приведены в [3] и [4]. Задача состоит в определении функций $K_l^{pr}(\tau)$.

Из формулы (3) имеем

$$T_{\varepsilon}^{(k,n)} \xi_{rm}^{kn} = e^{(k+n)\tau} \xi_{rm}^{kn} (e^{-2\tau} z, e^{-2\tau} \bar{z})$$

или

$$T_{\varepsilon}^{(k,n)} \xi_{rm}^{(k,n)} = \sum_{m_1+m_2=m} \left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 | rm \right) n_{\frac{k}{2} m_1} n_{\frac{n}{2} m_2} e^{2(m_1-m_2)\tau} \times z^{\frac{k}{2}-m_1} \bar{z}^{\frac{n}{2}+m_2}. \quad (8)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} T_{\varepsilon} \xi_{rm}^{kn} &= \sum_p K_m^{pr}(\tau) \xi_{pm}^{kn} = \sum_p K_m^{pr}(\tau) \sum_{m_1+m_2=m} \left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 | pm \right) \times \\ &\times n_{\frac{k}{2} m_1} n_{\frac{n}{2} m_2} z^{\frac{k}{2}-m_1} \bar{z}^{\frac{n}{2}+m_2} = \sum_{m_1+m_2=m} \left\{ \sum_p \left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 | pm \right) K_m^{pr}(\tau) \right\} n_{\frac{k}{2} m_1} n_{\frac{n}{2} m_2} \times \\ &\times z^{\frac{k}{2}-m_1} \bar{z}^{\frac{n}{2}+m_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнивая коэффициенты в выражениях (8) и (9) при одинаковых степенях z и $\bar{z}$, находим

$$\left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 | rm \right) e^{2(m_1-m_2)\tau} = \sum_p \left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 | pm \right) K_m^{pr}(\tau).$$

В силу соотношений ортогональности для коэффициентов Клебша—Гордона получаем, что

$$K_m^{pr}(\tau) = \sum_{m_1+m_2=m} \left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 | pm \right) \left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 | rm \right) e^{2(m_1-m_2)\tau}. \quad (10)$$

Эти функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям, приведенным в [5]. Функции вида $K_p^{pr}(\tau)$ и $K_r^{pr}(\tau)$ просто выражаются через гипергеометрические полиномы.

Для больших $\tau > 0$ имеют место соотношения

$$K_m^{pr}(\tau) \sim \left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 | rm \right) \left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 | pm \right) e^{-2m\tau} e^{4\rho\tau}, \quad (11)$$

$$\rho = \max\{m_1\}, \quad m_1 + m_2 = m.$$

При $k > n > 0$ величина ρ находится по следующим правилам:

I. $m > 0$

а) $\rho = \frac{k}{2}$, если $m > \frac{k-n}{2}$;

в) $\rho = m + \frac{n}{2}$, если $m < \frac{k-n}{2}$;

II. $m < 0$

а) $\rho = m + \frac{n}{2}$, если $m < -\frac{n}{2}$;

в) $\rho = \frac{n}{2} + m$, если $m > -\frac{n}{2}$.

2. Теперь перейдем к выводу рекуррентных соотношений для некоторых линейных комбинаций матричных элементов U_{st}^{pr} (см. (7)) неприводимого конечномерного представления.

Заметим, что из формулы (4) следует, что

$$\begin{aligned} \eta_{\frac{k}{2}m_1} \bar{\eta}_{\frac{n}{2}m_2} &= n_{\frac{k}{2}m_1} n_{\frac{n}{2}m_2} z^{\frac{k}{2}m_1 - \frac{n}{2}m_2} = \\ &= \sum_{\substack{|k-n| \\ 2} \leq l \leq \frac{|k+n|}{2}} \left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 \middle| lm \right) \xi_{lm}^{kn}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим операторы

$$A = F_- + tH_-, \quad B = F_+ - iH_+, \quad C = F_- - iH_-, \quad D = F_+ + iH_+.$$

Эти операторы вычислены в статье [4], они оказываются равными

$$A = 2i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad B = 2i \frac{\partial}{\partial z}, \quad C = 2i \left(-z^2 \frac{\partial}{\partial z} + kz \right), \quad D = 2i \left(-\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + n\bar{z} \right).$$

Поэтому имеют место соотношения

$$A \eta_{\frac{k}{2}m_1} \bar{\eta}_{\frac{n}{2}m_2} = -2i \alpha_{m_2}^{\frac{n}{2}} \eta_{\frac{k}{2}m_1} \bar{\eta}_{\frac{n}{2}m_2-1}, \quad (1)$$

$$B \eta_{\frac{k}{2}m_1} \bar{\eta}_{\frac{n}{2}m_2} = -2i \alpha_{m_1+1}^{\frac{k}{2}} \eta_{\frac{k}{2}m_1+1} \bar{\eta}_{\frac{n}{2}m_2}, \quad (1)$$

$$C \eta_{\frac{k}{2}m_1} \bar{\eta}_{\frac{n}{2}m_2} = 2i \alpha_{m_1}^{\frac{k}{2}} \eta_{\frac{k}{2}m_1-1} \bar{\eta}_{\frac{n}{2}m_2}, \quad (1)$$

$$D \eta_{\frac{k}{2}m_1} \bar{\eta}_{\frac{n}{2}m_2} = 2i \alpha_{m_2}^{\frac{n}{2}} \eta_{\frac{k}{2}m_1} \bar{\eta}_{\frac{n}{2}m_2+1}, \quad (1)$$

где

$$\alpha_m^l = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}.$$

Теперь выберем в качестве канонического базиса строку матричных элементов U_{st}^{pr} (p, s — фиксированы), а представление определим следующим образом:

$$T_{g_1} U_{st}^{pr}(g) = U_{st}^{pr}(gg_1) \quad (\text{см. [3]}).$$

Тогда оказывается, что неприводимое представление в этой реализации эквивалентно неприводимому представлению, заданному по формуле (3) и имеющему канонический базис (4). Образует линейные комбинации

$$V_{sm_2}^{pm_1} = \sum_l \left(\frac{k}{2} \frac{n}{2} m_1 m_2 \middle| lm \right) U_{sm}^{pl}(g).$$

Функции $V_{sm_2}^{pm_1}$ шести переменных $\varphi_2, \theta_1, \tau, \varphi_1, \theta_2, \varphi$ удовлетворяют соотношениям (13—16), где F_+, F_-, H_+, H_- — дифференциальные операторы, приведенные в [5].

3. Сделаем несколько замечаний о коэффициентах Клебша — Гордона для конечномерных представлений группы G_+ . Так принято называть по аналогии со случаем группы вращений коэффициенты разложения

$$\xi_{lm}^{k'n'} = \sum H_{k_1 n_1 l_1 m_1; k_2 n_2 l_2 m_2} \xi_{l_1 m_1}^{k_1 n_1} \xi_{l_2 m_2}^{k_2 n_2}, \quad (17)$$

где $\{\xi_{lm}^{k'n'}\}$ — канонический базис компоненты $T_g^{(k'n')}$ в разложении тензорного произведения представлений $T_g^{(k_1 n_1)} \times T_g^{(k_2 n_2)}$ на неприводимые (см. [3]). Подставим вместо $\xi_{l_i m_i}^{k_i n_i}$ ($i = 1, 2$) в правой части (17) их выражения по формуле (4). Тогда $\xi_{lm}^{k'n'}$ — полином четырех переменных $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$, коэффициенты которого при степенях z обозначим через $C_{k_1 n_1 m_1' m_1''; k_2 n_2 m_2' m_2''}^{k'n'lm}$. Эти коэффициенты весьма просто выражаются через коэффициенты Клебша — Гордона группы вращений. Оказывается, что непрерывная функция $\xi_{lm}^{k'n'}$ аргументов $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$ и дискретная функция C аргументов m_1', m_1'', m_2', m_2'' имеют аналогичные свойства. Эту аналогию можно рассматривать как проявление двойственности между коэффициентами Клебша — Гордона и полиномами Якоби, указанную в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Л. Аким, А. А. Левин. Производящая функция для коэффициентов Клебша — Гордона. «Докл. АН СССР», 138, № 3 (1961).
2. Н. Я. Виленкин. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы вещественных ортогональных матриц и группы движений $(n-1)$ -мерного евклидова пространства, «Докл. АН СССР», 113, № 1 (1957).
3. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос и З. Я. Шапиро. Представление группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, 1958.
4. М. А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. «Усп. матем. наук», 9: 4 (62) (1954).
5. В. Я. Голодец. Матричные элементы неприводимых унитарных и спинорных представлений группы Лоренца, «Изв. АН БССР, серия физ.-техн.», 1 (1961).
6. Л. Д. Эскин. О матричных элементах неприводимых представлений группы Лоренца. «Изв. вузов, математика», 6 (1961).