ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ISSN 0321-4427

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## 55

«ОСНОВА»

# СОДЕРЖАНИЕ

*СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ*

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ,**
**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**
**И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**ВЫПУСК 55**

Редактор *О. И. Григорьян*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректор *Л. П. Сыч*

ИБ № 14318

Сдано в набор 12.02.91. Подписано в печать 12.06.91. Формат 60×90/16. Бу
тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 9. Усл. кр
отт. 9,25. Уч. изд. л. 10. Тираж 700 экз. Изд. № 1976. Зак. 497. Цена 2

Издательство «Основа» при Харьковском государственном университете.
310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе. 310057 Харьк
ул. Донец-Захаржевского, 6/8, в Харьковской городской типографии №
Харьков-3 ул. Университетская, 16. Зак. 643.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО
ЗНАМЕНИ И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Республиканский
межведомственный
научный сборник**

**Основан в 1965 г.**

**ВЫПУСК 55**

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ОСНОВА»
ПРИ ХАРЬКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ
1991

УДК 513.33

Сборник содержит статьи по краевой задаче Римана с бесконечным индексом теории целых функций, теории субгармонических функций в конусе, теории распределения значений мероморфных функций, геометрии банаховых пространств, теории представлений конечных групп.

Для научных работников и специалистов.

*Адрес редакционной коллегии:* 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-73-27

Редакция естественнонаучной литературы
Зав. редакцией Е. П. Иващенко

Т $\frac{1602070000-033}{М226(04)-91}$ 54-91

УДК 517.53

*И. В. ОСТРОВСКИЙ*

# УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

**§ 1. Формулировки основных результатов.** В 60-х гг. Н. В. Говоров построил теорию краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного характера, позднее изложенную в его монографии [1]. Эта теория обобщалась рядом авторов в различных направлениях; обзор соответствующих результатов и библиографию можно найти в [2, § 49; 3 — 6]. В настоящей статье речь пойдет только об однородной задаче. Основное отличие наших результатов от предшествующих состоит в существенно меньшей жесткости ограничений на поведение в бесконечности аргумента коэффициента задачи.

Будем пользоваться терминологией, принятой в [1]. Пусть $D$ — плоскость, разрезанная вдоль луча $\{t: 1 \leqslant t < \infty\}$. Рассмотрим в $D$ следующую краевую задачу:

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t), \quad 1 < t < \infty, \tag{1.1}$$

где $G$ — коэффициент задачи — непрерывная, не обращающаяся в нуль на $[1, \infty)$ функция. Пусть $\arg G$ — непрерывная на $[1, \infty]$ ветвь аргумента, выделяемая условием $0 \geqslant \arg G(1) > -2\pi$. Будем в дальнейшем считать, что функция $\ln G = \ln|G| + i \arg G$ непрерывна по Дини на каждом отрезке $[1, a]$, т. е. при любом $a > 1$ ее модуль непрерывности $\omega_a(\delta)$ на $[1, a]$ удовлетворяет условию $\int\limits_0 \omega_a(\delta)\,\delta^{-1} d\delta < \infty$.

Чтобы ввести классы функций, в которых мы будем искать решение задачи (1.1), а также чтобы сформулировать ограничения, относящиеся к поведению $\ln G$ на бесконечности, понадобится понятие уточненного порядка. Напомним, что уточненным порядком называется положительная функция $\rho(r) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющая условиям

$$\exists \lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho \in [0, \infty), \ \lim_{r\to\infty} \rho'(r)\, r \ln r = 0, \ r^{\rho(r)} \uparrow \infty \ (r \uparrow \infty).$$

Будем считать известными свойства уточненных порядков в объеме [7, гл. 1, § 12] или [8, гл. II, § 2]. Иногда мы будем задавать уточненный порядок только на некоторой полуоси $[r_0, \infty)$, $r_0 > 0$, так как способ его продолжения до положительной функции из $C^1(\mathbb{R}_+)$ не имеет значения.

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок. Положим $V(r) = r^{\rho(r)}$, $V^0(r) = \int\limits_0^r V(t)\frac{dt}{t}$. Нетрудно убедиться, что $V^0(r) = r^{\rho^0(r)}$, где $\rho^0(r)$ — уточненный порядок, причем $\lim\limits_{r\to\infty} \rho^0(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$ и $\lim\limits_{r\to\infty} V(r)/V^0(r) =$ $= \rho$, $\lim\limits_{r\to\infty} V^0(r)/\ln r = \infty$. Заметим, что при $\rho > 0$ можно было бы всюду в дальнейшем вместо $V^0$ брать $V/\rho$.

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho < 1/2$. Обозначим через $B(\rho^0(r))$ класс функций $\Phi$, удовлетворяющих условиям: (а) $\Phi$ аналитична в $D$; (б) $\Phi$ непрерывна на множестве $(D)$, получаемом присоединением к $D$ обоих берегов разреза вдоль открытой полуоси $(1, \infty)$, и ограничена в окрестности точки $z = 1$; (в) для любого $\varepsilon > 0$ существует равномерный относительно $\theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ предел

$$\lim_{r\to\infty} (\ln|\Phi(re^{i\theta})|)/V^0(r) = -\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\theta - \pi); \qquad (1.2)$$

(г) существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \max\{(\ln|\Phi(re^{i\theta})|)/V^0(r) : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\} = -\pi\rho\,\mathrm{ctg}\,\pi\rho. \qquad (1.3)$$

При $\rho = 0$ выражения в правых частях (1.2) и (1.3) следует по определению считать равными —1. Заметим, что при любом $\rho \in [0, 1/2$ правая часть (1.3) отрицательна, поэтому функции $\Phi \in B(\rho^0(r))$ ограничены в $(D)$ и стремятся к 0 на бесконечности. Можно показать (мы это не используем), что функции $\Phi \in B(\rho^0(r))$ являются в замыкании области $D$ функциями вполне регулярного роста в смысле Левина — Пфлюгера относительно уточненного порядка $\rho^0(r)$.

Обозначим через $B^r(\rho^0(r))$ подкласс класса $B(\rho^0(r))$, состоящий из функций $\Phi$, для которых (1.2) выполняется равномерно относительно $\theta \in [0, 2\pi]$.

На поведение функции $\ln G$ на бесконечности будем накладывать следующие ограничения. Найдется пара уточненных порядков $(\rho(r), \rho_1(r))$, удовлетворяющая условиям

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \rho(r) < 1/2;\ V_1(r)\ln r = o(V^0(r)),\ r \to \infty\ (V_1(r) = r^{\rho_1(r)}), \qquad (1.4)$$

и неубывающая целозначная функция $n(t) \geqslant 0$ такие, что: (*А*) справедливо представление

$$\frac{1}{2\pi}\arg G(t) = n(t) + V(t) + O(V_1(t)),\ t \to \infty; \qquad (1.5)$$

(Б) имеет место соотношение

$$\varlimsup_{t\to\infty} (V^0(t))^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{k(t)} (\arg G(t+u) - \arg G(t-u))\frac{du}{u} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{k(t)} (n(t+u) - n(t-u)\left(\frac{du}{u}\right\} \leqslant 0, \qquad (1.6)$$

где

$$k(t) = \exp\{-V^0(t)/(V_1(t)\ln t)\}; \qquad (1.7)$$

(В) справедлива оценка

$$\ln|G(t)| = o(V(t)),\ t \to \infty. \tag{1.8}$$

**Теорема 1.** *Пусть функция* $\ln G$ *непрерывна по Дини на каждом отрезке* $[1,\ a]$, $a > 1$, *и, кроме того, удовлетворяет условиям* (А), (Б), (В). *Тогда задача* (1.1) *имеет решение* $\Phi \in B(\rho^0(r))$.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия теоремы 1. Предположим дополнительно, что в* (А) *имеем* $n(t) \equiv 0$, *а* (Б) *заменено более сильным условием:*

(Б$^0$) *справедливо соотношение*

$$\int\limits_0^{k(t)} (\arg G(t+u) - \arg G(t-u))\ \frac{du}{u} = o(V^0(t)),\ t \to \infty.$$

*Тогда задача* (1.1) *имеет решение* $\Phi \in B^r(\rho^0(r))$.

Рассмотрим также следующие ограничения на поведение $\ln G$ на бесконечности, имеющие более простой характер, чем (А) — (В): найдется целозначная функция $0 \leqslant n(t) \uparrow \infty\ (t \uparrow \infty)$ такая, что (А′) справедливо представление

$$\frac{1}{2\pi} \arg G(t) = n(t) + O(1),\ t \to \infty;$$

(Б′) при некотором $\sigma > 0$ имеет место соотношение

$$\varlimsup_{t \to \infty} (\ln t)^{-1} \left\{ \int\limits_0^{t-\sigma} (\arg G(t+u) - \arg G(t-u)) \frac{du}{u} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{t-\sigma} (n(t+u) - n(t-u)) \frac{du}{u} \right\} < \infty;$$

(В′) справедлива оценка

$$\ln|G(t)| = O(\ln t),\ \ t \to +\infty.$$

**Теорема 3.** *Пусть функция* $\ln G$ *непрерывна по Дини на каждом отрезке* $[1,\ a]$, $a > 1$, *и, кроме того, удовлетворяет условиям* (А′), (Б′), (В′). *Тогда задача* (1.1) *имеет нетривиальное решение* $\Phi$, *ограниченное в* $(D)$.

**§ 2. Связь с известными результатами.** Н. В. Говоров [1, гл. V] рассматривал задачу (1.1) при следующих ограничениях на коэффициент $G$: 1) справедливо представление

$$\frac{1}{2\pi} \arg G(t) = \varphi(t)\, t^\rho,\ 1 \leqslant t < \infty, \tag{2.1}$$

где $\rho > 0$, а функция $\varphi$ удовлетворяет условиям

$$\varphi \in H_{[1,\,\infty)}(\mu_0),\ 1 \geqslant \mu_0 > \left(\frac{2\rho - 1}{2\rho + 1}\right)^+,\ \varphi(\infty) > 0,\ 0 \geqslant \varphi(1) > -1; \tag{2.2}$$

2) выполняется

$$\ln|G|\in H_{[1,\infty)}(\mu),\ 1\geqslant\mu>0.$$

При этих ограничениях им было, в частности, установлено [1, § 28, что если положительное $\sigma<\min(1/2,\rho)$ таково, что $\mu_0>(\rho-\sigma)/(1-$ $+\rho-\sigma)$, то при произвольном $\tau>0$ задача (1.1) имеет решение в классе $B_\sigma$ (определение см. [1, с. 132]), допускающее оценку

$$\max\{|\Phi(re^{i\theta})|:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}\leqslant\exp\{-(\pi\tau\operatorname{ctg}\pi\sigma+ +o(1))r^\sigma\},\ r\to\infty. \tag{2.3}$$

Покажем, что этот результат содержится в теореме 1. Как установлено в [1, с. 166, (28.9)] (см. также лемму 2 ниже), из услови 1) следует, что существуют неубывающая целозначная функци $n(t)\geqslant 0$ и число $\nu\in(0,\sigma)$ такие, что

$$\frac{1}{2\pi}\arg G(t)=n(t)+\tau t^\sigma+O(t^\nu),\ t\to\infty. \tag{2.4}$$

Считая $t_0$ достаточно большим, определим при $t\geqslant t_0$ уточненные порядки $\rho(t)=\sigma+(\ln\tau)/\ln t$, $\rho_1(t)\equiv\nu$. Равенство (2.4) показывает, что выполнено условие (А).

Для проверки условия (Б), заметим, что второй интеграл в (1. неотрицателен, поскольку функция $n$ неубывающая. Следователь (Б) будет выполнено, если выполнено условие

($\tilde{\text{Б}}$) имеет место соотношение

$$\varlimsup_{t\to\infty}(V^0(t))^{-1}\int\limits_0^{k(t)}(\arg G(t+u)-\arg G(t-u))\,\frac{du}{u}\leqslant 0, \tag{2.5}$$

где $k(t)$ определено равенством (1.7). Отметим сразу же, что условия (Б) и ($\tilde{\text{Б}}$) неэквивалентны (см. замечание в конце § 7).

Так как $V(t)=\tau t^\sigma$, $V_1(t)=t^\nu$, то

$$V^0(t)=(\tau/\sigma)t^\sigma+O(1),\quad k(t)=\exp\{-(\tau/\sigma)t^{\sigma-\nu}/\ln t+O(1)\},\ t\to\infty. \tag{2.6}$$

Поскольку $\varphi\in H_{[1,\infty)}(\mu_0)$, то из (2.1) следует, что при $0<u\leqslant t/$ выполняется

$$|\arg G(t+u)-\arg G(t-u)|\leqslant|\varphi(t+u)-\varphi(t-u)|(t+u)^\rho+ +|\varphi(t-u)|((t+u)^\rho-(t-u)^\rho))\leqslant C_1u^{\mu_0}t^{\rho-2\mu_0}+C_2ut^{\rho-1}. \tag{2.7}$$

Поэтому из (2.6) вытекает справедливость (2.5).

Условие (В) выполнено, так как в силу (1.8) имеем $\ln|G(t)|=$ $=O(1)$, $t\to\infty$. Непрерывность функции $\ln G$ по Дини на любом отрезке $[1,a]$, $a>1$ является очевидным следствием условий 1) и 2. Таким образом, выполнены условия теоремы 1. Так как функци класса $B(\rho^0(r))$ с $\rho^0(r)=\sigma+\ln(\tau/\sigma)/\ln r$ принадлежат $B_\sigma$ и допускают оценку (2.3), получаем цитированный результат Н. В Говорова

Если в (2.1) имеем $\rho < 1/2$, то можно вместо (2.4) воспользоваться соотношением $\frac{1}{2\pi} \arg G(t) = \varphi(\infty) t^{\rho} + O(t^{\rho-\mu_0})$, $t \to \infty$, непосредственно вытекающим из (2.1) и того, что $\varphi \in H_{[1,\infty)}(\mu_0)$. Легко видеть, что тогда мы находимся в условиях теоремы 2 (с $V(t) = \varphi(\infty) t^{\rho}$, $V^0(t) = (\varphi(\infty)/\rho) t^{\rho} + O(1)$, $V_1(t) = t^{\nu}$, $\nu = \max(\rho - \mu_0, \rho/2)$). С ее помощью заключаем, что задача (1.1) имеет решение $\Phi$, для которого существует равномерный по $\theta \in [0,2\pi]$ предел $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-\rho} \ln|\Phi(re^{i\theta})| = -\pi(\sin \pi\rho)^{-1} \cos \rho(\theta - \pi)$. Этот результат также был получен Н. В. Говоровым [1, с. 115].

П. Г. Юров [9] (см. также [2, п. 49.4]) рассматривал задачу (1.1) при следующих ограничениях на коэффициент $G$:

1′) справедливо представление

$$\frac{1}{2\pi} \arg G(t) = \varphi(t) \ln^{\alpha}(\mathrm{e}t), \ 1 \leqslant t < \infty,$$

где $\alpha > 0$, $\varphi \in D_{[1,\infty)}(\beta)$, $\beta > \alpha + 1$, $\varphi(\infty) > 0$, $0 \geqslant \varphi(1) > -1$;

2′) $\ln|G(t)| \in D_{[1,\infty)}(\gamma)$, $\gamma > 1$.

Через $D_{[1,\infty)}(\beta)$ здесь обозначен класс функций $\varphi(t)$, $1 \leqslant t < \infty$ таких, что $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant C \ln^{-\beta}\{2|t_1^{-1} - t_2^{-1}|^{-1}\}$, $1 \leqslant t_1$, $t_2 < \infty$, $C > 0$.

При этих ограничениях им было, в частности, установлено, что задача (1.1) имеет решение $\Phi$, допускающее равномерную относительно $\theta \in [0, 2\pi]$ асимптотику $\ln|\Phi(re^{i\theta})| = -(1 + o(1)) \varphi(\infty)(\alpha + 1)^{-1} \ln^{\alpha+1} r$, $r \to \infty$. Покажем, что этот результат содержится в теореме 2.

Так как из $\varphi \in D_{[1,\infty)}(\beta)$ следует, что $\varphi(t) = \varphi(\infty) + O(\ln^{-\beta} t)$, $t \to \infty$, имеем $\frac{1}{2\pi} \arg G(t) = \varphi(\infty) \ln^{\alpha}(t) + O(1)$, $t \to \infty$. Поэтому выполнено условие (А) с $n(t) \equiv 0$, $\rho(t) = (\alpha \ln\ln t + \ln \varphi(\infty))/\ln t$, $\rho_1(t) = \gamma \ln\ln t/\ln t$, $t \geqslant t_0 > 1$, где $\gamma$ — любое число из интервала $(0, \alpha)$. Очевидно, $V^0(t) = \frac{\varphi(\infty)}{\alpha+1} \ln^{\alpha+1} t + O(1)$, $k(t) = \exp\left\{-\frac{\varphi(\infty)}{\alpha+1} \ln^{\alpha-\gamma} t + O(1)\right\}$, $t \to \infty$. Ясно, что условия (Б$^0$) и (В) выполнены, кроме того, функция $\ln G$ непрерывна по Дини на каждом отрезке $[1, a]$, $a > 1$. Поэтому из теоремы 2 следует цитированный результат П. Г. Юрова.

И. Е. Сандригайло [10] рассматривал краевую задачу Римана для полуплоскости, аналогичную задаче (1.1), при следующих ограничениях на коэффициент $G$:

1″) справедливо представление $\frac{1}{2\pi} \arg G(t) = \varphi(t) t^{\rho(t)}$, $t \geqslant 1$, где $\rho(t)$ — уточненный порядок, $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(t) = \rho > 0$, а функция $\varphi$ удовлетворяет (2.2);

2″) $t^{-\beta} \ln|G(t)| \in H_{[1,\infty)}(\mu)$, $1 \geqslant \mu > 0$, где $\beta \in (0, \sigma)$, а число $\sigma < \min(1/2, \rho)$ таково, что $\mu_0 > (\rho - \sigma)/(1 + \rho - \sigma)$.

На основании [10] представляется возможным, что И. Е. Сандригайло имел доказательство того, что при указанных ограничениях задача (1.1) имеет при любом $\tau > 0$ решение $\Phi \in B_\sigma$, допускающее оценку (2.3). Этот факт также содержится в теореме 1. Действительно, с помощью рассуждений, близких к проведенным в [1, с. 164—166] (см. также лемму 2 ниже), устанавливается, что из условия 1") вытекает справедливость представления (2.4). Поэтому можно применить теорему 1 с $\rho(t) = \sigma + \ln\tau/\ln t$, $\rho_1(t) \equiv \nu$, $t \geqslant t_0 > 1$.

Отметим, что условие 2"), в отличие от 2) и 2'), допускает возможность степенного роста для $\ln|G(t)|$ при $t \to \infty$. Впервые такое ослабление условий 2), 2') появилось одновременно в [10] и в работе С. В. Рогозина [11].

**§ 3. Результаты, являющиеся следствиями основных.** Во всех трех приведенных выше результатах — Н. В. Говорова, П. Г. Юрова и И. Е. Сандригайло — ограничения на асимптотическое поведение коэффициента $G$ задачи (1.1) таковы, что $\arg G(t) \sim t^{\rho(t)}$, $\ln|G(t)| \sim \sim \pm t^{\tilde{\rho}(t)}$, $t \to \infty$, где $\rho(t)$, $\tilde{\rho}(t)$ — некоторые уточненные порядки. Теоремы 1—3 позволяют установить разрешимость задачи (1.1) при ограничениях, допускающих не столь регулярное асимптотическое поведение коэффициента $G$, а также при ограничениях, допускающих сколь угодно быстрый рост $\arg G$ при $t \to \infty$. Ограничения первого рода будут указаны ниже в формулировках теорем 4 и 5, а второго — в формулировке теоремы 6.

Пусть $l(r)$ — уточненный порядок Бутру, т. е. $l(r) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и выполнены условия

$$\lim_{r\to\infty} l'(r)\, r \ln r = 0, \quad 0 < \lambda = \varliminf_{r\to\infty} l(r) \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} l(r) = \rho < \infty. \qquad (3.1)$$

Уточненный порядок Бутру обладает некоторыми свойствами, присущими обычному уточненному порядку [8, с.91], в частности, функция $r^{l(r)}$ возрастает при достаточно больших $r$. Пример $l(r) = \lambda + \frac{1}{2}(\rho - - \lambda)(1 + \sin\ln\ln\ln(r+b))$, $b > e^e$, показывает, что для любой пары чисел $(\lambda, \rho)$, $0 < \lambda \leqslant \rho < \infty$, существует уточненный порядок Бутру, удовлетворяющий (3.1).

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение цитированного в § 2 результата Н. В. Говорова.

**Теорема 4.** *Пусть числа* $\lambda$, $\rho$, $\sigma$, $\mu_0$ *таковы, что*

$$0 < \lambda \leqslant \rho < \infty,\ 0 < \sigma < \min(1/2, \lambda),\ 0 < \mu_0 \leqslant 1,$$
$$\min(\mu_0, \lambda - \sigma) > \frac{\rho - \sigma}{1 + \rho - \sigma}. \qquad (3.2)$$

*Предположим, что коэффициент* $G$ *задачи* (1.1) *удовлетворяет условиям:* 1) *справедливо представление*

$$\frac{1}{2\pi} \arg G(t) = \varphi(t)\, t^{l(t)},\ 1 \leqslant t < \infty,$$

*где* $l(t)$ — *уточненный порядок Бутру,* $\lambda = \varliminf_{t\to\infty} l(t)$, $\rho = \varlimsup_{t\to\infty} l(t)$, а

$$\varphi \in H_{[1,\infty)}(\mu_0),\ \varphi(\infty) > 0,\ 0 \geqslant \varphi(1) > -1; \qquad (3.$$

2) *функция* $\ln|G|$ *непрерывна по Дини на каждом отрезке* $[1, a]$, $a > 1$, *и справедлива оценка* $\ln|G(t)| = o(t^{\sigma})$, $t \to \infty$. *Тогда при любом* $\tau > 0$ *задача* (1.1) *имеет решение* $\Phi \in B_{\sigma}$, *допускающее оценку* (2.3).

Легко видеть, что при заданных $\lambda$ и $\rho$ можно найти $\sigma$ и $\mu_0$, удовлетворяющие (3.2), тогда и только тогда, когда $\rho/(1+\rho) < \lambda \leqslant \rho < \infty$. В связи с этим представляет интерес следующий результат, в котором можно, в частности, положить $\frac{1}{2\pi}\arg G(t) = t^{l(t)}$, где $l(t)$ — уточненный порядок Бутру с произвольными наперед заданными $\lambda$ и $\rho$.

**Теорема 5.** *Предположим, что коэффициент* $G$ *задачи* (1.1) *удовлетворяет условиям:*

1′) *функция* $\arg G$ *непрерывно дифференцируема на* $(1, \infty)$, *монотонно стремится к* $+\infty$ *при* $t \uparrow \infty$, *и для некоторого* $\sigma > 0$ *справедлива оценка* $(d/dt)\arg G(t) = O(t^{\sigma})$, $t \to \infty$;

2′) *функция* $\ln|G|$ *непрерывна по Дини на каждом отрезке* $[1, a]$, $a > 1$, и $\ln|G(t)| = O(\ln t)$, $t \to \infty$. *Тогда задача* (1.1) *имеет нетривиальное решение, ограниченное в* $(D)$.

Далее понадобится такой факт из [12].

**Лемма** [12]. *Пусть заданы непрерывная на* $[1, \infty)$ *функция* $q(r) \uparrow \infty$ *и число* $\beta > 0$. *Существует целая функция* $h$, $h(r) \geqslant q(r)$ $(r \geqslant 1)$, *удовлетворяющая условиям:*

$$|h(z)| \leqslant h(\mathrm{Re}\, z), \ \mathrm{Re}\, z \geqslant 0; \tag{3.4}$$

$$e^r \leqslant h(r + h^{-\beta}(r)) = O(h(r)), \ r \to +\infty. \tag{3.5}$$

Примерами функций $h$, удовлетворяющих (3.4), (3.5), могут служить экспонента, ее итерации любого порядка и их производные.

**Теорема 6.** *Пусть коэффициент* $G$ *задачи* (1.1) *удовлетворяет условиям:*

(1) *справедливо представление*

$$\frac{1}{2\pi}\arg G(t) = \int\limits_1^t h(u)\,du + V(t) - 1, \ 1 \leqslant t < \infty, \tag{3.6}$$

*где* $h$ — *целая функция, для которой выполняются* (3.4) *и* (3.5) *с некоторым* $\beta \in (0, 1/2)$, *а* $V(t) = t^{\rho(t)}$, $\rho(t)$ — *уточненный порядок,* $\lim\limits_{t \to \infty} \rho(t) < 1/2$;

2) *функция* $\ln|G|$ *непрерывна по Дини на каждом отрезке* $[1, a]$, $a > 1$, *и справедлива оценка* $\ln|G(t)| = o(V(t))$, $t \to \infty$.

*Тогда задача* (1.1) *имеет решение* $\Phi \in B(\rho^0(r))$.

Лемма из [12] показывает, что функции $h$, о которых говорится в условии 1) теоремы 6, могут иметь сколь угодно быстрый рост.

**§ 4. Доказательства теорем 1, 2 и 3.** Установленная Н. В. Говоровым формула [1, с. 165, (28.7)] для решения задачи (1.1) при условиях 1), 2) из § 2 позволяет предположить, что решение задачи (1.1) в классе $B(\rho^0(r))$ при условиях теоремы 1 имеет вид

$$\Phi(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_{1}^{\infty}\frac{\ln G(t) - 2\pi i n(t)}{t(t-z)}\,dt\right\}. \tag{4.1}$$

Докажем, что это действительно имеет место.

Заметим, что интеграл, фигурирующий в (4.1), абсолютно сходится при всех $z \in D$, так как в силу условий (1.5), (1.8), (1.4) имеем

$$\ln G(t) - 2\pi i n(t) = \ln|G(t)| + 2\pi i\left(\frac{1}{2\pi}\arg G(t) - n(t)\right) =$$

$$= O(V(t)) = o(\sqrt{t}),\ t \to \infty.$$

В силу известной теоремы Племеля—Привалова непрерывность по Дини функции $\ln G$ на любом отрезке $[1,\ a]$, $a > 1$, влечет непрерывность функции $\Phi$ на множестве $(D)$. Формула Сохоцкого—Племеля показывает, что функция $\Phi$ удовлетворяет краевому условию (1.1). Функция $\Phi$ ограничена в окрестности точки $z = 1$: это вытекает (ср. [1, с. 115]) из нормировки $0 \geqslant \arg G(1) > -2\pi$ и того, что $n(1) \geqslant 0$. Таким образом, теорема 1 будет доказана, если удастся установить, что функция $\Phi$ удовлетворяет условиям (в) и (г) из определения класса $B(\rho^0(r))$.

Сначала покажем, что функция $\Phi$ ограничена в $(D)$ — это составляет основную часть доказательства. Будем опираться на следующую теорему, по существу принадлежащую Р. Неванлинне [13] и представляющую обобщение принципа Фрагмена—Линделефа.

**Теорема А.** *Пусть функция* $\Psi$ *аналитична в полуплоскости* $\{\zeta:\ \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ *и ограничена в каждом полукруге* $\{\zeta: |\zeta| < R,\ \operatorname{Im}\zeta > 0\}$, $R > 0$. *Обозначим через* $\Psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *угловые предельные значения функции* $\Psi$ *и предположим, что почти всюду*

$$|\Psi(x)| \leqslant M < \infty,\ x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

*Если выполнено условие*

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_{0}^{\pi}\ln^{+}|\Psi(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta = 0, \tag{4.3}$$

*то будем иметь* $\sup\{|\Psi(\zeta)|: \operatorname{Im}\zeta > 0\} \leqslant M$.

Эта теорема доказана в [13] при дополнительном предположении аналитичности функции $\Psi$ в $\{\zeta: \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0\}$. Без этого предположения она получается с помощью тех же рассуждений — только вместо формулы Р. Неванлинны для полукруга [8, с. 16, (2.3)] нужно воспользоваться ее обобщением, данным в [1, с. 23, (2.4)].

Применяя теорему А к функции $\Psi(\zeta) = \Phi(\zeta^2)$, $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$, видим, что для доказательства ограниченности функции $\Phi$ в $(D)$ достаточно установить справедливость двух следующих фактов:

$$|\Phi^{+}(r)| + |\Phi^{-}(r)| \leqslant M < \infty,\ 1 \leqslant r < \infty; \tag{4.4}$$

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}\int_{0}^{2\pi}\ln^{+}|\Phi(re^{i\theta})|\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 0. \tag{4.5}$$

Докажем сначала, что для функции (4.1) имеет место (4.5). Так как

$$\ln \Phi(z) = \frac{z}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{\ln|G(t)|\,dt}{t(t-z)} + z \int_1^\infty \frac{\frac{1}{2\pi} \arg G(t) - n(t)}{t(t-z)}\,dt,$$

в силу условий (1.8), (1.5), (1.4) получаем

$$|\ln \Phi(re^{i\theta})| \leqslant \frac{r}{2\pi} \int_1^\infty \frac{|\ln|G(t)||}{t|t-re^{i\theta}|}\,dt + r \int_1^\infty \frac{\left|\frac{1}{2\pi} \arg G(t) - n(t)\right|}{t|t-re^{i\theta}|}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant Cr \int_1^\infty \frac{V(t)\,dt}{t|t-re^{i\theta}|}$$

(здесь и далее буквой $C$, возможно, с индексами, обозначаем положительные постоянные, не обязательно одинаковые). Отсюда следует

$$\int_0^{2\pi} |\ln \Phi(re^{i\theta})| \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \leqslant Cr \int_1^\infty \frac{V(t)\,dt}{t} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta}{|t-re^{i\theta}|} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 r \int_1^\infty \frac{V(t)\,dt}{t\max(r,t)} = C_1 \int_1^r \frac{V(t)\,dt}{t} + C_1 r \int_r^\infty \frac{V(t)\,dt}{t^2}. \tag{4.6}$$

Используя свойства уточненных порядков [7, с. 49—50; 8, с. 73—74], заключаем, что

$$\int_0^{2\pi} |\ln \Phi(re^{i\theta})| \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \leqslant C_2 V^0(r), \quad r > r_0. \tag{4.7}$$

Поскольку в силу (1.4) имеем $V^0(r) = o(\sqrt{r})$, $r \to \infty$, то выполняется (4.5).

Докажем теперь, что для функции (4.1) имеет место также и (4.4). При любом $r > 1$, не являющемся точкой разрыва функции $n$, имеем в силу формулы Сохоцкого—Племеля

$$\ln \Phi^\pm(r) = \pm \frac{1}{2}(\ln G(r) - 2\pi i n(r)) + \frac{r}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{\ln G(t) - 2\pi i n(t)}{t(t-r)}\,dt$$

(интеграл существует в смысле главного значения). Отделяя действительную часть, получим

$$\ln|\Phi^\pm(r)| = \pm \frac{1}{2} \ln|G(r)| + \frac{r}{2\pi} \int_1^\infty \frac{\arg G(t) - 2\pi n(t)}{t(t-r)}\,dt.$$

Пусть $k(r)$ — величина, фигурирующая в (2.5); положим $\Lambda(r) = [r - k(r),\ r + k(r)]$, $\Omega(r) = [1,\ \infty) \setminus \Lambda(r)$, $r \geqslant 2$. Имеем

$$\ln|\Phi^{\pm}(r)| = \pm\frac{1}{2}\ln|G(r)| + \frac{r}{2\pi}\left(\int\limits_{\Delta(r)} + \int\limits_{\Omega(r)}\right)\frac{\arg G(t) - 2\pi n(t)}{t(t-r)}\,dt =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\ln|G(t)| + J_1(r) + J_2(r). \tag{4.8}$$

Оценим сверху интегралы $J_1(r)$ и $J_2(r)$. Имеем

$$J_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta(r)}\frac{\arg G(t) - 2\pi n(t)}{t-r}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta(r)}\frac{\arg G(t) - 2\pi n(t)}{t}\,dt. \tag{4.9}$$

Так как в силу (1.5) и (1.4) справедлива оценка $\arg G(t) - 2\pi n(t) = o(\sqrt{t})$, $t \to \infty$, второй интеграл в (4.9) есть $o(k(r)/\sqrt{r}) = o(1)$, $r \to \infty$. Преобразуя первый интеграл, получим

$$J_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{k(r)}\{(\arg G(r+u) - \arg G(r-u)) - 2\pi(n(r+u) -$$

$$- n(r-u))\}\frac{du}{u} + o(1),\ r \to \infty,$$

откуда с помощью условия (Б) (1.6) заключаем, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}(V^0(r))^{-1}J_1(r) \leqslant 0. \tag{4.10}$$

Интеграл $J_2(r)$ запишем в виде

$$J_2(r) = r\int\limits_{\Omega(r)}\left\{\frac{1}{2\pi}\arg G(t) - n(t) - V(t)\right\}\frac{dt}{t(t-r)} +$$

$$+ r\int\limits_{\Omega(r)}\frac{V(t)\,dt}{t(t-r)} = J_2^{(1)}(r) + J_2^{(2)}(r).$$

В силу (1.5) имеем

$$|J_2^{(1)}(r)| \leqslant Cr\int\limits_{\Omega(r)}\frac{V_1(t)\,dt}{t|t-r|} = Cr\left(\int\limits_1^{r/2} + \int\limits_{r/2}^{r-k(r)} + \int\limits_{r+k(r)}^{2r} + \int\limits_{2r}^{\infty}\frac{V_1(t)\,dt}{t|t-r|}\right. \leqslant$$

$$\leqslant Cr\left(\frac{2}{r}V_1\left(\frac{r}{2}\right)\ln\frac{r}{2} + \frac{2}{r}V_1(r-k(r))\int\limits_{r/2}^{r-k(r)}\frac{dt}{r-t} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r+k(r)}V_1(2r)\int\limits_{r+k(r)}^{2r}\frac{dt}{t-r} + 2\int\limits_{2r}^{\infty}V_1(t)\frac{dt}{t^2}\right) \leqslant CV_1(r)\ln(r/k(r)).$$

(как и при выводе (4.7) из (4.6), использовались свойства уточненных порядков). Учитывая выражение (1.7) для $k(r)$ и условие (1.4), заключаем, что $J_2^{(1)}(r) = o(V^0(r))$, $r \to \infty$. Для оценки интеграла $J_2^{(2)}(r)$ понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.** *Пусть* $\rho(r)$ — *уточненный порядок,* $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r) = \rho < 1$. *Справедливо соотношение*

$$r\int\limits_{1}^{\infty}\frac{V(t)\,dt}{t(t-r)}=-(\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho+o(1))\,V^0(r),\quad r\to\infty,\tag{4.11}$$

*(интеграл понимается в смысле главного значения, а* $\pi\rho\operatorname{ctg}\times\times\pi\rho|_{\rho=0}=1$).

С помощью леммы 1 завершим доказательство теоремы, а в § 5 докажем эту лемму. Так как в силу свойств уточненных порядков имеем

$$r\int\limits_{\Delta(r)}\frac{V(t)\,dt}{t(t-r)}=\int\limits_{0}^{k(r)}(V(r+u)-V(r-u))\frac{du}{u}+\int\limits_{\Delta(r)}V(t)\frac{dt}{t}=o(1),\ r\to\infty,$$

применяя лемму, получим

$$J_2^{(2)}(r)=r\int\limits_{1}^{\infty}\frac{V(t)\,dt}{t(t-r)}+o(1)=-(\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho+o(1))\,V^0(r),\quad r\to\infty.$$

Таким образом, для интеграла $J_2(r)$ справедливо равенство

$$J_2(r)=-(\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho+o(1))\,V^0(r),\ r\to\infty.\tag{4.12}$$

Из соотношений (4.8), (4.10) и (4.12) следует, что

$$\ln|\Phi^{\pm}(r)|\leqslant-(\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho+o(1))\,V^0(r),\ r\to\infty,\ r\notin E,\tag{4.13}$$

где $E$ — множество точек разрыва функции $n$. Отсюда вытекает, что найдется $A>1$ такое, что обе функции $\Phi^{\pm}$ ограничены на $[A,\infty)\setminus E$. Так как эти функции непрерывны на $(1,\infty)$ и ограничены в окрестности точки $z=1$, выполняется (4.4).

Итак, функция $\Phi$ удовлетворяет условиям (4.4) и (4.5). Отсюда, как уже говорилось, следует, что эта функция ограничена в $(D)$.

Докажем, что функция $\Phi$ удовлетворяет условию (в) из определения класса $B(\rho^0(r))$. Имеем

$$\ln\Phi(z)=z\int\limits_{1}^{\infty}\frac{V(t)\,dt}{t(t-z)}+\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln G(t)-2\pi i\,(n(t)+V(t))}{t(t-z)}\,dt=$$
$$=I_1(z)+I_2(z),\ z\in D.\tag{4.14}$$

Стандартные рассуждения (см. также лемму 1′ ниже) показывают, что справедливо равномерное по $\theta\in[\varepsilon,\ 2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, асимптотическое равенство

$$I_1(re^{i\theta})=-\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\,e^{i\rho(\theta-\pi)}\,V^0(r)+o(V^0(r)),\ r\to\infty.\tag{4.15}$$

В силу условий (А) и (В) имеем

$$\ln G(t)-2\pi i\,(n(t)+V(t))=o(V(t)),\ t\to\infty.$$

Поэтому равномерно по $\theta\in[\varepsilon,\ 2\pi-\varepsilon]$ получим

$$|I_2(re^{i\theta})|=o\left(r\int\limits_{1}^{\infty}\frac{V(t)\,dt}{t(t+r)}\right)=o(|I_1(-r)|)=o(V^0(r)),\ r\to\infty.$$

Тем самым выполнение условия (в) установлено.

Докажем, что функция $\Phi$ удовлетворяет условию (г) из определения класса $B(\rho^0(r))$. Рассмотрим индикатор функции $\Phi$ относительно уточненного порядка $\rho^0(r)$

$$h(\theta,\ \Phi)=\varlimsup_{r\to\infty}(V^0(r))^{-1}\ln|\Phi(re^{i\theta})|,\ \ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

В силу уже доказанного свойства (в) имеем при $0<\theta<2\pi$

$$h(\theta,\ \Phi)=-\pi\rho(\sin\pi\rho)^{-1}\cos\rho(\theta-\pi). \tag{4.16}$$

В силу оценки (4.13) значения $h(0,\ \Phi)$ и $h(2\pi,\ \Phi)$ не превосходят $-\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho$, т. е. значений правой части (4.16) при $\theta=0,\ 2\pi$. Отсюда в силу тригонометрической выпуклости индикатора при $\rho>0$ и его обычной выпуклости при $\rho=0$ [14] следует, что (4.16) сохраняет силу также и при $\theta=0,\ 2\pi$. Так как функция $\Phi$ ограничена в $(D)$, то, используя известный факт [7, с. 97; 14] заключаем, что справедлива равномерная относительно $\theta\in[0,\ 2\pi]$ асимптотическая оценка

$$\ln|\Phi(re^{i\theta})|\leqslant\{-\pi\rho(\sin\pi\rho)^{-1}\cos\rho(\theta-\pi)+o(1)\}V^0(r),\ \ r\to\infty. \tag{4.17}$$

Отсюда следует, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\max\{(V^0(r))^{-1}\ln|\Phi(re^{i\theta})|:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}\leqslant-\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho.$$

В силу свойства (в) имеем для любого $\varepsilon>0$

$$\varliminf_{r\to\infty}\max\{(V^0(r))^{-1}\ln|\Phi(re^{i\theta})|:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}\geqslant\varliminf_{r\to\infty}\max\{(V^0(r))^{-1}\times$$
$$\times\ln|\Phi(re^{i\theta})|:\varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon\}=-\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\pi-\varepsilon).$$

Тем самым доказано, что функция $\Phi$ удовлетворяет условию (г), и доказательство теоремы 1 завершено.

Докажем теорему 2. Определим функцию $\Phi$ формулой (4.1) с $n(t)\equiv 0$. Далее проводим те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, но учитываем, что использование условия (Б$^0$) вместо условия (Б), позволяет оценку (4.10) заменить более сильной $J_1(r)=o(V^0(r)),\ r\to\infty$. Это приводит к тому, что асимптотическое неравенство (4.13) превращается в равенство

$$\ln|\Phi^{\pm}(r)|=-(\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho+o(1))V^0(r),\ \ r\to\infty. \tag{4.18}$$

Рассмотрим функцию $\Phi_1(z)=(1-z)/\Phi(z)$. Эта функция аналитична в $D$ и, кроме того (ведь $n(t)\equiv 0$), непрерывна на $(D)\cup\{1\}$. В силу (1.2) индикатор функции $\Phi_1$ относительно уточненного порядка $\rho^0(r)$ дается равенством

$$h(\theta,\ \Phi_1)=\pi\rho(\sin\pi\rho)^{-1}\cos\rho(\theta-\pi),\ \ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

Если будет установлено, что

$$\ln|\Phi_1(z)|\leqslant CV^0(|z|),\ \ z\in D, \tag{4.19}$$

то можно будет к функции $\Phi_1$ применить уже использовавшийся выше известный факт [7, с. 97; 14] и заключить, что равномерно по $\theta \in [0,\ 2\pi]$ выполняется

$$\ln|\Phi_1(re^{i\theta})| \leqslant (\pi\rho(\sin\pi\rho)^{-1}\cos\rho(\theta-\pi)+o(1))\,V^0(r),\quad r\to\infty.$$

Это означает, что равномерно по $\theta\in[0,\ 2\pi]$ имеем

$$\ln|\Phi(re^{i\theta})| \geqslant (-\pi\rho(\sin\pi\rho)^{-1}\cos\rho(\theta-\pi)+o(1))\,V^0(r),\quad r\to\infty.$$

Отсюда и из (4.17) вытекает справедливость теоремы 2.

Доказательство справедливости (4.19) мы получим с помощью теоремы A, приведенной выше. Рассмотрим аналитическую в полуплоскости $\{z:\operatorname{Im} z>0\}$ и непрерывную в $\{z:\operatorname{Im} z\geqslant 0\}$ функцию $\Psi(z)=\Phi_1(z)\exp\{KI_1(iz)\}$, где $I_1$ определяется равенством (4.14), а число $K>0$ будет выбрано позднее. В силу соотношения (4.15) имеем при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ оценку

$$\operatorname{Re} I_1(iz) = -\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\cos\frac{\pi\rho}{2}V^0(r)+o(V^0(r)) \leqslant -\frac{\pi}{4}V^0(r),\quad r>r_0. \quad (4.20)$$

Поэтому

$$\int_0^\pi \ln^+|\Psi(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta \leqslant \int_0^\pi \ln^+|\Phi_1(re^{i\theta})|\sin\theta\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^\pi |\ln\Phi(re^{i\theta})|\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta+O(\ln r)=O(V^0(r)),\quad r\to\infty,$$

в силу (4.7). Следовательно, функция $\Psi$ удовлетворяет условию (4.3). Используя (4.13) и (4.20), имеем при $x>1$

$$\ln|\Psi(x)| = \ln|1-x|-\ln|\Phi^+(x)|+K\operatorname{Re} I_1(ix) \leqslant$$
$$\leqslant O(\ln x)+\{\pi\rho\operatorname{ctg}\pi\rho-K\pi/4+o(1)\}\,V^0(x),\quad x\to\infty.$$

Если считать, что $K>4\rho\operatorname{ctg}\pi\rho$, то величина в фигурных скобках становится отрицательной при достаточно большом $x$ и, значит, функция $\Psi$ ограничена на полуоси $[0,\ \infty)$. Так как в силу (1.2) и (4.20)

$$\ln|\Psi(-x)| = \ln(1+x)-\ln|\Phi(-x)|+K\operatorname{Re} I_1(-ix) \leqslant$$
$$\leqslant O(\ln r)+\left\{\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}-K\pi/4+o(1)\right\}V^0(x),\quad x\to\infty,$$

если считать, что $K>4\rho/\sin\pi\rho$, то функция $\Psi$ будет удовлетворять условию (4.2).

По теореме A функция $\Psi$ ограничена в полуплоскости $\{z:\operatorname{Im} z>0\}$. Следовательно, в этой полуплоскости имеем

$$\ln|\Phi_1(z)| = \ln|\Psi(z)|-K\operatorname{Re} I_1(iz) \leqslant C+K|I_1(iz)|,$$

откуда в силу (4.15) вытекает справедливость (4.19) при дополнительном ограничении $\operatorname{Im} z\geqslant 0$.

Рассматривая вместо функции $\Psi(z)$ функцию $\Psi_1(z)=\Phi_1(-z)\times\exp\{KI_1(iz)\}$ и проводя аналогичные рассуждения, убеждаемся в справедливости (4.19) и при $\operatorname{Im} z\leqslant 0$. Тем самым (4.19) доказано, а вместе с тем — и теорема 2.

Для доказательства теоремы 3 рассмотрим функцию $\Phi$, определенную равенством (4.1). Проводя такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 1, но с заменой условий (А), (Б), (В) на (А′), (Б′), (В′), получим вместо оценок (4.7) и (4.13) соответственно следующие

$$\int\limits_0^{2\pi} |\ln \Phi (re^{i\theta})| \sin \frac{\theta}{2}\, d\theta \leqslant C \ln^2 r, \ r \geqslant 2;$$

$$\ln |\Phi^{\pm} (r)| \leqslant C \ln r, \ r \geqslant 2. \tag{4.21}$$

Пусть $h$ — полином, степень которого больше постоянной $C$ из оценки (4.21), а корни лежат в точках разрыва функции $n$ (множество последних бесконечно в силу условия $n(t) \uparrow \infty$). Функция $\Phi_1 = \Phi/h$ аналитична в $D$, имеет непрерывные предельные значения на обоих берегах разреза вдоль $(1, \infty)$, ограничена в окрестности точки $z = 1$ и удовлетворяет краевому условию (1, 1). Для этой функции выполнены условия (4.4), (4.5) и, следовательно, она ограничена в $(D)$.

§ 5. **Доказательство леммы 1.** Рассмотрим сначала случай $0 < \rho < 1$. Обозначим интеграл, стоящий в левой части (4.11), через $Q(r)$ и, считая $r$ настолько большим, чтобы $0 < \rho(r) < 1$, положим

$$q(r) = r \int\limits_1^{\infty} \frac{t^{\rho(r)}\, dt}{t(t-r)}$$

(где интеграл понимается в смысле главного значения). Оценим разность $Q(r) - q(r)$. Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$, а $r$ достаточно велико. Имеем

$$Q(r) - q(r) = r \left( \int\limits_1^{\varepsilon r} + \int\limits_{r/\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{t^{\rho(t)}\, dt}{t(t-r)} + r \left( \int\limits_1^{\varepsilon r} + \int\limits_{r/\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{t^{\rho(r)}\, dt}{t(t-r)} +$$

$$+ r \int\limits_{\varepsilon r}^{r/\varepsilon} \frac{t^{\rho(t)} - t^{\rho(r)}}{t(t-r)}\, dt = B_1 + B_2 + B_3.$$

Используя свойства уточненных порядков, получаем

$$|B_1| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \int\limits_1^{\varepsilon r} t^{\rho(t)-1}\, dt + \frac{r}{1-\varepsilon} \int\limits_{r/\varepsilon}^{\infty} t^{\rho(t)-2}\, dt \leqslant \left(\frac{2}{\rho} + o(1)\right) V(\varepsilon r) +$$

$$+ \left(\frac{2}{1-\rho} + o(1)\right) \varepsilon V(r/\varepsilon) \leqslant \left(\frac{2\varepsilon^{\rho}}{\rho} + o(1)\right) V(r) +$$

$$+ \left(\frac{2\varepsilon^{1-\rho}}{1-\rho} + o(1)\right) V(r), \ r \to \infty;$$

$$|B_2| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \int\limits_1^{\varepsilon r} t^{\rho(r)-1}\, dt + \frac{r}{1-\varepsilon} \int\limits_{r/\varepsilon}^{\infty} t^{\rho(r)-2}\, dt \leqslant \frac{2}{\rho(r)} (\varepsilon r)^{\rho(r)} +$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{1-\rho(r)} (r/\varepsilon)^{\rho(r)} \leqslant \left(\frac{2\varepsilon^{\rho}}{\rho} + o(1)\right) V(r) + \left(\frac{2\varepsilon^{1-\rho}}{1-\rho} + o(1)\right) V(r), \ r \to \infty.$$

Фиксируя $\varepsilon$, будем считать $r$ настолько большим, чтобы $\max\{|\rho'(t) \times t \ln t| : t \in [\varepsilon r, r/\varepsilon]\} < \varepsilon^2$. С помощью формулы конечных приращений заключаем, что при $t \in [\varepsilon r, r/\varepsilon]$ выполняется

$$|\rho(t) - \rho(r)| \leqslant |t - r|\, \varepsilon\, (r \ln(\varepsilon r))^{-1} \leqslant (\ln(\varepsilon r))^{-1},$$

и, следовательно,

$$|t^{\rho(t)} - t^{\rho(r)}| = t^{\rho(r)}\, |e^{(\rho(t)-\rho(r))\ln t} - 1| \leqslant t^{\rho(r)}\, |\rho(t) - \rho(r)| \ln t \times$$

$$\times e^{|\rho(t)-\rho(r)| \ln t} \leqslant t^{\rho(r)}\, |t - r|\, \frac{\varepsilon \ln(r/\varepsilon)}{r \ln(\varepsilon r)} \exp\left\{\frac{\ln(r/\varepsilon)}{\ln(\varepsilon r)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant r^{\rho(r)-1}\, |t - r|\, \varepsilon^{1-\rho(r)} e^2, \; r > r_0.$$

В силу этой оценки имеем $|B_3| \leqslant e^2 \varepsilon^{1-\rho(r)} \ln(\varepsilon^{-2})\, V(r)$, $r > r_0$. Ввиду произвола в выборе $\varepsilon$ приходим к выводу, что $Q(r) - q(r) = o(V(r))$, $r \to \infty$.

Используя теорию вычетов, получаем

$$q(r) = r \int_0^\infty \frac{t^{\rho(r)}\, dt}{t(t - r)} + O(1) = -\pi(\operatorname{ctg} \pi\rho(r))\, r^{\rho(r)} + O(1), \; r \to \infty.$$

Поскольку $\rho(r) \to \rho$, $V^0(r) \backsim (1/\rho) V(r)$, $r \to \infty$, приходим к соотношению (4.11).

Рассмотрим случай $\rho = 0$. Имеем

$$Q(r) = -\int_1^{3r/2} V(t) \frac{dt}{t} + r \int_{3r/2}^{\infty} \frac{V(t)\, dt}{t(t - r)} + \int_1^{r/2} \frac{V(t)\, dt}{t - r} + \int_{r/2}^{3r/2} \frac{V(t)\, dt}{t - r} =$$

$$= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4;$$

$$Q_1 = -V^0(3r/2) = -(1 + o(1))\, V^0(r), \; r \to \infty;$$

$$|Q_2| \leqslant 3r \int_{3r/2}^{\infty} t^{\rho(t)-2}\, dt = (2 + o(1))\, V(r) = o(V^0(r)), \; r \to \infty;$$

$$|Q_3| \leqslant \frac{2}{r} \int_1^{r/2} V(t)\, dt \leqslant V(r/2) = o(V^0(r)), \; r \to \infty;$$

$$Q_4 = \int_0^{r/2} \{V(r + u) - V(r - u)\} \frac{du}{u}.$$

Поскольку $V'(t) = (\rho'(t)\, t \ln t + \rho(t))\, t^{\rho(t)-1} = o(V(t)\, t^{-1})$, $t \to \infty$, то по формуле конечных приращений имеем при $u \in [0, r/2]$

$$\{V(r + u) - V(r - u)\}\, u^{-1} \leqslant 2 \max\{V'(t) : t \in [r/2, 3r/2]\} =$$

$$= o(V(r)\, r^{-1}), \; r \to \infty.$$

Поэтому $Q_4 = o(V(r)) = o(V^0(r))$, $r \to \infty$, и доказательство леммы закончено.

Отметим следующее утверждение, являющееся обобщением леммы 1 в случае $0 < \rho < 1$.

**Лемма 1′.** *Пусть $l(r)$ — уточненный порядок Бутру, $0 < \underline{\lim}_{r\to\infty} l(r) \leqslant \overline{\lim}_{r\to\infty} l(r) < 1$. Справедливо равномерное относительно $\theta \in (0, 2\pi)$ асимптотическое равенство*

$$re^{i\theta}\int_1^\infty \frac{t^{l(t)}\,dt}{t(t-re^{i\theta})} = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi l(r)} + o(1)\right) e^{il(r)(\theta-\pi)} r^{l(r)},\quad r\to\infty. \qquad (5.1)$$

Отличие этого утверждения от известных [8, с. 93—94] состоит в том, что равномерность по $\theta$ обеспечивается на $(0, 2\pi)$, а не на $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Лемма 1 при $0<\rho<1$ получается из (5.1) предельным переходом при $\theta\to 0$ с использованием формулы Сохоцкого — Племеля.

Доказательство леммы 1′ получается почти дословным повторением рассуждений, проведенных при доказательстве леммы 1 в случае $0<\rho<1$. При этом роль $q(r)$ играет интеграл

$$re^{i\theta}\int_1^\infty \frac{t^{l(r)}\,dt}{t(t-re^{i\theta})} = -\frac{\pi}{\sin \pi l(r)} e^{il(r)(\theta-\pi)} r^{l(r)} + O(1),\quad r\to\infty.$$

**§ 6. Доказательства теорем 4 и 5.** Чтобы доказать теорему 4 достаточно убедиться в том, что если выполнены ее условия 1) и 2) то при любом $\tau > 0$ выполнены условия теоремы 1 (А), (Б), (В) с $V(t) = \tau t^{\sigma}$, $V_1(t) = t^{\nu}$, где $\sigma$ — число, о котором говорится в формулировке теоремы 4, а $\nu \in (0, \sigma)$. Нам понадобится следующая лемма, являющаяся обобщением одной леммы Н. В. Говорова [1, с. 164] и доказываемая близкими рассуждениями.

**Лемма 2.** *Пусть $l(t)$ — уточненный порядок Бутру и пусть $\psi \in H_{[1,\infty)}(\mu)$, $0<\mu\leqslant 1$, $\psi(\infty)>0$. Тогда: а) если $\mu<1$, то*

$$\psi(t)\,t^{l(t)} = \max\{\psi(x)\,x^{l(x)} : 1 \leqslant x \leqslant t\} + O(t^{l(t)-\mu/(1-\mu)}),\quad t\to\infty;$$

*б) если $\mu = 1$, то функция $\psi(t)\,t^{l(t)}$ является неубывающей при достаточно больших $t$.*

Сначала с помощью леммы 2 докажем теорему 4, а затем приведем доказательство леммы.

Пользуясь обозначениями из формулировки теоремы 4, положим $\psi(t) = \varphi(t) - \tau t^{\sigma - l(t)}$. Очевидно, $\psi(\infty) = \varphi(\infty) > 0$ и, так как $\varphi \in H_{[1,\infty)}(\mu_0)$, $\tau t^{\sigma-l(t)} \in H_{[1,\infty)}(\min(1, \lambda-\sigma))$, то $\psi \in H_{[1,\infty)}(\mu)$, где $\mu = \min(\mu_0, \lambda-\sigma)$. Положим $n(t) = [\max\{\psi(x)\,x^{l(x)} : 1 \leqslant x \leqslant t\}^{+}]$. Очевидно, функция $n$ неотрицательна, целозначна и не убывает. Если $\mu<1$, то в силу п. а) леммы 2 имеем

$$\psi(t)\,t^{l(t)} - n(t) = O(t^{l(t)-\mu/(1-\mu)}) + O(1),\quad t\to\infty,$$

откуда

$$\varphi(t)\,t^{l(t)} = n(t) + \tau t^{\sigma} + O(t^{l(t)-\mu/(1-\mu)}) + O(1),\quad t\to\infty.$$

Поскольку в силу последнего из условий (3.2) имеем $\overline{\lim}_{t\to\infty}\{l(t) - \mu/(1-\mu)\} = \rho - \mu/(1-\mu) < \sigma$, то тем самым доказано, что выполнено условие (А) с $V(t)=\tau t^{\sigma}$, $V_1(t)=t^{\nu}$, где $\nu\in(0,\sigma)$. Если $\mu=1$, то в силу п. б) леммы 2 имеем $\psi(t)t^{l(t)}-n(t)=O(1)$, $\varphi(t)t^{l(t)}=n(t)+\tau t^{\sigma}+O(1)$, $t\to\infty$, и приходим к такому же выводу.

Учитывая, что функции $V^0(t)$ и $k(t)$ выражаются равенствами (2.6), легко убеждаемся в том, что из условия 1) теоремы 4 следует выполнение условия ($\tilde{\text{Б}}$), более сильного, чем (Б). Выполнение условия (В) непосредственно следует из условия 2). Тем самым теорема 4 доказана.

Докажем лемму 2. Положим $W(t)=t^{l(t)}$, $\Delta(t,h)=\psi(t)W(t)-\psi(t-h)W(t-h)$, $h\in[0,\ t-1]$. Выясним, насколько большим должно быть $h$, чтобы обеспечить $\Delta(t,h)>0$.

Пусть $K=\max\{\psi(t):t\in[1,\infty]\}$. Выберем число $b\in(0,1)$ настолько близким к 1, чтобы выполнялось $\psi(\infty)/2-K(1-b)^{\lambda/2}>0$. При $bt\leqslant h\leqslant t-1$ и достаточно большом $t$ имеем $\Delta(t,h)\geqslant\frac{1}{2}\psi(\infty)W(t)-KW(t(1-b))\geqslant W(t)\{\psi(\infty)/2-K(1-b)^{\lambda/2}\}>0$. (использовалось свойство уточненного порядка Бутру [8, с. 91], в силу которого $W(t(1-b))\sim(1-b)^{l(t)}W(t)$, $t\to\infty$). При $0\leqslant h\leqslant bt$ и достаточно большом $t$ выполняется

$$\Delta(t,\ h)=\psi(t)\{W(t)-W(t-h)\}+\{\psi(t)-\psi(t-h)\}W(t-h)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\psi(\infty)\int\limits_{t-h}^{t}\{l'(\tau)\tau\ln\tau+l(\tau)\}W(\tau)\frac{d\tau}{\tau}-Ch^{\mu}t^{-2\mu}W(t)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{4}\psi(\infty)\lambda W(t(1-b))ht^{-1}-Ch^{\mu}t^{-2\mu}W(t)\geqslant$$
$$\geqslant W(t)\left\{\frac{1}{4}\psi(\infty)\lambda(1-b)^{2\rho}ht^{-1}-Ch^{\mu}t^{-2\mu}\right\}.$$

Если $\mu=1$, то величина в фигурных скобках положительна при $\geqslant t_0$, где $t_0$ не зависит от $h$. Если $\mu<1$, то величина в фигурных скобках положительна при $t\geqslant t_0$ и $h\geqslant C_1t^{(1-2\mu)/(1-\mu)}$.

Таким образом, если $\mu=1$, то $\Delta(t,h)>0$ при любом $h\in(0,t-1]$, $\geqslant t_0$. Это уже доказывает справедливость утверждения б).

Если $\mu<1$, то $\Delta(t,h)>0$ при $C_1t^{(1-2\mu)/(1-\mu)}\leqslant h\leqslant t-1$, $t\geqslant t_0$. Отсюда следует, что $\max\{\psi(x)W(x):1\leqslant x\leqslant t\}=\max\{\psi(x)W(x):t-C_1t^{(1-2\mu)/(1-\mu)}\leqslant x\leqslant t\}$. Поэтому для доказательства утверждения а) достаточно установить, что при $0\leqslant h\leqslant C_1t^{(1-2\mu)/(1-\mu)}$ выполняется $|\Delta(t,h)|\leqslant C_2W(t)t^{-\mu/(1-\mu)}$, $t\geqslant t_0$. Последнее вытекает из оценки

$$|\Delta(t,h)|\leqslant|\psi(t)|\{W(t)-W(t-h)\}+|\psi(t)-\psi(t-h)|W(t-h)\leqslant$$
$$\leqslant K\int\limits_{t-h}^{t}\{l'(\tau)\tau\ln\tau+l(\tau)\}W(\tau)\frac{d\tau}{\tau}+Ch^{\mu}t^{-2\mu}W(t)\leqslant$$
$$\leqslant 2K\rho W(t)ht^{-1}+Ch^{\mu}t^{-2\mu}W(t)\leqslant(2K\rho C_1+CC_1^{\mu})W(t)t^{-\mu/(1-\mu)}.$$

Тем самым лемма 2 доказана.

Для доказательства теоремы 5 достаточно заметить, что если выполнены ее условия, то выполнены и условия (А′), (Б′), (В′) теоремы 3 с $n(t)=\left[\frac{1}{2\pi}(\arg G(t))^{+}\right]$.

**§ 7. Доказательство теоремы 6.** Покажем, что если выполнены условия теоремы 6, то выполнены условия (А) и (Б) с $V(t)$, взятым из (3.6) и любым $V_1(t) = o(V^0(t)/\ln t)$, $t \to \infty$. То, что выполнено условие (В), — тривиально.

Положим $H(t) = \int\limits_1^t h(u)\,du$, $t \geqslant 1$, и обозначим через $\vartheta(x)$, $x \geqslant 0$, функцию, обратную к $H(t)$. В качестве $n(t)$ возьмем целозначную неубывающую функцию, определяемую условиями

$$n(\vartheta(m)) = H(\vartheta(m)) = m, \quad \int\limits_{\vartheta(m)}^{\vartheta(m+1)} (H(t) - n(t))\,dt = 0, \ m = 0, 1, 2, \ \ldots . \tag{7.1}$$

Легко видеть, что

$$|H(t) - n(t)| \leqslant 1, \ t \geqslant 1, \tag{7.2}$$

поэтому выполнение условия (А) очевидно. Займемся проверкой выполнения (Б).

Обозначим через $Y(t)$ величину, стоящую в фигурных скобках в левой части соотношения (1.6) в условии (Б). Нам надлежит показать, что

$$(Y(t))^+ = o(V^0(t)), \ t \to \infty. \tag{7.3}$$

В силу (1.5) имеем

$$Y(t) = \int\limits_0^{k(t)} (H(t+u) - H(t-u))\frac{du}{u} - \int\limits_0^{k(t)} (n(t+u) - n(t-u))\frac{du}{u} + \\ + \int\limits_0^{k(t)} (V(t+u) - V(t-u))\frac{du}{u}.$$

Так как $V^0(t)/(V_1(t)\ln t) = o(\sqrt{t})$, $1/h(t) = O(e^{-t})$, $t \to \infty$, для достаточно больших $t$ имеем $1/h(t) < k(t)$, и величину $Y$ можно представить в виде

$$Y(t) = \left\{ \int\limits_0^{1/h(t)} (H(t+u) - H(t-u))\frac{du}{u} - \int\limits_0^{1/h(t)} (n(t+u) - n(t-u))\frac{du}{u} \right\} + \\ + \int\limits_{1/h(t)}^{k(t)} \{(H(t+u) - n(t+u)) - (H(t-u) - n(t-u))\}\frac{du}{u} + \\ + \int\limits_0^{k(t)} (V(t+u) - V(t-u))\frac{du}{u} = Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t).$$

Используя условие (3.5), получаем

$$Y_1(t) \leqslant \int\limits_0^{1/h(t)} (H(t+u) - H(t-u))\frac{du}{u} \leqslant \int\limits_0^{1/h(t)} (2uh(t+u))\frac{du}{u} \leqslant \\ \leqslant 2h(t + 1/h(t))/h(t) \leqslant C.$$

Легко видеть, что $Y_3(t) = o(1)$, $t \to \infty$. Остается получить оценку для величины $Y_2(t)$. Положим $R(t) = \int\limits_1^t (H(u) - n(u))\,du$. Нам понадобится следующая оценка:

$$|R(t)| \leqslant C/h(t),\ t \geqslant t_0 > 1. \tag{7.4}$$

Чтобы получить ее, обозначим через $m_t$ целое число, определяемое условием $\vartheta(m_t) \leqslant t < \vartheta(m_t + 1)$, и заметим, что в силу (7.1), (7.2)

$$|R(t)| = \left| \int\limits_{\vartheta(m_t)}^{t} (H(u) - n(u))\,du \right| \leqslant \vartheta(m_t + 1) - \vartheta(m_t) =$$
$$= \int\limits_{m_t}^{m_t+1} \vartheta'(u)\,du = \int\limits_{m_t}^{m_t+1} (1/h(\vartheta(u)))\,du \leqslant 1/h(\vartheta(m_t)).$$

Отсюда с помощью условия (3.5) получаем оценку (7.4):

$$|R(t)| \leqslant \frac{1}{h(t)} \frac{h(\vartheta(m_t + 1))}{h(\vartheta(m_t))} \leqslant \frac{1}{h(t)} \cdot \frac{h(\vartheta(m_t) + 1/h(\vartheta(m_t)))}{h(\vartheta(m_t))} \leqslant \frac{C}{h(t)}.$$

Запишем величину $Y_2(t)$ в виде

$$Y_2(t) = \int\limits_{t+1/h(t)}^{t+k(t)} (u - t)^{-1}\,dR(u) - \int\limits_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} (t - u)^{-1}\,dR(u) = Y_2^{(1)} - Y_2^{(2)}.$$

Интегрируя по частям и используя оценку (7.4), получим

$$|Y_2^{(1)}| = \left| \frac{R(u)}{u - t} \Big|_{t+1/h(t)}^{t+k(t)} + \int\limits_{t+1/h(t)}^{t+k(t)} \frac{R(u)}{(u-t)^2}\,du \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{k(t)\,h(t + k(t))} + \frac{Ch(t)}{h(t + 1/h(t))} \leqslant C_1.$$

Получить оценку для $Y_2^{(2)}$ несколько сложнее. Сначала с помощью (7.4) имеем

$$|Y_2^{(2)}| = \left| \frac{R(u)}{t - u} \Big|_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} - \int\limits_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} \frac{R(u)}{(t-u)^2}\,du \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{Ch(t)}{h(t - 1/h(t))} + \frac{C}{k(t)\,h(t - k(t))} + C \int\limits_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} \frac{du}{h(u)\,(t-u)^2}.$$

Замечая, что в силу (3.5) выполняется $h(t) \leqslant h(t - 1/h(t) + 1/h(t - 1/h(t))) \leqslant Ch(t - 1/h(t))$, и, кроме того, $1/k(t) = o(e^t)$, $1/h(t) = O(e^{-t})$, $t \to \infty$, имеем

$$|Y_2^{(2)}| \leqslant O(1) + C \int\limits_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} \frac{du}{h(u)\,(t-u)^2}.$$

Обозначим интеграл, стоящий в правой части последнего неравенства через $I$, и оценим его. Дважды интегрируя по частям, будем иметь

$$I = \frac{1}{h(u)(t-u)}\bigg|_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} + \left(\frac{1}{h(u)}\right)' \ln(t-u)\bigg|_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} -$$

$$- \int\limits_{t-k(t)}^{t-1/h(t)} \left(\frac{1}{h(u)}\right)'' \ln(t-u)\,du \leqslant \frac{h(t)}{h(t-1/h(t))} + \frac{h'(t-1/h(t))}{h^2(t-1/h(t))} \ln h(t) +$$

$$+ \max\left\{\frac{h''(u)}{h^2(u)} + 2\frac{(h'(u))^2}{h^3(u)} : u \geqslant t-k(t)\right\} \int\limits_{t-k(t)}^{t} |\ln(t-u)|\,du.$$

Покажем, что

$$h'(u) \leqslant Ch^{3/2}(u),\ h''(u) \leqslant Ch^3(u).$$

Пусть $\beta \in (0, 1/2)$ — число, фигурирующее в (3.5). По теореме Коши имеем

$$h^{(p)}(u) = \frac{p!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-u|=h^{-\beta}(u)} \frac{h(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-u)^{p+1}},\ p = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда $h^{(p)}(u) \leqslant p!\ h^{p\beta}(u) \max\{|h(\zeta)| : |\zeta - u| = h^{-\beta}(u)\}$. Так как функция $h$ удовлетворяет условиям (3.4), (3.5), то $|h(\zeta)| \leqslant h(\operatorname{Re}\zeta) \leqslant \leqslant h(u + h^{-\beta}(u)) \leqslant Ch(u)$, поэтому имеем $h^{(p)}(u) \leqslant Cp!\,h^{1+p\beta}(u)$, откуда следуют оценки (7.5).

Учитывая (7.5), заключаем, что $I = O(1)$, $t \to \infty$, и, следовательно $\bar{Y}_2^{(2)}(t) = O(1)$, $t \to \infty$. Тем самым мы доказали оценку (7.3) (более того, установлено, что $(Y(t))^+ = O(1)$, $t \to \infty$) и завершили доказательство теоремы 6.

*Замечание*. Из доказательства теоремы 6 следует неэквивалентность условий (Б) и ($\tilde{\text{Б}}$). В самом деле, если бы функция (3.6) удовлетворяла условию ($\tilde{\text{Б}}$), то мы имели бы

$$\int\limits_0^{k(t)} (H(t+u) - H(t-u))\frac{du}{u} \leqslant CV^0(t). \tag{7.6}$$

Поскольку $H(t+u) - H(t-u) \geqslant 2uh(t-u)$, то из (7.6) следует, что $2k(t)\,h(t-k(t)) \leqslant CV^0(t)$, откуда

$$h(t-1) \leqslant CV^0(t)/k(t) = CV^0(t)\exp\left(\frac{V^0(t)}{V_1(t)\ln t}\right) = O(e^{\sqrt{t}}),\ t \to \infty.$$

Это противоречит цитированной лемме из [12].

**Список литературы:** 1. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986. 240 с. 2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., 1977. 640 с. 3. *Роговин С. В.* Краевые задачи и особые интегральные уравнения с бесконечным индексом // Науч. тр. юбил. семинара по краевым задачам. Минск, 1985. С. 95—103. 4. *Грудский С. М.* Сингулярные интегральные операторы с бесконечным индексом и произведения Бляшке // Math. Nachr. 1986. **120**. С. 313—331. 5. *Дыбин В. Б.*

Корректные задачи для сингулярных интегральных уравнений. Ростов на Дону, 988. 160 с. 6. *Алехно А. Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным ндексом произвольного степенного порядка // Докл. АН БССР. 1988. 32, № 2. С. 112—115. 7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 32 с. 8. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 592 с. 9. *Юров П. Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа // Изв. высш. учеб. завед. Сер. Математика. 1966. № 2. С. 158—163. 10. *Сандригайло И. Е.* О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Докл. АН БССР. 1975. 9, № 10. С. 872—875. 11. *Рогозин С. В.* Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом и неограниченным модулем коэффициента для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1975. № 6. С. 124—125. 12. *Камышин И. П., Островский И. В.* О нулевых множествах целых эрмитово-положительных функций // Сиб. мат. журн. 1982. 23, № 3. С. 66—82. 13. *Nevanlinna R.* Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum // Acta Soc. Sci. Fenn. 1925. 50, N 12. S. 1—45. 14. *Гришин А. Ф.* О функциях, голоморфных внутри угла и имеющих там нулевой порядок // Теория функции, функцион. анализ и их прил. 1965. Вып. 1. С. 41—56.

*Поступила в редколлегию 10.12.89*

---

УДК 517.535

*Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК*

## МАКСИМАЛЬНЫЕ И γ-ДОСТАТОЧНЫЕ МНОЖЕСТВА. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЦЕЛЫМ ФУНКЦИЯМ. II*

**§ 4. Построение γ-достаточного множества с помощью рядов Лагранжа.** Всюду далее предполагается, что $B = F = \boldsymbol{C}$; $E_{(0)} = H(\boldsymbol{C})$. Без ограничения общности можно считать, что $\beta = 1$. Пусть $h(z)$ — функция относительно медленного роста, удовлетворяющая дополнительным условиям:

$$\lim_{z\to\infty} h(z) = \infty;\ \lim_{\substack{z\to 0\\ \lambda\to\infty}} \frac{h(\lambda z)}{h(\lambda)} = 0\ \ (\lambda,\ z \in \boldsymbol{C}); \tag{1}$$

$$\forall\eta > 0\ \overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\ \inf_{\frac{\eta}{2}<|z|<\eta} \frac{h(\lambda z)}{h(\lambda)} > 0; \tag{2}$$

$$\forall R < \infty\ \inf_{|\lambda|<R} h(\lambda) > 0,\ \sup_{|\lambda|<R} h(\lambda) < +\infty. \tag{3}$$

Совокупность всех этих предположений будем коротко называть условиями $\mathscr{A}$.

**Теорема 6.** *Пусть выполняются условия* $\mathscr{A}$; $\gamma \in (0, 1]$ *и существует 1-маркировочная функция* $L(z)$ *с простыми нулями* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и 0-маркировочная функция* $a(z)$ *такие, что*

---

* В настоящей статье, являющейся продолжением работы [1], используются те же определения и обозначения.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{h(\lambda_n)}\ln\left|\frac{a(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right|+\gamma\right]\leqslant 0. \tag{4}$$

*Пусть, наконец,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{h(\lambda_n)}=0. \tag{5}$$

*Тогда* $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — $\gamma$-*достаточное множество для* $E^1(h)$.

Доказательство. Всюду далее ради кратности положим $E^1(h)=E(h)$. Пусть $y\in E(h)$, $d\in[0,\gamma)$ и $y\in E_d^{\Lambda}$. Положим $\Phi_1(\lambda)=a(\lambda)\times y(\lambda)L(\lambda z)$. В силу условий (1) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \exists R<\infty:|L(\lambda z)|\leqslant\exp\varepsilon h(z)$, $\forall z:|z|\leqslant\delta$, $\forall\lambda:|\lambda|\geqslant R$. Если $\varepsilon\in\left(0,\frac{1-H(y)}{4}\right)$, то $\Phi_1\in E(h)$, причем $H(\Phi_1)\leqslant H(y)+\varepsilon<\frac{1+H(y)}{2}$. Пусть $Q$ — исключительное множество для 1-маркировочной функции $L(\lambda)$. Так как $Q$ имеет нулевую линейную плотность, всегда можно указать такую последовательность $r_n\uparrow\infty$, что $Q\cap C_n=\varnothing$, $n=1,2,\ldots$, где $C_n=\{\lambda:|\lambda|=r_n\}$. Тогда $\forall n\geqslant 1$

$$a(\lambda)y(\lambda)L(\lambda z)-\frac{L(\lambda)}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{a(t)y(t)L(tz)\,dt}{L(t)(t-\lambda)}=\sum_{|\lambda_k|<r_n}\frac{a(\lambda_k)y(\lambda_k)L(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}L(\lambda). \tag{6}$$

При этом $\forall\varepsilon>0\exists N<\infty:|L(t)|\geqslant\exp(1-\varepsilon)h(t)$, $\forall t\in C_n$, $\forall n\geqslant N$

Если еще $|z|\leqslant\delta$, где $\delta$ выбрано указанным выше образом по $\varepsilon$, то $|a(t)y(t)L(tz)|\leqslant M\exp[2\varepsilon+H(y)]h(t)\leqslant M\exp(1-2\varepsilon)h(t)$, $\forall t\in C_n$, $\forall n\geqslant N_1$. Отсюда следует, что при $n\to\infty$ интеграл в левой части при любых фиксированных $z$, $|z|\leqslant\delta$ и $\lambda\notin\Lambda$ стремится к нулю:

$$a(\lambda)y(\lambda)L(\lambda z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{|\lambda_k|<r_n}\frac{a(\lambda_k)y(\lambda_k)L(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}L(\lambda).$$

Из условия (5) следует, что $\forall n\geqslant 1\ \exists\tau_n\geqslant 0:\tau_n\to 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\exp[-\tau_n\times\times h\times(\lambda_n)]<\infty$. Положим $U_k=\{\lambda:|\lambda-\lambda_k|\leqslant\exp[-\tau_k h(\lambda_k)]\}$, $k=1,2,\ldots$; $U=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}U_k$. Если $\lambda\notin U$; $\varepsilon_1\in\left(0,\frac{\gamma-d}{3}\right)$; $|z|\leqslant\delta_1=\delta_1(\varepsilon_1)$, то $\exists M<\infty:\forall k\geqslant 1$

$$|a(\lambda_k)|\leqslant M|L'(\lambda_k)|\exp(-\gamma+\varepsilon_1)h(\lambda_k);$$

$$|y(\lambda_k)|\leqslant|y|_d^{\Lambda}\exp dh(\lambda_k);\ |L(\lambda_k z)|\leqslant M\exp\varepsilon_1 h(\lambda_k).$$

Тогда $\forall\lambda\notin U$, $\forall z\in K_1=\{t:|t|\leqslant\delta_1\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a(\lambda_k)y(\lambda_k)L(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant M^2|y|_d^{\Lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\exp[(-\gamma+d+2\varepsilon_1+\tau_k)h(\lambda_k)]=M_1|y|_d^{\Lambda}.$$

ущественно, что числа $\delta_1$ и $M_1$ зависят от $\gamma$ и $\delta$, но не зависят от $(\lambda)$, лишь бы $y\in E_d^\Lambda$. При этом ряд в правой части (6) при любом иксированном $\lambda\notin\Lambda$ сходится абсолютно и равномерно (по $z$) в $K_1$, его сумма аналитична в круге $|z|<\delta_1$.

Так как любая часть равенства (6) — целая функция по $z$ при юбом фиксированном $\lambda$, и равенство (6) имеет место при $|z|\leqslant\delta$, о оно справедливо и при $|z|\leqslant\delta_1$. Итак, если $|z|\leqslant\delta_1$ и $\lambda\notin U$, то $y\in E_d^\Lambda$

$$|y(\lambda)\,a(\lambda)\,L(\lambda z)|\leqslant M_1|L(\lambda)|\,|y|_d^\Lambda.$$

усть $Q$ — исключительное множество для $a(\lambda)$ и $U_0=Q\cup U$. Тогда $\varepsilon>0\ \ \exists M_2=M_2(\varepsilon):\forall\lambda\notin Q_1$

$$|y(\lambda)|\sup_{|z|<\delta_1}|L(\lambda z)|\leqslant M_2|L(\lambda)|\,|y|_d^\Lambda\exp[-\varepsilon h(\lambda)].$$

ыберем число $R_1$ так, чтобы $\sum\limits_{r_j<R} r_j<\frac{R}{4}$, $\forall R>R_1$, где $r_j$ — радиусы ружков $|z-\mu_j|<r_j$, составляющих исключительное множество $Q$ ункции $L(\lambda)$. Тогда $\forall\lambda:|\lambda|>R_1$ найдется $z_\lambda$: $\frac{\delta_1}{2}\leqslant|z_\lambda|\leqslant\delta_1$ и $\lambda z_\lambda\notin Q$. ействительно, в противном случае имели бы $\sum\limits_{r_j<\delta_1|\lambda|} r_j\geqslant|\lambda|\delta_1/2$, что евозможно. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists R_2$:

$$\forall\lambda,\ |\lambda|>R_2\ \exists z_\lambda:\frac{\delta_1}{2}\leqslant|z_\lambda|\leqslant\delta_1;\ |L(\lambda z_\lambda)|\geqslant\exp(1-\varepsilon)\,h(\lambda z_\lambda).$$

Учитывая условие (2), получаем, что $\exists R_3<\infty\ \exists\tau>0$:

$$\sup_{|z|<\delta_1}|L(\lambda z)|\geqslant\exp\tau h(\lambda),\ \ \forall\lambda:|\lambda|\geqslant R_3.$$

Таким образом, $\forall\lambda\notin Q_1$, $|\lambda|\geqslant R_3$:

$$|y(\lambda)|\leqslant M_3|y|_d^\Lambda\exp[h(\lambda)(1-\tau)].$$

Согласно [2], множество $Q_1$ можно погрузить в множество $Q_2$ нулевой линейной плотности, состоящее из попарно не пересекающихся кружочков. Используя принцип максимума модуля и относительно медленный рост $h(\lambda)$, получим, что $\exists M_4<\infty:\forall\lambda$, $|\lambda|\geqslant R_3$:

$$|y(\lambda)|\leqslant M_4|y|_d^\Lambda\exp\left[\left(1-\frac{\tau}{2}\right)h(\lambda)\right].$$

Привлекая вновь принцип максимума модуля и соотношения (3), получим, что $\exists M_5:\forall\lambda\in\boldsymbol{C}$:

$$|y(\lambda)|\leqslant M_5|y|_d^\Lambda\exp\left[\left(1-\frac{\tau}{2}\right)h(\lambda)\right].$$

При этом постоянная $M_5$ зависит не от конкретной функции $y(z)$ (лишь бы $y \in E_d^\Lambda$), а от $d$ и $\gamma$. Таким образом, $E_d^\Lambda \hookrightarrow E_{1-\frac{\tau}{2}}$ и по теореме 1 $\Lambda$ — $\gamma$-достаточное множество для $E(h)$.

Следствие 1. *Пусть* $u(z)$ — *неотрицательная субгармоническая функция, удовлетворяющая условиям* (9) *из* [1] *и* (1)—(3). *Пусть, далее, существуют 1-маркировочная функция* $L(z)$ *с простыми нулями* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и 0-маркировочная функция* $a(z)$ *такие, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{u(\lambda_n)}\ln\left|\frac{a(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right|+\gamma\right]\leqslant 0 \quad (\gamma\in(0,1]).$$

Пусть, наконец, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{u(\lambda_n)}=0$. Тогда:

$$1)\ \forall y\in E(h)\ \varlimsup_{z\to\infty}\frac{\ln|y(z)|}{u(z)}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|y(\lambda_n)|}{u(\lambda_n)}+1-\gamma;$$

$$2)\ \text{если}\ \gamma>\frac{1}{2},\ \text{то}\ \forall y\in E(h)\ \sup_{z\in C}|y(z)|=\sup_{n\geqslant 1}|y(\lambda_n)|.$$

Следствие 2. *Пусть* $\gamma\in(0,1]$; $\rho(r)$ — *уточненный порядок* $\rho(r)\to\rho>0$; $g(\theta)\in T_\rho$; $g(\theta)>0$; $L(\lambda)$ — *целая функция нормальног типа при порядке* $\rho(r)$ *вполне регулярного роста с индикаторо* $g(\theta)$ *и простыми нулями* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что для некоторой отличной от тождественного нуля целой функции* $a(z)$ *из класса* $[\rho(r), 0$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}}\ln\left|\frac{a(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right|+\gamma g(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0. \qquad (7$$

Тогда

$$1)\ \forall y\in[\rho(r),\ g(\theta))\ \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|y(\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}g(\arg\lambda_n)}\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{\lambda\to\infty}\frac{\ln|u(\lambda)|}{|\lambda|^{\rho(|\lambda|)}g(\arg\lambda)}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|y(\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}g(\arg\lambda_n)}+1-\gamma;$$

2) *если* $\gamma>\frac{1}{2}$, *то* $\forall y\in[\rho(r),\ g(\theta))\ \sup\limits_{z\in C}|y(z)|=\sup\limits_{n\geqslant 1}|y(\lambda_n)|$. Заметим, что, как легко проверить, $\forall y\in[\rho(r),\infty)$

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty}\frac{\ln|y(\lambda)|}{|\lambda|^{\rho(|\lambda|)}g(\arg\lambda)}=\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\frac{h_y(\theta)}{g(\theta)},$$

где $h_y(\theta)$ — индикатор $y(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ (это равенство отмечалось в [3, 4]).

Следует отметить, что в случае $\gamma=1$, $h(\lambda)=|\lambda|^{\rho(|\lambda|)}g(\arg\lambda)$, где $g(\theta)$ — $\rho$-тригонометрически выпуклая $2\pi$-периодическая ограниченная функция (не обязательно положительная), результат, аналогичный теореме 6, был получен ранее А. В. Абаниным и доложен на симпозиуме по теории функций в Уфе в 1987 г.

**§ 5. Оценка сверху индикатора функций из** $[\rho(r),\infty)$. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — целые функции из класса $[\rho(r),\infty)$, где $\rho(r)\to\rho>0$ и $\rho(r)$ —

уточненный порядок. Пусть, далее, $g_1(\theta)$ и $g_2(\theta)$ — индикаторы $f_1$ и $f_2$ (при уточненном порядке $\rho(r)$), причем известно, что

$$g_1(\theta_j) < g_2(\theta_j),\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где

$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_n < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta_{j+1} - \theta_j < \frac{\pi}{\rho},\ \theta_{n+1} = \theta_1 + 2\pi. \tag{9}$$

Следует ли из неравенств (8), что $g_1(\theta) < g(\theta)$ уже для всех $\theta$? Простые примеры показывают, что в общей ситуации ответ на этот вопрос отрицателен. Поэтому для того чтобы из неравенства (8) следовало бы, что $g_1(\theta) < g(\theta)$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, нужны еще какие-то дополнительные предположения. В этом параграфе будет показано, что в качестве такого дополнительного предположения можно использовать наличие оценки сверху роста $f_1(z)$ на некотором множестве точек.

**Теорема 7.** *Пусть* $\rho(r) \to \rho > 0$ — *уточненный порядок и числа* $\theta_j$ *удовлетворяют соотношениям* (9). *Пусть, далее,* $L(z)$ — *целая функция нормального типа вполне регулярного роста при показателе* $\rho(r)$ *с ограниченным положительным индикатором* $g(\theta)$ *и простыми нулями* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$; *в классе* $[\rho(r), 0]$ *имеется функция* $a(z)$, *отличная от тождественного нуля и такая, что при некотором* $\gamma \in (0, 1]$ *справедливо соотношение* (7). *Предположим еще, что* $\Phi(z) \in [\rho(r), \infty)$ *и индикатор* $h_\Phi(\theta)$ *функции* $\Phi$ *таков, что*

$$a := \sup_{1<j<n} \frac{h_\Phi(\theta_j)}{g(\theta_j)} < 1. \tag{10}$$

*Пусть, наконец,*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|^{-\rho(|\lambda_n|)} \ln|\Phi(\lambda_n)|}{g(\arg\lambda_n)} = \nu < \gamma. \tag{11}$$

*Тогда*

1) $\nu \leqslant \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} \dfrac{h_\Phi(\theta)}{g(\theta)} \leqslant \nu + 1 - \gamma$;

2) *если* $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, *то* $\sup\limits_{\lambda\in C} |\Phi(\lambda)| = \sup\limits_{n\geqslant 1} |\Phi(\lambda_n)|$.

Доказательство. Пусть $0 < d \leqslant b$, где $b = \min\{1 - a, \gamma - \nu\}$. Построим в классе $[\rho(r), \infty)$ целую функцию $F(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $dg(\varphi)$ при показателе $\rho(r)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\lambda(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a(\lambda_n)\Phi(\lambda_n)F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}$ и положим $C_\Lambda = C \setminus \Lambda = \{z \in C : z \neq \lambda_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$. Если $z \in C_\Lambda$, то $\exists \delta = \delta(z) > 0 : |z - \lambda_k| \geqslant \delta$, $\forall k \geqslant 1$. Из соотношений (7), (11) следует: $\exists M < \infty\ \exists \eta > 0 : \forall n \geqslant 1$

$$\left|\frac{a(\lambda_n)\Phi(\lambda_n)F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right| \leqslant M \exp[-\eta|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}].$$

Если $|t-z| \leqslant \frac{\delta}{2}$, то $|t-\lambda_n| \geqslant \frac{\delta}{2}$, $\forall n \geqslant 1$, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(\lambda_n)\,\Phi(\lambda_n)\,F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)\,(t-\lambda_n)}$$

сходится абсолютно и равномерно в круге $|t-z| < \frac{\delta}{2}$. Таким образом, $\lambda(z) \in H(C_\Delta)$ (как обычно, $H(G)$ — множество всех аналитических в области $G$ функций).

Выберем последовательность $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы $\eta_n \downarrow 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp[-\eta_n \times \times |\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}] < \infty$. Пусть $U_n = \{z : |z-\lambda_n| \leqslant \exp[-\eta_n |\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}]\}$, $n = = 1, 2, \ldots$; $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $N$ так, чтобы

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{a(\lambda_n)\,\Phi(\lambda_n)\,F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} \right| \exp[\eta_n |\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем, далее, число $R_0 < \infty$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \frac{a(\lambda_n)\,\Phi(\lambda_n)\,F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)\,(z-\lambda_n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } |z| > R_0.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0\ \exists R_0 < \infty$: $|\lambda(z)| < \varepsilon$, если $|z| > R_0$ и $z \notin U$. Положим $\lambda_1(z) = \frac{a(z)\,\Phi(z)\,F(z)}{L(z)}$; $\mu(z) = \lambda(z) - \lambda_1(z)$. Функции $\lambda_1(z$ и $\mu(z)$ — мероморфные и могут иметь разве лишь простые полюсы в точках $\lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$. При этом $\operatorname{Res} \mu(z)|_{z=\lambda_k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\mu(z)$ — целая функция. Так как $L(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост, (см. [5]) существует множество $V$ кружков нулевой линейной плотности такое, что $\forall \varepsilon > 0\, \exists q > 0$

$$\forall \lambda \notin V\ |L(\lambda)| \geqslant q \exp\left[g(\arg\lambda) - \frac{\varepsilon}{2}\right] |\lambda|^{\rho(|\lambda|)}.$$

Так как $U$ также имеет нулевую линейную плотность, в силу цитированного выше результата И. Ф. Красичкова—Терновского из [2], множество кружков $U \cup V$ можно погрузить в множество $W$ попарно не пересекающихся кружков нулевой линейной плотности. При этом

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M_1 < \infty\ \forall z \notin W\ |\lambda(z)| \leqslant M_1;$$

$$|\lambda_1(z)| \leqslant M_1 \exp[h_\Phi(\arg z) - g(\arg z) + d(\arg z) + \varepsilon]\,|z|^{\rho(|z|)}. \quad (12)$$

Из последних неравенств с помощью принципа максимума модуля стандартными рассуждениями показываем, что $\mu(z) \in [\rho(r), \infty)$. Пусть $\varepsilon \in \left(0, \frac{1-a-d}{3}\right)$. В силу условия (10) найдется число $\tau > 0$ такое, что $h_\Phi(\theta) < (a+\varepsilon)\,g(\theta)$, когда $\theta_k - \tau \leqslant \theta \leqslant \theta_k + \tau$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

огда из (12) следует, что $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Gamma_k\setminus W}} |\lambda_1(z)| = 0$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, $\Gamma_k = \{z:$ $_k - \tau \leqslant \arg z \leqslant \theta_k + \tau\}$. Как было показано выше, $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\notin W}} |\lambda(z)| = 0$. ледовательно, $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Gamma_k\setminus W}} |\mu(z)| = 0$; отсюда $\alpha_k := \sup\limits_{z\in\Gamma_k\setminus W} |\mu(z)| < \infty$. Мно- кество $W$ можно записать в такой форме:

$$W = \{D_m\}_{m=1}^{\infty}, \text{ где } D_m = \{z: |z - a_m| < r_m\}$$

$$\lim_{m\to\infty} |a_m| = \infty; \ \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{|a_n|} = 0. \tag{13}$$

усть $\Gamma_k^1 = \left\{z: \theta_k - \frac{\tau}{2} \leqslant \arg z \leqslant \theta_k + \frac{\tau}{2}\right\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В силу ловий (13) те кружки $D_m$ из $W$, которые пересекаются с сектором $(1 \leqslant k \leqslant n)$ или содержатся в нем, при всех $n \geqslant n_0$ лежат строго утри $\Gamma_k$. Так как $\alpha_k < \infty$, используя принцип максимума модуля, ходим, что для такого кружка $D_m$ $\sup\{|\mu(z)| : z \in D_m\} \leqslant \alpha_k$. Отсюда лучаем, что $\forall k \leqslant n$ $\sup\{|\mu(z)| : z \in \Gamma_k^1\} < \infty$. Можно всегда считать, о $\tau < \min\limits_{k<n} (\theta_{k+1} - \theta_k)$. Применяя теорему Фрагмена — Линделефа функции $\mu(z)$ в угле $\theta_k + \frac{\tau}{2} \leqslant \theta \leqslant \theta_{k+1} - \frac{\tau}{2}$ раствора $< \frac{\pi}{\rho}$, заме- ем, что $\mu(z)$ ограничена в этом угле. Отсюда следует, что $\mu(z)$ раничена во всей плоскости и потому $\mu(z) \equiv c$. Но тогда $\mu(z) \equiv 0$, ак как $\forall k \leqslant n$ $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in\Gamma_k\setminus W}} \mu(z) = 0$. Следовательно, $\forall z \in \boldsymbol{C}$:

$$a(z)\,\Phi(z)\,F(z) = L(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(\lambda_n)\,\Phi(\lambda_n)\,F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)\,(z - \lambda_n)}.$$

усть $B(z) = a(z)\,\Phi(z)\,F(z)$. Имеем $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Q < \infty$ $\forall z \in \boldsymbol{C}$ $\forall n \geqslant 1$

$$\left|\frac{L(z)}{z - \lambda_n}\right| \leqslant Q \exp\{[g(\arg z) + \varepsilon]\,|z|^{\rho(|z|)}\}.$$

Далее, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a(\lambda_n)\,\Phi(\lambda_n)\,F(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)}\right| = Q_1 < \infty$. Отсюда следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Q_2 < \infty$ $\forall z \in \boldsymbol{C}$ $|B(z)| \leqslant Q_2 \exp\{[g(\arg z) + \varepsilon]\,|z|^{\rho(|z|)}\}$. Таким образом, $B \in [\rho(r), \infty)$, причем если $h_B(\theta)$ — индикатор $B$ при показателе $\rho(r)$, о $h_B(\theta) \leqslant g(\theta)$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$. С другой стороны, так как $a(z) \in [\rho(r), 0]$, $F$ имеет вполне регулярный рост и индикатор $dg(\varphi)$ при показателе $(r)$, то $h_B(\theta) = h_\Phi(\theta) + dg(\theta)$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$. Следовательно, $h_\Phi(\theta) \leqslant$ $\leqslant (1 - d)\,g(\theta)$ и $\Phi \in [\rho(r), g(\theta))$. Для завершения доказательства стается применить следствие 2 теоремы 6 и замечание к ней.

Отметим еще, что всегда $\sup\limits_{\theta\in[0,\,2\pi]} \frac{h_\Phi(\theta)}{g(\theta)} \geqslant \sup\limits_{1<k<n} \frac{h_\Phi(\theta_k)}{g(\theta_k)}$. Поэтому при выполнении всех предположений теоремы справедливы неравенства $a \leqslant \nu + 1 - \gamma < 1$.

Следствие 1. *Пусть* $\rho(r), \rho, \theta_j$ *— те же, что в теореме 7. Пусть, далее,* $L(\lambda)$ *— целая функция нормального типа вполне регулярного роста при порядке* $\rho(r)$ *с положительным индикатором* $g(\theta)$ *и простыми нулями* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что* $\exists\gamma\in(0,\,1]$:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[|\lambda_n|^{-\rho(|\lambda_n|)}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}+\gamma g(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0. \qquad (14)$$

*Пусть, наконец,* $\Phi(z)\in[\rho(r),\,\infty)$ *и выполняются соотношения (10), (11). Тогда справедливы утверждения 1), 2) теоремы 7.*

Следствие 2. *Пусть* $\rho(r), \rho, \theta_j$ *— те же, что в теореме 7;* $L(\lambda)$ *— целая функция нормального типа при порядке* $\rho(r)$ *вполне регулярного роста с положительным индикатором* $g(\theta)$ *и простыми нулями* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[|\lambda_n|^{-\rho(|\lambda_n|)}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}+g(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0. \qquad (15)$$

*Пусть, далее,* $\Phi(z)\in[\rho(r),\,\infty)$ *и выполнены условия (10), (11) (при* $\gamma=1$*). Тогда*

$$\sup\left\{\frac{h_\Phi(\theta)}{g(\theta)}:\theta\in[0,\,2\pi]\right\}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|\lambda_n|^{-\rho(|\lambda_n|)}\ln|\Phi(\lambda_n)|}{g(\arg\lambda_n)}.$$

Следствие 3. *Пусть* $\rho(r), \rho, g(\theta), L(\lambda), \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— те же, что и в следствии 2, и справедливо неравенство (15). Пусть, далее,* $\Phi(z)\in[\rho(r),\,\infty)$, *имеет место соотношение (10) и* $\sup\limits_{n\geqslant1}|\Phi(\lambda_n)|<\infty$. *Тогда* $\Phi(z)\equiv\text{const}$.

В полученных выше результатах важную роль играло условие (14), обеспечивающее $\gamma$-достаточность множества $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ простых нулей функции $L(\lambda)$ вполне регулярного роста. Для применения результатов, в которых участвовало условие (14), было бы полезно дать другую, легче проверяемую форму этого условия. Такая задача при $\gamma=1$ была решена в работе [6]. Пользуясь методикой указанной работы, мы приведем одно из таких условий, эквивалентных (14).

Будем предполагать до конца этого параграфа, что $L(z)$ — целая функция вполне регулярного роста нормального типа с индикатором $g(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r)$ и простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Из леммы 2 работы [6, с. 455] легко получить такой результат, который неоднократно использовался в [6] (хотя и не сформулирован там явно).

**Лемма 1.** *Пусть* $a(z)$ *— целая функция вполне регулярного роста с индикатором* $g(\theta)$ *нормального типа при уточненном порядке* $\rho(r)$ *и нулями* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *произвольной кратности. Тогда (при* $\theta_n = \arg\lambda_n$*)*

$$\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\ln|a(\lambda_n+\delta|\lambda_n|e^{i\varphi})|}{h(|\lambda_n|)}d\varphi-g(\theta_n)\right]=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\ln|a(\lambda_n+\delta|\lambda_n|e^{i\varphi})|}{h(|\lambda_n|)}d\varphi-g(\theta_n)\right]=0 \qquad (16)$$

здесь и всюду далее в этом параграфе $h(r)=r^{\rho(r)}$).

Обозначим символом $n_t^{\Lambda}(z)$ число точек из множества $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ простых нулей функции $L(z)$, лежащих в круге $\{z:|z-t|\leqslant r\}$, и положим $\forall b>0$ $N_t^{\Lambda}(b)=\int_0^b\frac{n_t^{\Lambda}(r)-1}{r}dr$.

**Лемма 2.** *Условие (14) эквивалентно следующему:*

$$\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{N_{\lambda_n}^{\Lambda}(\delta|\lambda_n|)}{h(|\lambda_n|)}-(1-\gamma)\,g(\arg\lambda_n)\right]\leqslant 0. \qquad (17)$$

емма 2 при $\gamma=1$ получена ранее тем же методом (в более общей орме) в работе [6]. Сочетая ее с теоремами 6, 7, найдем

**Теорема 8.** *Пусть* $\rho(r)$ — *уточненный порядок,* $\rho(r)\to\rho>0$; $(\lambda)$ — *целая функция нормального типа вполне регулярн*[illegible] *роста положительным индикатором* $g(\theta)$ *при уточненном порядке* $\rho(r)$ *простыми нулями* $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что при некотором* $\gamma\in(0,1]$ *праведливо неравенство (17). Тогда*

$\Lambda$ — *γ-достаточное множество для* $[\rho(r),\ g(\theta))$;

$\forall y\in[\rho(r),\ g(\theta))\ \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|y(\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}g(\arg\lambda_n)}\leqslant\sup_{0<\theta<2\pi}\frac{h_y(\theta)}{g(\theta)}\leqslant$

$\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln|y(\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}g(\arg\lambda_n)}+1-\gamma$;

) *если* $\gamma>\frac{1}{2}$, *то* $\forall y\in[\rho(r),\ g(\theta))\ \sup_{z\in C}|y(z)|=\sup_{n\geqslant 1}|y(\lambda_n)|$.

**Теорема 9.** *Пусть* $\rho(r)$, $\rho$, $g(\theta)$, $L(\lambda)$ *и* $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *те же, что и в теореме 8, причем имеет место соотношение (17). Пусть, далее,* $\theta_k\in[0,\ 2\pi]$, $k=1,2,\ldots,n$ *и выполнены условия (9). Пусть, аконец,* $\Phi(z)\in[\rho(r),\ \infty)$ *и функция* $\Phi(z)$ *удовлетворяет условиям 10), (11). Тогда справедливы утверждения 1), 2) теоремы 7.*

**§ 6. Теорема Левинсона и ее обобщения.** Применим теоремы 7 и 8 к одной более конкретной ситуации.

**Теорема 10.** *Пусть* $0<\lambda_n,\ \mu_n<\infty$; $\lim_{n\to 8}\frac{n}{\lambda_n}=D_1$; $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mu_n}=D_2$;

$0<D_1,\ D_2<\infty$; $L_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$; $L_2(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{\mu_n^2}\right)$. *Пред-*

*положим, что выполняются условия:* $\exists\gamma\in[0,\ 1]$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\frac{1}{|L_1'(\pm\lambda_n)|}+(\gamma-1)\pi D_2\right]\leqslant 0; \tag{18}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\mu_n|}\ln\frac{1}{|L_2'(\pm i\mu_n)|}+(\gamma-1)\pi D_1\right]\leqslant 0. \tag{19}$$

*Пусть, далее,* $\Phi(z)$ — *целая функция экспоненциального типа степени* $\sigma_\Phi<\pi\sqrt{D_1^2+D_2^2}$, *причем*

$$\alpha_1:=\max\left[\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|\Phi(\lambda_n)|,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|\Phi(-\lambda_n)|\right]<\gamma\pi D_2; \tag{20}$$

$$\alpha_2:=\max\left[\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\mu_n|}\ln|\Phi(i\mu_n)|,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{|\mu_n|}\ln|\Phi(-i\mu_n)|\right]<\gamma\pi D_1.$$

*Тогда* $\Phi\in[1,\ g(\theta))$ *и*

$$\nu\leqslant\sup_\theta\frac{h_\Phi(\theta)}{g(\theta)}\leqslant\nu+1-\gamma, \tag{21}$$

*где* $g(\theta)=\pi(D_1|\sin\theta|+D_2|\cos\theta|)$, $\nu=\max\left\{\frac{\alpha_1}{\pi D_2},\ \frac{\alpha_2}{\pi D_1}\right\}$.

*Если еще* $\gamma\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right]$, *то*

$$\sup_{z\in C}|\Phi(z)|=\max\{\sup_{n\geqslant1}|\Phi(\pm\lambda_n)|,\ \sup_{n\geqslant1}|\Phi(\pm i\mu_n)|\}.$$

Доказательство. Как известно (см., например, [7, с. 57—58]), $L_1(z)$ и $L_2(z)$ — целые функции экспоненциального типа вполне регулярного роста с индикаторами соответственно $\pi D_1|\sin\theta|$ и $\pi D_2|\cos\theta|$. Тогда $L(\lambda):=L_1(\lambda)L_2(\lambda)$ — также целая функция экспоненциального типа вполне регулярного роста и ее индикатор равен $g(\theta)$. При этом

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|L_2(\pm\lambda_n)|=\pi D_2;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\mu_n|}\ln|L_1(\pm i\mu_n)|=\pi D_1.$$

Из условий (18), (19) следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\frac{1}{|L'(\lambda_n)|}+\gamma g(0)\right]\leqslant 0;\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\frac{1}{|L'(-\lambda_n)|}+\gamma g(\pi)\right]\leqslant 0;$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\mu_n|}\ln\frac{1}{|L'(i\mu_n)|}+\gamma g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\leqslant 0;\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\left[\frac{1}{|\mu_n|}\ln\frac{1}{|L'(-i\mu_n)|}+\right.$$

$$\left.+\gamma g\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\leqslant 0.$$

Таким образом, условие (14) выполнено. Легко проверить далее, что $\max_\theta g(\theta)$ равен $\pi\sqrt{D_1^2+D_2^2}$ и достигается при $\theta_{1,2}=\pm\mathrm{arctg}\,\frac{D_1}{D_2}$ и при $\theta_{3,4}=\theta_{1,2}+\pi$. Угол между любыми соседними из четверки лучей $\theta_j$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ меньше $\pi$. Так как $\sigma_\Phi=\max_\theta h_\Phi(\theta)$, то $h_\Phi(\theta_j)<g(\theta_j)$, $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$, и условие (10) также выполнено. Наконец, в силу (20) справедливо и соотношение (11). Остается применить теорему 7.

*Замечание*. В силу леммы 2 условия (18), (19) равносильны следующим:

$$\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{N^{\Lambda}_{\lambda_n}(\delta|\lambda_n|)}{|\lambda_n|}\leqslant(2-\gamma)\pi D_2;$$

$$\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{N^{\mathrm{M}}_{i\mu_n}(\delta|\mu_n|)}{|\mu_n|}\leqslant(2-\gamma)\pi D_1,$$

где $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathrm{M}=\{i\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Следствие 1. *Пусть*

$$0<\lambda_n,\ \mu_n<\infty;\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=D_1;\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mu_n}=D_2;$$

$$0<D_1D_2<\infty;\ \lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{N^{\Lambda}_{\lambda_n}(\delta|\lambda_n|)}{|\lambda_n|}\leqslant\pi D_2;$$

$$\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{N^{\mathrm{M}}_{i\mu_n}(\delta|\mu_n|)}{|\mu_n|}\leqslant\pi D_1.$$

*Пусть, далее,* $\Phi\in[1,\ \infty)$, *тип* $\sigma_{\Phi}$ *функции* $\Phi$ *меньше, чем* $\sqrt{D_1^2+D_2^2}$ *и выполняются условия (20) (с* $\gamma=1$*).*

*Тогда* $\Phi(z)\in[1,\ g(\theta)|$, *причем* $\sup\limits_{\theta}\frac{h_{\varphi}(\theta)}{g(\theta)}=\max\left\{\frac{\alpha_1}{\pi D_2},\ \frac{\alpha_2}{\pi D_1}\right\}$ *и, кроме того,* $\sup\limits_{z\in C}|\Phi(z)|=\max\{\sup\limits_{n\geqslant 1}|\Phi(\pm\lambda\ )|,\ \sup\limits_{n\geqslant 1}|\Phi(\pm i\mu_n)|\}$.

Следствие 2. *Пусть* $\lambda_n$ *и* $\mu_n$ — *такие же, как и в следствии 1. Пусть, далее,* $\Phi(z)\in[1,\ \infty)$, $\sigma_{\Phi}<\pi\sqrt{D_1^2+D_2^2}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|\Phi(\lambda_n)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln|\Phi(-\lambda_n)|=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\mu_n|}\ln|\Phi(i\mu_n)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\mu_n|}\ln|\Phi(-i\mu_n)|=0.$$

*Тогда* $\Phi\in[1,\ 0]$ *(т. е.* $\sigma_{\Phi}=0$*) и, кроме того,*

$$\sup_{z\in C}|\Phi(z)|=\max\{\sup_{n\geqslant 1}|\Phi(\pm\lambda_n)|,\ \sup_{n\geqslant 1}|\Phi(\pm i\mu_n)|\}.$$

Следствие 3. *Пусть числа* $\lambda_n$ *и* $\mu_n$ — *такие же, как в следствии 1, и пусть* $\Phi(z)$ — *целая функция экспоненциального типа степени* $\sigma_{\Phi}<\pi\sqrt{D_1^2+D_2^2}$, *ограниченная на множестве* $\{\pm\lambda_n,\ \pm i\mu_n\}$. *Тогда* $\Phi(z)\equiv\mathrm{const}$.

Как легко убедиться, следствие 3 содержит в себе известную теорему Левинсона (см., например, [5, с. 267]).

Приведем в заключение один пример, к которому применимо следствие 3. Пусть, как выше, $0<\lambda_n,\ \mu_n<\infty$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=D_1;\ \lim_{n-\infty}\frac{n}{\mu_n}=D_2.$$

Положим $\lambda_{2n}^1 = \lambda_{2n}$; $\lambda_{2n-1}^1 = \lambda_{2n} - \varepsilon_n$; $\mu_{2n}^1 = \mu_{2n}$; $\mu_{2n-1}^1 = \mu_{2n} - \eta_n$, где $n = 1, 2, \ldots$; $\varepsilon_n > 0$; $\eta_n > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^1} = D_1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\mu_n^1} = D_2$. Пусть $\Lambda_1 = \{\lambda_n^1\}_{n=1}^{\infty}$; $\mathrm{M}_1 = \{\mu_n^1\}_{n=1}^{\infty}$. Как легко подсчитать,

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{N_{\lambda_n^1}^{\Lambda_1}(\delta\,|\lambda_n^1|)}{|\lambda_n^1|} = 0; \quad \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{N_{\mu_n^1}^{\mathrm{M}_1}(\delta\,|\mu_n^1|)}{|\mu_n^1|} = 0.$$

Согласно следствию 3, если $\Phi(z) \in [1, \infty)$ и $\sigma_\Phi < \pi\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$ и если $\Phi(z)$ ограничена на множестве $\Gamma = \{\pm\lambda_n^1, \pm i\mu_n^1 : n = 1, 2, \ldots\}$, то $\Phi(z) \equiv \mathrm{const}$. Если же мы будем применять обычную теорему Левинсона, то получим «вдвое худший» результат (информация об ограниченности $\Phi(z)$ в точках $\pm\lambda_{2n-1}^1$ и $\pm i\mu_{2n-1}^1$ остается при этом неиспользованной): если $\Phi \in [1, \infty)$, $\sigma_\Phi < \frac{\pi}{2}\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$ и $\Phi(z)$ ограничена на множестве $\Gamma$, то $\Phi(z) \equiv \mathrm{const}$.

**Список литературы:** 1. *Коробейник Ю. Ф.* Максимальные и $\gamma$-достаточные мнс-
жества. Приложения к целым функциям. I // Теория функций, функцион. анализ
и их прил. 1990. Вып. 54. С. 2. Красичков—Терновский И. Ф. Одна геометри-
ческая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона //
Мат. заметки. 1978. **24.** № 4. С. 531—546. 3. *Абанин А. В.* Некоторые предста-
ляющие системы в $\rho$-выпуклых областях // М., 1979. С. **47.** Деп. в ВИНИТ
01.10.79, № 2571—79, 47 с., РЖМат, 1979, 10Б197 ДЕП. 4. *Коробейник Ю. Ф.*
Представляющие системы // Успехи мат. наук. 1981. **36,** вып. 1. С. 73—126.
5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 6. *Бра-*
*тищев А. В.* Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и неко-
торые приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. **48,** № 2. С. 452—475.
7. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М., 1983. С. 3—180.

*Поступила в редколлегию 20.09.89*

---

УДК 512.547

*Э. М. ЖМУДЬ*

## О ЯДРАХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

**Введение.** Дополним и уточним некоторые из результатов статьи [3]. Напомним определение введенного в [3] понятия $H$-мультипликатора конечной группы $G$. Пусть $\Pi$ — класс ассоциированных систем факторов комплексных проективных представлений группы $G$. (Иначе говоря, $\Pi$ — элемент мультипликатора Шура $M(G)$ группы $G$). Нормальный делитель $H$ группы $G$ называется $\Pi$-*ядром* группы $G$,

ли он является ядром комплексного проективного представления
уппы $G$, принадлежащего к системе факторов $\pi \in \Pi$. Множество
$_H(G) = \{\Pi \in M(G) \mid H — \Pi\text{-ядро}\}$ (являющееся, как можно пока-
ть, подгруппой группы $M(G)$) называется *$H$-мультипликатором*
уппы $G$. Одним из основных результатов настоящей работы явля-
ся теорема 2.12, в силу которой $M_H(G) \cong M(G/H)/N$, где $N \cong$
$H \cap G'/[H, G]$ ($G'$ — коммутант группы $G$, $[H, G]$ — взаимный ком-
тант $H$ и $G$). Доказательство теоремы 2.12 основывается на рас-
отрении некоторой последовательности групп и гомоморфизмов.
усть $\mathrm{Lin}(G)$ — группа комплексных линейных характеров группы $G$,
$\mathrm{n}_{\mathrm{inv}}(H)$ — группа $G$-инвариантных линейных характеров подгруппы
. Естественно определяются гомоморфизмы $\varphi: \mathrm{Lin}(G) \to \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$,
$\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \to M(G/H)$, $\sigma: M(G/H) \to M_H(G)$. Теорема 2.12 является
едствием теоремы 2.8, из которой вытекает, что последовательность
$\mathrm{n}(G) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \xrightarrow{\tau} M(G/H) \xrightarrow{\sigma} M_H(G) \to 1$ точна.

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 дается пополненное
оторыми новыми фактами изложение результатов статьи [3], отно-
ихся к ядрам проективных представлений. В § 2 доказываются
ремы 2.8 и 2.12. На протяжении всей работы $G$ — конечная группа,
— поле комплексных чисел, $C^*$ — мультипликативная группа поля $C$;
проективными представлениями группы $G$ всегда понимаются
дставления над $C$. Если $X$ — группа, то $Y \leqslant X$ означает, что $Y$ —
группа группы $X$; $Y \trianglelefteq X$ означает, что $Y$ — нормальный дели-
ь группы $X$.

§ 1. **Проективные представления и их ядра.** 1. Напомним опре-
ения некоторых понятий, относящихся к проективным представле-
ям конечных групп.

Определение 1.1. *Функция $\pi: G \times G \to C^*$ называется 2-ко-
лом группы $G$ над $C^*$ (при тривиальном действии $G$ на $C^*$)
и для любых $x, y, z \in G$*

$$\pi(x, y)\,\pi(xy, z) = \pi(y, z)\,\pi(x, yz). \tag{1.1}$$

Из (1.1) вытекает, что при любом $g \in G$

$$\pi(g, 1) = \pi(1, g) = \pi(1, 1). \tag{1.2}$$

ли $\pi(1, 1) = 1$, 2-коцикл $\pi$ называется *нормализованным*.

Множество $Z^2(G) = Z^2(G, C^*)$ всех 2-коциклов группы $G$ над $C$
яется абелевой группой относительно поточечного умножения. Пусть
$[G]$ — множество всех функций $\lambda: G \to C^*$. Если $\lambda \in F[G]$, то функ-
я $\pi: G \times G \to C^*$, заданная равенством $\pi(s, t) = \dfrac{\lambda(s)\,\lambda(t)}{\lambda(st)} \times (s, \quad t \in G)$,
яется 2-коциклом. Такие 2-коциклы (*2-кограницы* группы $G$
$C^*$) образуют подгруппу $B^2(G) = B^2(G, C)$ группы $Z^2(G)$.
ежные классы группы $Z^2(G)$ по $B^2(G)$ будем в дальнейшем
вывать просто классами 2-коциклов группы $G$; класс 2-коцикла $\pi$
означим $[\pi]$. Если $\pi, \pi' \in Z^2(G)$ и $[\pi] = [\pi']$, 2-коциклы $\pi$ и $\pi'$
ываются *ассоциированными* (Обозначение: $\pi \sim \pi'$). Коциклы $\pi$ и $\pi'$

ассоциированы тогда и только тогда, когда $\pi'(s, t) = \frac{\lambda(s)\lambda(t)}{\lambda(st)}\pi(s, t)$, $(s, t \in G)$, где $\lambda \in \boldsymbol{F}[G]$. Если $\alpha \in \boldsymbol{C}^*$ и $\lambda(g) = \alpha$ при всех $g \in G$, то $\pi' = \alpha\pi$, т. е. $\alpha\pi \sim \pi$. Полагая $\alpha = \pi^{-1}(1, 1)$, получим нормализованный коцикл $\pi^{-1}(1, 1)\pi$, ассоциированный с $\pi$. Это позволяет в дальнейшем иметь дело только с нормализованными 2-коциклами.

Определение 1.2. *Группа $H^2(G, \boldsymbol{C}^*) = Z^2(G)/B^2(G)$ классов 2-коциклов группы $G$ (2-я группа когомологий группы $G$ над $\boldsymbol{C}^*$) называется мультипликатором Шура группы $G$ и обозначается $M(G)$. Эта группа, как можно показать, всегда конечна.*

Определение 1.3. *Отображение $P: G \to \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{C})$ ($n$ — натуральное число) называется матричным проективным представлением группы $G$, если существует такая функция $\pi: G \times G \to \boldsymbol{C}^*$, что*

$$P(s)P(t) = \pi(s, t)P(st) \quad (s, t \in G). \tag{1.3}$$

*Функция $\pi$ называется системой факторов проективного представления $P$, $n = \deg P$ — степень $P$. Проективные представления с системой факторов $\pi$ в дальнейшем называются $\pi$-представлениями. Множество всех проективных представлений группы $G$ обозначим $\boldsymbol{P}(G)$, множество всех $\pi$-представлений — через $\boldsymbol{P}_\pi(G)$.*

Из ассоциативности умножения в группе $G$ следует, что системы факторов проективных представлений группы $G$ являются 2-коциклами. Обратно, каждый 2-коцикл $\pi \in Z^2(G)$ является системой факторов проективных представлений группы $G$. Доказательство основывается на рассмотрении скрещенной групповой алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$ группы $G$ над полем $\boldsymbol{C}$, отвечающей коциклу $\pi$. Алгебра $\boldsymbol{C}^\pi G$ имеет базис $\{u_g\}^*_{g \in G}$ с таблицей умножения

$$u_s u_t = \pi(s, t)u_{st} \quad (s, t \in G). \tag{1.4}$$

Каждый элемент алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$ однозначно записывается в виде суммы $\sum_{g \in G} \xi(g)u_g$, где $\xi$ — комплекснозначная функция на группе $G$. Из (1.1), (1.2) и (1.4) вытекает, что $\boldsymbol{C}^\pi G$ — ассоциативная алгебра с единицей $\pi^{-1}(1, 1)u_1$. Можно доказать (см. [2] и [3]), что эта алгебра полупроста и, следовательно, все её линейные представления вполне приводимы. Пусть $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}^\pi G)$ — множество всех линейных представлений алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$. Представлением $L \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}^\pi G)$ порождается $\pi$-представление $P_L$ группы $G$: по определению $P_L(g) = L(u_g)$ $(g \in G)$. Таким образом, каждый коцикл $\pi \in Z^2(G)$ является системой факторов проективных представлений группы $G$. Каждое $\pi$-представление $P$ группы $G$ порождается некоторым линейным представлением $L$ алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$: если $x = \sum \xi(g)u_g \in \boldsymbol{C}^\pi G$, то $L(x) = \sum \xi(g)P(g)$. Таким образом, возникает взаимно однозначное соответствие $L \leftrightarrow P$ между линейными представлениями алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$ и $\pi$-представлениями группы $G$.

---

*** Группа $G$ предполагается фиксированным образом упорядоченной.**

Пусть $P\in \boldsymbol{P}_\pi(G)$, $\deg P = n$, $T\in \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{C})$. Полагая $P'(g) =$
$T^{-1}P(g)\,T\ (g\in G)$, получим π-представление $P$ группы $G$ линейно
квивалентное π-представлению $P$ (Обозначение: $P\overset{\text{Lin}}{\sim}P'$). Пусть
$\in \boldsymbol{F}[G]$. Определим отображение $\lambda P: G\to \boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{C})$, полагая
$P)(g) = \lambda(g)\,P(g)\ (g\in G)$. Легко видеть, что $\lambda P\in \boldsymbol{P}_{\pi}'(G)$, где $\pi'(s, t) =$
$\frac{\lambda(s)\,\lambda(t)}{\lambda(st)}\pi(s,\ t)$ $(s,\ t\in G)$ и, следовательно, $\pi\sim\pi'$. Проективные
редставления $P$ и $P'$ группы $G$ называются эквивалентными ($P\sim P'$),
ли $P'\overset{\text{Lin}}{\sim}P$, где $\lambda\in F[G]$. Если $P\in \boldsymbol{P}_\pi(G)$, $P'\in \boldsymbol{P}_{\pi'}(G)$ и $P\sim P'$,
$\pi\sim\pi'$, т. е. $[\pi]=[\pi']$. Отправляясь от линейной эквивалентности
представлений, обычным образом определяют для них понятия при-
димости, неприводимости, полной приводимости. Рассмотрение установ-
ленного выше соответствия между $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{C}^\pi G)$ и $\boldsymbol{P}_\pi(G)$ позволяет,
частности, заключить, что 1) π-представления группы $G$ вполне
иводимы; 2) число классов линейно эквивалентных неприводимых
редставлений группы $G$ равно числу классов неприводимых линей-
х представлений алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$ и, следовательно, равно размерности
тра $Z(\boldsymbol{C}^\pi G)$ алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$. С целью нахождения этой размерности
тавим в соответствие коциклу $\pi\in Z^2(G)$ функцию $\omega_\pi: G\times G\to \boldsymbol{C}^*$,
анную равенством

$$\omega_\pi(s,\ t) = \frac{\pi(s,\ t)}{\pi(t,\ s^t)}\quad (s,\ t\in G), \tag{1.5}$$

е $s^t = t^{-1}st$. Из (1.4) следует, что

$$u_t^{-1}u_s u_t = \omega_\pi(s,\ t)\,u_{s^t}. \tag{1.6}$$

лее, если $P\in \boldsymbol{P}_\pi(G)$, то

$$P(t)^{-1}\,P(s)\,P(t) = \omega_\pi(s,\ t)\,P(s^t t). \tag{1.7}$$

з (1.4), (1.6) вытекает следующее свойство функции $\omega_\pi$:

$$\omega_\pi(s,\ t_1t_2) = \omega_\pi(s,\ t_1)\,\omega_\pi(s^{t_1},\ t_2)\quad (s,\ t_1,\ t_2\in G). \tag{1.8}$$

Пусть $s\in G$ и $C_G(s)$ — централизатор элемента $s$ в группе $G$.
пределим функцию $\chi_s^{(\pi)}: C_G(s)\to \boldsymbol{C}^*$, полагая $\chi_s^{(\pi)}(t) = \omega_\pi(s,\ t)$
$\in C_G(s))$. Из (1.8) вытекает, что $\chi_s^{(\pi)}\in \mathrm{Lin}(C_G(s))$.

Определение 1.4. *Элемент* $s\in G$ *называется π-элементом,*
*ли* $\chi_s^{(\pi)}$ *— главный характер подгруппы* $C_G(s)$, *т. е.* $\omega_\pi(s,\ t)=1$
*и любом* $t\in C_G(s)$.

Обозначим через $G_\pi$ множество всех π-элементов группы $G$. Легко
казать, что вместе с каждым элементом $s\in G_\pi$ в $G_\pi$ входят все эле-
нты, сопряженные с $s$. Классы сопряженных π-элементов называ-
тся *π-классами*. Число всех π-классов группы $G$ обозначим $r_\pi$.

Определение 1.5. *Функцию* $\xi: G\to \boldsymbol{C}$ *назовем π-централь-*
*й, если*

$$\xi(s^t) = \omega_\pi(s,\ t)\,\xi(s)\quad (s,\ t\in G). \tag{1.9}$$

**Лемма 1.1.** *$\pi$-центральные функции исчезают на $G\setminus G_\pi$.*

Доказательство. Если $s\in G\setminus G_\pi$, то $\omega_\pi(s, t)\neq 1$ для некоторого $t\in C_G(s)$, откуда следует, ввиду (1.9), что $\xi(s)=0$.

**Лемма 1.2.** *Элемент $x=\sum\limits_{g\in G}\xi(g)\,u_g$ алгебры $\mathbf{C}^\pi G$ ($\xi$ — комплексно-значная функция на $G$) содержится в $Z(\mathbf{C}^\pi G)$ тогда и только тогда, когда $\xi$ — $\pi$-центральная функция.*

Доказательство. $x\in Z(\mathbf{C}^\pi G)$ тогда и только тогда, когда $u_t^{-1}xu_t=x$ для всех $t\in G$. Утверждение теперь легко получается с помощью (1.4).

Пусть $C_1, \ldots, C_{r_\pi}$ — $\pi$-классы группы $G$, $s_i\in C_i$ $(i=1, \ldots, r_\pi)$. Положим $k_i^{(\pi)}=|C_G(s_i)|^{-1}\sum\limits_{t\in G}u_t^{-1}u_{s_i}u_t$ $(i=1, \ldots, r_\pi)$. При помощи лемм 1.1 и 1.2 нетрудно показать (см. [3]), что элементы $k_i^{(\pi)}$ образуют базис алгебры $Z(\mathbf{C}^\pi G)$. Отсюда следует, в частности, что $\dim Z(\mathbf{C}^\pi G)=r_\pi$.

2. Определение 1.6. *Ядром представления $P\in\mathbf{P}(G)$ называется множество $\mathrm{KER}\,P=\{g\in G\mid P(g)$ — скалярная матрица$\}$. Ядра $\pi$-представлений группы $G$ называются $\pi$-ядрами.*

Из (1.1), (1.7) следует, что $\mathrm{KER}\,P\trianglelefteq G$.

В дальнейшем $H\trianglelefteq G$, $\pi\in Z^2(G)$.

Определение 1.7. *Функцию $\lambda\in\mathbf{F}[G]$, удовлетворяющим условиям*

$$\lambda(s)\,\lambda(t)=\pi(s, t)\,\lambda(st)\quad(s, t\in H); \tag{1.10}$$

$$\lambda(s^t)=\omega_\pi^{-1}(s, t)\,\lambda(s)\ \ (s\in H,\ t\in G), \tag{1.11}$$

*назовем $\pi$-характером подгруппы $H$. Множество всех $\pi$-характеров подгруппы $H$ обозначим $X_\pi(H)$.*

Пусть $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)=\{\psi\in\mathrm{Lin}(H)\mid\psi(s^t)=\psi(s)$ для всех $s\in H, t\in G\}$ — группа $G$-инвариантных линейных характеров подгруппы $H$.

Из (1.10), (1.11) вытекает.

**Лемма 1.3.** *Если $X_\pi(H)\neq\varnothing$ и $\lambda_0\in X_\pi(H)$, то $X_\pi(H)=\lambda_0\,\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$.*

Следствие 1.4. *Если $X_\pi(H)\neq\varnothing$, то $|X_\pi(H)|=|\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)|=|H/[H, G]|$.*

В предположении, что $X_\pi(H)\neq\varnothing$, поставим в соответствие $\pi$-характеру $\lambda\in X_\pi(H)$ элемент $j_H^{(\lambda)}\in\mathbf{C}^\pi G$, полагая

$$j_H^{(\lambda)}=\frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}\lambda^{-1}(g)\,u_g. \tag{1.12}$$

**Лемма 1.5.** *Если $X_\pi(H)\neq\varnothing$, то элементы $j_H^{(\lambda)}$ $(\lambda\in X_\pi(H))$ образуют ортогональную систему ненулевых идемпотентов алгебры $Z(\mathbf{C}^\pi G)$.*

Доказательство. Если $\lambda \in X_\pi(H)$, то, как видно из (1.12), $\neq 0$. Положим $\xi(g) = \lambda^{-1}(g)$, если $g \in H$ и $\xi(g) = 0$ при $g \in G \setminus H$. (1.11) следует, что $\xi$ — $\pi$-центральная функция. В силу леммы 1.2 $= |H|^{-1} \sum\limits_{g \in G} \xi(g) u_g \in Z(\boldsymbol{C}^\pi G)$. Далее, при помощи (1.4), (1.10) легко казывается, что

$$u_s j_H^{(\lambda)} = \lambda(s)\, j_H^{(\lambda)}. \qquad (1.13)$$

ли $\lambda$, $\mu \in X_\pi(H)$, то по лемме 1.3 $\lambda^{-1}\mu = \psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$. Полагая $_{\mu} = 1$ при $\lambda = \mu$ и $\delta_{\lambda,\mu} = 0$ при $\lambda \neq \mu$, получаем $|H|^{-1} \sum\limits_{s \in H} \psi(s) = \delta_{\lambda,\mu}$. В силу (1.13) имеем $j_H^{(\lambda)} \cdot j_H^{(\mu)} = |H|^{-1} \sum\limits_{s \in H} \lambda^{-1}(s) u_s j_H^{(\mu)} = |H|^{-1} \times \sum\limits_{s \in H} \lambda^{-1}(s) \mu(s) j_H^{(\mu)} = |H|^{-1} \sum\limits_{s \in H} \psi(s) j_H^{(\mu)} = \delta_{\lambda,\mu} j_H^{(\mu)}$. Утверждение доказано.

Определение 1.8. *Пусть $e$ — ненулевой идемпотент алгебры* $\boldsymbol{C}^\pi G)$. *Множество $K_e = \{g \in G \mid u_g e \in \boldsymbol{C}^* e\}$ назовем ядром идемпо- ма $e$.*

Из (1.6) вытекает, что $K_e \trianglelefteq G$.

**Лемма 1.6.** *$K_e$ — $\pi$-ядро группы $G$.*

Доказательство. Пусть $L$ — линейное представление алгебры порожденное левым (на самом деле он двусторонний) идеалом $C^\pi Ge$. Если $P \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$ и $L \leftrightarrow P$, то, очевидно, $K_e = \mathrm{KER}\, P$, откуда ледует, что $K_e$ — $\pi$-ядро.

Из определения 1.7 вытекает существование такой функции $\lambda_e : K_e \to C^*$, что $u_g e = \lambda_e(g)\, e$ для всех $g \in K_e$.

**Лемма 1.7.** $\lambda_e \in X_\pi(K_e)$.

Доказательство. С помощью (1.4), (1.6) легко проверяется, функция $\lambda = \lambda_e$ удовлетворяет условиям (1.10), (1.11) (при $= K_e$).

**Теорема 1.8.** *Подгруппа $H$ является $\pi$-ядром тогда и только да, когда $X_\pi(H) \neq \varnothing$.*

Доказательство. **1°.** Допустим, что $H$ — $\pi$-ядро, $P \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$, $P = H$. Тогда $P(g) = \lambda(g) E_n\ (g \in H)$, где $\lambda \in \boldsymbol{F}[G]$, $n = \deg P$, — единичная матрица $n$-го порядка. Если $s$, $t \in \mathrm{H}$, то $P(s)P(t) = (s)\lambda(t) E_n$, $P(st) = \lambda(st) E_n$, откуда в силу (1.3) вытекает равен- (1.10). Пусть $s \in H$, $t \in G$. Так как $P(s^t) = \omega_\pi(s, t) P(t)^{-1} P(s) \times (t)$ и $P(s) = \lambda(s) E_n$, $P(s^t) = \lambda(s^t) E_n$, выполняется (1.11). Поэтому $X_\pi(H)$, т. е. $X_\pi(H) \neq \varnothing$.

2°. Допустим, что $X_\pi(H) \neq \varnothing$ и $\lambda \in X_\pi(H)$. Тогда по лемме 1.5 $j_H^{(\lambda)}$ — ненулевой идемпотент алгебры $Z(\boldsymbol{C}^\pi G)$. Если $s \in H$, то в силу 13) $u_s e = \lambda(s)\, e$, откуда следует, что $s \in K_e$. Таким образом, $H \leqslant K_e$. ть теперь $s \in K_e$. Тогда $u_s e = \lambda_e(s)\, e$, где по лемме 1.7 $\lambda_e \in X_\pi(K_e)$. тому $\sum\limits_{g \in H} \lambda^{-1}(g) u_s u_g = u_s e = \lambda_e(s)\, e = \lambda_e(s) \sum\limits_{g \in H} \lambda^{-1}(g) u_g$. В силу ) отсюда следует: $\sum\limits_{g \in H} \lambda^{-1}(g) \pi(s, g) u_{sg} = \lambda_e(s) \sum\limits_{g \in H} \lambda^{-1}(g) u_g$.

Поэтому $sg \in H$ при любом $g \in H$; в частности, $s \in H$. Таким образом $K_e \leqslant H$. Итак, $H = K_e$, откуда следует по лемме 1.6, что $H$—$\pi$-ядро

Следствие 1.9. *Если $H$—$\pi$-ядро, то $H \subseteq G_\pi$.*

Доказательство. По теореме 1.8 $X_\pi(H) \neq \varnothing$. Пусть $\lambda$ $\in X_\pi(H)$. Если $s \in H$, $t \in C_G(s)$, то в силу (1.11) $\omega_\pi(s, t) = 1$. Поэтом $s \in G_\pi$. Таким образом, $H \subseteq G_\pi$.

Следствие 1.10. *Если $H$—$\pi$-ядро, $K \trianglelefteq G$, $K \leqslant H$, то $K$-* $\pi$-ядро.

Доказательство. Пусть $\lambda \in X_\pi(H)$. Тогда, как видно (1.10) и (1.11), $\lambda|_k \in X_\pi(K)$. Таким образом, $X_\pi(K) \neq \varnothing$ и, следов тельно, по теореме 1.8 $K$—$\pi$-ядро.

Следствие 1.10 показывает, что множество $\boldsymbol{L}_\pi(G)$ всех $\pi$-яде группы $G$ является полурешеткой. Если $H_1, H_2 \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$, то, вообщ говоря, $H_1 \cdot H_2 \notin \boldsymbol{L}_\pi(G)$. Представляет интерес найти условия, пр которых из $H_1, H_2 \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$ следует $H_1 \cdot H_2 \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$. Пусть $H \in \boldsymbol{L}_\pi($ $\lambda \in X_\pi(H)$. Найдем, прежде всего, представление идемпотента $j$ в виде суммы минимальных идемпотентов алгебры $Z(\boldsymbol{C}^\pi G)$. Пус $\Delta_\pi$ — множество всех минимальных идемпотентов алгебры $Z(\boldsymbol{C}^\pi($ $\Delta_{\pi,\lambda}(H) = \{e \in \Delta_\pi \mid K_e \geqslant H,\ \lambda_e|_H = \lambda\}$.

**Лемма 1.11.** *Если $H \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$ и $\lambda \in X_\pi(H)$, то* $j_H^{(\lambda)} = \sum\limits_{e \in \Delta_{\pi,\lambda}(H)} e$.

Доказательство. Если $e \in \Delta_\pi$, $ej_H^{(\lambda)} = e$, $g \in H$, то $u_g$ $= u_g(ej_H^{(\lambda)}) = e(u_g j_H^{(\lambda)}) = e(\lambda(g)\, j_H^{(\lambda)}) = \lambda(g)\, e$, откуда следует, что $g$ и $\lambda_e(g) = \lambda(g)$. Таким образом, $K_e \geqslant H$ и $\lambda_e|_H = \lambda$. Поэ $e \in \Delta_{\pi,\lambda}(H)$. Пусть, обратно, $e \in \Delta_{\pi,\lambda}(H)$. Так как $H \leqslant K_e$ и $\lambda = \lambda_e$ то $u_g e = \lambda_e(g)\, e = \lambda(g)\, e$ для любого $g \in H$. Поэтому $ej_H^{(\lambda)} = j_H^{(\lambda)} e$ $= |H|^{-1} \sum\limits_{g \in H} \lambda^{-1}(g)\, u_g e = |H|^{-1} \sum\limits_{g \in H} \lambda^{-1}(g)\, \lambda(g)\, e = e$. Итак, $\Delta_{\pi,\lambda}(H$ $= \{e \in \Delta_\pi \mid ej_H^{(\lambda)} = e\}$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Положим теперь

$$j_H = \begin{cases} 0, \text{ если } H \notin L_\pi(G); \\ \sum\limits_{\lambda \in X_\pi(H)} j_H^{(\lambda)}, \text{ если } H \in L_\pi(G). \end{cases} \qquad (1.$$

Из леммы 1.5 следует, что $j_H$—идемпотент алгебры $Z(\boldsymbol{C}$ Положим $\Delta_\pi(H) = \{e \in \Delta_\pi \mid K_e \geqslant H\}$.

**Лемма 1.12.** *Пусть $H \trianglelefteq G$. Тогда* $j_H = \sum\limits_{e \in \Delta_\pi(H)} e$.

Доказательство. Из леммы 1.6. и следствия 1.10 вытек что $\Delta_\pi(H) = \varnothing$, если $H \notin \boldsymbol{L}_\pi(G)$. Если же $H \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$, то имеет м разбиение $\Delta_\pi(H) = \bigcup\limits_{\lambda \in X_\pi(H)} \Delta_{\pi,\lambda}(H)$. Утверждение леммы вытекае этих двух замечаний, леммы 1.11 и (1.14).

**Лемма 1.13.** *Пусть $H_i \trianglelefteq G$ $(i = 1, 2)$. Тогда* $j_{H_1} \cdot j_{H_2} = j_{H_1 H_2}$

Доказательство. Так как $\Delta_\pi(H_1H_2) = \Delta_\pi(H_1) \cap \Delta_\pi(H_2)$ идемпотенты $e \in \Delta_\pi$ взаимно ортогональны, по лемме 1.12 $j_{H_1} \cdot j_{H_2} =$

$$\sum_{e_1 \in \Delta_\pi(H_1)} e_1 \cdot \sum_{e_2 \in \Delta_\pi(H_2)} e_2 = \sum_{e \in \Delta_\pi(H_1) \cap \Delta_\pi(H_2)} e = \sum_{e \in \Delta_\pi(H_1H_2)} e = j_{H_1H_2}.$$

Следствие 1.14. *Если $H_1$ и $H_2$ — π-ядра, то $H_1 \cdot H_2$ явля- ися π-ядром тогда и только тогда, когда $j_{H_1} \cdot j_{H_2} \neq 0$.*

Доказательство. В силу леммы 1.12 $H = H_1H_2 \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$ гда и только тогда, когда $j_H \neq 0$. Остается использовать лемму 1.13.

**Лемма 1.15.** *Пусть $H$ — π-ядро, $\lambda \in X_\pi(H)$. Тогда ограничение учкции $\lambda$ на $[H, G]$ не зависит от выбора $\lambda$.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 1.3.

Ограничение π-характера $\lambda \in X_\pi(H)$ на $[H, G]$ обозначим $\sigma_{(H)}$. чевидно $\sigma_{(H)} \in X_\pi([H, G])$.

**Лемма 1.16**. *Пусть $e = \sum \xi(g) u_g$ — идемпотент алгебры $C^\pi G$. огда условия $e = 0$ и $\xi(1) = 0$ равносильны.*

Доказательство. Пусть $R$ — матричное регулярное пред- вление алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$, отнесенное к ее стандартному базису $\{u_g\}$. ловимся индексировать строки и столбцы матриц представления $R$ ементами группы $G$. Тогда будем иметь $R(u_g) = (\alpha_{s,t}(g))$, где $_t(g) = \delta_{s,gt}\pi(g, t)$. Вычисление следа дает: $\operatorname{tr} R(u_g) = \sum_{s \in G} \alpha_{ss}(g) =$ $\sum_{s \in G} \delta_{s,gs}\pi(g, s) = |G| \delta_{1,g}\pi$ (1.1). Поэтому $\operatorname{tr} R(e) = \sum \xi(g) \operatorname{tr} R(u_g) =$ $|G| \xi(1) \pi(1, 1)$. Равносильность условий $e = 0$ и $\xi(1) = 0$ выте- ет теперь из идемпотентности матрицы $R(e)$ и точности представ- ения $R$.

**Лемма 1.17.** *Пусть $H \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$ и $\lambda \in X_\pi(H)$. Тогда*

$$j_H = \frac{1}{|[H, G]|} \sum_{g \in [H, G]} \lambda^{-1}(g) u_g = \frac{1}{|[H, G]|} \sum_{g \in [H, G]} \sigma_{(H)}^{-1}(g) u_g. \quad (1.15)$$

Доказательство. Ввиду (1.14), (1.12) и леммы 1.3 $j_H =$ $= \sum_{\mu \in X_\pi(H)} j_H^{(\mu)} = |H|^{-1} \sum_{\mu \in X_\pi(H)} \sum_{g \in H} \mu^{-1}(g) u_g = |H|^{-1} \sum_{g \in H} \Big( \sum_{\mu \in X_\pi(H)} \mu^{-1}(g) \Big) u_g =$ $= |H|^{-1} \sum_{g \in H} \Big( \sum_{\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)} (\lambda\psi)^{-1}(g) \Big) u_g = \sum_{g \in H} \lambda^{-1}(g) \Big( \sum_{\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)} \psi^{-1}(g) \Big) u_g.$

ак как $\sum_{\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)} \psi^{-1}(g) = |\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)| = |H/[H, G]|$, если $g \in [H, G]$, и $\sum_{\in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)} \psi^{-1}(g) = 0$, если $g \notin [H, G]$, то $j_H = |H|^{-1} \sum_{g \in [H, G]} \lambda^{-1}(g) |H/[H,$ $]| = |[H, G]|^{-1} \sum_{g \in [H, G)} \lambda^{-1}(g) u_g$. Тем самым доказано первое из ра- енств (1.15). Второе равенство вытекает из первого и определения ункции $\sigma_{(H)}$.

**Теорема 1.18.** *Пусть $H_i \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$, $\lambda_i \in X_\pi(H_i)$ $(i = 1, 2)$. Положим $) = [H_1, G] \cap [H_2, G]$. Тогда следующие условия равносильны: ) $H_1H_2 \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$; б) $\lambda_1|_D = \lambda_2|_D$.*

Доказательство. В силу следствия 1.14 а) равносильно условию $j_{H_1} \cdot j_{H_2} \neq 0$. Пользуясь леммой 1.17, получаем

$j_{H_1} \cdot j_{H_2} = |[H_1, G]|^{-1} \cdot |[H_2, G]|^{-1} \sum_{s \in [H_1, G], t \in [H_2, G]} \lambda_1^{-1}(s) \lambda_2^{-1}(t) u_s u_t = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \sum_{s \in [H_1, G], t \in [H_2 G]} \lambda_1^{-1}(s) \lambda_2^{-1}(t) \pi(s, t) u_{st}$. Пусть $j_{H_1} j_{H_2} = \sum_{g \in G} \xi(g) u_g$ — разложение $j_{H_1} \cdot j_{H_2}$ по базису $\{u_g\}$ алгебры $C^{\pi}G$. Тогда $\xi(1) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \sum_{s \in [H_1, G], t \in [H_2, G], st=1} \lambda_1^{-1}(s) \lambda_2^{-1}(t) \pi(s, t) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \sum_{s \in D} \lambda_1^{-1}(s) \lambda_2^{-1}(s^{-1}) \pi(s, s^{-1})$. Пусть $\lambda_i|_D = \mu_i$ $(i=1, 2)$. Так как $\mu_i \in X_{\pi}(D)$ $(i = 1, 2)$, то $\mu_2 = \mu_1 \psi$, где $\psi \in \mathrm{Lin_{inv}}(D)$. Поэтому $\xi(1) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \sum_{s \in D} \mu_1^{-1}(s) \mu_2^{-1}(s^{-1}) \pi(s, s^{-1}) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \times \sum_{s \in D} (\mu_1(s) \mu_1(s^{-1}))^{-1} \psi(s) \pi(s, s^{-1})$. Так как $\mu_1(s) \mu_1(s^{-1}) = \pi(s, s^{-1}) \times \mu_1(s \cdot s^{-1}) = \pi(s, s^{-1}) \mu_1(1)$, то $\xi(1) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \mu_1^{-1}(1) \sum_{s \in D} \psi(s)$. Следовательно, $\xi(1) = |[H_1 H_2, G]|^{-1} \mu_1^{-1}(1) |D|$, если $\psi = 1_D$, и $\xi(1) = 0$, если $\psi \neq 1_D$. Иначе говоря, $\xi(1) = \delta_{\mu_1, \mu_2} |[H_1 H_2, G]|^{-1} \mu_1^{-1}(1) \times |D|$. В частности, $\xi(1) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mu_1 = \mu_2$. Ввиду леммы 1.16 отсюда следует, что $j_{H_1} \cdot j_{H_2} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mu_1 = \mu_2$. Таким образом, условия а) и б) равносильны.

Следствие 1.19. *Если $H_i$ $(i = 1, 2)$ — π-ядра и $[H_1, G] \cap [H_2, G] = 1$, то $H_1 H_2$ — π-ядро. В частности, если $H_1 \cap H_2 = 1$, то $H_1 \times H_2$ — π-ядро.*

Доказательство. В рассматриваемом случае $D = 1$. Поэтому $\lambda_1|_D = \lambda_2|_D = \pi(1, 1)$.

Определение 1.9. *Минимальными π-ядрами группы G будем называть те ее минимальные нормальные делители, которые являются π-ядрами. Произведение $\mathrm{Sc}_{\pi}(G)$ всех минимальных π-ядер группы G назовем π-цоколем группы G. Если группа G не содержит π-ядер, отличных от 1, полагаем $\mathrm{Sc}_{\pi}(G) = 1$.*

Так как $\mathrm{Sc}_{\pi}(G)$ является прямым произведением некоторого числа минимальных π-ядер, либо $\mathrm{Sc}_{\pi}(G) = 1$, в силу следствия 1.19 $\mathrm{Sc}_{\pi}(G)$ — π-ядро. Очевидно, $\mathrm{Sc}_{\pi}(G)$ — наибольшее π-ядро группы $G$, содержащееся в ее цоколе.

Из следствия 1.19 вытекает, что для нахождения всех π-ядер группы $G$ достаточно знать её *максимальные π-ядра*, т. е. максимальные элементы частично упорядоченного множества $L_{\pi}(G)$.

**Теорема 1.20.** *Пусть $H_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ — максимальные π-ядра группы G. Тогда* а) *подгруппы $H_i$ являются ядрами неприводимых π-представлений группы G;* б) *выполняется неравенство $\sum 1/|[H_i, G]| \leqslant 1$; равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\{H_1, \ldots, H_m\}$ — полная система ядер неприводимых π-представлений группы G;* в) $\bigcap H_i \geqslant \mathrm{Sc}_{\pi}(G)$; *в частности, если $m > 1$, то $\bigcap H_i > 1$.*

**Доказательство.** а. Пусть $H_i = \mathrm{KER}\, P_i$, где $P_i \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$. Так как $P_i$ вполне приводимо, $P_i \overset{\mathrm{Lin}}{\sim} P_{i1} + \cdots + P_{il_i}$, где $P_{ij}$ — неприводимые $\pi$-представления. Так как $H_i = \mathrm{KER}\,(P_{i1} + \cdots + P_{il_i}) \leqslant \bigcap_j \mathrm{KER}\, P_{ij}$, то $H_i \leqslant \mathrm{KER}\, P_{ij}$ $(j = 1, \ldots, l_i)$, откуда следует, так как $\mathrm{KER}\, P_{ij}$ — $\pi$-ядро, что $H_i = \mathrm{KER}\, P_{ij}$. Таким образом, $H_i$ — ядро неприводимого $\pi$-представления $P_{ij}$ $(j = 1, \ldots, l_i)$.

б. Можно, очевидно, считать, что $m > 1$. Так как $H_iH_j$ не является $\pi$-ядром при $i \neq j$, в силу следствия 1.14 идемпотенты $j_{H_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ взаимно ортогональны. Поэтому $\sum j_{H_i} = v$ — идемпотент алгебры $Z(\boldsymbol{C}^\pi G)$. Если $R$ — регулярное представление алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$, то $\mathrm{tr}\, R(v) =$ рангу матрицы $R(v)$. Поэтому $\mathrm{tr}\, R(v) \leqslant |G|$. С другой стороны, $\mathrm{tr}\, R(v) = \sum_i \mathrm{tr}\, R(j_{H_i})$. Ввиду леммы 1.17 имеем

$$\mathrm{tr}\, R(j_{H_i}) = |[H_i, G]|^{-1} \sum_{s \in [H_i, G]} \sigma^{-1}_{(H_i)}(s)\, \mathrm{tr}\, R(u_s).$$

Так как $\sigma_{(H_i)}(1) = \pi(1, 1)$ и $\mathrm{tr}\, R(u_s) = \delta_{1,s}|G|\pi(1, 1)$, то $\mathrm{tr}\, R(j_{H_i}) = |[H_i, G]|^{-1}\sigma_{(H_i)}(1)\, \mathrm{tr}\, R(u_1) = |G/[H_i, G]|$. Следовательно, $\sum |G/[H_i, G]| \leqslant |G|$, откуда и вытекает требуемое неравенство. Допустим, что $\sum 1/|[H_i, G]| = 1$. Тогда ранг $R(v) = \mathrm{tr}\, R(v) = |G|$, откуда $R(v) = E_{|G|}$ и, следовательно, $v = 1$. Далее, так как $H_i$ — максимальное $\pi$-ядро, то $\Delta_\pi(H_i) = \{e \in \Delta_\pi \mid K_e = H_i\}$, откуда следует, что $\Delta_\pi(H_i) \cap \Delta_\pi(H_j) = \varnothing$ при $i \neq j$. Так как по лемме 1.12 $j_{H_i} = \sum_{e \in \Delta_\pi(H_i)} e$ и $\sum j_{H_i} = 1$, то $\bigcup \Delta_\pi(H_i) = \Delta_\pi$ — множество всех минимальных идемпотентов алгебры $Z(\boldsymbol{C}^\pi G)$. Пусть $P$ — любое неприводимое $\pi$-представление группы $G$ и $L$ — порождающее его линейное представление алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$. Тогда существует $e \in \Delta_\pi$ такой, что $L$ порождается минимальным левым идеалом входящим в простую компоненту $A_e = \boldsymbol{C}^\pi Ge$ алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$. Так как $\Delta_\pi = \bigcup \Delta_\pi(H_i)$, найдется такой номер $i$, что $e \in \Delta_\pi(H_i)$. Тогда $K_e = H_i$. Пусть $L_e$ — представление алгебры $\boldsymbol{C}^\pi G$, порожденное идеалом $A_e$, и пусть $P_e$ — соответствующее $\pi$-представление группы $G$. Тогда, как легко видеть, $\mathrm{KER}\, P_e = K_e$. Так как $L$ — неприводимая компонента представления $L_e$, то $P$ — неприводимая компонента $\pi$-представления $P_e$. Поэтому $\mathrm{KER}\, P \geqslant \mathrm{KER}\, P_e = K_e = H_i$, откуда $\mathrm{KER}\, P = H_i$. Таким образом, система $\{H_1, \ldots, H_m\}$ содержит ядра всех неприводимых $\pi$-представлений группы $G$. Обратно, если последнее имеет место, то $\Delta_\pi = \bigcup_i \Delta_\pi(H_i)$ и, следовательно, $\sum j_{H_i} = 1$, откуда вытекает равенство $\sum 1/|[H_i, G]| = 1$.

в. Пусть $F$ — минимальное $\pi$-ядро группы $G$. Если $F \nleqslant \bigcap H_i$, то для некоторого номера $i$ будет $F \nleqslant H_i$. Но тогда в силу следствия 1.9 $H_iF = H_i \times F$ — $\pi$-ядро, что противоречит максимальности $\pi$-ядра $H_i$. Таким образом, $\bigcap H_i$ содержит все минимальные $\pi$-ядра группы $G$, откуда следует, что $\bigcap H_i \geqslant \mathrm{Sc}_\pi(G)$. Если $m > 1$, то $H_i > 1$ для всех $i$ Поэтому $\mathrm{Sc}_\pi(G) > 1$ и, следовательно, $\bigcap H_i > 1$.

Следствие 1.21. *Если $G$ абелева и $\pi \in Z^2(G)$, то группа* ( *имеет единственное максимальное $\pi$-ядро (которое, таким образом является наибольшим $\pi$-ядром группы $G$).*

Доказательство. В обозначениях теоремы 1.20 $\sum 1/|[H_i, G]| \leqslant 1$. Так как $|[H_i, G]| = 1$ $(i = 1, \ldots, m)$, то $m = 1$.

Примечание. Тот же результат можно доказать при помощ леммы Шура (см., например, [3]).

§ 2. **$H$-мультипликатор.** В этом параграфе $H$ — фиксированны нормальный делитель группы $G$.

**Лемма 2.1.** *Пусть $\pi$, $\pi' \in Z^2(G)$, $\pi \sim \pi'$. Тогда $\boldsymbol{L}_\pi(G) = \boldsymbol{L}_{\pi'}(G$*

Доказательство. Допустим, что $H \in \boldsymbol{L}_\pi(G)$. Тогда $H = \mathrm{KER}\,P$ где $P \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$. Так как $\pi \sim \pi'$, то $P \sim P'$, где $P' \in \boldsymbol{L}_{\pi'}(G)$. Так ка $\mathrm{KER}\,P = \mathrm{KER}\,P'$, то $H \in \boldsymbol{L}_{\pi'}(G)$. Таким образом, $\boldsymbol{L}_\pi(G) \subseteq \boldsymbol{L}_{\pi'}(G)$ Аналогично $\boldsymbol{L}_{\pi'}(G) \subseteq \boldsymbol{L}_\pi(G)$. Поэтому $\boldsymbol{L}_\pi(G) = \boldsymbol{L}_{\pi'}(G)$.

Из леммы 2.1 вытекает корректность следующего определени

Определение 2.1. *Пусть $\Pi \in M(G)$. Подгруппа $H$ называет $\Pi$-ядром, если $H$ — $\pi$-ядро, где $\pi \in \Pi$.*

**Лемма 2.2.** *Если $\Pi \in M(G)$ и $H$ — $\Pi$-ядро, то $H$ — $\Pi^{-1}$-ядро.*

Доказательство. Пусть $\pi \in \Pi$ и $H = \mathrm{KER}\,P$, где $P \in \boldsymbol{P}_\pi($ Положим $P_1(g) = \{P(g)'\}^{-1}$ (штрих обозначает транспонировани Тогда $P_1 \in \boldsymbol{P}_{\pi^{-1}}(G)$. Так как $\mathrm{KER}\,P_1 = \mathrm{KER}\,P = H$, то $H$ — $\Pi^{-1}$-ядр

**Лемма 2.3.** *Если $\Pi_1$, $\Pi_2 \in M(G)$ и $H$ — $\Pi_i$-ядро $(i = 1, 2)$, $H$ — $\Pi_1\Pi_2$-ядро.*

Доказательство. Пусть $\pi_i \in \Pi_i$ $(i = 1, 2)$. Так как $H$ — ядро, по теореме 1.8 $X_{\pi_i}(H_i) \neq \varnothing$. Пусть $\lambda_i \in X_{\pi_i}(H)$ $(i = 1, 2)$ Тривиальная проверка показывает, что $\lambda = \lambda_1\lambda_2 \in X_{\pi_1\pi_2}(H)$. Поэтому $X_{\pi_1\pi_2}(H) \neq \varnothing$, откуда следует по теореме 1.8, что $H$ — $\pi_1\pi_2$-ядро а потому и $\Pi_1\Pi_2$-ядро.

Следствие 2.4. *Множество $M_H(G) = \{\Pi \in M(G) \mid H$ — $\Pi$-ядро является подгруппой группы $M(G)$.*

Определение 2.2. *Группу $M_H(G)$ назовем $H$-мультипликатором группы $G$.*

Без труда доказываются следующие свойства отображения $H \to M_H(G)$ решетки нормальных делителей группы $G$ в решетку подгрупп группы $M(G)$.

**Теорема 2.5.** *Пусть $H_1$, $H_2 \trianglelefteq G$. Тогда а) $M_{H_1 \cap H_2}(G) \geqslant M_{H_1}(G) \times M_{H_2}(G)$, $M_{H_1H_2}(G) \leqslant M_{H_1}(G) \cap M_{H_2}(G)$; в частности, если $H_1 \cap H_2 = 1$, то $M_{H_1H_2}(G) = M_{H_1}(G) \cap M_{H_2}(G)$; если $H_1 \leqslant H_2$, то $M_{H_1}(G) \geqslant M_{H_2}(G)$; б) $M_G(G) = 1$, $M_{\{1\}}(G) = M(G)$.*

Определение 2.3. *Коцикл $\pi \in Z^2(G)$ назовем согласованны с $H$, если из $sH = s'H$, $tH = t'H$ $(s, t, s', t' \in G)$ следует $\pi(s, t) = \pi(s', t')$.*

Примечание. 1) если $\pi$ согласован с $H$ и нормализован, то $\pi(s, t) = 1$ при $s \in H$ или $t \in H$; 2) если $\pi$ согласован с $H$, то $\pi' =$

$= \pi(1, 1)^{-1}\pi$ также согласован с $H$; кроме того, он нормализован, причем $\pi' \sim \pi$.

**Лемма 2.6.** *Если* $\Pi \in M(G)$, *то* $H$ *является* $\Pi$-*ядром тогда и только тогда, когда* $\Pi = [\pi]$, *где* $\pi$ — *коцикл, согласованный с* $H$.

Доказательство. 1°. Допустим, что $H$ — $\Pi$-ядро и $\Pi = [\pi_0]$, где $\pi_0 \in Z^2(G)$. Пусть $P \in \boldsymbol{P}_{\pi_0}(G)$, $\mathrm{KER}\, P = H$. Тогда $P(g) = \lambda(g) E_n$, где $\lambda \in \boldsymbol{F}[G]$ и $n = \deg P$. Пусть $\Gamma = G/H$ и $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} g_\alpha H$ — такое разложение $G$ на левые смежные классы по $H$, что $g_1 = 1$, $g_\alpha g_\beta = g_{\alpha\beta} p(\alpha, \beta)$, где $p(\alpha, \beta) \in H$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$. Если $g \in G$, $gH = g_\gamma H$ $(\gamma \in \Gamma)$, положим $\Phi(g) = P(g_\gamma)$. Пусть $s, t \in G$, $sH = g_\alpha H$, $tH = g_\beta H$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$. Как легко проверить, $\Phi(s)\Phi(t) = \pi(s, t)\Phi(st)$, где $\pi(s, t) = \pi_0(g_\alpha, g_\beta)\pi_0^{-1}(g_{\alpha\beta}, p(\alpha, \beta))\lambda(p(\alpha, \beta))$. Отсюда следует, что $\pi \in Z^2(G)$ и $\Phi \in \boldsymbol{P}_\pi(G)$. Из определения коцикла $\pi$ видно, что он согласован с $H$. Далее, если $g \in G$, $gH = g_\gamma H$ $(\gamma \in \Gamma)$, то $g = g_\gamma h$, где $h \in H$ и, следовательно, $P(g) = P(g_\gamma h) = \pi_0^{-1}(g_\gamma, h) P(g_\gamma) P(h) = \pi_0^{-1}(g_\gamma, h)\lambda(h) \times \Phi(g) = \mu(g)\Phi(g)$, где $\mu \in \boldsymbol{F}[G]$. Поэтому $P \sim \Phi$, откуда следует, что $\pi_0 \sim \pi$, т. е. $\Pi = [\pi]$, где $\pi$ согласован с $H$.

2°. Допустим, что $\Pi = [\pi]$, где $\pi \in Z^2(G)$ согласован с $H$. Коцикл $\pi$ будем считать нормализованным (см. примечание после определения 2.3). Пусть $\lambda \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$. Тогда, как легко видеть, $\lambda \in X_\pi(H)$. Поэтому $X_\pi(H) \neq \emptyset$, откуда следует в силу теоремы 1.8, что $H$ — -ядро, а потому и $\Pi$-ядро. Лемма доказана.

Пусть $G$ и $\Gamma$ — конечные группы, $f: G \to \Gamma$ — эпиморфизм, $H = \mathrm{Ker}\, f$. Тогда $\Gamma \cong G/H$. Тройку $(G, f, H)$ будем называть *расширением группы* $\Gamma$ *при помощи* $H$. Пусть $\alpha \in \Gamma$, $g_\alpha \in f^{-1}(\alpha)$, т. е. $f(g_\alpha) = \alpha$. Дополнительно примем $g_1 = 1$. При этих предположениях получаем разложение

$$G = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} g_\alpha H \tag{2.1}$$

группы $G$ на левые смежные классы по $H$, причем

$$g_\alpha g_\beta = g_{\alpha\beta} p(\alpha, \beta), \tag{2.2}$$

где $p(\alpha, \beta) \in H$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$. Отображение $p: G \times G \to H$ — *система факторов расширения* $(G, f, H)$. Легко проверить, что

$$p(\alpha\beta, \gamma)\, p(\alpha, \beta)^\nu = p(\alpha, \beta\gamma)\, p(\beta, \gamma), \tag{2.3}$$

где $s^\nu = g_\gamma^{-1} s g_\gamma$ $(s \in H)$. Заметим, что, ввиду $g_1 = 1$, для любого $\alpha \in \Gamma$ имеет место $p(\alpha, 1) = p(1, \alpha) = p(1, 1) = 1$.

Определим гомоморфизмы $\varphi$: $\mathrm{Lin}(G) \to \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$, $\tau: \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \to M(\Gamma)$, $\sigma: M(\Gamma) \to M_H(G)$ следующим образом. Пусть $\chi \in \mathrm{Lin}(G)$, $\chi_H$ — ограничение $\chi$ на $H$. Тогда $\chi_H \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{iuv}}(H)$. Под $\varphi$ понимаем отображение ограничения $\chi \to \chi_H$ $(\chi \in \mathrm{Lin}(G))$. Если $\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$, полагаем

$$\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \psi(p(\alpha, \beta)) \quad (\alpha, \beta \in \Gamma), \tag{2.4}$$

При помощи (2.3) легко проверить, что $\eta^{(\psi)} \in Z^2(\Gamma)$. Коцикл $\eta^{(\psi)}$ нормализован, так как $\eta^{(\psi)}(1, 1) = \psi(p(1, 1)) = \psi(1) = 1$. Отображение $\psi \to [\eta^{(\psi)}]$ очевидно является гомоморфизмом $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$ в $M(\Gamma)$. Обозначив его через $\tau$, получим

$$\tau(\psi) = [\eta^{(\psi)}] \quad (\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)). \tag{2.5}$$

Гомоморфизм $\tau$: $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \to M(\Gamma)$, как легко видеть, не зависит от выбора трансверсали $\{g_\gamma\}$.

Пусть $\rho \in Z^2(\Gamma)$, $\rho$ нормализован. Положим для $s, t \in G$

$$\pi_\rho(s, t) = \rho(f(s), f(t)). \tag{2.6}$$

Легкая проверка показывает, что $\pi_\rho \in Z^2(G)$. Из (2.6) вытекает, что коцикл $\pi_\rho$ нормализован и согласован с $H$. В силу леммы 2.6 $[\pi_\rho] \in M_H(G)$. Заметим, что класс $[\pi_\rho]$ коцикла $\pi_\rho$ вполне определяется классом $[\rho]$ коцикла $\rho$. Благодаря этому корректно определяется отображение $\sigma$: $M(\Gamma) \to M_H(G)$:

$$\sigma([\rho]) = [\pi_\rho]. \tag{2.7}$$

Отображение $\sigma$, очевидно, является гомоморфизмом $M(\Gamma)$ в $M_H(G)$.

**Лемма 2.7.** *Пусть* $\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$, $\lambda \in F[\Gamma]$ *и функция* $\chi \in F[G]$ *задается равенством*

$$\chi(g_\alpha h) = \lambda(\alpha)\psi(h) \quad (\alpha \in \Gamma, h \in H). \tag{2.8}$$

*Тогда для* $s, t \in G$, $\alpha = f(s)$, $\beta = f(t)$

$$\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \frac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)} \left\{\frac{\chi(s)\chi(t)}{\chi(st)}\right\}^{-1}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Положим $s = g_\alpha h_1$, $t = g_\beta h_2$, где $h_i \in H$ $(i = 1, 2)$. Тогда, как легко видеть, $st = g_{\alpha\beta} p(\alpha, \beta)\, h_1^\beta h_2$, откуда вытекает, что $\chi(st) = \lambda(\alpha\beta)\psi(p(\alpha, \beta) h_1^\beta h_2) = \lambda(\alpha\beta)\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta)\psi(h_1)\psi(h_2)$. Так как $\chi(s)\chi(t) = \lambda(\alpha)\psi(h_1)\lambda(\beta)\psi(h_2) = \lambda(\alpha)\lambda(\beta)\psi(h_1)\psi(h_2)$, то $\frac{\chi(st)}{\chi(s)\chi(t)} = \frac{\lambda(\alpha\beta)}{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta)$, откуда и вытекает (2.9).

**Теорема 2.8.** *Последовательность*

$$\mathrm{Lin}(G) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \xrightarrow{\tau} M(\Gamma) \xrightarrow{\sigma} M_H(G) \to 1 \tag{2.10}$$

*точна.*

Доказательство. 1°. Если $\psi \in \mathrm{Im}\,\varphi$, то $\psi = \chi_H$, где $\chi \in \mathrm{Lin}(G)$. Из (2.2) следует $\chi(g_\alpha)\chi(g_\beta) = \chi(g_{\alpha\beta})\psi(p(\alpha, \beta)) = \chi(g_{\alpha\beta})\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta)$. Поэтому $\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \frac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)}$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$, где $\lambda(\gamma) = \chi(g_\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$. Следовательно, $\eta^{(\psi)} \sim 1$, т.е. $\tau(\psi) = [\eta^{(\psi)}] = 1$. Таким образом, $\psi \in \mathrm{Ker}\,\tau$. Итак, $\mathrm{Im}\,\varphi \leqslant \mathrm{Ker}\,\tau$. Пусть $\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$, $\psi \in \mathrm{Ker}\,\tau$. Тогда $[\eta^{(\psi)}] = \tau(\psi) = [1]$, т. е. $\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \frac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)}$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$, где $\lambda \in F[\Gamma]$. Определим функцию $\chi \in \boldsymbol{F}[G]$, полагая $\chi(s) = \lambda(\alpha)\psi(h)$ для $s = g_\alpha h$ $(\alpha \in \Gamma,\ h \in H)$. Из леммы 2.7 следует, что $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$, т. е. $\chi \in \mathrm{Lin}(G)$. Если $h \in H$, то $\chi(h) = \chi(g_1 h) = \lambda(1)\psi(h) = \psi(h)$, ибо $\lambda(1) = \eta^{(\psi)}(1, 1) = 1$. Таким образом, $\chi_H = \psi$, т. е. $\psi \in \mathrm{Im}\,\varphi$. Итак, $\mathrm{Ker}\,\tau \leqslant \mathrm{Im}\,\varphi$. Тем самым доказано, что

$$\mathrm{Ker}\,\tau = \mathrm{Im}\,\varphi. \tag{2.11}$$

2°. Пусть $\rho \in Z^2(\Gamma)$, $[\rho] \in \mathrm{Im}\,\tau$. Тогда $[\rho] = \tau(\psi) = [\eta^{(\psi)}]$, где $\psi \in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$. Определим функцию $\chi \in \boldsymbol{F}[G]$, полагая $\chi(s) = \psi(h)$, если $s = g_\alpha h$ $(\alpha \in \Gamma,\ h \in H)$. Представив последнее равенство в виде $\chi(s) = \lambda(\alpha)\psi(h)$, где $\lambda = 1_\Gamma$, по лемме 2.7 при $\alpha = f(s)$, $\beta = f(t)$, получим $\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \left\{\frac{\chi(s)\chi(t)}{\chi(st)}\right\}^{-1} = \frac{\chi^{-1}(s)\chi^{-1}(t)}{\chi^{-1}(st)}$. Так как в силу (2.6) $\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \eta^{(\psi)}(f(s), f(t)) = \pi_{\eta^{(\psi)}}(s, t)$, то $\pi_{\eta^{(\psi)}} \sim 1$, т. е. $\sigma([\rho]) = \sigma([\eta^{(\psi)}]) = [\pi_{\eta^{(\psi)}}] = 1$. Таким образом, $[\rho] \in \mathrm{Ker}\,\sigma$. Итак, $\mathrm{Im}\,\tau \leqslant \mathrm{Ker}\,\sigma$. Допустим теперь, что $\rho \in Z^2(\Gamma)$ нормализован и $[\rho] \in \mathrm{Ker}\,\sigma$. огда $[\pi_\rho] = 1$, т. е. $\pi_\rho(s, t) = \frac{\chi(s)\chi(t)}{\chi(st)}$ $(s,\ t \in G)$, где $\chi \in \boldsymbol{F}[G]$. Положим $\psi = \chi_H$, $\lambda(\alpha) = \chi(g_\alpha)$ $(\alpha \in \Gamma)$. Так как коцикл $\pi_\rho$ согласован с , при $h \in H$, $t \in G$ имеем $\chi(th) = \frac{\chi(t)\chi(h)}{\pi_\rho(t, h)} = \chi(t)\chi(h) = \chi(t)\psi(h)$, $ht) = \frac{\chi(h)\chi(t)}{\pi_\rho(h, t)} = \chi(h)\chi(t) = \psi(h)\chi(t)$. Таким образом,

$$\chi(th) = \chi(ht) = \chi(t)\psi(h)\ (t \in G,\ h \in H). \tag{2.12}$$

Полагая в (2.12) $t = h_1$, $h = h_2$ $(h_1,\ h_2 \in H)$, получаем $\psi(h_1 h_2) = \chi(h_1 h_2) = \chi(h_1)\psi(h_2) = \psi(h_1)\psi(h_2)$. Далее, при $h \in H$, $t \in G$ имеем $(h)\chi(t) = \chi(ht) = \chi(th^t) = \chi(t)\psi(h^t)$. Поэтому $\psi(h^t) = \psi(h)$, т. е. $\in \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$. Полагая в (2.12) $t = g_\alpha$, получаем $\chi(g_\alpha h) = \chi(g_\alpha)\psi(h)$, . е. функция $\chi$ удовлетворяет условию леммы 2.7. В силу этой леммы при $s, t \in G$, $\alpha = f(s)$, $\beta = f(t)$ имеем $\eta^{(\psi)}(\alpha, \beta) = \frac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)}\pi_\rho^{-1}(s, t) = \frac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)}\rho^{-1}(f(s), f(t)) = \frac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha\beta)}\rho^{-1}(\alpha, \beta)$. Поэтому $\rho \sim (\eta^{(\psi)})^{-1}$, т. е. $[\rho] = [\eta^{(\psi)}]^{-1} = \tau(\psi)^{-1} = \tau(\psi^{-1}) \in \mathrm{Im}\,\tau$. Следовательно, $\mathrm{Ker}\,\sigma \leqslant \mathrm{Im}\,\tau$. Тем самым доказано, что

$$\mathrm{Ker}\,\sigma = \mathrm{Im}\,\tau. \tag{2.13}$$

3°. Докажем, что $\sigma$ — эпиморфизм. Пусть $\Pi \in M_H(G)$. Тогда по лемме 2.6 $\Pi = [\pi]$, где $\pi \in Z^2(G)$ согласован с $H$ и нормализован. Определим функцию $\rho\colon \Gamma \times \Gamma \to \boldsymbol{C}^*$, полагая $\rho(\alpha, \beta) = \pi(g_\alpha, g_\beta)$ $(\alpha,\ \beta \in \Gamma)$. Пользуясь согласованностью коцикла $\pi$ с $H$, легко проверим, что $\rho \in Z^2(\Gamma)$. Так как $\rho(1, 1) = \pi(g_1, g_1) = \pi(1, 1) = 1$, коцикл $\rho$ нормализован. Пусть $s,\ t \in G$, $s = g_\alpha h_1$, $t = g_\beta h_2$, где $\alpha,\ \beta \in \Gamma$

и $h_1, h_2 \in H$. Тогда $\pi(s, t) = \pi(g_\alpha, g_\beta) = \rho(\alpha, \beta) = \rho(f(s), f(t)) = \pi_\rho(s, t)$, т.е. $\pi = \pi_\rho$. Поэтому $\Pi = [\pi] = [\pi_\rho] = \sigma([\rho])$. Таким образом, $\operatorname{Im}\sigma = M_H(G)$, т.е. $\sigma$ — эпиморфизм. Тем самым точность последовательности (2.10) доказана.

Пусть $X$ — конечная группа, $Y \trianglelefteq X$. Положим $\operatorname{Lin}_Y(X) = \{\chi \in \operatorname{Lin}(X) \mid \operatorname{Ker}\chi \geqslant Y\}$. Очевидно $\operatorname{Lin}_Y(X) \leqslant \operatorname{Lin}(X)$ и $\operatorname{Lin}_Y(X) \cong \operatorname{Lin}(X/Y)$. Если $Y \leqslant Z \trianglelefteq X$, то очевидно $\operatorname{Lin}_Z(X) \leqslant \operatorname{Lin}_Y(X)$.

**Лемма 2.9.** *Пусть $X$ — конечная группа, $X'$ — ее коммутант, причем $X' \leqslant Y \leqslant Z \leqslant X$.* Тогда

$$\operatorname{Lin}_Y(X)/\operatorname{Lin}_Z(X) \cong Z/Y. \tag{2.14}$$

Доказательство. Определим гомоморфизм $\theta\colon \operatorname{Lin}_Y(X) \to \operatorname{Lin}_Y(Z)$, полагая $\theta(\psi) = \psi|_Z\ (\psi \in \operatorname{Lin}_Y(X))$. Так как $\operatorname{Ker}\theta = \operatorname{Lin}_Z(X)$, то $\operatorname{Im}\theta \cong \operatorname{Lin}_Y(X)/\operatorname{Lin}_Z(X)$. Отсюда следует, ввиду абелевости групп $X/Y$ и $Z/Y$, что

$$|\operatorname{Im}\theta| = \frac{|\operatorname{Lin}_Y(X)|}{|\operatorname{Lin}_Z(X)|} = \frac{|\operatorname{Lin}(X/Y)|}{|\operatorname{Lin}(X/Z)|} = \frac{|X/V|}{|X/Z|} = |Z/Y| = |\operatorname{Lin}_Y(Z)|.$$

Поэтому $\operatorname{Im}\theta = \operatorname{Lin}_Y(Z)$, откуда следует, что $\operatorname{Lin}_Z(X)/\operatorname{Lin}_Y(X) \cong \operatorname{Lin}_Y(Z) \cong Z/Y$.

Следствие 2.10. *Если $X' \leqslant Z \leqslant X$, то* $\operatorname{Lin}(X)/\operatorname{Lin}_Z(X) \cong Z/X'$.

Доказательство. Полагаем в (2.14) $Y = X'$.

**Теорема 2.11.** *Пусть $(G, f, H)$ — расширение группы $\Gamma$. Тогда*

$$M_H(G) \cong M(\Gamma)/N, \tag{2.15}$$

*где* $N \leqslant M(\Gamma)$, $N \cong H \cap G'/[H, G]$.

Доказательство. В силу теоремы 2.8 $\operatorname{Ker}\sigma = \operatorname{Im}\tau \cong \operatorname{Lin}_{\text{inv}}(H)/\operatorname{Ker}\tau = \operatorname{Lin}_{\text{inv}}(H)/\operatorname{Im}\varphi$. С другой стороны, $\operatorname{Im}\varphi \cong \operatorname{Lin}(G)/\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Lin}(G)/\operatorname{Lin}_H(G) = \operatorname{Lin}(G)/\operatorname{Lin}_{HG'}(G)$. Так как $G' \leqslant HG' \leqslant G$, в силу следствия 2.10 $\operatorname{Lin}(G)/\operatorname{Lin}_{HG'}(G) \cong HG'/G' \cong H/H \cap G' \cong \operatorname{Lin}_{H \cap G'}(H)$.
Поэтому $|\operatorname{Im}\varphi| = |\operatorname{Lin}_{H \cap G'}(H)|$. Так как $\operatorname{Im}\varphi \leqslant \operatorname{Lin}_{H \cap G'}(H)$, отсюда вытекает, что $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Lin}_{H \cap G'}(H)$. Замечая, что $\operatorname{Lin}_{\text{inv}}(H) = \operatorname{Lin}_{[H, G]}(H)$, получаем $\operatorname{Ker}\sigma \cong \operatorname{Lin}_{\text{inv}}(H)/\operatorname{Lin}_{H \cap G'}(H) = \operatorname{Lin}_{[H, G]}(H)/\operatorname{Lin}_{H \cap G'}(H)$. Так как $H' \leqslant [H, G] \leqslant H \cap G' \leqslant H$, в силу леммы 2.9 ($X = H$, $Y = [H, G]$, $Z = H \cap G'$), получаем $\operatorname{Ker}\sigma \cong H \cap G'/[H, G]$. Остается заметить, что, ввиду эпиморфности $\sigma$, $M_H(G) \cong M(\Gamma)/N$, где $N = \operatorname{Ker}\sigma$.

**Теорема 2.12.**

$$M_H(G) \cong M(G/H)/N, \tag{2.16}$$

*где* $N \leqslant M(G/H)$, $N \cong H \cap G'/[H, G]$*.

Доказательство. Полагаем в (2.15) $\Gamma = G/H$, $f$ — естественный гомоморфизм группы $G$ на $\Gamma$.

---

* В [3] ошибочно утверждалось, что $M_H(G) \cong M(G/H)$.

**Следствие 2.13.** *Следующие условия равносильны:* а) $M_H(G) \cong$ $M(G/H)$; б) $H \cap G' = [H, G]$; в) *все $G$-инвариантные линейные рактеры подгруппы $H$ продолжаемы до линейных характеров групп* $G$.

**Доказательство.** а) $\Rightarrow$ б). В силу (2.16) $M_H(G) \cong M(G/H) \Rightarrow$ $N = 1 \Rightarrow H \cap G' = [H, G]$.

б) $\Rightarrow$ в) $H \cap G' = [H, G] \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\sigma \cong H \cap G'/[H, G] = 1 \Rightarrow \mathrm{Im}\,\tau =$ $1 \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\tau = \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \Rightarrow \mathrm{Lin}_{\mathrm{prol}}(H) = \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H)$, $\mathrm{Lin}_{\mathrm{prol}}(H) = \mathrm{Im}\,\varphi$ — подгруппа $G$-инвариантных линейных характеров подгруппы $H$, продолжаемых на $G$.

в) $\Rightarrow$ а). $\mathrm{Lin}_{\mathrm{prol}}(H) = \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\tau =$ $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\tau = 1 \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\sigma = 1 \Rightarrow \sigma$ — изоморфизм.

**Следствие 2.14.** *Если* $M(G) = 1$, *т. е. группа $G$ замкнута в ысле Шура, то для любого $H \trianglelefteq G$ имеет место* $M(G/H) \cong$ $H \cap G'/[H, G]$.

**Определение 2.4.** *Расширение* $(G, f, H)$ *группы* $\Gamma$ *назовем чным, если $\tau$ — мономорфизм.*

**Следствие 2.15.** *Расширение* $(G, f, H)$ *точно тогда и только да, когда $H \leqslant G'$. При выполнении этого условия $H/[H, G]$ изорфна подгруппе группы* $M(\Gamma)$.

**Доказательство.** $(G, f, H)$ точно $\leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\tau = 1 \leftrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = 1 \leftrightarrow$ $\mathrm{in}_{\mathrm{prol}}(H) = 1 \leftrightarrow \mathrm{Lin}_{H \cap G'}(H) = 1 \leftrightarrow H/H \cap G' = 1 \leftrightarrow H \leqslant G'$. Если $f, H)$ точно, то $\tau$: $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \rightarrow M(\Gamma)$ — мономорфизм, откуда слеет, что $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \cong$ подгруппе группы $M(\Gamma)$. Остается заметить, $\mathrm{Lin}_{\mathrm{inv}}(H) \cong H/[H, G]$.

**Определение 2.5.** *Расширение* $(G, f, H)$ *назовем накрывающим, ли $\tau$ — эпиморфизм,*

**Следствие 2.16.** *Следующие утверждения равносильны:* а) $(G,$ $H)$ — *накрывающее расширение;* б) $M_H(G) = 1$; в) $M(\Gamma) \cong H \cap$ $G'/[H, G]$.

**Доказательство.** а) $\Rightarrow$ б). $\mathrm{Im}\,\tau = M(\Gamma) \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\sigma = M(\Gamma) \Rightarrow$ $\mathrm{Im}\,\sigma = 1 \Rightarrow M_H(G) = 1$. б) $\Rightarrow$ в). $M_H(G) = 1 \Rightarrow M(\Gamma) = N \Rightarrow M(\Gamma) \cong$ $H \cap G'/[H, G]$. в) $\Rightarrow$ а). $M(\Gamma) \cong H \cap G'/[H, G] \Rightarrow M_H(G) = 1 \Rightarrow \mathrm{Im}\,\sigma =$ $1 \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\sigma = M(\Gamma) \Rightarrow \mathrm{Im}\,\tau = M(\Gamma) \Rightarrow (G, f, H)$ — накрывающее расирение.

Классические результаты И. Шура о центральных расширениях и уппах представлений являются частными случаями изложенных ше общих результатов.

**исок литературы:** 1. *Schur J.* Über die Darstellund der endlicher Gruppen durch rochene lineare Substitutionen // J. Reine Angew. Math. 1904. **127**. P. 20—50 2. *Кэртис Ч, Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциатих алгебр. М., 1969, С. 1—230. 3. *Жмудь Э. М.* Об изоморфных неприводимых оективных представлениях конечных групп // Зап. мат. отд.-ние физ.- мат. ф-та ГУ и Харьк. мат. о-ва. 1960. Сер. 4. **26**. С. 333—372.

*Поступила в редколлегию 15.07.88*

УДК 517.55

*А. Ю. РАШКОВСКИЙ, Л. И. РОНКИН*

# СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В КОНУСЕ. II (ОБЩАЯ ТЕОРИЯ)*

**5. Формулы Грина и Карлемана.** Для произвольного борелевского множества $E \subset\subset \overline{K} \setminus \{0\}$ положим

$$\tau(E) = \int_E \left\{ \varphi \, d\mu - \frac{1}{\theta_m} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\nu \right\}. \tag{27}$$

Тем самым мы определим на $\overline{K} \setminus \{0\}$ меру $\tau = \tau_u$, «объединяющую» меры $\mu$ и $\nu$. С учетом доказанного в лемме 5 мы теперь можем распространить формулу Карлемана и на функции, субгармонические в конусе $K$, не предполагая, как это было в лемме 2, их продолжаемости в окрестность $\overline{K}$. Мы приведем также и другой вариант формулы Карлемана, приспособленный к изучению поведения субгармонических функций при подходе к вершине конуса. Оба варианта содержатся в приводимом нами более общем равенстве, носящем характер формулы Грина для функций, субгармонических в конусе и ограниченных сверху на всех его ограниченных подмножествах.

Лемма 6. *Пусть функция $u \in SH(K)$ ограничена сверху на всех ограниченных подмножествах конуса $K$. Тогда для любой функции $\psi \in C^2(\overline{K}_{r,R})$ и для всех $r \notin \Lambda_u$, $R \notin \Lambda_u$, $r < R$ справедливо равенство***

$$\theta_m \int_{\overline{K}_{r,R}} \psi \, d\tau - \int_{K_{r,R}} u \, \Delta(\varphi\psi) \, d\omega =$$

$$= \int_{\Gamma_r} u \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS_r + \int_{\Gamma_R} u \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS_R - Q(\psi, r, u) +$$

$$+ Q(\psi, R, u). \tag{28}$$

*В частности, при $\psi(x) = \gamma_R(|x|)$, где $\gamma_R(t) = t^{\varkappa^-} - R^{\varkappa^- - \varkappa^+} t^{\varkappa^+}$,*

$$\theta_m \int_{K_{r,R}} \gamma_R(|x|) \varphi \, d\mu = \int_{\Gamma_{r,R}} \gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\nu +$$

$$+ \gamma_R'(r) \int_{\Gamma_r} u \varphi \, dS_r - \gamma_R'(R) \int_{\Gamma_R} u \varphi \, dS_R -$$

$$- \gamma_R(r) Q(1, r, u), \tag{29}$$

---

* Это вторая часть статьи, первая часть которой опубликована в предыдущем выпуске настоящего сборника. Нумерация утверждений, формул и литературы является продолжением соответствующей нумерации из первой части.

** Если меры $u\varphi \, d\, S_t$ на $\Gamma_t$ заменить мерами $d\nu^{(t)}$, $t = r, R$, то полученные равенства будут справедливы при $r$ и $R$, не принадлежащих не более чем счетному множеству $\Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$.

*при* $\psi(x) = \tilde{\gamma}_r(|x|)$, *где* $\tilde{\gamma}_r(t) = t^{\varkappa^+} - r^{\varkappa^+ - \varkappa^-} t^{\varkappa^-}$,

$$\theta_m \int\limits_{K_{r,R}} \tilde{\gamma}_r(|x|)\,\varphi\, d\mu = \int\limits_{\Gamma_{r,R}} \tilde{\gamma}_r(|x|) \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\nu - \tilde{\gamma}_r'(R) \int\limits_{\Gamma_R} u\varphi\, dS_R + \tilde{\gamma}_r'(r) \int\limits_{\Gamma_r} u\varphi\, dS_r - \tilde{\gamma}_r(R)\, Q(1,\ R,\ u). \qquad (30)$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 5, построим последовательность функций $u_h^j \in SH(K_{r,R}) \cap C^\infty(K_{r,R})$ при $j \to \infty$ монотонно убывающую к функции $u_h$. Обозначим через $\Lambda_u^*(t) = \{h\colon \mu_h(\overline{\Gamma}_t) \neq 0\}$.

Согласно формуле Грина, примененной к функциям $u_h^j$ и $\psi\varphi$ в области $K_{r,R}$, имеем

$$\int\limits_{K_{r,R}} \varphi\psi\Delta u_h^j d\omega - \int\limits_{K_{r,R}} u_h^j \Delta(\varphi\psi)\, d\omega = \int\limits_{\Gamma_{r,R}} u_h^j \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma + \int\limits_{\Gamma_r} u_h^j \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS_r - \int\limits_{\Gamma_r} \varphi\psi \frac{\partial u_h^j}{\partial n} dS_r + \int\limits_{\Gamma_R} u_h^j \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS_R - \int\limits_{\Gamma_R} \varphi\psi \frac{\partial u_h^j}{\partial n} dS_R.$$

Считая, что $h \notin \{\Lambda_u^*(R) \cup \Lambda_u^*(r)\}$, перейдем в этом равенстве к пределу сначала по $j \to \infty$, а потом по $h \to 0$. Используя лемму 5, получим при этом равенство (28), из которого очевидным образом следуют равенства (29) и (30).

Лемма доказана.

**Лемма 7.** *Пусть* $L(x)$ — *позитивно однородная степени* $\rho > \varkappa^+$ *ограниченная сверху на* $\Gamma$ *субгармоническая функция в конусе* $K$. *Тогда для любой функции* $\psi \in C^2(\overline{K}_1)$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_{K_1} L\,\Delta(\varphi\psi)\, d\omega = \theta_m \int\limits_{\overline{K}_1} \psi\, d\tau_L - \rho \int\limits_{\Gamma_1} \psi\varphi\, L dS_1 - \int\limits_{\Gamma_1} L\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS_1. \qquad (31)$$

Доказательство. Применяя предшествующую лемму в области $K_{\lambda,1}$ к функциям $L$ и $\psi$ и устремляя затем $\lambda$ к нулю, получаем равенство (31). Лемма доказана.

**6. Распространение результатов на случай «несдвигаемого» конуса. Итоговые оценки.** Сейчас мы избавимся от введенного в п. 3 требования «сдвигаемости» конуса $K$, т. е. не будем предполагать, что $\exists\, x^0 \in S_1\colon \forall\, h > 0\ \overline{\{K + hx^0\}} \subset K$. Единственным условием на конус $K$ остается двойная гладкость границы области $\Gamma \subset S_1$, $K = K^\Gamma$.

Нетрудно показать, что в этом случае область Г можно покрыт объединением областей $\Gamma^{(j)} \subset \Gamma$, $j = 1, \dots, N = N(\Gamma)$ со следующими свойствами: 1) границы $\Gamma^{(j)}$ дважды гладкие; 2) $\exists\, x^{(j)} \in S_1$ такие, что $\forall h > 0$ $\{\Gamma^{(j)} + hx^{(j)}\} \Subset K$, $j = 1, \dots, N$. Ясно, что каждый конус $K^{(j)} = K^{\Gamma^{(j)}}$ «сдвигаем» в $K$, поэтому для функций $u \in SH(K^{(j)})$ справедливы все утверждения лемм 4 — 7 для конуса $K^{(j)}$. Подчеркнем, однако, что для функции $u \in SH(K)$ содержащиеся в этих леммах оценки для всех конусов одновременно доказаны пока только с $\rho > \max\limits_j \varkappa^+(K^{(j)})$.

Положим $\tilde{\Gamma}^{(j)} = \Gamma^{(j)} \cup (\partial\Gamma^{(j)} \cap \partial\Gamma)$ и введем в рассмотрение функции $\eta_j$, $j = 1, \dots, N$ со следующими свойствами: 1) $\eta_j \in C^\infty(\overline{\Gamma})$ 2) $\operatorname{supp} \eta_j \subset \tilde{\Gamma}^{(j)}$; 3) $\eta_1 + \dots + \eta_N \equiv 1$. Через $\eta_j$ обозначим также однородное степени 0 продолжение функции $\eta_j$ в $\overline{K}$. Через $\varphi^{(j)}$ обозначим первую собственную функцию краевой задачи в $\Gamma^{(j)}$ $\Delta^*\eta + \lambda\eta = 0$, $\eta|_{\partial\Gamma^{(j)}} = 0$, продолженную в $K^{(j)}$ как однородную степени 0 и нулем в $\overline{K}/K^{(j)}$. Для любой функции $\psi \in C^2(\overline{K}_{\lambda,R})$, $0 < \lambda < R$ положим

$$\psi_j = \frac{\varphi\eta_j}{\varphi^{(j)}}\psi, \ j = 1, \dots, N.$$

Ясно, что $\psi_j \in C^2(\overline{K}^{(j)}_{\lambda,R})$, $\psi_j(x) = 0$ при $x \in \partial K^{(j)} \cap K_{\lambda,R}$, $\psi_j(x) = \psi(x)\,\eta_j(x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} / \frac{\partial\varphi^{(j)}(x)}{\partial n}$ при $x \in \partial K^{(j)}_{\lambda,R} \cap \partial K$. Функцию $\psi_j$ будем называть «проекцией» функции $\psi$ на $K^{(j)}$. В силу того, что $\{\eta_j\}$ — разбиение единицы, справедливо тождество

$$\sum_{1 < j < N} \varphi^{(j)}\psi_j \equiv \varphi\psi.$$

Пусть функция $u \in SH(K)$ ограничена сверху на всех ограниченных множествах. Тогда в каждом конусе $K^{(j)}$ она удовлетворяет условиям леммы 5 и, стало быть, на $\partial K^{(j)} \setminus \{0\}$ у нее существует граничная мера $\nu^{(j)}$. Области $\Gamma^{(j)}$ всегда можно выбрать так, чтобы $|\nu^{(j)}|(E) = 0$ для любого множества E, лежащего на границе множества $\partial K^{(j)} \cap \partial K$. В силу единственности каждой меры $\nu^{(j)}$ на $\partial K^{(j)}$, для любого борелевского множества $E \subset \partial K^{(j_1)} \cap \partial K^{(j_2)}$ выполняется равенство $\nu^{(j_1)}(E) = \nu^{(j_2)}(E)$. Таким образом, на $\partial K \setminus \{0\}$ можно корректно определить вещественную меру $\nu = \nu_u$, полагая

$$\nu(E) = \sum_{1 < j < N} \nu^{(j)}(E_j), \ E \Subset \partial K/\{0\},$$

где $\{E_j\}$ — такое разбиение множества $E$, что $E_j \subset \partial K^{(j)}$, или, эквивалентно,

$$\nu(E) = \sum_{1<j<N} \int_E \eta_j \, d\nu^{(j)}. \tag{32}$$

Отметим, что определенная так мера $\nu$ не зависит от выбора покры- ия $\{\Gamma^{(j)}\}$ множества $\Gamma$ и локально является граничным значением ункции $u$ в следующем смысле:

$$\forall\, \psi \in C(\Gamma_{\lambda,R} \cap \Gamma^{(j)}_{\lambda,R});$$

$$\lim_{h\to 0} \sum_{\Gamma_{\lambda,R} \cap \Gamma^{(j)}_{\lambda,R}} \psi(x)\, u(x + hx^{(j)})\, d\sigma = \int_{\Gamma_{\lambda,R} \cap \Gamma^{(j)}_{\lambda,R}} .\ \psi(x)\, d\nu. \tag{33}$$

Наконец, для любой функции $\psi \in C^2(\overline{\Gamma}_r)$ положим

$$Q(\psi,\ r,\ u) = \sum_{1<j<N} Q^{(j)}(\psi_j,\ r,\ u), \tag{34}$$

де

$$Q^{(j)}(\eta,\ r,\ u) = \lim_{h\to 0} \int_{\Gamma^{(j)}_r} \varphi^{(j)}(x)\, \eta(x) \frac{\partial u(x + hx^{(j)})}{\partial r}\, dS_r,$$

функции $\psi_j$ являются «проекциями» на $K^{(j)}$ функции $\psi$. При этом, силу равенства (26) величина $Q(\psi,\ r,\ u)$ не зависит от выбора се- йства $\{\Gamma^{(j)}\}$.

Теперь несложно убедиться, что для функции $u \in SH(K)$, огра- енной сверху на всех ограниченных множествах, формула (28) раведлива и для «несдвигаемого» конуса $K$, причем мера $\nu$ и ве- чины $Q(\psi, r, u)$, $Q(\psi, R, u)$ определяются уже соотношениями (32), 4). Для этого нужно записать равенства (28) для всех конусов $K^{(j)}$, торые по построению «сдвигаемы», и «проекций» $\psi_j$ функции $\in C^2(\overline{K}_{r,R})$, после чего просуммировать полученные равенства. На- ичие формулы (28) в общем случае влечет за собой и справедли- ость равенств (29) — (31) без предположения «сдвигаемости» конуса $K$.

В следующей ниже теореме мы подытожим проведенное изуче- ие асимптотических свойств функции $u$ и порождаемой ею меры $= \tau_u$. Обозначим через $SH(K;\ \rho)$, $\rho > \varkappa^+$, класс функций $u(x)$, бгармонических в конусе $K$ и удовлетворяющих всюду в $K$ нера- енству $u(x) \leqslant a|x|^\rho + b$ при некоторых $a = a(u) > 0$, $b = b(u) \geqslant 0$.

**Теорема 1.** *Пусть функция* $u(x) \in SH(K;\ \rho)$, $\rho > \varkappa^+$, $0 < r <$ $< \lambda < R$. *Тогда*

$$\int_{\Gamma_R} |u|\, \varphi\, d\, S_R \leqslant C_1 R^{\rho+m-1}; \tag{35}$$

$$\int_{\Gamma_r} |u|\, \varphi dS_r \leqslant C_2 (r^{1-\varkappa^+} + 1); \tag{36}$$

$$|\tau|(K_{r,R}) \leqslant C_3 (r^{-\varkappa^+} + R^{\rho+m-2}), \tag{37}$$

*де* $C_j = C_j(u, \lambda, \rho)$, $j = 1, 2, 3$.

Доказательство. Для «сдвигаемого» конуса $K$ неравенство 35) и оценка величины $|\tau|(\overline{K}_{\lambda,R})$ содержатся в леммах 4 и 6. В об- щем случае эти соотношения устанавливаются из формулы (29) так, как это делалось в лемме 3 для функций, субгармонических в окрестности конуса. Точно так же из формулы (30) вытекают неравенство (36) и оценка

$$|\tau|(\overline{K}_{r,\lambda}) \leqslant C_3 r^{-\varkappa^+},$$

что завершает доказательство теоремы.

**7. Оценка функций на $C_0$-множествах.** В дальнейшем нам понадобится интегральная оценка функций класса $SH(K;\rho)$ на «редких» множествах, а точнее, на $C_0$-множествах. Напомним, что множество $E \subset K$ называется $C_0$-множеством в $K$, если каждое множество $E_R = E \cap B_R$ может быть покрыто счетной системой шаров так, чтобы их центры лежали в шаре $B_R$, а их радиусы $r_j(R)$ удовлетворяли условию

$$\lim_{R\to\infty} R^{1-m} \sum_j [r_j(R)]^{m-1} = 0, \tag{38}$$

**Лемма 8.** *Пусть функция* $u \in SH(K;\rho)$, $\rho > \varkappa^+$ *и пусть* $E$ — *некоторое* $C_0$-*множество в* $K$. *Тогда для любого конуса* $K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \Subset \Gamma$ *и любого* $\delta \in (0, 1)$

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\rho-m} \int\limits_{E \cap K'_{\delta t,t}} |u|\, d\omega = 0. \tag{39}$$

Доказательство. Представим функцию $|u|$ в виде $|u| = 2u^+ - u$ и обозначим для краткости множество $E \cap K'_{\delta t,t}$ через $E_{\delta t,t}$, тогда

$$\int\limits_{E_{\delta t,t}} |u|\, d\omega = \int\limits_{E_{\delta t,t}} 2u^+\, d\omega - \int\limits_{E_{\delta t,t}} u\, d\omega. \tag{40}$$

Согласно определению $C_0$-множества для любого $t > 0$ существуют такие шары $B(y^{(j)}, R_j) = \{x: |x - y^{(j)}| < R_j\}$, $y^{(j)} = y^{(j)}(t)$, $R_j = R_j(t)$, что $y^{(j)} \in B_t$, $E_{\delta t,t} \subset \bigcup_j B(y^{(j)}, R_j)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} t^{1-m} \sum\limits_j R_j^{m-1} = 0$.

Следовательно,

$$\int\limits_{E_{\delta t,t}} u^+ d\omega \leqslant c\,(at^\rho + b) \sum_j R_j^m$$

и

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\rho-m} \int\limits_{E_{\delta t,t}} u^+\, d\omega = 0. \tag{41}$$

Для оценки второго слагаемого в (40) рассмотрим функцию $u_t(x) = u(tx)\,t^{-\rho}$ и множество $A_t = t^{-1} E_{\delta t,t}$. Очевидно, что

$$t^{-\rho-m} \int\limits_{E_{\delta t,t}} u\, d\omega = \int\limits_{A_t} u_t\, d\omega$$

и что $A_t \subset K'_{\delta,1}$. Покроем множество $K'_{\delta,1}$ шарами $B(a_j, r)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, так, чтобы $\overline{K}'_{\delta,1} \subset \bigcup_j B(a_j, r) \subset \bigcup_j B(a_j, 5r) \Subset K$. По-кольку функция $u(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то существует такая константа $D>0$, что

$$\int\limits_{K'_{\delta t,\,t}} |u|\,d\omega < Dt^{\rho+m},$$

или, что эквивалентно,

$$\int\limits_{K'_{\delta,\,1}} |u_t|\,d\omega < D. \tag{42}$$

Пусть $0<d<\frac{\sigma_m}{3}r^m$, где $\sigma_m=\int\limits_{B_1} d\omega.$

Обозначим $F_{t,R}=\{x\in K'_{\delta,1}: |u_t(x)|>R\}$. Из (42) следует, что существует не зависящее от $t$ положительное число $N$, такое, что mes $F_{t,N}<d$. Зададим теперь произвольное $\varepsilon<d$ и выберем число $T>0$ так, чтобы при любом $t>T$ множество $A_t$ покрывалось шарами с суммой объемов меньшей, чем $\varepsilon$. Тогда в каждом шаре $(a_j, r)$ существует точка $b_j\notin A_t\cup F_{t,N}$. Обозначим

$$\begin{aligned}
&A^1=A_t\cap B(b_1, 2r);\\
&A^2=(A_t\setminus A^1)\cap B(b_2, 2r);\\
&A^3=(A_t\setminus(A^1\cup A^2))\cap B(b_3, 2r);\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&A^n=(A_t\setminus\bigcup_{j=1}^{n-1}A^j)\cap B(b_n, 2r).
\end{aligned}$$

огда

$$\left|\int\limits_{A_t} u_t d\omega\right| \leqslant \sum_j \left|\int\limits_{A_j} u_t d\omega\right|.$$

Запишем теперь для функции $u_t$ представление Рисса в шаре $(b_j, 4r)$:

$$u_t(x)=H_t(x)-\int\limits_{B(b_j,\,4r)} G_j(x, y)\,d\mu_t(y). \tag{43}$$

десь $H_t(x)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $u_t(x)$ шаре $B(b_j, 4r)$; $G_j$ — функция Грина шара $B(b_j, 4r)$; $\mu_t$ — мера, социированная по Риссу функции $u_t$. Так как $G_j(x, y)\leqslant c(m)\times$ $|x-y|^{2-m}$, согласно пространственному варианту леммы 7.2 из [10] меем*

---

* Цитируемый вариант формулируется следующим образом. Пусть множество лежит в шаре $B_R$ и пусть mes $Q=s$. Пусть, далее, $\lambda(t)$ — невозрастающая тегрируемая функция на интервале $(0, R)$. Тогда $\int\limits_Q \lambda(|x|)\,d\omega \leqslant \int\limits_{B_{R(s)}} \lambda(|x|)\,d\omega,$ де $R(s)$ таково, что mes $B_{R(s)}=s$.

$$\int_{A^j} G_j(x,\ y)\, d\omega(x) \leqslant c\ (m) \int_{A^j} |x - y|^{2-m}\, d\omega(x) \leqslant c\ (m) \int_{B_k} \frac{d\omega}{|x|^{m-2}} =$$

$$= \bar{c}\,(m)\,(\text{mes}\ \ A^j)^{\frac{2}{m}}.$$

Далее, из формулы Пуассона-Иенсена вытекает следующая оценка функции $H_t(x)$ при $|x - b_j| \leqslant 2r$:

$$|H_t(x)| \leqslant \frac{1}{2r}\left|\int_{|y - b_j| = 4r} u_t(y)\,\frac{(4r)^2 - |x - b_j|^2}{|x - y|^m}\, dS_{4r}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,(2r)^{1-m} \int_{|y - b_j| = 4r} |u_t|\, dS_{4r} \leqslant 2\,(2r)^{1-m}\Big[\int_{|y - b_j| = 4r} u_t^+\, dS_{4r} -$$

$$- \delta^m\,(4r)^{m-1}\,u_t\,(b_j)\Big] \leqslant c_1 r^{1-m} \int_{|y - b_j| = 4r} u_t^+\, dS_{4r} + c_2 N.$$

Применяя полученные оценки к представлению (43), получаем

$$\left|\int_{A^j} u_t\, d\omega\right| \leqslant c_1\, r^{1-m} \int_{|y - b_j| = 4r} u_t^+\, dS_{4r} \cdot \text{mes}\ \ A^j + c_2 N\ \text{mes}\ \ A^j +$$

$$+ \bar{c}\,(\text{mes}\ \ A^j)^{\frac{2}{m}} \int_{B(b_j,\ 4r)} d\mu_t.$$

Поскольку $u_t^+(y) \leqslant a\,|y|^\rho + b$, то

$$c_1\, r^{1-m} \int_{|y - b_j| = 4r} u_t^+\, dS_{4r} \leqslant a_2\,(5r + 1)^\rho + b_2 < d_1$$

и

$$\mu_t\,(B\,(b_j,\ 4r)) \leqslant [a_3\,(5r + 1)^\rho + b_3 + c_3\,N]\ r^{m-2} < d_2.$$

Таким образом, для всех $t > T$

$$t^{-\rho-m}\left|\int_{E_{\delta t,\ t}} u d\omega\right| = \left|\int_{A_t} u_t\, d\omega\right| \leqslant \sum_j \left|\int_{A^j} u_t\, d\omega\right| \leqslant c_1 d_1 \varepsilon +$$

$$+ c_2 N\varepsilon + \bar{c} d_2 n \varepsilon^{\frac{2}{m}} \leqslant d_3 \varepsilon^{\frac{2}{m}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\rho-m} \int_{E_{\delta t,\ t}} u d\omega = 0.$$

Отсюда, а также из (41) заключаем о выполнении соотношения (39). Лемма доказана.

*Замечание.* Из доказательства леммы видно, что ее утверждение остается в силе, если в определении $C_0$-множества условие (38) заменить менее ограничительным условием

$$\lim_{R\to\infty} R^{-m} \sum_j\ [r_j\,(R)]^m = 0.$$

**8. Каноническое представление.** В заключение этой части статьи приведем полученное одним из авторов в [8] интегральное представление субгармонической в конусе функции $u(x)$ конечного порядка роста

$$\rho = \inf\{\gamma > 0 : u(x) \overset{\text{ас}}{<} |x|^{\gamma}\} > \varkappa^{+}.$$

Воспользуемся этим результатом при исследовании функций вполне регулярного роста.

Всюду далее через $G(x, y)$ обозначается функция Грина конуса $K$. Пусть число $p \in N$ выбрано из условия $\varkappa_p^{+} \leqslant \rho < \varkappa_{p+1}^{+}$. Рассмотрим функцию

$$G_p(x, y) = -G(x, y) + \beta \sum_{n=1}^{p} |x|^{\varkappa_n^{+}} |y|^{\varkappa_n^{-}} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\alpha_n}, \tag{44}$$

где $\alpha_n = \varkappa_n^{+} - \varkappa_n^{-}$, $\beta = \int\limits_{\Gamma} dS_1$, и по мерам $\mu$ и $\nu$, порожденным функцией $u(x)$, определим потенциалы

$$J'_{\mu, p}(x) = \int\limits_{K_{\lambda, \infty}} G_p(x, y)\, d\mu(y);$$

$$J''_{\nu, p}(x) = \frac{1}{\theta_m} \int\limits_{\Gamma_{\lambda, \infty}} \frac{\partial G_p(x, y)}{\partial n_y}\, d\nu(y).$$

Потенциал $J'_{\mu, p}$ представляет собой субгармоническую функцию в $K$, риссовская мера которой в $K_{\lambda, \infty}$ совпадает с мерой $\mu$, а предельные значения на $\partial K$ равны нулю; функция $J''_{\nu, p}$ гармонична в $K$, а ее граничное значение на $\Gamma_{\lambda, \infty}$ (в смысле равенства (32)) равно $-\gamma$.

**Теорема 2** [8]. *Функция $u \in SH(K)$ порядка $\rho \in [\varkappa_p^{+}, \varkappa_{p+1}^{+})$ представляется в виде*

$$u(x) = J'_{\mu, p}(x) - J''_{\nu, p}(x) + \sum_{n=1}^{p} c_n |x|^{\varkappa_n^{+}} \varphi_n(x) + v(x), \tag{45}$$

*где $c_n$ — константы, а функция $v(x)$ субгармонична в $K$, гармонична* в $K_{\lambda, \infty}$, $|v(x)| \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$.

Для функций конечного порядка, аналитических в полуплоскости, представление такого вида было получено Н. В. Говоровым [5] и распространено А. Ф. Гришиным [2] на функции, субгармонические в полуплоскости.

Отметим еще, что равенство (45) можно записать также в виде

$$u(x) = J_{\tau, p}(x) + \sum_{n=1}^{p} c_n |x|^{\varkappa_n^{+}} \varphi_n(x) + v(x), \tag{46}$$

где $J_{\tau, p}(x) = \int\limits_{\overline{K}_{\lambda, \infty}} W_p(x, y)\, d\tau(y)$ — потенциал меры $\tau = \tau_u$ с ядром

$$W_p(x, y) = \begin{cases} \dfrac{G_p(x, y)}{\varphi(y)}, \ x \in K, \ y \in K; \\ \dfrac{\partial G_g(x, y)}{\partial n_y} \Big/ \dfrac{\partial \varphi(y)}{\partial n} = \lim\limits_{\substack{y' \to y \\ y' \in K}} W_p(x, y), \ x \in K, \ y \in \partial K/\{0\}. \end{cases}$$

В [8] показано, что справедливы следующие оценки ядра $W_p$:

$$W_p(x, y) \leqslant D_1 \frac{|x|^{\varkappa_{p+1}^{+}} |y|^{\varkappa_p^{-}} \varphi(x)}{|x|^{\varkappa_{p+1}^{+} - \varkappa_p^{+}} + |y|^{\varkappa_{p+1}^{+} - \varkappa_p^{+}}}, \quad \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in \overline{K} \setminus \{0\}, \\ p = 1, 2, \ldots; \end{array} \tag{47}$$

$$|W_p(x, y)| \leqslant D_2 |x|^{\varkappa_{p+1}^{+}} |y|^{\varkappa_{p+1}^{-}} \varphi(x), \quad \begin{array}{l} x \in K, \\ y \in \overline{K} \setminus \{0\}, \\ |x| \leqslant t|y|, t < 1, \\ p = 0, 1, 2, \ldots; \end{array} \tag{48}$$

$$D_1, D_2 = D_1, D_2(p, t).$$

**Список литературы:** 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 592 с. 2. *Гришин А. Ф.* О регулярности роста субгармонических функций. III // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1968. Вып. 7. С. 59—84.

*Поступила в редколлегию 12.01.89*

---

УДК 519.210

*С. Н. ЗИНЕНКО*

# КРУГИ ВЕЙЛЯ В ВЫРОЖДЕННОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШУРА

Настоящая статья примыкает к серии работ В. К. Дубового [1]

---

Теория кругов Вейля невырожденных интерполяционных задач довольно полно разработана в работах [2—4]. Ранее [1] рассмотрены круги Вейля невырожденной проблемы Шура. В то же время исследование вырожденного случая потребовало развития несколько иных подходов к построению кругов, радиусов, изучению их свойств.

*1°. Предварительные сведения.* Приведем наиболее важные для дальнейшего результаты и соотношения из [1], придерживаясь принятых там обозначений.

Функция $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ является решением задачи Шура с матрицей данных $C_n$ (в дальнейшем будем кратко говорить задачи Шура $\{C_n\}$) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному матричному неравенству

$$\begin{bmatrix} I-\mathbf{C}_n\mathbf{C}_n^* & \lambda_{p,n}^*(\zeta)-\mathbf{C}_n\lambda_{q,n}^*(\zeta)\,\theta^*(\zeta) \\ * & \dfrac{I-\theta(\zeta)\,\theta^*(\zeta)}{1-\zeta\bar{\zeta}} \end{bmatrix} \geqslant 0\,(S)$$

и двойственному матричному неравенству

$$\begin{bmatrix} I-\mathbf{C}_n\mathbf{C}_n^* & \dfrac{1}{\zeta}\left(\lambda_{p,n}^*\left(\dfrac{1}{\bar{\zeta}}\right)\theta(\zeta)-\mathbf{C}_n\lambda_{q,n}^*\left(\dfrac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right) \\ * & \dfrac{I-\theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)}{1-\zeta\bar{\zeta}} \end{bmatrix} \geqslant 0.\ (\tilde{S})$$

В свою очередь, каждое из неравенств равносильно соответствующей паре условий:

а) существует решение $X$ уравнения

$$(I-\mathbf{C}_n\mathbf{C}_n^*)\,X=\lambda_{p,n}^*(\zeta)-\mathbf{C}_n\lambda_{q,n}^*(\zeta)\,\theta^*(\zeta),$$

б) для любого решения $X$

$$I-\theta(\zeta)\,\theta^*(\zeta)-(1-|\zeta|^2)\,X^*(I-\mathbf{C}_n\mathbf{C}_n^*)\,X\geqslant 0;$$

аналогично,

ã) существует решение $\tilde{X}$ уравнения

$$(I-\mathbf{C}_n\mathbf{C}_n^*)\,\tilde{X}=\frac{1}{\zeta}\left(\lambda_{p,n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\theta(\zeta)-\mathbf{C}_n\lambda_{q,n}^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right),$$

б̃) для любого решения $\tilde{X}$

$$I-\theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)-(1-|\zeta|^2)\,\tilde{X}^*(I-\mathbf{C}_n\mathbf{C}_n^*)\,\tilde{X}\geqslant 0.$$

Заметим, что левые части в неравенствах б) и б̃) не зависят от выбора решений $X$ и $\tilde{X}$ соответствующих уравнений а) и ã).

При надлежащем выборе решений $X$, $\tilde{X}$ левые части в неравенствах б), б̃) допускают факторизацию вида

$$[\theta(\zeta),\ I]\ B_n^{-1}(\zeta)\,jB_n^{*-1}(\zeta)\begin{bmatrix}\theta^*(\zeta)\\ I\end{bmatrix};\quad j=\begin{bmatrix}-I_q & 0\\ 0 & I_p\end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$[\theta^*(\zeta),\ I]\ \tilde{B}_n^{*-1}(\zeta)\,\tilde{j}\tilde{B}_n^{-1}(\zeta)\begin{bmatrix}\theta(\zeta)\\ I\end{bmatrix},\quad \tilde{j}=\begin{bmatrix}-I_p & 0\\ 0 & I_q\end{bmatrix}, \tag{$\tilde{1}$}$$

где матрицы $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta)$ строятся по матрице данных $\mathbf{C}_n$ и ортопроектору $P_n$ на одно из подпространств типа $K$ (в случае вырождения задачи Шура $\{\mathbf{C}_n\}$ таких подпространств бесконечно много и, следовательно, $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta)$ определяются неоднозначно). При согласованном построении $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta)$ (т. е. при одинаковом выборе ортопроекторов $P_n$) имеет место связь

$$\tilde{B}_n(\zeta)=J^*jB_n^{-1}(\zeta)\,jJ,\quad J=\begin{bmatrix}0 & I_q\\ I_p & 0\end{bmatrix}. \tag{2}$$

В дальнейшем будем считать это условие выполненным. Матрицы $W_n(\zeta)=B_n^{-1}(\zeta)\,jB_n^{*-1}(\zeta)$; $\tilde{W}_n(\zeta)=\tilde{B}_n^{*-1}(\zeta)\tilde{j}\tilde{B}_n^{-1}(\zeta)$ называют матрицами Вейля.

Из (1) и $(\tilde{1})$ следует, что всякое решение $\theta(\zeta)$ допускает представление в виде дробно-линейных преобразований

$$\begin{gathered}\theta(\zeta) = \{\omega(\zeta)\} B_n(\zeta) = \\ = (\omega(\zeta) b_n(\zeta) + d_n(\zeta))^{-1} (\omega(\zeta) a_n(\zeta) + c_n(\zeta));\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\theta(\zeta) = \tilde{B}_n(\zeta) \{\omega(\zeta)\} = \\ = (\tilde{a}_n(\zeta) \omega(\zeta) + \tilde{b}_n(\zeta)) (\tilde{c}_n(\zeta) \omega(\zeta) + d_n(\zeta))^{-1},\end{gathered} \tag{3}$$

коэффициенты которых являются блоками матриц

$$B_n(\zeta) = \begin{bmatrix} a_n(\zeta) & b_n(\zeta) \\ c_n(\zeta) & d_n(\zeta) \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}_n(\zeta) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_n(\zeta) & \tilde{b}_n(\zeta) \\ \tilde{c}_n(\zeta) & \tilde{d}_n(\zeta) \end{bmatrix},$$

а параметр $\omega(\zeta) \in S_{p,q}$. В силу условия а) (в равной степени $\tilde{\text{а}}$)) $\omega(\zeta)$ при некотором разложении пространств $E_p = N_n \oplus N_n^{\perp}$, $E_q = M_n \oplus M_n^{\perp}$ допускает блочное представление

$$\omega(\zeta) = \begin{bmatrix} u_n & 0 \\ 0 & \hat{\omega}(\zeta) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

в котором $u_n$ фиксированная унитарная компонента, однозначно определяемая по данным задачи, а $\hat{\omega}(\zeta)$ произвольное голоморфное сжатие соответствующей размерности. Подчеркнем, что параметр $\omega(\zeta)$ в (3) и $(\tilde{3})$ один и тот же, что является прямым следствием условия (2).

Наконец, отметим существование $\forall \zeta_0 \neq 0$ ($|\zeta_0| < 1$) $j$- и $\tilde{j}$-унитарных матриц $\tau$ и $\tilde{\tau}$, приводящих соответственно матрицы $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta_0)$ к треугольному виду

$$\tau^{-1} B_n(\zeta_0) = \begin{bmatrix} r_{\tau,d} & 0 \\ 0 & r_{\tau,g}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \sigma_\tau & I \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B}_n(\zeta_0) \tilde{\tau}^{-1} = \begin{bmatrix} I & \sigma_\tau \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{\tau,g} & 0 \\ 0 & r_{\tau,d}^{-1} \end{bmatrix}$$

(разбиение на блоки аналогично $B_n(\zeta)$ и $\tilde{B}_n(\zeta)$). Для проверки этого, следуя [1], разобъем матрицу Вейля $W_n(\zeta_0)$ на блоки и приведем ее треугольным преобразованием к диагональному виду

$$\begin{gathered} W_n(\zeta_0) = B_n^{-1}(\zeta_0)\, j B_n^{*-1}(\zeta_0) = \begin{bmatrix} -R_n & S_n^* \\ S_n & -T_n \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_n R_n^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_n & 0 \\ 0 & S_n R_n^{-1} S_n^* - T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -R_n^{-1} S_n^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{gathered}$$

В качестве матрицы $\tau$ можно взять, например,

$$\tau = B_n(\zeta_0) \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_n R_n^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_n)^{1/2} & 0 \\ 0 & (S_n R_n^{-1} S_n^* - T_n)^{1/2} \end{bmatrix}.$$

Тогда $\tilde{\tau} = J^* j \tau^{-1} j J$.

**2°. *Круги Вейля в задаче Шура.*** Дробно-линейные преобразования и ($\tilde{3}$), рассматриваемые в фиксированной точке $\zeta_0 \neq 0\ (|\zeta_0| < 1)$, омощью матриц $\tau$ и $\tilde{\tau}$ можно преобразовать к виду

$$\theta(\zeta_0) = \{\{\omega(\zeta_0)\}\tau\}(\tau^{-1}B_n(\zeta_0)) = \sigma_\tau + r_{\tau,g}\,\omega_\tau r_{\tau,d};$$

$$\theta(\zeta_0) = (\tilde{B}_n(\zeta_0)\,\tilde{\tau}^{-1})\{\tilde{\tau}\{\omega(\zeta_0)\}\} = \sigma_\tau + r_{\tau,g}\omega_\tau r_{\tau,d},$$

$\omega_\tau = \{\omega(\zeta_0)\}\tau = \tilde{\tau}\{\omega(\zeta_0)\}$. В силу $j$-унитарности $\tau$ (в равной сте- ни $\tilde{j}$-унитарности $\tilde{\tau}$) $\omega_\tau$ при некотором разложении пространств $= N_\tau \oplus N_\tau^\perp$, $E_q = M_\tau \oplus M_\tau^\perp$ допускает блочное представление

$$\omega_\tau = \begin{bmatrix} u_\tau & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_\tau \end{bmatrix}, \tag{5}$$

алогичное представлению $\omega(\zeta_0)$ (4), причем $\operatorname{rang} u_\tau = \operatorname{rang} u_n$. означим через $P_{\tau,g}$, $P_{\tau,d}$ ортопроекторы на подпространства $N_\tau^\perp$, и будем обозначать через

$$P_{\tau,g}^\perp u_\tau P_{\tau,d}^\perp = \begin{bmatrix} u_\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{\tau,g}\hat{\omega}_\tau P_{\tau,d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_\tau \end{bmatrix}$$

сированную унитарную и произвольную сжимающую компо- ты $\omega_\tau$.

**Теорема 1.** *Множество решений вырожденной задачи Шура в фиксированной точке* $\zeta_0 \neq 0\ (|\zeta_0| < 1)$ *образует матричный* $K_n(\zeta_0) = \{\theta : \theta = \sigma_n(\zeta_0) + r_{\tau,g}P_{\tau,g}\omega_\tau P_{\tau,d}r_{\tau,d},\ \|\omega_\tau\| \leqslant 1\}$ *с цент-* $\sigma_n(\zeta_0) = \sigma_\tau + r_{\tau,g}P_{\tau,g}^\perp u_\tau P_{\tau,d}^\perp r_{\tau,d}$, *левым радиусом* $\rho_{g,n}(\zeta_0) = r_{\tau,g}P_{\tau,g}r_{\tau,g}^*$, *правым радиусом* $\rho_{d,n}(\zeta_0) = r_{\tau,d}^*P_{\tau,d}r_{\tau,d}$.

Отметим, что центр круга $\sigma_n(\zeta_0)$ как центр симметрии ограничен- го множества определяется однозначно. Радиусы $\rho_{g,n}(\zeta_0)$ и $\rho_{d,n}(\zeta_0)$ и выбранном способе построения круга, как показано ниже, также ределяются единственным образом (т. е. не зависят от выбора триц $B_n(\zeta)$, $\tau$ и $\tilde{B}(\zeta)$, $\tilde{\tau}$).

**Теорема 2.** *Имеют место представления*

$$\rho_{g,n}(\zeta_0) = [\sigma_n(\zeta_0), I]\,W_n(\zeta_0)\begin{bmatrix} \sigma_n^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix}; \tag{6}$$

$$\rho_{d,n}(\zeta_0) = [\sigma_n^*(\zeta_0),\ I]\,\tilde{W}_n(\zeta_0)\begin{bmatrix} \sigma_n(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix}. \tag{$\tilde{6}$}$$

оказательство. Имеем

$$[\theta(\zeta_0), I]\,W_n(\zeta_0)\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix} =$$

$$= [\theta(\zeta_0),\ I]\,B_n^{-1}(\zeta_0)\,\tau j \tau^* B_n^{*-1}(\zeta_0)\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix} =$$

$$= [\theta(\zeta_0),\ I]\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\sigma_\tau & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{\tau,d}^{-1} & 0 \\ 0 & r_{\tau,g} \end{bmatrix} j \begin{bmatrix} r_{\tau,d}^{*-1} & 0 \\ 0 & r_{\tau,g}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -\sigma_\tau^* \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix} =$$

$$= r_{\tau,g}[\omega_\tau, I]\, j \begin{bmatrix} \omega_\tau^* \\ I \end{bmatrix} r_{\tau,g}^* = r_{\tau,g}(I - \omega_\tau\omega_\tau^*)\, r_{\tau,g}^*.$$

Возьмем в качестве $\theta(\zeta)$ такое решение задачи $\{\boldsymbol{C}_n\}$, что $\theta(\zeta_0) = \sigma_n(\zeta_0)$. Замечая, что центру $\sigma_n(\zeta_0)$ круга отвечает значение параметра $\omega_{\tau, u} = P^{\perp}_{\tau, g} u_\tau P^{\perp}_{\tau, d}$ и значит $I - \omega_{\tau, u}\omega^*_{\tau, u} = P_{\tau, g}$, приходим к (6). Аналогично доказывается $(\tilde{6})$.

Следствие 1.

$$\rho_{g, n}(\zeta_0) = \max_{\theta \in K_n(\zeta_0)} [\theta, I]\, W_n(\zeta_0) \begin{bmatrix} \theta^* \\ I \end{bmatrix}; \tag{7}$$

$$\rho_{d, n}(\zeta) = \max_{\theta \in K_n(\zeta_0)} [\theta^*, I]\, \tilde{W}_n(\zeta_0) \begin{bmatrix} \theta \\ I \end{bmatrix}. \tag{$\tilde{7}$}$$

Доказательство.

$$\rho_{g, n}(\zeta_0) = r_{\tau, g}(I - \omega_{\tau, u}\omega^*_{\tau, u})\, r^*_{\tau, g} =$$

$$= \max_{\omega_\tau} r_{\tau, g}(I - \omega_\tau\omega^*_\tau)\, r^*_{\tau, g} = \max_{\omega_\tau} [\theta(\zeta_0), I]\, W_n(\zeta_0) \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix},$$

где max берется по всем параметрам $\omega_\tau$ вида (5), а, следовательно, по всем $\theta(\zeta_0) \in K_n(\zeta_0)$. Аналогично доказывается $(\tilde{7})$.

Следствие 2.

$$\rho_{g, n}(\zeta_0) = \max_{\theta \in K_n(\zeta_0)} (I - \theta\theta^* - (1 - |\zeta|^2)\, X^*(I - \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{C}^*_n)\, X); \tag{8}$$

$$\rho_{d, n}(\zeta_0) = \max_{\theta \in K_n(\zeta_0)} (I - \theta^*\theta - (1 - |\zeta_0|^2)\, \tilde{X}^*(I - \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{C}^*_n)\, \tilde{X}), \tag{$\tilde{8}$}$$

где $X$, $\tilde{X}$ произвольные решения уравнений а), $\tilde{a}$) соответственно.

В дальнейшем важную роль играет связь между радиусами $\rho_{g, n}(\zeta_0)$, $\rho_{d, n}(\zeta_0)$ круга Вейля $K_n(\zeta_0)$ задачи $\{\boldsymbol{C}_n\}$ и радиусами $\rho^{(*)}_{g, n}(\zeta_0)$, $\rho^{(*)}_{d, n}(\zeta_0)$ круга Вейля $K^{(*)}_n(\zeta_0)$ задачи $\{\boldsymbol{C}^{(*)}_n\}$, где

$$\boldsymbol{C}^{(*)}_n \begin{bmatrix} c^*_0 & & \\ c^*_1 & c^*_0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ c^*_n & \cdot\; c^*_1 & c^*_0 \end{bmatrix}$$

**Теорема 3.** *Имеют место соотношения*

$$\rho_{g, n}(\zeta_0) = |\zeta|^{2n+2} \rho^{(*)}_{d, n}(\bar{\zeta}_0); \ \rho^{(*)}_{g, n}(\bar{\zeta}_0) = |\zeta_0|^{2n+2} \rho_{d, n}(\zeta_0).$$

Доказательство проведем, например, для первого соотношения. Воспользуемся для $\rho_{g, n}(\zeta_0)$ и $\rho^{(*)}_{d, n}(\bar{\zeta}_0)$ соответствующими представлениями (8) и $(\tilde{8})$, в которых в качестве решений $X$ и $\tilde{X}^{(*)}$ возьмем матрицы*

$$X = (I - \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{C}^*_n)^{[-1]} (\lambda^*_{p, n}(\zeta_0) - \boldsymbol{C}_n \lambda^*_{q, n}(\zeta_0)\, \theta^*(\zeta_0));$$

$$\tilde{X}^{(*)} = (I - \boldsymbol{C}^{(*)}_n \boldsymbol{C}^{(*)*}_n)^{[-1]} \frac{1}{\bar{\zeta}_0} \left( \lambda^*_{q, n}\left(\frac{1}{\zeta_0}\right) \theta^{(*)}(\bar{\zeta}_0) - \boldsymbol{C}^{(*)}_n \lambda^*_{p, n}\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)\right).$$

---

* Здесь и далее под символом $A^{[-1]}$, где $A = A^*$ оператор, действующий в пространстве $E$ и имеющий при разложении $E = \operatorname{Ker} A \oplus \Delta_A$ блочное представление $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix}$, понимается оператор $A^{[-1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}^{-1} \end{bmatrix}$.

Очевидно, всякое решение $\theta^{(*)}(\zeta)$ задачи $\{C_n^{(*)}\}$ имеет вид $\theta^{(*)}(\zeta) = \theta^*(\bar{\zeta})$, где $\theta(\zeta)$ произвольное решение $\{C_n\}$. Кроме того, полагая

$$U_p = \begin{bmatrix} & & I_p \\ & I_p & \\ I_p & \cdots & \end{bmatrix},$$

имеем

$$C_n^{(*)} = U_q C_n^* U_p, \ (I - C_n^{(*)} C_n^{(*)*})^{[-1]} = U_q (I - C_n^* C_n)^{[-1]} U_q;$$
$$\lambda_{p,n}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta^n} \lambda_{p,n}(\zeta) U_p.$$

Следовательно,

$$\tilde{X}^{(*)} = \frac{1}{\bar{\zeta}^{n+1}} U_q (I - C_n^* C_n)^{[-1]} (\lambda_{q,n}^*(\zeta_0)\, \theta^*(\zeta_0) - C_n^* \lambda_{p,n}^*(\zeta_0)).$$

Подставляя найденные решения $X$, $\tilde{X}^{(*)}$ в (8), $(\tilde{8})$, получим

$$\rho_{g,n}(\zeta_0) = \max_{\theta(\zeta_0) \in Kn(\zeta_0)} [\theta(\zeta_0), I] (j - |\zeta_0|^2) j H_n(\zeta_0) j) \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix};$$

$$H_n(\zeta_0) = \begin{bmatrix} \lambda_{q,n}(\zeta_0) & 0 \\ 0 & \lambda_{p,n}(\zeta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n^* \\ I \end{bmatrix} (I - C_n C_n^*)^{[-1]} [C_n, I] \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \lambda_{q,n}^*(\zeta_0) & 0 \\ 0 & \lambda_{p,n}(\zeta_0) \end{bmatrix};$$

$$\rho_{d,n}^{(*)}(\bar{\zeta}_0) = \max_{\theta(\xi_0) \in K_n(\zeta_0)} [\theta(\zeta_0), I] \left( j - \frac{1 - |\zeta_0|^2}{|\zeta_0|^{2n+2}} j \tilde{H}_n^{(*)}(\zeta_0) j \right) \begin{bmatrix} \theta^*(\zeta_0) \\ I \end{bmatrix};$$

$$\tilde{H}_n^{(*)}(\zeta_0) = \begin{bmatrix} \lambda_{q,n}(\zeta_0) & 0 \\ 0 & \lambda_{p,n}(\zeta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ C_n \end{bmatrix} I - C_n^* C_n)^{[-1]} [I, C_n^*] \times$$
$$\times \begin{bmatrix} \lambda_{q,n}^*(\zeta_0) & 0 \\ 0 & \lambda_{p,n}^*(\zeta_0) \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $P_0$ ортопроектор на $\operatorname{Ker}(I - C_n C_n^*)$. Тогда

$$(I - C_n C_n^*)^{[-1]} = C_n (I - C_n^* C_n)^{[-1]} C_n^* + I - P_0.$$

Замечая, что $C_n^* P_0 C_n$ есть ортопроектор на $\operatorname{Ker}(I - C_n^* C_n)$, получаем

$$(I - C_n^* C_n)^{[-1]} = C_n^* (I - C_n C_n^*)^{[-1]} C_n + I - C_n^* P_0 C_n.$$

В таком случае

$$H_n(\zeta_0) = \tilde{H}_n^*(\zeta_0) - \frac{1 - |\zeta_0|^{2n+2}}{1 - |\zeta_0|^2} j +$$
$$+ \begin{bmatrix} \lambda_{q,n}(\zeta_0) C_n^* P_0 C_n \lambda_{q,n}^*(\zeta_0) & 0 \\ 0 & -\lambda_{p,n}(\zeta_0) P_0 \lambda_{p,n}^*(\zeta_0) \end{bmatrix}.$$

Наконец учитывая, что требование существования решения уравнения а) равносильно условию $P_0(\lambda^*_{p,n}(\zeta_0)-C_n\lambda^*_{q,n}(\zeta_0)\theta^*(\zeta_0))=0$ приходим к необходимому соотношению между радиусами.

Следуя [I], введем в рассмотрение нормированный левый радиу

$$r_{g,n}(\zeta_0)=|\zeta_0|^{-2n-2}\rho_{g,n}(\zeta_0)=\rho^{(*)}_{d,n}(\bar{\zeta}_0). \qquad (9$$

Установим теперь существование предела $\lim\limits_{\zeta\to 0}\rho_{d,n}(\zeta)$, что позволит доопределить функцию $\rho_{d,n}(\zeta)$, а в силу (9) и функции $\rho_{g,n}(\zeta$ и $r_{g,n}(\zeta)$, в точке $\zeta=0$ (очевидно, при этом $\rho_{g,n}(0)=0$). Одновременно будет получено представление $\rho_{d,n}(0)$, играющее важную рол при установлении связей проблемы Шура с теорией характеристических функций операторов сжатия [1].

**Теорема 4.** *Имеет место представление*

$$\rho_{d,n}(0)=I-c_0^*c_0-b^*(I-C_{n-1}C^*_{n-1})^{[-1]}b,\ b=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением $(\tilde{8})$, в котором решение $\tilde{X}$ уравнения $\tilde{a})$ выберем следующим образом. В соответствии с разбиением

$$C_n=\begin{bmatrix}C_{n-1} & 0\\ a & c_0\end{bmatrix},\quad a=[c_n,\ldots,c_1],$$

получим

$$I-C_nC_n^*=\begin{bmatrix}I-C_{n-1}C^*_{n-1} & -C_{n-1}a^*\\ -aC^*_{n-1} & 1-c_0c_0^*-aa^*\end{bmatrix}\geqslant 0.$$

Отсюда следует существование решения $Y$ уравнения

$$(I-C_{n-1}C^*_{n-1})Y=-C_{n-1}a^*$$

и неотрицательность матрицы

$$D=I-c_0c_0^*-aa^*-Y^*(I-C_{n-1}C^*_{n-1})Y\geqslant 0.$$

Учитывая диагональное представление

$$I-C_nC_n^*=\begin{bmatrix}I & 0\\ Y^* & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I-C_{n-1}C^*_{n-1} & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & Y\\ 0 & I\end{bmatrix},$$

получаем, что матрица

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix}I & -Y\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(I-C_{n-1}C^*_{n-1})^{[-1]} & 0\\ 0 & D^{[-1]}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ -Y^* & I\end{bmatrix}\times$$
$$\times\frac{1}{\zeta}\left(\lambda^*_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\theta(\zeta)-C_n\lambda^*_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right)$$

является решением уравнения $\tilde{a})$.

Преобразуем выражение

$$\frac{1}{\zeta}\left(\lambda^*_{p,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\theta(\zeta)-C_n\lambda^*_{q,n}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right)=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}\\ c_{n+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f_2(\zeta)\\ \vdots\\ f_{n+1}(\zeta)\\ f_{n+2}(\zeta)\end{bmatrix}.$$

десь через $f_k(\zeta)$ обозначены матрицы-функции $f_k(\zeta) = c_k\zeta + c_{k+1}\zeta^2 + \dots$ $= 1, 2, \dots$). Замечая, что $\theta(\zeta) = c_0 + f_1(\zeta)$, получим

$$I - \theta^*(\zeta)\theta(\zeta) - (1 - |\zeta|^2)\tilde{X}^*(I - \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{C}_n^*)\tilde{X} =$$
$$= I - c_0^* c_0 - (1 - |\zeta|^2) b^* (I - \boldsymbol{C}_{n-1}\boldsymbol{C}_{n-1}^*)^{[-1]} b -$$
$$- (1 - |\zeta|^2)(c_{n+1}^* - b^*Y) D^{[-1]} (c_{n+1} - Y^*b) + f_\theta(\zeta),$$

е через $f_\theta$ обозначена некоторая эрмитовая матрица-функция, по- роенная по коэффициентам $c_0, \dots c_n, c_{n+1}, \dots$. Поскольку $\|c_i\| \leqslant 1$ $= 0, 1, \dots$), то $\|f_k(\zeta)\| \leqslant |\zeta| / (1 - |\zeta|)$ $(k = 1, 2, \dots)$. В таком, учае в любом круге $|\zeta| < \varepsilon < 1$ $\|f_\theta(\zeta)\| \leqslant |\zeta| / (1 - |\zeta|)\,\mathrm{const}$ ричем при фиксированных коэффициентах $c_0, \dots, c_n$ оценка рав- омерна относительно $c_{n+1}, \dots$, т. е. относительно решений $\theta(\zeta)$ дачи $\{\boldsymbol{C}_n\}$.

Тогда, с одной стороны,

$$\rho_{d,n}(\zeta) = \max_{\theta(\zeta) \in K_n(\zeta)} (I - \theta^*(\zeta)\theta(\zeta) - (1 - |\zeta|^2)\tilde{X}^*(I - \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{C}_n^*)\tilde{X}) \leqslant$$
$$\leqslant I - c_0^* c_0 - (1 - |\zeta|^2) b^* (I - \boldsymbol{C}_{n-1}\boldsymbol{C}_{n-1}^*)^{[-1]} b + |\zeta| / (1 - |\zeta|)\,\mathrm{const}\, I.$$

С другой, для любого решения $\theta(\zeta)$

$$\rho_{d,n}(\zeta) \geqslant I - \theta^*(\zeta)\theta(\zeta) - (I - |\zeta|^2)\tilde{X}^*(I - \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{C}_n^*)\tilde{X} \geqslant$$
$$\geqslant I - c_0^* c_0 - (1 - |\zeta|^2) b^* (I - \boldsymbol{C}_{n-1}\boldsymbol{C}_{n-1}^*)^{[-1]} b -$$
$$(1 - |\zeta|^2)(c_{n+1}^* - b^*Y) D^{[-1]} (c_{n+1} - Y^*b) - |\zeta| / (1 - |\zeta|)\,\mathrm{const}\, I.$$

ьмем в качестве $\theta(\zeta)$ решение, у которого $c_{n+1} = Y^*b$. Существо- ние такого решения следует из выполнения критерия разрешимос- задачи $\{\boldsymbol{C}_{n+1}\}$. Действительно, разбивая $\boldsymbol{C}_{n+1}$, $\boldsymbol{C}_n$ на блоки

$$\boldsymbol{C}_{n+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_n & 0 \\ [c_{n+1}, a] & c_0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{C}_n = \begin{bmatrix} c_0 & 0 \\ b & \boldsymbol{C}_{n-1} \end{bmatrix},$$

е $c_{n+1} = Y^*b$, приходим к представлению

$$I - \boldsymbol{C}_{n+1}\boldsymbol{C}_{n+1}^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ [0, Y^*] & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{C}_n^* & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix} \\ 0 \quad I \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

ледовательно,

$$\rho_{d,n}(\zeta) \geqslant I - c_0^* c_0 - (1 - |\zeta|^2) b^* (I - \boldsymbol{C}_{n-1}\boldsymbol{C}_{n-1}^*)^{[-1]} b -$$
$$- |\zeta| / (1 - |\zeta|)\,\mathrm{const}\, I.$$

з полученных оценок вытекает существование предела $\rho_{d,n}(0) = \lim\limits_{\zeta \to 0} \rho_{d,n}(\zeta)$ и требуемое представление.

. *Исследование рангов радиусов предельного круга Вейля.* Пусть $(\zeta) = c_0 + \dots + c_n\zeta^n + \dots$ произвольная матрица-функция класса $_{,q}$. Поставим ей в соответствие цепочку задач Шура $\{\mathbf{C}_n\}$ $(n = 0, 1, \dots)$, одним из возможных решений которых является $\theta(\zeta)$. м самым, приходим к последовательности вложенных друг в друга угов Вейля $K_0(\zeta) \supseteq \dots \supseteq K_n(\zeta) \supseteq \dots$. О кругах $K_n(\zeta)$ удобно ворить, как о кругах функции $\theta(\zeta)$ и в дальнейшем там, где это необходимо, обозначать $K_n(\zeta, \theta)$ (соответственно $\sigma_n(\zeta, \theta)$, $\rho_{g.\,n}(\zeta, \theta)$; и т. д.)

**Теорема 5.** *С возрастанием параметра n радиусы* $\rho_{g.\,n}$, $r_{g,\,n}$, $\rho_{d,\,n}$ *монотонно убывают.*

Доказательство. Возьмем в качестве $\tilde{B}_n(\zeta)$ матрицу, отвечающую пошаговому решению задачи $\{\mathbf{C}_n\}$ [5], так что $\tilde{B}_n(\zeta) = \overrightarrow{\prod\limits_{k=0}^{n}} \tilde{B}_0^{(k)}(\zeta) = \tilde{B}_{n-1}(\zeta)\, \tilde{B}_0^{(n)}(\zeta)$, где $\tilde{B}_{n-1}(\zeta) = \overrightarrow{\prod\limits_{k=0}^{n-1}} B_0^{(k)}(\zeta)$ — некоторая матрица, отвечающая пошаговому решению задачи $\{\mathbf{C}_{n-1}\}$. В таком случае соответствующие матрицы Вейля связаны неравенством $\tilde{W}_{n-1} \geqslant \tilde{W}_n$. Учитывая, что $K_{n-1} \supseteqq K_n$, из $(\tilde{6})$, $(\tilde{7})$ получаем $\rho_{d,\,n-1} \geqslant \rho_{d,\,n}$. В силу (9) $\rho_{g.\,n-1} \geqslant \rho_{g,\,n}$, $r_{g,\,n-1} \geqslant r_{g,\,n}$.

Следствие. *Существуют пределы*

$$\rho_{g,\,\infty} = \lim_{n\to\infty} \rho_{g,\,n} = 0; \quad r_{g,\,\infty} = \lim_{n\to\infty} r_{g,\,n}; \ \rho_{d,\,\infty} = \lim_{n\to\infty} \rho_{d,\,n}.$$

Итак, предельный круг Вейля $K_\infty(\zeta, \theta)$ за счет обращения в нуль левого радиуса $\rho_{g,\,\infty}(\zeta, \theta) = 0$ стягивается в точку, что соответствует единственности решения бесконечной задачи Шура. В то же время нормированный левый $r_{g,\,\infty}(\zeta, \theta) = \rho_{d,\,\infty}(\bar{\zeta}, \theta^{(*)})$ и правый $\rho_{d,\,\infty}(\zeta, \theta)$ радиусы предельного круга могут быть отличны от нуля. Их исследование в общей ситуации можно свести к рассмотренному в [1] невырожденному случаю. С этой целью получим представление для правого радиуса.

Функция $\theta(\zeta) = c_0 + \ldots$ как решение задачи $\{c_0\}$ допускает представление

$$\theta(\zeta) = \tilde{B}_0(\zeta)\, \{\theta^{(1)}(\zeta)\}. \tag{10}$$

При этом функция $\theta^{(1)}(\zeta)$ определяется по $\theta(\zeta)$ однозначно (т. е. не зависит от выбора $\tilde{B}_0(\zeta)$). Отметим, что знаменатель $q(\zeta) = \tilde{c}_0(\zeta)\, \theta^{(1)}(\zeta) + \tilde{d}_0(\zeta)$ дробно-линейного преобразования (10) является обратимой всюду в единичном круге аналитической матрицей-функцией.

**Теорема 6.** *Имеет место равенство*

$$\rho_{d,\,\infty}(\zeta, \theta) = (\tilde{q}(\zeta))^{*-1}\, \rho_{d,\,\infty}(\zeta, \theta^{(1)})\, (\tilde{q}(\zeta))^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{C}_n\}$, $\{\mathbf{C}_{n-1}^{(1)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — задачи Шура, порожденные функциями $\theta(\zeta)$, $\theta^{(1)}(\zeta)$. Отметим, как это следует из пошагового решения проблемы Шура, что для любого решения $\theta_\sigma(\zeta)$ задачи $\{\mathbf{C}_n\}$ соответствующая в смысле (10) функция $\theta_\sigma^{(1)}(\zeta)$ является некоторым решением задачи $\{\mathbf{C}_{n-1}^{(1)}\}$ и наоборот.

Пусть $\tilde{B}_{n-1}^{(1)}(\zeta)$ — произвольная матрица, отвечающая задаче $\{\mathbf{C}_{n-1}^{(1)}\}$. Тогда $\tilde{B}_n(\zeta) = \tilde{B}_0(\zeta)\, \tilde{B}_{n-1}^{(1)}(\zeta)$ — некоторая матрица, отвечающая задач

} [5]. В таком случае соответствующие матрицы Вейля связаны отношением $\tilde{W}_n = \tilde{B}_0^{*-1}\,\tilde{W}_{n-1}^{(1)}\,\tilde{B}_0^{-1}$. Следовательно,

$$[\theta_\sigma^*,\ I]\,\tilde{W}_n\begin{bmatrix}\theta_\sigma\\ I\end{bmatrix} = (\tilde{q}_\sigma)^{*-1}\,[\theta_\sigma^{(1)*},\ I]\,\tilde{W}_{n-1}^{(1)}\begin{bmatrix}\theta_\sigma^{(1)}\\ I\end{bmatrix}(\tilde{q}_\sigma)^{-1},$$

$\tilde{q}_\sigma(\zeta) = \tilde{c}_0(\zeta)\,\theta_\sigma^{(1)}(\zeta) + \tilde{d}_0(\zeta)$.

В полученном равенстве возьмем в качестве $\theta_\sigma(\zeta)$ такое решение дачи $\{\mathbf{C}_n\}$, что $\theta_\sigma(\zeta_0) = \sigma_n(\zeta_0,\ \theta)$, где $\zeta_0 \neq 0$ — некоторая фиксиро-нная точка единичного круга. Тогда из $(\tilde{6})$, $(\tilde{7})$ вытекает, что $_n(\zeta_0,\ \theta) \leqslant (\tilde{q}_\sigma(\zeta_0))^{*-1}\,\rho_{d,\,n-1}(\zeta_0,\ \theta^{(1)})\,(\tilde{q}_\sigma(\zeta_0))^{-1}$. Предельный переход и $\zeta_0 \to 0$ приводит к справедливости этого неравенства и при $= 0$ (воспользуемся при этом тем, что круг Вейля $K_{n-1}(\zeta_0,\ \theta^{(1)})$ и $\zeta_0 \to 0$ за счет обращения в нуль левого радиуса $\rho_{g,\,n-1}(\zeta_0,\ \theta^{(1)}) \to 0$ гивается в точку $\theta_\sigma^{(1)}(\zeta_0) \to \theta^{(1)}(0)$). Переходя теперь к пределу $n \to \infty$ и воспользовавшись аналогичными соображениями, получаем

$$\rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta) \leqslant (\tilde{q}(\zeta))^{*-1}\,\rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta^{(1)})\,(\tilde{q}(\zeta))^{-1}.$$

сли теперь в качестве $\theta_\sigma^{(1)}(\zeta)$ взять такое решение задачи $\{\mathbf{C}_{n-1}^{(1)}\}$, $\theta_\sigma^{(1)}(\zeta_0) = \sigma_{n-1}(\zeta_0,\ \theta^{(1)})$, и провести аналогичные рассуждения, то ем к противоположному неравенству и, тем самым, к требуемому ставлению.

налогично тому, как по функции $\theta^{(0)}(\zeta) = \theta(\zeta)$ была построена ция $\theta^{(1)}(\zeta)$, построим по $\theta^{(1)}(\zeta)$ функцию $\theta^{(2)}(\zeta)$ и т. д.

ледствие.

$$\rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta) = \Big(\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}}\tilde{q}^{(k)}(\zeta)\Big)^{*-1}\rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta^{(n+1)})\Big(\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}}\tilde{q}^{(k)}(\zeta)\Big)^{-1}, \qquad (11)$$

$\tilde{q}^{(k)}(\zeta)$ — *знаменатели дробно-линейных преобразований* $\theta^{(k)}(\zeta) = \tilde{B}_0^{(k)}(\zeta)\,\{\theta^{(k+1)}(\zeta)\}$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, *являющиеся обратимыми ду в единичном круге аналитическими матрицами-функциями.*

Функция $\theta^{(n+1)}(\zeta)$ как параметр результирующего дробно-линейго преобразования $\theta(\zeta) = \Big(\prod_{k=0}^{\overrightarrow{n}}\tilde{B}_0^{(k)}(\zeta)\Big)\{\theta^{(n+1)}(\zeta)\}$ при разложении проанств $E_p = N_n \oplus N_n^\perp$, $E_q = M_n \oplus M_n^\perp$ имеет блочное представле- (4):

$$^{+1)}(\zeta) = \begin{bmatrix}u_n & 0\\ 0 & \hat{\theta}^{(n+1)}(\zeta)\end{bmatrix},\ \text{так что}\ \ \rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta^{(n+1)}) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \hat{\theta}^{(n+1)})\end{bmatrix}.$$

кольку начиная с некоторого номера $n_0$ унитарная компонента не изменяется $u_n = u_{n_0}$, $n \geqslant n_0$, блок $\hat{\theta}^{(n_0+1)}(\zeta)$ является решением которой бесконечной невырожденной задачи Шура [5]. Таким образом, мула (11) позволяет свести анализ радиусов предельного круга ля произвольной функции $\theta(\zeta)$ к исследованию радиусов некотой функции $\hat{\theta}^{(n_0+1)}(\zeta)$, бесконечная задача Шура которой невырожлена. В частности, из (11) и [1] следует независимость рангов радиусов предельного круга Вейля от выбора точки $\zeta\,(|\zeta|<1)$. Теоремы 6.3 и 6.9 из [1] о возможных значениях рангов радиусов в общем случае можно переформулировать следующим образом.

Обозначим через $s_\theta = \operatorname{rang} u_{n_0} = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{rang} u_n$. Очевидно, $0 \leqslant s_\theta \leqslant \min(p,\ q)$, причем случай $s_\theta = 0$ характеризует бесконечные невырожденные задачи. Отметим выражение $s_\theta$ через данные задачи

$$s_\theta = p - \lim_{n\to\infty} (\operatorname{rang}(I - \mathbf{C}_n\mathbf{C}_n^{\bullet}) - \operatorname{rang}(I - \mathbf{C}_{n-1}\mathbf{C}_{n-1}^{\bullet})) =$$

$$= q - \lim_{n\to\infty} (\operatorname{rang}(I - \boldsymbol{C}_n^{\bullet}\boldsymbol{C}_n) - \operatorname{rang}(I - \boldsymbol{C}_{n-1}^{\bullet}\boldsymbol{C}_{n-1})).$$

**Теорема 7.** *Ранги радиусов предельного круга Вейля не превосходят величин*

$$\operatorname{rang} r_{g,\,\infty}(\zeta,\ \theta) \leqslant p - s_\theta;\ \operatorname{rang} \rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta) \leqslant q - s_\theta,$$

*причем если ранг одного из предельных радиусов достигает своего максимального значения, то этим свойством обладает и другой.*

**Теорема 8.** *Для любых целых чисел* $p,\ q\ (p>0,\ q>0)$, *целого числа* $\gamma\ (0 \leqslant \gamma \leqslant \min(p,\ q))$ *и целых чисел* $\alpha,\ \beta\ (0 \leqslant \alpha \leqslant p - \gamma,\ 0 \leqslant \beta \leqslant q - \gamma)$, *причем* $\alpha,\ \beta$ *свои максимальные значения принимают одновременно, существует функция* $\theta(\zeta) \in S_{p,\,q}$ *такая, что* $\operatorname{rang} r_{g,\,\infty}(\zeta,\ \theta) = \alpha,\ \operatorname{rang} \rho_{d,\,\infty}(\zeta,\ \theta) = \beta,\ s_\theta = \gamma$.

**Список литературы:** 1. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционно проблеме Шура аналитических функций // Теория функций, функцион. анализ их прил. 1982. Вып. 37. С. 14—26, 1982. Вып. 38. С. 32—40; 1984. Вып. 4 С. 55—64; 1984. Вып. 42. С. 46—57. 2. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны-Пика // Теория операторов в функцион. пр-вах и ее прил. К., 1981. С. 25—9. 3. *Ковалишина И. В.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. 47, № 3. С. 455—497. 4. *Орлов С. А.* Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. 40, № 3. С. 593—644 5. *Зиненко С. Н.* Пошаговый процесс в вырожденной интерполяционной проблеме Шура и разложение *j*-растягивающего кратного множителя в произведение простейших. Х., 1987. 41 с. Деп. в УкрНИИНТИ 23.06.87, № 1711 — Ук 87.

*Поступила в редколлегию 16.10.89*

---

УДК 517.977

*Е. В. КОРОБОВА, Г. М. СКЛЯР*

# ОДИН КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД ОТОБРАЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ЛИНЕЙНЫЕ

В данной работе рассмотрен общий вопрос об отображении нелинейной системы дифференциальных уравнений на линейную систему в форме Фробениуса с помощью замены переменных. Для некоторог ласса так называемых «треугольных» систем [1, 2] такое отображение построено конструктивно. Далее работа продолжает исследоание вопроса об отображении «треугольных» управляемых систем а линейные [1 — 5]. Выделен класс таких систем, отображающихся ез замены управления (в отличие от [1, 2]). На основе применения езультатов работ [6, 7] для этого класса получено точное решение адачи быстродействия.

**§ 1. Отображение нелинейных систем на линейные.** Пусть задана истема дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

де $x \in R^n$, компоненты $f_i(x_1, \dots, x_n)$ вектор-функции $f$ непрерывно-ифференцируемы $n$ раз, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим вопрос о существовании биективного отображения ида

$$z = F(x),\ F: R^n \to R^n, \tag{2}$$

е компоненты $F_i(x_1, \dots, x_n)$ вектор-функции $F$ предполагаются прерывно-дифференцируемыми $(n-1)$ раз, $z \in R^n$, $x \in R^n$, переводяе систему (1) в линейную систему

$$\dot{z} = Az, \tag{3}$$

$A$ — постоянная матрица в форме Фробениуса, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ — & — & — & — \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

еобходимые и достаточные условия существования такого отображения дает следующая

**Теорема 1.** *Для того чтобы система (1) отображалась на нейную систему (3) с помощью биективного отображения (2), обходимо и достаточно, чтобы существовала функция $F_1(x_1, \dots, x_n)$ такая, что*

$$\frac{d^n}{dt^n} F_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} F_1(x_1, \dots, x_n), \tag{4}$$

*е $\frac{d}{dt^k}$ — $k$-я производная в силу системы (1) и*

$$\begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \Bigl(f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} \ F_1 \\ \Bigl(f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Bigr)^{n-1} F_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

*ыл биективным. При этом искомое отображение имеет вид $= F(x)$.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть при отображении (2) система (1) переходит в (3). Тогда, поскольку $\dot z_k = z_{k+1}$, $k = \overline{1, n-1}$, для компонент $F_k(x_1, \ldots, x_n)$ отображения $F$ выполнены равенства

$$\frac{d}{dt} F_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_1(x_1, \ldots, x_n) f_k(x_1, \ldots, x_n) = \\ = F_2(x_1, \ldots, x_n);$$

$$\frac{d}{dt} F_2(x_1, \ldots x_n) = \frac{d^2}{dt^2} F_1(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \left(f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 F_1(x_1, \ldots x_n) =$$

$$= F_3(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{d}{dt} F_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} F_1(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \left(f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{n-1} F_1(x_1, \ldots, x_n) = F_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Поэтому из уравнения $\dot z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k$ следует (4).

*Достаточность*. Пусть функция $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет (4). Обозначим

$$z_i = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{i-1} F_1 = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} F_1(x_1, \ldots, x_n), \ i = \overline{1, n}.$$

Тогда $\dot z_i = z_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$ и в силу (4) $\dot z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k$, т. е. $z$ удовлетворяет системе (3). Поскольку по предположению оператор $F(x)$, определяемый из (5), биективен, достаточность доказана.

**§ 2. Случай «треугольной» системы.** Соотношение (4), с одной стороны, можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ при заданной правой части системы (1). С другой стороны, можно выбрать функцию $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ так, чтобы оператор $F(x)$ был биективным, и задать любые $(n-1)$ функции из набора $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, а соотношение (4) рассматривать как уравнение относительно оставшейся функции, тем самым мы выделим систему, которая отображается на систему (3) с помощью замены (2). Этот прием особенно эффективен для так называемых «треугольных» систем, т. е. систем вида

$$\dot x = f_i(x_1, \ldots, x_{i+1}); \\ \dot x_n = f_n(x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{6}$$

Положим $F_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1$ и зададим функции $f_i(x_1, \ldots, x_{i+1})$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда из соотношения (4) не будет содержать производных в неизвестной функции $f_n$, что позволяет при известных предположениях легко найти эту функцию.

Введем предварительно обозначения. Пусть $A_0$ — тождественный оператор, а $A_i$ — дифференциальный оператор вида

$$A_i = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \ i = \overline{1,\ n.}$$

Справедлива следующая

**Теорема 2.** *Пусть функции* $f_i(x_1, \ldots, x_{i+1})$, $i = \overline{1,\ n-1}$ $n-i+1)$ *раз непрерывно-дифференцируемы,* $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right| \geqslant a > 0$, $i = \overline{1,\ n-1}$, *а функция* $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ *связана с функциями* $f_i$, $i = \overline{1,\ n-1}$ *соотношением*

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k A_k A_{k-1} \ldots A_0 x_1 - A_{n-1}^2 A_{n-2} \ldots A_0 x_1}{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-1}} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_2}}, \tag{7}$$

*где* $a_i$, $i = \overline{0,\ n-1}$ — *некоторые константы. Тогда система (6) отображается на линейную систему (3) с помощью замены переменных (5), где* $F_1 = x_1$, $F_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{d^k}{dt^k} F_1(x_1, \ldots, x_n) = A_k \ldots A_0 x_1$, $k = \overline{0,\ n}$.

Доказательство. Перепишем равенство (7) в виде

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-1}} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + A_{n-1}^2 A_{n-2} \ldots A_0 x_1 = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A_k A_{k-1} \ldots A_0 x_1. \tag{8}$$

Докажем по индукции формулу

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(A_{k-1} \ldots A_0 x_1) = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_k} \frac{\partial f_{k-2}}{\partial x_{k-1}} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \ k = \overline{2,\ n.} \tag{9}$$

При $k = 2$ равенство (9) очевидно. Пусть оно справедливо при $i = k$. Докажем его справедливость при $i = k + 1$. Поскольку функция $A_{k-1} A_{k-2} \ldots A_0 x_1$ не зависит от $x_{k+1}$, по предположению индукции имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}(A_k \ldots A_0 x_1) = \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\Big(f_k \frac{\partial}{\partial x_k}(A_{k-1} \ldots A_0 x_1) + \\ + \sum_{j=1}^{k-1} f_j \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{k-1} \ldots A_0 x_1)\Big) = \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} f_k \frac{\partial}{\partial x_k} f_{k-1} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_2},$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, равенство (8) может быть переписано в виде

$$A_n A_{n-1} \ldots A_0 x_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A_k \ldots A_0 x_1.$$

Поскольку очевидно $\frac{d}{dt^k} F_1(x_1, \ldots, x_n) = A_k \ldots A_0 x_1$, $k = \overline{0, n}$, отсюда следует справедливость равенства (4). Далее, так как матрица Якоби отображения (5) треугольная, причем ее диагональные элементы имеют вид $\frac{dF_1}{dx_1} = 1$, $\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_{i-1} \ldots A_0 x_1) = \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_i} \frac{\partial f_{i-2}}{\partial x_{i-1}} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$, $i = \overline{2, n}$, то $\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right| \geqslant a^{i-1} > 0$, $i = \overline{1, n}$. Следовательно, эта матрица невырождена, и отображение (5) биективно. Применение теоремы 1 завершает доказательство.

**§3. Отображение нелинейных управляемых систем на линейные.** Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2); \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3); \\ ------------ \\ x_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \end{cases} \tag{10}$$

$|u| \leqslant d$, которую назовем «треугольной» управляемой системой. Нас будет интересовать вопрос о возможности отображения этой системы с помощью замены переменных на линейную систему вида

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = z_2; \\ &\dot{z}_2 = z_3; \\ &--- \\ &\dot{z}_{n-1} = z_n; \\ &\dot{z}_n = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n + u. \end{aligned} \tag{11}$$

**Теорема 3.** *Пусть в системе (10) функция* $f_i(x_1, \ldots, x_{i+1})$, $i = \overline{1, n-1}$, $(n-i+1)$ *раз непрерывно-дифференцируема* $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right| \geqslant a > 0$. *Пусть функция* $f_n(x_1, \ldots, x_n, u)$ *имеет вид*

$$f_n = \frac{u + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k A_{k-1} A_{k-2} \ldots A_0 x_1 - A_{n-1}^2 A_{n-2} \ldots A_1 A_0 x_1}{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-1}} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_2}}. \tag{12}$$

*Тогда система (10) отображается на систему (11) с помощью замены (5), причем* $F_1 = x_1$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Отметим, что замена (5) впервые предложена в работе [1], где рассмотрен общей вопрос об отображении «треугольных» систем на линейные с помощью замены переменных и управления. В этой работе, наряду с заменой (5), рассматривается замена управления

$$v = \frac{d}{dt} F_n = F_{nx_1} f_1 + F_{nx_2} f_2 + \ldots + F_{nx_n} f_n.$$

ас интересует случай, когда $v=\sum_{i=1}^{n} a_i z_i+u$. Тогда, дифференцируя о $u$, имеем $F_{nx_n} f_{nu}=1$. Отсюда $f_{nu}=\frac{1}{F_{nx_n}}$. Поэтому $f_n=\frac{1}{F_{nx_n}}u+$ $+\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Подставляя значение в равенство $\sum_{i=1}^{n} F_{nx_i} f_i=$ $=\sum_{i=1}^{n} a_i z_i+u$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{nx_i} f_i+F_{nx_n}\left(\frac{1}{F_{nx_n}} u+\varphi(x_1, \ldots, x_n)\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i+u.$$

огда, используя введенные ранее обозначения и формулу (9), имеем

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)=\frac{-(F_{nx_1} f_1+F_{nx_{n-1}} f_{n-1})+\sum_{i=1}^{n} a_i z_i}{F_{nx_n}}=$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k A_{k-1} A_{k-2} \ldots A_0 z_1-A_{n-1}^2 A_{n-2} \ldots A_1 A_0 x_1}{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_2}},$$

куда следует (11).

Таким образом, для того чтобы система (9) отображалась на инейную с помощью замены (5) и без замены управления, необхо- имо и достаточно, чтобы функция $f_n$ имела вид (11).

Следствие из теоремы 3.

Если система (10) точно отображается на систему

$$\dot{z}_i=z_{i+1},\ i=\overline{1, n-1};\ \dot{z}_n=u,\ |u| \leqslant d, \tag{13}$$

. е. $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right| \geqslant a>0, \quad f_n=\frac{u-A_{n-1}^2 A_{n-2} \ldots A_0 x_1}{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}}$, то управление, существляющее оптимальный по быстродействию переход из $x^0$ $x^1$ в силу системы (10), совпадает с соответствующим управлением, существляющим переход из $z^0=F(x^0)$ в $z^1=F(x^1)$ в силу системы 13), и может быть найдено применением методов работы [6] (след- твие из теоремы 1, с. 198).

**Пример.** Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1=x_2;\ \dot{x}_2=x_1+\frac{1}{3} x_3^3+x_3;\ \dot{x}_3=-\frac{x_2}{1+x_3^2}+\frac{u}{1+x_3^2}. \tag{14}$$

Эта система отображается на систему $\dot{z}_1=z_2$, $\dot{z}_2=z_3$, $\dot{z}_3=u$ с по- ющью замены $z_1=x_1$, $z_2=x_2$, $z_3=x_1+\frac{1}{3} x_3^3+x_3$. Найдем управ- ение, осуществляющее оптимальный по быстродействию переход из очки $x^0=\left(\frac{4}{3}\ 0\ -1\right)$ в $x^1=(0\ 0\ 0)$ в силу системы (14). Имеем

$z(x^0)=\left(\frac{4}{3}\ 0\ 0\right)$, $z(x^1)=(0\ 0\ 0)$. Применяя следствие из теоремы I работы [6], имеем.

1. Время оптимального быстродействия $\Theta_0$ является максимальным положительным корнем уравнения $\Delta_3=0$, где $\Delta_3=\frac{1}{64}\Theta^4-\frac{2}{3}\Theta$, т. е. $\Theta_0=4\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

2. Оптимальное управление $u_0$ является управлением первого рода, т. е. $u_0=-1$, $t\in[0,\ t_1]$, $t\in[t_2,\ \Theta_0]$; $u_0=+1$, $t\in(t_1,\ t_2)$, $0<t_1<t_2<\Theta_0$;

3. Моменты переключения оптимального управления определяются из следующих уравнений: $t_1:\alpha_1 t_1-\alpha_2=0$, где $\alpha_1=\frac{\Theta_0}{2}$, $\alpha_2=\frac{\Theta_0^2}{8}$, т. е. $t_1=\frac{1}{4}\Theta_0=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; $t_2:(t-t_1)-\alpha_1=0$, где $\alpha_1=\frac{\Theta_0}{2}$, т. е. $t_2=\frac{\Theta_0}{4}+\frac{\Theta_0}{2}=\frac{3\Theta_0}{4}=3\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Список литературы: 1. *Коробов В. И.* Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Диф. уравнения. 1973. **7,** № 6. С. 1120—1123. 2. *Коробов В. И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Мат. сборник. 1979. **109(151),** № 4 (8). С 582—606. 3. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функции Ляпунова. М., 1977. 400 с. 4. *Ковалев А. М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. К., 1980. 175 с. 5. *Жевнин С. Т., Крищенко А. П., Глушко Ю. В.* Управляемость, наблюдаемость нелинейных систем // Докл. АН СССР. 1982. **266.** С. 807—811. 6. *Коробов В. И., Скляр Г. М.* Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Мат. сборник. 1987. **134(176),** № 2 (10). С. 185—206. 7. *Коробов В. И., Скляр Г. М.* Точное решение одной *n*-мерной задачи быстродействия // Докл. АН СССР. 1988. **298,** № 6. С. 120—125.

*Поступила в редколлегию 30.05.89*

---

УДК 517.38

*В. А. ЗОЛОТАРЕВ, А. А. ЯНЦЕВИЧ*

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В работе [1] рассматривалась абстрактная задача Коши (АЗК) в гильбертовом пространстве H:

$$\frac{dz_t}{dt}=A(t)\,z_t,\ \ z_t|_{t=0}=z_0,\ \ A(t)\in[H,\ H],\tag{1}$$

причем на $K(t,\ s)=\langle z_t,\ z_s\rangle_H$ налагались определенные условия (например, в виде дифференциальных уравнений в частных производных), которые приводили к нелинейным операторным уравнениям для $A(t)$, и, следовательно, выделялись определенные разновидности кривых в гильбертовых пространствах. Такой подход с вероятностной точки зрения позволил ввести новые классы нестационарных процессов и построить спектральный анализ таких процессов по корреляционной функции (КФ).

В данной статье продолжается анализ операторных уравнений, начатый в работе [1], в случае, когда $A(t)$ несамосопряжен.

1. Пусть КФ, удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2) K(t, s) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{r} \varphi_\alpha(t) I_{\alpha\beta} \overline{\varphi_\beta(s)}. \tag{2}$$

Из (1), (2) следует, что

$$\langle (B(t) - B^*(s)) z_t, z_s \rangle = \sum_{\alpha, \beta=1}^{r} \varphi_\alpha(t) I_{\alpha\beta} \overline{\varphi_\beta(s)}, \tag{3}$$

где через $B(t)$ обозначено выражение $\frac{dA}{dt} + A^2(t)$. Если $B(t)$ не зависит от $t$, то для $A(t)$ получается уравнение Риккати

$$\frac{dA}{dt} + A^2(t) = B, \tag{4}$$

де $B - B^* = \sum\limits_{\alpha, \beta=1}^{r} \langle \cdot, e_\alpha \rangle I_{\alpha\beta} e_\beta$, $e_\alpha$ — каналовые элементы, $(I_{\alpha\beta})$ — волюция [2].

В случае $B = B^*$ анализ уравнения (4), а также вид $K(t, s)$ изучен в [1].

II. Конкретизируя вид $B$ и решая уравнение (4), можно изучать разные классы нестационарных кривых в $H$.

1. Пусть $H = L^2(R_1)$, а оператор $B$ имеет вид

$$B = \int_0^x G(x-y)\, dy. \tag{5}$$

Заранее не будем предполагать, что $\overline{(B - B^*) L^2(R_1)}$ конечномерно. Решение (4) будем искать в виде $A(t) = \int\limits_0^x K(x-y, t) \cdot dy$. Тогда для ядра $K(x-y, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial K(x-y, t)}{\partial t} + \int_0^{x-y} K(x-y-\eta, t) K(\eta, t)\, d\eta = G(x-y),$$

полагая $x - y = \xi$, получаем нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial K(\xi, t)}{\partial t} + \int_0^{\xi} K(\xi - \eta) K(\eta, t)\, d\eta = G(\xi). \tag{6}$$

**После преобразования Фурье приходим к уравнению Риккати**

$$\frac{\partial \hat{K}(\lambda, t)}{\partial t} + \hat{K}^2(\lambda, t) = \hat{G}(\lambda), \tag{7}$$

решение которого, удовлетворяющее условию $\hat{K}(\lambda, 0) = 0$, имеет вид

$$\hat{K}(\lambda, t) = \sqrt{\hat{G}(\lambda)}\,\frac{1 - e^{-2\sqrt{G(\lambda)}\,t}}{1 + e^{-2\sqrt{\hat{G}(\lambda)}\,t}}.$$

Следовательно, для $K(\xi, t)$ окончательно получаем

$$K(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{R_1} e^{-i\xi\lambda} \sqrt{\hat{G}(\lambda)}\,\frac{1 - e^{-2\sqrt{G(\lambda)}\,t}}{1 + e^{-2\sqrt{\hat{G}(\lambda)}\,t}}\,d\lambda. \tag{8}$$

**Пример 1.** Пусть $G(\xi) \equiv G_0(\xi) = j\chi_{[-a,\,a]}(\xi)$, где $\chi_{[-a,\,a]}(\xi)$ — характеристическая функция интервала $[-a, a]$, тогда

$$\hat{G}_0(\lambda) = \frac{i}{\lambda\sqrt{2\pi}} \sin \lambda a;$$

$$K(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{R_1} e^{i\lambda\xi} \sqrt{\frac{i \sin \lambda a}{\lambda\sqrt{2\pi}}}\, th \sqrt{\frac{ia \sin \lambda a}{\lambda\sqrt{2\pi}}}\,d\lambda.$$

**Пример 2.** Пусть $G(\xi) = \xi^n \chi_{[-a,\,a]}(\xi)$, тогда $\hat{G}(\lambda) = i^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \hat{G}_0(\lambda)$ и нахождение $K(\xi, t)$ сводится к квадратуре.

2. Пусть $H = L^2_{[0,1]}$ и $B = \int\limits_0^1 G(x, y) \cdot dy$, тогда $K(x, y, t)$ удовлетворяет

$$\frac{\partial K(x, y, t)}{\partial t} + \int\limits_0^1 K(x, z, t)\,K(z, y, t)\,dz = G(x, y).$$

Если $G(x, y) = \vartheta(x)\,\psi(y)$, то, полагая $K(x, y, t) = K(x, t)\,\psi(y)$, получаем для $K(x, t)$ уравнение

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} + K(x, t) \int\limits_0^1 \psi(z)\,K(z, t)\,dz = \vartheta(x). \tag{9}$$

Обозначая $\chi(t) = \int\limits_0^1 \psi(z)\,K(z, t)\,dz$, из (9) имеем $\frac{d\chi}{dt} + \chi^2(t) = \int\limits_0^1 \vartheta(x)\,\psi(x)\,dx$, а для $K(x, t)$ линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} + \chi(t)\,K(x, t) = \vartheta(x);\quad K(x, t)|_{t=0} = K_0(x).$$

**Аналогично к квадратурам сводится случай, когда $G(x, y) = \sum_{l=1}^{n} \vartheta_l(x)\psi_l(y)$.**

3. Пусть $B \in [L^2_{[-a,a]}, L^2_{[-a,a]}]$ имеет вид $Bf = \alpha(x) f(x) + i \int_{-a}^{x} f(\xi)\, d\xi$. Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$Af = \beta(x, t) f(x) + i \int_{-a}^{x} K(x, \xi, t) f(\xi)\, d\xi. \qquad (10)$$

Тогда из (5), (10) получаем

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial t} + \beta^2\right) f(x) + i \int_{-a}^{x} \Big\{[\beta(x, t) + \beta(\xi, t)] K(x, \xi, t) + \frac{\partial K(x, \xi, t)}{\partial t} + $$

$$+ i \int_{\xi}^{x} K(x, s, t) K(s, \xi, t)\, ds\Big\} f(\xi)\, d\xi = \alpha(x) f(x) + i \int_{-a}^{x} f(\xi)\, d\xi. \quad (11)$$

Для того, чтобы удовлетворялось соотношение (11), достаточно

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} + \beta^2 = \alpha(x); \qquad (12)$$

$$\frac{\partial K(x, \xi, t)}{\partial t} + [\beta(x, t| + \beta(\xi, t||] K(x, \xi, t) + i \int_{\xi}^{x} K(x, s, t) K(s, \xi, t)\, ds = 1. \qquad (13)$$

Выражение (13) является стандартным уравнением Риккати, решение которого находится в явном виде, а (13) после нахождения $\beta(x, t)$ можно решать методом последовательных приближений. В случае, когда $\alpha|x| = \alpha_0 = \text{const}$, задача (12), (13) упрощается, так как решение интегродифференциального уравнения (13) можно искать в виде

$$K(x, \xi, t) = K(x - \xi, t);$$

$$\frac{\partial K(x - \xi, t)}{\partial t} + 2\beta(t) K(x - \xi, t) + i \int_{0}^{x-\xi} K(x - \xi - s, t) K(s, t)\, ds = 1.$$

Продолжая соответствующие функции нулем вне интервала $[-a, a]$ и применяя преобразование Фурье, получаем скалярное уравнение Риккати

$$\frac{\partial \hat{K}(\lambda, t)}{\partial t} + 2\beta(t) \hat{K}(\lambda, t) + i \hat{K}^2(\lambda, t) = \frac{\sin \lambda a}{\lambda a \sqrt{2\pi}}. \qquad (14)$$

Так как $\beta(t)$ удовлетворяет уравнению $\beta^1 + \beta^2 = \alpha_0$, полагая $\widehat{K}(\lambda, t) = u(\lambda, t) + i\beta(t)$, для $u(\lambda, t)$ получаем уравнение Риккати с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u(\lambda,\ t)}{\partial t} + iu^2(\lambda,\ t) = \frac{\sin \lambda a}{\lambda a \sqrt{2\pi}} - i\alpha_0.$$

**Список литературы:** 1. *Золотарев В. А., Янцевич А. А.* Нестационарные кривые в гильбертовых пространствах и нелинейные операторные уравнения. 1990. С.
2. *Лившиц М. С., Янцевич А. А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Х., 1981. 160 с.

*Поступила в редколлегию 20.06.89*

---

УДК 517.994

*Л. В. ФАРДИГОЛА*

# СВОЙСТВО *T*-УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛОЕ

Нелокальные краевые задачи в слое $\Pi(T) = \boldsymbol{R}^n \times [0,\ T]$ исследовались во многих работах [1—4 и др.]. Это вызвано, в первую очередь, возникновением подобных задач как математических моделей реальных процессов [5].

После получения ответа на центральный вопрос — о корректной постановке рассматриваемой задачи — возникает потребность выяснить характер зависимости решения от тех или иных параметров задачи. Нами исследована следующая задача с интегральным краевым условием

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = P(-iD_x)\,u(x,\ t),\ \ (x,\ t) \in \Pi(T); \tag{1}$$

$$\int_0^T B(-iD_x)\,u(x,\ t) \exp\{-at\}\,dt = u_0(x),\ \ x \in \boldsymbol{R}^n. \tag{2}$$

Здесь $P(\sigma)$, $B(\sigma)$ — произвольные полиномы с постоянными комплексными коэффициентами $(\sigma \in \boldsymbol{R}^n)$, $a \in \boldsymbol{C}$.

Критерий корректности (см. ниже определение 1) задачи (1), (2) получен нами в работе [6]. Там же выяснено, что задача (1), (2) может оказаться корректной при некотором значении $T = T_0$ и не быть корректной при всех других достаточно близких значениях $T$. Однако, если при некотором значении $T = T_0$ такая задача корректна, то она корректна при всех достаточно малых значениях $T > 0$. Таким образом, если множество $\tau(P,\ B,\ a)$ тех значений $T > 0$, для которых задача (1), (2) корректна, не пусто, то оно обязательно содержит внутренние точки. Спрашивается, имеет ли место в таких точках непрерывная зависимость решения $u(x,\ t;\ T)$

и его производных) корректной задачи (1), (2) от $T$ и является ли стойчивой относительно изменения $T$ зависимость гладкости решения $u(x, t; T)$ от гладкости краевой функции $u_0(x)$. Основной реультат настоящей работы состоит в утвердительном ответе на этот опрос.

Обозначим $H_m = \{f(x) \in C^m(\boldsymbol{R}^n): \|f\|_m = \max\limits_{|\alpha|<m} \sup\limits_{\boldsymbol{R}^n} \{|D^\alpha f(x)|\} < \infty\}$; $(\sigma; T) \equiv B(\sigma)[\exp\{T(P(\sigma) - a)\} - 1]/(P(\sigma) - a)$; $U(T_0, \delta) = \{T > 0 : |T - T_0| < \delta\}$.

Определение 1. *Задача* (1), (2) *называется корректной слое* $\Pi(T)$, *если для* $\forall m \in \boldsymbol{N}\, \exists m_1 \in \boldsymbol{N}\, \exists C > 0$ *такие, что для* $u_0(x) \in H_{m_1}$ *задача* (1), (2) *имеет единственное решение* $u(x, t) \in H_m$ *при* $\forall t \in [0, T]$), *причем* $\sup\limits_{t \in [0, T]} \|u(x, t)\|_m \leqslant C \|u_0(x)\|_{m_1}$.

Задача (1) — (2) корректна в слое $\Pi(T)$ тогда и только тогда, огда $\Delta(\sigma; T) \neq 0$, $\forall \sigma \in R^n$ [6].

Определение 2. *Задача* (1), (2) *называется* $T$-*устойчивой слое* $\Pi(T_0)$, *если* $\exists \delta < 0$ *такое, что для* $\forall T \in U(T_0, \delta)$

1) *задача* (1), (2) *корректна, причем параметры* $m_1 = m_1(m)$ $C = C(m)$ *(см. определение 1) не зависят от* $T$;

2) *если* $u(x, t; T) \in H_m$ — *решение этой задачи при* $u_0(x) \in H_{m_1}$, $\sup\limits_{[0, \min\{T, T_0\}]} \|u(x, t; T) - u(x, t, T_0)\|_m \leqslant C' |T - T_0| \|u_0(x)\|_{m_1}$ *где тоянная* $C' > 0$ *не зависит от* $T$.

**Теорема.** *Задача* (1), (2) $T$-*устойчива в слое* $\Pi(T_0)$, *если* $\in \operatorname{int} \tau(P, B, a)$.

Доказательство. Аналогично [6] получаем степенные по $\in \boldsymbol{R}^n$ оценки сверху (равномерные относительно $t \in [0, T]$, $T \in U(T_0, \delta')$) одулей функции $R(\sigma, t; T) \equiv \exp\{tP(\sigma)\}/\Delta(\sigma; T)$ и ее производных). рименяя теорему Лагранжа (по $T \in U(T_0, \delta')$), получаем оценки ерху модулей функции $R(\sigma, t; T) - R(\sigma, t, T_0)$ и ее производых, степенные относительно $\sigma \in \boldsymbol{R}^n$, линейные относительно $|T - T_0|$ равномерные относительно $t \in [0, \min\{T, T_0\}]$, $T \in U(T_0, \delta')$. Отюда, так же, как в работе [6] корректность, получаем $T$-устойчиость задачи (1), (2). Теорема доказана.

Замечание. В [6] установлена структура множества $\tau(P, B, a)$: сли $\tau(P, B, a) \neq \varnothing$, то это множество является объединением отезков (в том числе, возможно, и изолированных точек). Возникает опрос о зависимости от $T$ решения $u(x, t; T)$ в точках $T_0 \in \tau(P, B, a)$, е являющихся внутренними, но являющихся предельными для нутренних точек $\tau(P, B, a)$. Это исследование можно провести по ой же схеме, введя аналогично определению 2 понятие $T$-устойчиости справа (слева) решения корректной задачи (1), (2) в слое $(T_0)$. Результат этого исследования совершенно аналогичен результату доказанному в теореме.

Как следствие полученной теоремы и установленной в [6] структуры множества $\tau(P, B, a)$ можно сформулировать следующие утерждения. Обозначим $E_1 = \{\sigma \in \boldsymbol{R}^n : \operatorname{Re} P(\sigma) = \operatorname{Re} a\}$, $E_2 = \{x \in \boldsymbol{R} : x = \operatorname{Im} P(\sigma) \wedge \sigma \in E_1\}$.

Утверждение 1. *Если* $E_1 = \varnothing$ *и* $B(\sigma) \neq 0$ $(\forall \sigma \in \boldsymbol{R}^n)$, *то задача* (1), (2) *Т-устойчива в слое* $\Pi(T_0)$ *при* $\forall T_0 > 0$.

Утверждение 2. *Если* $E_2 = \{c_1, \ldots, c_l\}$ *и* $B(\sigma) \neq 0$ $(\forall \sigma \in \boldsymbol{R}^n)$, *то задача* (1), (2) *Т-устойчива в слое* $\Pi(T_0)$ *при всех* $T_0 > 0$, *кроме счетного множества* $E = \bigcup\limits_{c \in E_2 \{\mathrm{Im}\, a\}} \{2\pi/(c - \mathrm{Im}\, a)\}\boldsymbol{Z}$ *изолированных точек.*

Автор благодарит В. М. Борок за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

**Список литературы:** 1. *Борок В. М.* Крчтерий абсолютной $\overline{C}$-устойчивости уравнений в частных производных //Диф. уравнения. 1988. **24**, № 3. С. 438—444. 2. *Мамян А. Х.*: Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. 1982. **287**, № 1. С. 292—296. 3. *Макаров А. А.* О необходимых и достаточных условиях корректной разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Диф. уравнения 1981. **17**, № 2. С. 320—327. 4. *Савченко Г. Б.* О корректности одной краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. 1978. **14**, № 11. С. 2082—2085. 5. *Нахушев А. М.*. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Диф. уравнения. 1985. **21**, № 1. С. 92—101. 6. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральным условием // Укр. мат. журн. 1990. **42**, № 11. С. 1546-1551.

*Поступила в редколлегию 20.06.89*

---

УДК 513.881

*Е. А. ПАВЛОВ*

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАЦИИ СВЕРТКИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 1. *Обозначим через* $M((-\infty, \infty)\, dx)$ *пространство всех измеримых, в смысле Лебега, функций, определенных на* $(-\infty, \infty)$. *Сверткой двух функций* $f(t)$, $g(t) \in M((-\infty, \infty);\, dx)$ *будем называть функцию* $\gamma(t)$, *определяемую равенством*

$$\gamma(t) = (f * g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\, g(s)\, ds. \qquad (1)$$

*Из общих теорем об измеримых функциях следует, что если* $f(t)$ *и* $g(t)$ — *измеримые функции, то свертка* $\gamma(t) = (f * g)(t)$ — *измеримая функция (См., например,* [5]*).*

Определение 2. *Два функциональных банаховых пространства* $E_1$ *и* $E_2$, *состоящих из измеримых, в смысле Лебега, функций, определенных на* $(-\infty, \infty)$, *будем называть сворачиваемыми, если для* $f \in E_1$, $g \in E_2$ *выполняется соотношение* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\, g(s)\, ds < \infty$ *для п. в.* $t \in (-\infty, \infty)$ (2).

**Определение 3.** *Пусть $E_1$ и $E_2$ — два сворачиваемых функциональных пространства измеримых функций, определенных на (—∞, ∞). $E_3$ — некоторое третье функциональное пространство измеримых функций, определенных на (—∞, ∞) такое, что выполняется соотношение $(f*g)(t) \in E_3$, если $f(t) \in E_1$, $g(t) \in E_2$.*

*Сверткой пространств $E_1$ и $E_2$ относительно пространства $E_3$ будем называть пространство, обозначаемое $E_1 * E_2$ и являющееся замыканием в $E_3$ линейной оболочки множества*

$$E_1 * E_2 \overset{\text{def}}{=} \{f*g \mid f \in E_1,\ g \in E_2\}. \tag{3}$$

*Замечание.* Естественно возникает вопрос, когда пространства $E_1$ и $E_2$ сворачиваемы и когда существует свертка пространств $E_1$ и $E_2$ относительно третьего пространства? В каких терминах формулировать необходимые и достаточные условия сворачиваемости пространства?

**Определение 4.** *Банахово функциональное пространство $E$ измеримых функций, определенных на (—∞, ∞) называется симметричным пространством (см. [7]) если:*

1) *из неравенства $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ для почти всех $t \in (-\infty, \infty)$ и включения $y(t) \in E$ следует, что $x(t) \in E$ и $\|x(t)\|_E \leqslant \|y(t)\|_E$;*

2) *из включения $y(t) \in E$ и равноизмеримости $|x(t)|$ и $|y(t)|$ следует, что $\|x(t)\|_E = \|y(t)\|_E$.*

**Определение 5.** *Через $\varphi_E(t)$ определяется (см. [7]) фундаментальная функция симметричного пространства $E$*

$$\varphi_E(t) \overset{\text{def}}{=} \|\chi_e\|_E, \tag{4}$$

*где* $\operatorname{mes} e = t$, *$\chi_e$ — характеристическая функция множества $e$.*

Через $\alpha_E$ и $\beta_E$ обозначаются нижний и верхний индексы Бойда (см. [7])

$$\alpha_E = \lim_{t \to 0} \frac{\log \|\sigma_t\|_E}{\log t};\ \ \beta_E = \lim_{t \to +\infty} \frac{\log \|\sigma_t\|_E}{\log t}. \tag{5}$$

где $\|\sigma_t\|_E$ — норма оператора растяжения, действующего непрерывно в каждом симметричном пространстве $E$, который определяется равенством $\sigma_t x(s) = x(s/t)$

$$x^{**} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{t} \int\limits_0^t x^*(s)\, ds \tag{6}$$

где $x^*(s)$ — перестановка $|x(s)|$ в убывающем порядке (см. [7]).

Приведем некоторые примеры сворачиваемых пространств.

**Пример 1.** Пусть положительные числа $p$, $q$ таковы, что $1/p + 1/q = 1$. Тогда пространства $L_p$ и $L_q$ сворачиваемы и существует свертка $L_p^{L_r} * L_q$, где число $r > 0$ таково, что $1/r = 1/p + 1/q - 1$.

Доказательство непосредственно следует из неравенства Юнга $\|f*q\|_{L_r} \leqslant \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$, где $1/r = 1/p + 1/q - 1$.

Через $E_1$ обозначается двойственное (ассоциированное) к $E$ пространство, которое определяется соотношением

$$E^1 = \left\{ g \in M((-\infty,\ \infty);\ dt) \mid \| g \|_{E^1} \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\|f\|_E < 1} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t)\, dt < \infty \right\}. \quad (7)$$

Если $E$ — симметричное пространство, то $E^1$ — также симметричное пространство (см. [7]).

**Пример 2.** Пространство $E$ и $E^1$ сворачиваемы, где $E$ — симметричное пространство и существует свертка $E \overset{L_\infty}{\ast} E^1$.

Доказательство может быть получено применением обобщенного неравенства Гельдера (см. [7]).

**Пример 3.** Пусть симметричные пространства $E_1$ и $E_2$ таковы, что выполняется соотношение $\alpha_{E_1} + \gamma_{\varphi_{E_2}}$ (см. [7]). Тогда 1) $E_1$ и $E_2$ сворачиваемы; 2) Существует свертка $E_1 \overset{E_3}{\ast} E_2$, где $\| x \|_{E_3} = \| x^{**}(t) \times \times \varphi_{E_2}(t) / \|_{E_1}$.

Доказательство получается непосредственным применением теоремы 6.16 из [7] и определения сворачиваемости $E_1$ и $E_2$ и свертки $E_1 \overset{E_3}{\ast} E_2$.

**Теорема 1.** *Пусть существует свертка $E_1 \overset{E_3}{\ast} E_2$. Тогда справедливо соотношение $t\varphi_{E_3}(t) \leqslant C\varphi_{E_1}(t)\, \varphi_{E_2}(t)$.*

Доказательство. Из определения пространства $E_1 \overset{E_3}{\ast} E$ получаем, что $f \ast g \in E_3$, если $f \in E_1$, а $g$ пробегает все пространство $E_2$. Другими словами интегральный оператор свертки $T_k$ с ядром $k = f$ действует из $E_2$ в $E_3$. По теореме С. Банаха (см. [1]) оператор $T_k$ является ограниченным как оператор из $E_1$ в $E_2$, т. е. выполняется неравенство

$$\| f \ast g \|_{E_3} \leqslant C_f \| g \|_{E_2}. \quad (8)$$

По теореме о равномерной ограниченности получаем неравенство (см. [6])

$$\| f \ast g \|_{E_3} \leqslant C \| f \|_{E_1} \| g \|_{E_2}. \quad (9)$$

Положим $f(t) = g(t) = \chi_{[0,\,\tau]}(t)$. Несложно проверить справедливость неравенства

$$(\chi_{[0,\,\tau]} \ast \chi_{[0,\,\tau]})(t) \geqslant \frac{1}{2} \tau \chi_{[\tau/2;\ 3\tau/2]}(t). \quad (10)$$

Из (9), (10) получаем

$$\left\| \frac{1}{2} \tau \chi_{[\tau/2;\ 3\tau/2]}(t) \right\|_{E_3} \leqslant \| \chi_{[0,\,\tau]} \ast \chi_{[0,\,\tau]} \|_{E_3} \leqslant$$
$$\leqslant C \| \chi_{[0,\,\tau]} \|_{E_1} \| \chi_{[0,\,\tau]} \|_{E_2} = C\varphi_{E_1}(\tau)\, \varphi_{E_2}(\tau). \quad (11)$$

Итак, имеем

$$\tau\varphi_{E_3}(\tau) \leqslant 2C\varphi_{E_1}(\tau)\, \varphi_{E_2}(\tau). \quad (12)$$

Теорема доказана.

Очевидны следующие свойства:

*Свойство 1*. Операция свертки банаховых пространств коммутативна.

*Свойство 2*. Пусть $E_1$, $E_2$, $E_3$ — функциональные банаховы про-транства такие, что существуют свертки пространств: *a*) $E_1 \overset{F}{\ast} E_2$; ) $(E_1 \overset{F}{\ast} E_2) \overset{F}{\ast} E_3$; *c*) $E_2 \overset{F}{\ast} E_3$; *d*) $E_1 \overset{F}{\ast} (E_2 \overset{F}{\ast} E_3)$. Тогда справедливо авенство $(E_1 \overset{F}{\ast} E_2) \overset{F}{\ast} E_3 = E_1 \overset{F}{\ast} (E_2 \overset{F}{\ast} E_3)$.

*Свойство 3*. Если одно из пространств $E_1$ или $E_2$ инвариантно тносительно сдвига, то $E_1 \overset{E_3}{\ast} E_2$ — инвариантно относительно сдвига.

**Теорема 2.** *Пусть $E_1$, $E_2$, $E_3$ — сепарабельные симметричные ространства такие, что существуют свертка $E_1 \overset{E_3}{\ast} E_2$. Тогда праведливо равенство $E_1 \overset{E_3}{\ast} E_2 = E_3$.*

Доказательство. Пусть $f$ — финитная ограниченная функ-ия $\omega_\varepsilon$ — «шапочка» (см., например, [8]). Тогда, как известно (см. [8]), меют место соотношения: *a*) $f \ast \omega_\varepsilon \xrightarrow{L_1} f$; *b*) $f \ast \omega_\varepsilon \xrightarrow{L_\infty} f$. Так как — финитна и ограничена, $\omega_\varepsilon \in E_3$. Из сепарабельности $E_3$ следует терполяционность $E_3$ между $L_1$ и $L_\infty$ (см. [7]). Из соотношений и *b*) и интерполяционности $E_3$ между $L_1$ и $L_\infty$ получаем соотно-ние $f \ast \omega_\varepsilon \xrightarrow{E_3} f$, где $f$ — финитна и ограничена. Пусть теперь $f$ — извольная функция из $E_3$. В силу сепарабельности $E_3$ сущест-т последовательность финитных ограниченных функций $f_n(t)$ их, что $f_n(t) \xrightarrow{E_3} f(t)$ (см. [7]).

Покажем, что $(f_n \ast \omega_\varepsilon) \xrightarrow{E_3} f$ при $n \to \infty$. Имеем

$$\|(f_n \ast \omega_\varepsilon) - f\|_{E_3} \leqslant \|(f_n \ast \omega_\varepsilon) - f_n\|_{E_3} t \|f_n - f\|_{E_3}. \qquad (13)$$

но, что для достаточно больших $n$ и малых $\varepsilon$ каждое из слагаемых правой части неравенства (13) можно сделать меньше $\delta/2$. Итак, меем $\|f_n \ast \omega_\varepsilon - f\|_{E_3} < \delta$ для достаточно больших $n$ и малых $\varepsilon$. ледовательно, $f \in E_1 \overset{E_3}{\ast} E_2$. Таким образом, $E_3 \subset E_1 \overset{E_3}{\ast} E_2$. С другой тороны, из определения свертки $E_1 \overset{E_3}{\ast} E_2$ следует включение $E_1 \overset{E_3}{\ast} E_2 \subset$ $\subset E_3$. Следовательно, $E_1 \overset{E_3}{\ast} E_2 = E_3$. Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Пусть $E$ — симметричное сепарабельное простран-тво. Тогда для того, чтобы существовала свертка $E \overset{E}{\ast} E$, необ-одимо и достаточно выполнение соотношения $\varphi_E(t) \geqslant Ct$.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1. *остаточность*. Пусть выполняется соотношение $\varphi_E(t) \geqslant ct$. Из бобщенного неравенства Минковского (см. [10]) следует, что $\|f \ast$ $g\|_E \leqslant \|f\|_{L_1} \|g\|_E$. Далее имеем

$$f\|_E \geqslant \|f\| M_{\varphi_E} = \sup_{0<t<\infty} \varphi_E(t) x^{**}(t) \geqslant C \sup_{0<t<\infty} \int_0^t x^*(s)\, ds = \|x\|_{L1}. \qquad (14)$$

**Итак, имеем**

$$\|f \ast g\|_E < \frac{1}{C}\|f\|_E\|g\|_E. \tag{15}$$

Теорема доказана

**Список литературы:** 1. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск, 1983. 224 с. 2. *Сахнович Л. А.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке // Успехи мат. наук. 1980. **35**, вып. 4(214). С. 69—129. 3. *Рудин У.* Основы математического анализа. М., 1976. 320 с. 4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. М., 1976. 320 с. 5. *Титчмарш Е.* Теория функций. М., 1980. 464 с. 6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972. 496 с. 7. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов, М., 1978. 400 с. 8. *Владимиров В. С.* Обобщение функций в математической физике. М., 1976. 280 с. 9. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., 1967. 624 с. 10. *Павлов Е. А.* Об операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах // Сиб. мат. журн. 1977. **18**, № 1. С. 5—39.

*Поступила в редколлегию 06.07.87*

---

УДК 517.53

*А. Э. ЕРЕМЕНКО, М. Л. СОДИН*

# О МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА С МАКСИМАЛЬНОЙ СУММОЙ ДЕФЕКТОВ

1. Введение. В работе [1] Д. Дрейсин доказал такую теорему: *пусть $f$ — мероморфная функция конечного порядка $\rho$ со свойством*

$$\sum_{a \in C} \delta(a, f) = 2.$$

*Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $2\rho$ — *натуральное число* $\geqslant 2$;

2) $\delta(a, f) = p(a)/\rho$, $a \in \overline{C}$, *где* $p(a)$ — *целые неотрицательные числа. (Отсюда вытекает, что количество дефектных значений не превосходит* $2\rho$);

3) *все дефектные значения являются асимптотическими.*

Эта теорема доказывает справедливость гипотезы Ф. Неванлинны, высказанной в 1929 г. Доказательство теоремы Дрейсина чрезвычайно сложно и использует кроме теории Неванлинны широкий набор разнообразных средств, таких как альфорсова теория накрывающих поверхностей, квазиконформные отображения и т. д. В работе [2] один из авторов предложил более короткое доказательство, основанное на теории Неванлинны и теории потенциала. При этом, кроме 1) — 3) были доказаны следующие утверждения:

4) $T(r, f) \sim r^{\rho} l_1(r)$, $r \to \infty$, *где* $l_1$ — *непрерывная функция со свойством* $l_1(2r) \sim l_1(r)$, $r \to \infty$;

$$\sum_{a:\delta(a,f)>0\}} \log \frac{1}{|(f-a)(re^{i\theta})|} = \pi r^{\rho} l_1(r)\,|\cos\rho(\theta - l_2(r))| + o(r^{\rho} l_1(r)),$$

*вномерно относительно* $\theta$ *при* $r \to \infty$, $re^{i\theta} \notin C_0$. Здесь $C_0$ — объ- инение кругов с центрами в точках $z_k$ и радиусами $r_k$ таких, что

$$\sum_{|z_k|<R} r_k = o(R),\ R \to \infty,$$

и $l_2$ — непрерывная функция со свойством $l_2(cr) - l_2(r) \to 0$, при $r \to \infty$ равномерно относительно $c \in [1, 2]$.

Мы покажем, что при доказательстве утверждений 1) — 5) можно обойтись одной только теорией потенциала, причем получится более общий результат.

В 1929 г. Р. Неванлинна высказал предположение, что соотношение дефектов

$$\sum_{a \in C} \delta(a, f) \leqslant 2$$

ется справедливым, если постоянные $a$ заменить мероморфными кциями $a(z)$ со свойством $T(r, a) = o(T(r, f))$. При этом $\delta(a, f)$ чает $\delta(0, f - a)$. Эта гипотеза была недавно доказана Ч. Осгу- [3]. Затем доказательство существенно упростил Н. Штейнмец

Возникает естественный вопрос об обобщении теоремы Дрейсина случай «малых» мероморфных функций. Внимание авторов было влечено к этому вопросу во время визита в Харьков Янга Ло в 1988 г. Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Пусть* $f$ — *мероморфная функция конечного нижнего ядка,* $S$ — *не более, чем счетное множество мероморфных функций* $a$ *со свойством*

$$T(r, a) = o(T(r, f)),\ r \to \infty. \tag{1.1}$$

*Если*

$$\sum_{a \in S} \delta(a, f) = 2, \tag{1.2}$$

*справедливы утверждения 1) — 5). При этом 3) означает, что йдется кривая* $\Gamma$, *стремящаяся к* $\infty$, *такая, что* $f(z) - a(z) \to 0$ *и* $z \to \infty$, $z \in \Gamma$.

Для случая целых функций теорема 1 доказана в [5].

Теорема Осгуда — Штейнмеца не будет использоваться при доказательстве теоремы 1. Наши рассуждения дают новое доказательство этой теоремы для функций $f$ конечного нижнего порядка*. Существенно новым элементом является следующая теорема 2, заменяющая

---

* Метод применим и к произвольным мероморфным функциям. Он позволяет лучить [1] основную теорему с малыми функциями вместо констант, однако, в чае бесконечного порядка требуется немного более сильное условие малости, чем (1.1). См. [6].

II основную теорему и ее обобщение, принадлежащее Ч. Осгуд и Н. Штейнмецу.

Прежде чем сформулировать теорему 2, напомним некоторы обозначения [2]. Разность двух субгармонических функций называетс δ-субгармонической функцией. Она, вообще говоря, определена лиш квазивсюду, т. е. вне некоторого множества емкости нуль. Дл δ-субгармонической функции $v$ всегда полагаем

$$v(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} v(z+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$$

во всех точках $z$, в которых этот предел существует. Естественно отношение порядка превращает линейное пространство δ-субгармонических функций в решетку (верхняя огибающая $u\bigvee v=(u-v)^{+}+$ и нижняя огибающая $u\bigwedge v=u-(u-v)^{+}$ двух δ-субгармонически функций тоже являются δ-субгармоническими функциями). Для каждо δ-субгармонической функции определен ее риссовский заряд. На пространстве зарядов также есть естественное отношение порядка: $\mu_1\geqslant\mu_2$ если $\mu_1-\mu_2$ — (неотрицательная) мера. Пространство зарядов с эти отношением порядка является решеткой: $\mu_1\bigvee\mu_2=(\mu_1-\mu_2)^{+}+\mu_2$ где $\mu^{+}$ — положительная часть в разложении Жордана заряда $\mu$.

**Теорема 2.** *Пусть* $\{u_k\}_{k=1}^{\omega}$, $\omega\leqslant\infty$ — *неотрицательные δ-субг монические функции со свойством*

$$\sum_{k=1}^{\omega} u_k=\bigvee_{k=1}^{\omega} u_k. \qquad (1$$

*Предположим, что риссовские заряды* $\mu_k$ *функций* $u_k$ *равномерн ограничены:* $\mu_k\leqslant\mu$ *для некоторой меры* $\mu$ *и всех* $k$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\omega}\mu_k\leqslant 2\bigvee_{k=1}^{\omega}\mu_k. \qquad (1.4$$

План дальнейшего изложения таков. В п. 2 мы докажем теорем 1, используя теорему 2 и Основную лемму из [2, часть II]. В п. будет доказана теорема 2.

2. **Доказательство теоремы 1.** Не уменьшая общности считаем, что $f(0)\neq\infty$ и

$$N(r,\ f)\sim T(r,\ f),\ r\to\infty, \qquad (2.1$$

откуда

$$m(r,\ f)=o(T(r,\ f)),\ r\to\infty. \qquad (2.2$$

Это означает, что $\infty$ не является исключительным значением в смысл Валирона. Положим $T(r)=T(r,\ f)$ и определим порядок $\rho^{*}$ и нижний порядок $\rho_{*}$ в смысле Пойа:

$$\rho^{*}=\sup\left\{p:\limsup_{r,\,B\to\infty}\frac{T(Br)}{B^{p}T(r)}=\infty\right\}; \qquad (2.3$$

$$\rho_{*}=\inf\left\{p:\liminf_{r,\,B\to\infty}\frac{T(Br)}{B^{p}T(r)}=0\right\}. \qquad (2.4$$

праведливы **неравенства $\rho_* \leqslant \rho \leqslant \rho^*$. Здесь и далее $\rho$ означает** жний порядок функции $f$. Далее мы увидим, что он совпадает порядком. Из условия теоремы следует, что $\rho_* < \infty$. Для любого $[\rho_*, \rho^*]$ существует последовательность $r_j \to \infty$ пиков Пойа порядка $\lambda$ [7]. Это означает, что для некоторой последовательности $\to 0$ выполняется

$$T(rr_j) \leqslant (1+\varepsilon_j)\, r^{\lambda}\, T(r_j), \quad \varepsilon_j \leqslant r \leqslant \varepsilon_j^{-1}. \tag{2.5}$$

фиксируем произвольное $\lambda \in [\rho_*, \rho^*]$ и последовательность $r_j$ со ойством (2.5).

Рассмотрим $\delta$-субгармонические функции

$$v_a = \log\frac{1}{|f-a|}, \quad a \in S$$

иссовскими зарядами $\nu_a$. Определим операторы $A_j$, действующие функцию $v$ по правилу $A_j v(z) = v(r_j z)/T(r_j)$ и на заряд $\nu$ — по равилу $A_j \nu(E) = \nu(r_j E)/T(r_j)$, $E \subset \boldsymbol{C}$. Очевидно, что так определенные операторы коммутируют с оператором Лапласа, т. е. функция имеет заряд $A_j\nu$. Согласно теореме Андерсона — Бернстейна [8] условия (2.5) вытекает, что семейства $\delta$-субгармонических функций $v_a\}_{j=1}^{\infty}$ относительно компактны в следующем смысле. Можно рать подпоследовательность пиков Пойа (которую мы снова обоим через $r_j$) так, чтобы выполнялось

$$A_j v_a \to u_a \ \textbf{(2.6)}; \quad A_j \nu_a \to \mu_a, \ a \in S, \ j \to \infty \ \textbf{(2.7)},$$

$u_a$ — некоторые $\delta$-субгармонические функции с риссовскими зарями $\mu_a$. Сходимость в (2.6) имеет место в $L^1_{\text{loc}}$, т. е. в среднем площади на каждом компакте, а также в среднем по угловой е на каждой окружности. Сходимость зарядов в (2.7) слабая.

Из (2.2) следует, что

$$u_a \geqslant 0, \quad a \in S. \tag{2.8}$$

кажем, что выполняется (1.3). Для любых комплексных чисел $a$, $b$ справедливо неравенство

$$|x-a| \cdot |x-b| \geqslant \frac{|a-b|}{2} \min\{|x-a|, |x-b|\}.$$

сюда следует, что при $a \neq b$; $a$, $b \in S$ выполняется

$$v_a + v_b \leqslant v_a \vee v_b + \log|a-b|^{-1} + \log 2.$$

именяя оператор $A_j$ и устремляя $j$ к $\infty$, получаем с учетом (1.1), что $+ u_b \leqslant u_a \vee u_b$ при $a \neq b$. Это значит, что в каждой точке не лее, чем одна из функций $u_a$ отлична от нуля. Таким образом, нкции $u_a$ удовлетворяют условию (1.3) т. е.

$$\sum_{a \in S} u_a = \bigvee_{a \in S} u_a. \tag{2.9}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\, d\theta = \lim_{j\to\infty} \frac{m(rr_j, 0, f-a)}{T(r_j)}. \tag{2.10}$$

Отсюда и из (2.5) вытекает

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\,d\theta \leqslant r^\lambda,\ 0 \leqslant r < \infty, \tag{2.11}$$

в частности, с учетом (2.8) получаем

$$u_a(0) = 0,\ a \in S. \tag{2.12}$$

Для любого борелевского $\sigma$-конечного заряда $\alpha$ в плоскости полагаем $n(r,\ \alpha) = \alpha(\{z;\ |z| \leqslant r\})$,

$$N(r,\ \alpha) = \int_0^r n(t,\ \alpha)\frac{dt}{t},$$

если интеграл сходится абсолютно. Пусть $\nu(E)$ — количество полюсов функции $f$ с учетом кратности на множестве $E \subset \boldsymbol{C}$. Тогда $\nu$ — (неотрицательная) боролевская $\sigma$-конечная мера.

$$N(r,\ \nu) = N(r,\ f) \sim T(r),\ r \to \infty. \tag{2.13}$$

В силу (2.5) выполняется

$$N(rr_j,\ \nu) \leqslant 2r^\lambda T(r_j),\ \varepsilon_j \leqslant r \leqslant \varepsilon_j^{-1}, \tag{2.14}$$

откуда

$$n(rr_j,\ \nu) \leqslant 2e^\lambda r^\lambda T(r_j),\ \varepsilon_j/e \leqslant r \leqslant (e\varepsilon_j)^{-1}. \tag*{(2.1}$$

Условие (2.15) означает, что семейство мер $\{A_j\nu\}$ равномерно огр ничено на компактах, поэтому, выбирая, если нужно подпоследов тельность пиков Пойа, можно считать, что

$$A_j\nu \to \mu \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Из (2.15) следует также

$$n(r,\ \mu) \leqslant 2e^\lambda r^\lambda,\ 0 \leqslant r < \infty. \tag{2.17}$$

Покажем, что

$$N(r, A_j\nu) \to N(r,\ \mu),\ j \to \infty,\ 0 \leqslant r < \infty. \tag{2.18}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Имеем

$$|N(r,\ A_j\nu) - N(r,\ \mu)| \leqslant \int_0^\varepsilon \frac{n(t,\ \mu)}{t}dt + \int_0^\varepsilon \frac{n(t,\ A_j\nu)}{t}dt +$$

$$+\left|\int_\varepsilon^r (n(t,\ A_j\nu) - n(t,\ \mu))\frac{dt}{t}\right|.$$

Первое слагаемое не превосходит $2e^\lambda\lambda^{-1}\varepsilon^\lambda$ в силу (2.17), второе слагаемое равно

$$N(\varepsilon,\ A_j\nu) = N(r_j\varepsilon,\ \nu)/T(r_j) \leqslant 2\varepsilon^\lambda$$

в силу (2.14), а третье слагаемое стремится к нулю при $j \to \infty$ в силу слабой сходимости (2.16). Это доказывает соотношение (2.18).

Пусть теперь $\varkappa_a(E)$ — количество полюсов функции $a \in S$ (с уче- м кратности) на множестве $E \subset \mathbf{C}$. Ясно, что

$$\nu_a \leqslant \nu + \varkappa_a, \ a \in S. \tag{2.19}$$

другой стороны, из (1.1) и (2.5) легко следует, что $A_j \varkappa_a \to 0$ при $\to \infty$. Применяя оператор $A_j$ к неравенству (2.19) и переходя пределу при $j \to \infty$, получим, учитывая (2.7) и (2.16), что $\mu_a \leqslant \mu$. оскольку выполняется (2.9), то применима теорема 2, и мы полу- ем

$$\sum_{a \in S} \mu_a \leqslant 2 \bigvee_{a \in S} \mu_a \leqslant 2\mu. \tag{2.20}$$

Используем теперь условие (1.2). Зафиксируем произвольно алое $\varepsilon > 0$ и выберем конечное подмножество $S' \subset S$ такое, что

$$\sum_{a \in S'} \delta(a, f) \geqslant 2 - \varepsilon.$$

еем, учитывая (2.13),

$$\sum_{a \in S'} m(rr_j, 0, f - a) \geqslant (2 - 2\varepsilon) T(rr_j) \geqslant (2 - 3\varepsilon) N(rr_j, \nu)$$

фиксированном $r$ и $j \to \infty$. Деля на $T(r_j)$ и переходя к пределу четом (2.10) и (2.18), получаем

$$\sum_{a \in S'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\, d\theta \geqslant (2 - 3\varepsilon) N(r, \mu).$$

другой стороны, формула Иенсена и (2.12) дают

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\, d\theta = N(r, \mu_a).$$

аким образом,

$$\sum_{a \in S} N(r, \mu_a) \geqslant \sum_{a \in S'} N(r, \mu_a) \geqslant (2 - 3\varepsilon) N(r, \mu).$$

стремляя $\varepsilon$ к нулю, получаем

$$\sum_{a \in S} N(r, \mu_a) \geqslant 2N(r, \mu).$$

месте с (2.20) это дает

$$\sum_{a \in S} \mu_a = 2 \bigvee_{a \in S} \mu_a = 2\mu. \tag{2.21}$$

Покажем теперь, что все функции $u_a$ субгармонические и непре- ывные. Прежде всего, функция $w = \sum_{a \in S} u_a$ субгармоническая, так ак в силу (2.21) ее риссовский заряд равен $2\mu \geqslant 0$. Далее, из 2.21) следует, что $\mu \geqslant \mu_a$ для любого $a \in S$, поэтому функция $w_a = w - 2u_a$ субгармоническая. Легко видеть, что $u_a(z) > 0$ тогда и олько тогда, когда $w_a(z) < 0$. Поскольку $w_a$ полунепрерывна сверху, ножество $D_a = \{z : u_a(z) > 0\}$ открыто. Из принципа максимума, рименного к функции $w_a$ следует, что все связные компоненты множества $D_a$ односвязны. На этом множестве $D_a$ выполняется $u_b(z)\equiv 0$ для всех $b\neq a$, поэтому $\mu_b|_{D_a}=0$, и тогда из (2.21) следует, что $\mu_a|_{D_a}=0$. Таким образом, функция $u_a\geqslant 0$ гармоническая в $D_a$ и равна 0 вне $D_a$. Отсюда следует, что она субгармоническая и непрерывная.

Из субгармонической версии теоремы Данжуа — Карлемана — Альфорса [9] теперь вытекает, что множество $S$ конечно (и card $S\leqslant 2\lambda$). Более того, общее количество связных компонент множеств $D_a$ тоже конечно. Теперь применима следующая Основная лемма, доказанная в работе [2, часть II].

Лемма 1. *Пусть $D_a$ — попарно непересекающиеся открытые множества, состоящие из конечного числа односвязных областей, $u_a\not\equiv 0$ — неотрицательные субгармонические функции, носители которых содержатся в $D_a$, соответственно. Пусть риссовские меры $\mu_a$ этих функций удовлетворяют условию (2.21) и кроме того выполняется*

$$\sum_{a\in S}\int\limits_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\,d\theta=\begin{cases}O(r^{\lambda+\varepsilon}), & r\to\infty;\\ O(r^{\lambda-\varepsilon}), & r\to 0,\end{cases} \tag{2.22}$$

*где* $0<\varepsilon<1/4$, card $S<\infty$. *Тогда существует натуральное число* $n\geqslant 2$, $|n/2-\lambda|<1/2$ *и число* $\theta_0\in[0,\,2\pi]$, *такие что*

$$w(re^{i\theta})\overset{\text{def}}{=}\sum_{a\in S}u_a(re^{i\theta})=cr^{n/2}\left|\cos\frac{n}{2}(\theta-\theta_0)\right|. \tag*{(2.2}$$

Функции $u_a$ удовлетворяют условиям леммы 1 ((2.22) выполняется с $\varepsilon=0$ в силу (2.11)). Поэтому справедливо (2.23). Определим постоянную $c$. Для этого положим в (2.23) $r=1$ и проинтегрируем по $\theta$:

$$c=\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}w(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Далее применяя последовательно формулу Иенсена и соотношения (2.21), (2.18) и (2.13), получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}w(e^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{a\in S}\int\limits_0^{2\pi}u_a(e^{i\theta})\,d\theta=\sum_{a\in S}N(1,\ \mu_a)=$$
$$=2N(1,\ \mu)=2\lim_{j\to\infty}N(1,\ A_j\nu)=2\lim_{j\to\infty}\frac{N(r_j,\ \nu)}{T(r_j)}=2,$$

так что $c=\pi$.

Подведем итог. Обозначим через $W_n$ множество всех субгармонических функций вида

$$w(re^{i\theta},\ \theta_0)=\pi r^{n/2}\left|\cos\frac{n}{2}(\theta-\theta_0)\right|,\ 0\leqslant\theta_0<2\pi.$$

Мы доказали следующее

**Предложение 1.** *Пусть $f$ — мероморфная функция, удовлетво- ющая условию (1.2), а последовательность $r_j$ обладает свойством 5). Тогда множество $S$ конечно и для некоторой подпоследова- льности чисел $j$ выполняется (2.6), причем*

$$w = \sum_{a \in S} u_a \in W_n.$$

Из сравнения (2.23) и (2.11) следует, что $2\lambda = n \in \boldsymbol{N}$. Поскольку можные порядки $\lambda$ пиков Пойа заполняют отрезок $[\rho_*, \rho^*]$, то т отрезок должен вырождаться в точку, т. е. $\rho_* = \rho^* = \rho = n/2$. определения чисел $\rho_*$ и $\rho^*$, (2.3), (2.4), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $r_0 > 1$ и $t_0 > 1$, что

$$T(tr) \leqslant t^{\rho+\varepsilon} T(r), \ t > t_0, \ r > r_0; \tag{2.24}$$

$$T(tr) \leqslant t^{\rho-\varepsilon} T(r), \ t < t_0^{-1}, \ tr > r_0. \tag{2.25}$$

свойств вполне достаточно, чтобы заменить (2.5) в доказатель- предложения 1.

**Предложение 2.** *Пусть $f$ — мероморфная функция, удовлетво- щая условиям (1.2), (2.24) и (2.25). Для любой последователь- ти $r_j \to \infty$ определим операторы $A_j$, как в начале доказатель- . Тогда справедливо $A_j[\log|f-a|^{-1}] \to u_a$, где $w = \sum u_a \in W_n$.*

Это предложение 2 доказывается так же, как предложение 1 со ующими изменениями. Применимость теоремы Андерсона — стейна для доказательства (2.6), (2.7) обеспечивается условиями ), (2.25) вместо (2.5). Вместо (2.11) из (2.24), (2.25) получаем

$$\int_0^{2\pi} u_a(re^{i\theta})\, d\theta \leqslant \begin{cases} r^{\rho+\varepsilon}, & r > t_0; \\ r^{\rho-\varepsilon}, & r < t_0^{-1}. \end{cases} \tag{2.26}$$

суждение, доказывающее (2.16) и (2.18), подвергается очевидным енениям. Например, роль соотношения (2.17) теперь играет авенство

$$n(r, \mu) \leqslant \begin{cases} 2e^{\rho-\varepsilon} r^{\rho-\varepsilon}, & r < (t_0 e)^{-1}; \\ 2e^{\rho+\varepsilon} r^{\rho+\varepsilon}, & r > t_0. \end{cases}$$

Наконец, при применении леммы 1 пользуемся (2.26) вместо 11).

Из предложения 2 с учетом (2.13) вытекает, что

$$T(cr)/T(r) \sim N(cr, f)/N(r, f) \to c^\rho$$

ри $r \to \infty$ равномерно относительно $c \in [1, 2]$. Полагая $T(r) = r^\rho l_1(r)$, получим $l_1(cr) \sim l_1(r)$, что доказывает утверждение 4 оремы 1. Утверждение 1 доказано выше. Докажем утверждение 5, которого следуют утверждения 2, 3.

Заметим, что $L^1_{\text{loc}}$ — метризуемое пространство. Обозначим через st какую-нибудь метрику в нем. Множество $W_n$ — компакт в $L^1_{\text{loc}}$. ложим

$$v_t(z) = \frac{1}{t^\rho l_1(t)} \sum_{a \in S} \log \frac{1}{|(f-a)(tz)|}$$

и покажем, что

$$\operatorname{dist}(v_t,\ W_n) \to 0,\ t \to \infty. \tag{2.27}$$

Пусть (2.27) не выполняется. Тогда существует последовательность $t_j \to \infty$ такая, что $\operatorname{dist}(v_{t_j},\ W_n) \geqslant \varepsilon > 0$. Взяв эту последовательность в качестве $r_j$, применим предложение 2. Получим, что для некоторой подпоследовательности $v_{t_j} \to w$, где $w \in W_n$ — противоречие. Соотношение (2.27) доказано.

Пусть $w^t \in W_n$ — ближайший элемент к $v_t$. Покажем, что

$$\operatorname{dist}(w^t,\ w^{ct}) \to 0,\ t \to \infty, \tag{2.28}$$

равномерно относительно $c \in [1,\ 2]$. Пусть это не так. Тогда

$$\operatorname{dist}(w^{t_j},\ w^{c_j t_j}) \geqslant \varepsilon > 0 \tag{2.29}$$

для некоторых последовательностей $t_j \to \infty$ и $c_j \in [1,\ 2]$ Имеем

$$w^{c_j t_j}(z) = v_{c_j t_j}(z) + o(1) = c_j^{-\rho} v_{t_j}(c_j z) + o(1) =$$
$$= c_j^{-\rho} w^{t_j}(c_j z) + o(1) = w^{t_j}(z) + o(1),$$

так как $c^{-\rho} w(cz) = w(z)$ для любых $w \in W_n$ и $c > 0$. Получено противоречие с (2.29), которое доказывает (2.28).

Если $w^t = w(.\,,\ \varphi_0(t))$, то из (2.28) следует, что

$$|\exp(i\varphi_0(ct)) - \exp(i\varphi_0(t))| \to 0,\ t \to \infty,$$

равномерно относительно $c \in [1,\ 2]$. Учитывая (2.27), можно выбрать непрерывную функцию $\theta_0(t)$ так, чтобы выполнялось

$$v_t = w(.\,,\ \theta_0(t)) + o(1),\ \theta_0(ct) = \theta_0(t) + o(1),\ t \to \infty.$$

Отсюда с помощью теоремы В. С. Азарина о сходимости субгармонических функций по 1-мере [10] получаем утверждение 5).

3. Доказательство теоремы 2. Идея этого доказательства проста. Условие (1.3) означает, что функции $u_k$ имеют непересекающиеся носители, т. е. в каждой точке не более, чем одна из этих функций отлична от нуля. Отсюда мы выведем, что заряды $\mu_k$ имеют борелевские носители, которые пересекаются не более, чем по два, что немедленно влечет (1.4).

Реализация этой идеи сталкивается с некоторыми техническими трудностями, связанными с возможной разрывностью функций $u_k$ и сложным устройством множеств $\{z : u_k(z) > 0\}$.

Заметим, что теорему 2 достаточно доказать для конечного $\omega$. В самом деле из (1.3) следует такое же свойство для любого конечного набора индексов $k$. Если же доказано (1.4) для любого конечного набора индексов, то соотношение (1.4) в общем случае получается предельным переходом с учетом того, что $\mu_k \leqslant \mu$. Далее считаем, что $q = \omega < \infty$.

Приведем эквивалентную форму теоремы 2, представляющую самостоятельный интерес.

**Теорема 2′.** *Пусть* $w_1, \ldots, w_q$ — *субгармонические функции,* $\geqslant 2$, $w$ — *их верхняя огибающая. Предположим, что для любых* $\neq j$ *справедливо*

$$w = w_i \vee w_j. \tag{3.1}$$

*огда функция*

$$h = w + \bigwedge_{k=1}^{q} w_k = \sum_{k=1}^{q} w_k - (q-2)\, w \tag{3.2}$$

*убгармоническая.*

Чтобы вывести теорему 2′ из теоремы 2, положим $u_k = w - w_k$ обозначим через $\mu$ риссовскую меру функции $w$. Поскольку функции $w_k$ субгармонические, имеем $\mu \geqslant \mu_k$, а в силу (1.4) $\Sigma\, \mu_k \leqslant 2\mu$, е. функция $2w - \sum u_k = (q-2)\, w - \sum w_k = h$ субгармоническая.

Теперь выведем теорему 2 из теоремы 2′. Положим $\mu = \bigvee \mu_k$, $= \mu - \mu_k \geqslant 0$. Пусть $w$ есть $\delta$-субгармоническая функция с риссовским зарядом $\mu$. Положим $w_k = w - u_k$. Функции $w_k$ субгармонические, так как их риссовские заряды суть $\nu_k$. Из (1.3) следует (3.1). частности, $w$ — субгармоническая функция как верхняя огибающая гармонических. Наконец, из (3.2) вытекает

$$0 \leqslant \sum \nu_k - (q-2)\, \mu = \sum (\mu - \mu_k) - (q-2)\, \mu = 2\mu - \sum \mu_k,$$

то есть не что иное, как (1.4).

Формулировка теоремы 2′ имеет важное преимущество. Она зволяет свести дело к случаю непрерывных функций.

Для любой субгармонической функции $v$ положим $v^\varepsilon(z) = \max \times$ $\{v(\zeta) : |\zeta - z| \leqslant \varepsilon\}$. Легко видеть, что функция $v^\varepsilon$ всегда непрерывна и субгармонична. Кроме того, операция $v \to v^\varepsilon$ коммутирует взятием верхней огибающей. Предположим, что теорема 2′ доказана для непрерывных субгармонических функций. Пусть $w_1, \ldots, w_q$ — оизвольные субгармонические функции со свойством (3.1). Тогда $= w_i^\varepsilon \vee w_j^\varepsilon$ для всех $i \neq j$, и мы получаем, что функция $h_\varepsilon = w^\varepsilon +$ $\bigwedge_{k=1}^{q} w_k^\varepsilon$ субгармонична. Если $\varepsilon \to 0$, то $h_\varepsilon \to h$, монотонно убывая. оэтому $h$ — субгармоническая функция. Этот способ сглаживания вторам указал В. С. Азарин. Таким образом, теорему 2 достаточно казать для непрерывных функций.

Введем некоторые обозначения. Пусть $D$ — ограниченное открытое ножество. Точка $z_0 \in \boldsymbol{C} \setminus D$ называется достижимой из $D$, если уществует кривая $\gamma(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1$ такая, что $\gamma(t) \in D$, $0 < t < 1$ $\gamma(1) = z_0$. Множество недостижимых из $D$ точек борелевское [11]. пределим функцию $G_D(z, \zeta)$ следующим образом: если $z$ и $\zeta$ содержатся в одной связной компоненте множества $D$, то $G_D(z, \zeta)$ — ункция Грина этой компоненты с полюсом в точке $\zeta$; в противном лучае $G_D(z, \zeta) = 0$. Так определенная функция $z \to G_D(z, \zeta)$ субармонична в $\boldsymbol{C} \setminus \{\zeta\}$. Ее риссовская мера $\omega_D(\zeta, .)$ называется гармоической мерой относительно $D$ в точке $\zeta$.

**Лемма 2.** *Пусть $E^*$ — множество недостижимых из $D$ точек. Тогда $\omega_D(\zeta, E^*) = 0$, $\zeta \in D$.*

Этот результат известен (см., например, [12]). Самое наглядное доказательство получается с помощью вероятностной интерпретации гармонической меры: $\omega_D(\zeta, E)$ — это вероятность того, что броуновская частица, выходящая из точки $\zeta$, впервые покинет $D$ через множество $E$.

**Лемма 3.** *Пусть $v$ — непрерывная $\delta$-субгармоническая функция, $D = \{z : v(z) \neq 0\}$, $E^*$ — множество точек, недостижимых из $D$. Если $\nu$ — риссовский заряд функции $v$, то его сужение на множество $E^*$ равно нулю: $\nu|_{E^*} = 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать лемму для финитной функции $v$, потому что для любого $R > 0$ и любой $\delta$-субгармонической функции $v$ существует финитная $\delta$-субгармоническая функция $v_R$ такая, что $v(z) = v_R(z)$, $|z| < R$.

Далее, можно считать, что $D$ — область. В самом деле, если $\{D_j\}$ — все связные компоненты множества $D$, то положим

$$v_j(z) = \begin{cases} v(z), & z \in D_j \\ 0, & z \notin D_j. \end{cases}$$

Доказав лемму для функций $v_j$, мы докажем ее и в общем случае.

Итак, пусть $v$ — финитная непрерывная $\delta$-субгармоническая функция и $D = \{z : v(z) \neq 0\}$ — область. Тогда $v$ — потенциал Грина,

$$v(z) = -\int_D G_D(z, \zeta)\, d\nu_\zeta, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{3.3}$$

(Представление (3.3) справедливо всюду в $\mathbf{C}$ в силу нашего соглашения о функции Грина). Далее,

$$G_D(z, \zeta) = \int_{\mathbf{C}} \log|z - t|\, \omega_D(\zeta, dt) - \log|z - \zeta|.$$

Подставляя это выражение в (3.3) и применяя теорему Фубини, получаем

$$v(z) = \int_D \log|z - \zeta|\, d\nu_\zeta - \int_{\mathbf{C}} \log|z - \zeta|\, d\alpha_\zeta, \tag{3.4}$$

где заряд $\alpha$ определен так:

$$\alpha(E) = \int_D \omega_D(\zeta, E)\, d\nu_\zeta, \quad E \subset \mathbf{C}.$$

В частности, $\alpha(E) = 0$ для любого $E \subset E^*$ в силу леммы 2. Теперь из представления (3.4) видим, что сужение риссовского заряда функции $v$ на $E^*$ равно нулю. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть $\{D_j\}_{j=1}^q$ — попарно непересекающиеся открытые* *ножества в* $\mathbf{C}$. *Тогда множество точек, достижимых одновременно из трех различных* $D_j$, *не более, чем счетно.*

**Доказательство.** Достаточно показать следующее: если $B_1$, $_2$, $B_3$ — попарно непересекающиеся области, то множество точек, остижимых одновременно из всех трех областей $B_j$, состоит не олее, чем из двух точек. Пусть это не так. Тогда существуют ри различные точки $z_1$, $z_2$, $z_3$, достижимые из $B_1$, $B_2$, $B_3$. Выберем о точке $w_i \in B_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Каждую точку $w_i$ можно соединить ремя попарно непересекающимися кривыми, лежащими в $B_i$, с точками $z_1$, $z_2$, $z_3$. Объединение всех этих кривых и точек $w_i$, $z_i$ образует граф $K_{3,3}$, вложенный в плоскость, что, как известно, невозможно. ротиворечие доказывает лемму.

Теперь закончим доказательство теоремы 2. Пусть $D_k = \{z : u_k(z) > 0\}$, $D_k^*$ — объединение $D_k$ с множеством всех точек, достижимых з $D_k$. Тогда по лемме 3 заряд $\mu_k$ сосредоточен на $D_k^*$, т. е. $\mu_k(E) = 0$ ля любого $E \subset \mathbf{C} \setminus D_k^*$. По лемме 4 множество $X$ точек, содержащихся в трех и более $D_k^*$, не более, чем счетно. Поскольку $u_k$ епрерывны, $\mu_k(E) = 0$ для всех $E \subset X$. Таким образом, заряды имеют борелевские носители $D_k^* \setminus X$, пересекающиеся не более, м по два. Отсюда с помощью неравенства $\nu_1 + \nu_2 \leqslant 2(\nu_1 \vee \nu_2)$, аведливого для любых зарядов, вытекает (1.4). Теорема доказана.

сок литературы: 1. *Drasin D.* Proof of a conjecture of F. Nevanlinna concerning function which have deficiency sum two//Acta Math. 1987. **158**, № 1, 2. P. –94. 2. *Еременко А. Э.* Новое доказательство теоремы Дрейсина о мероморфных нкциях конечного порядка с максимальной суммой дефектов//Теория функций, нкцион. анализ и их прил. 1989. Ч. I. Вып. 51. С. 107—116; ч. II. Вып. 52, 69—78. 3. *Osgood Ch.* Sometimes. effective Thue—Siegel—Roth—Schmidt's—vanlinna bounds, or better//J. Number Theory. 1985. **21.** P. 347—389. 4. *Steinetz N.* Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes . Reine und Angew. Math. 1986. **B. 368.** S. 134—141. 5. *Qingzhong Li, Yasng Ye.* Sum of deficiency of deficient function and F. Nevanlinna's conjecture//ntemporary Math. 1985. **48.** P. 21—63. 6. *Еременко А. Э., Содин М. Л.* орая основная теорема теории распределения значений мероморфных кривых ля нелинейных дивизоров//Докл. АН СССР. 1990 Т. С.23. 7. *Drasin D., Shea D.* lya peaks and oscillation of positive functions//Proc. Amer. Math. Soc. 1972. . P. 403—411. 8. *Anderson J. M., Baernstein. A* The size of the set on which meromorphic function is large //Proc. London Math. Soc. 1978. **36.** P. 518—539. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М., 1980. 304 с. 10. *зарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций//Мат. борник. 1979. **108**, № 2. С. 147—167. 11. *Mazurkiewicz S.* Uber erreichbare unkte//Fund. Math. 1936. B 26. S. 150—155. 12. *Brelot M., Choquet G.* Espaces lignes de Green//Ann. Inst. Fourier. 1952. 3. P. 199—263.

*Поступила в редколлегию 10.07.89*

УДК 517.982

М. И. ОСТРОВСКИЙ

# К ВОПРОСУ О РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ СУПЕРПОЗИЦИЙ ОБРАТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства. Через $L_0(X, Y)$ обозначим множество линейных непрерывных инъективных операторов, действующих из $X$ в $Y$. Для оператора $A \in L_0(X, Y)$ существует обратный $A^{-1}$, который является замкнутым линейным, но, вообще говоря, не непрерывным оператором $A^{-1}: \operatorname{im} A \to X$. В теории некорректных задач среди таких операторов выделяют подкласс регуляризуемых [1].

Напомним, что подпространство $M \subset X^*$ (не обязательно замкнутое) называется нормирующим, если

$$\exists\lambda > 0\ \forall x \in X\ \exists f \in M\ (\|f\| = 1) \wedge (|f(x)| \geqslant \lambda \|x\|).$$

Если пространство $X$ сепарабельно и $A \in L_0(X, Y)$, то регуляризуемость оператора $A^{-1}$ эквивалентна [2] тому, что подпространство $A^*Y^* \subset X^*$ является нормирующим. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением сепарабельных банаховых пространств (СБП).

Известно [3, 4], что, вообще говоря, суперпозиция регуляризуемых операторов не обязана быть регуляризуемой. Настоящая работа посвящена исследованию вопроса: для каких троек $(X, Y, Z)$ бесконечномерных СБП найдутся такие операторы $A \in L_0(X, Y)$ и $B \in L_0(Y, Z)$, что $A^{-1}$ и $B^{-1}$ регуляризуемы, а $(BA)^{-1}$ — нет? То, что для тройки $(X, Y, Z)$ такие операторы существуют, будем записывать так: $(X, Y, Z) \notin RS$.

Будем пользоваться без пояснений некоторыми понятиями из [5, 6].

**Предложение 1.** *Для того, чтобы* $(X, Y, Z) \notin RS$, *необходимо и достаточно, чтобы нашлись такой оператор* $A \in L_0(X, Y)$ *и такое нормирующее подпространство* $M \subset Y^*$, *что* $A^*Y^*$ *— нормирующее подпространство в* $X^*$, *а* $A^*M$ *— нет.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $(X, Y, Z) \notin RS$, а $A \in L_0(X, Y)$ и $B \in L_0(Y, Z)$ — соответствующие операторы. Положим $M = B^*Z^*$. Тогда $M \subset Y^*$ и $A^*Y^* \subset X^*$ — нормирующие подпространства, так как $A^{-1}$ и $B^{-1}$ регуляризуемы, а $A^*M = (BA)^*Z^*$ — нет, так как $(BA)^{-1}$ не регуляризуем.

*Достаточность.* Выделим в $Z$ минимальную последовательность $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ (напомним, что мы рассматриваем только бесконечномерные $Z$), а в $Y$ такую полную минимальную систему $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, что ее биортогональные функционалы $\{y_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ содержатся в $M$ и их линейная оболочка $N$ является нормирующим подпространством в $Y^*$ [5, с. 43]. Введем оператор $B \in L_0(Y, Z)$ равенством

$$B(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^*(y)\, z_i}{2^i \|y_i^*\| \|z_i\|}.$$

Легко видеть, что $N \subset B^*Z^* \subset \mathrm{cl}\,(M)$. Следовательно, оператор $^{-1}$ регуляризуем. Регуляризуемость оператора $A^{-1}$ следует из того, то подпространство $A^*Y^* \subset X^*$ — нормирующее. Оператор $(BA)^{-1}$ е регуляризуем, так как $(BA)^*Z^* = A^*(B^*Z^*) \subset \mathrm{cl}\,(A^*M)$, а подространство $A^*M$ не является нормирующим. Следовательно, $(X,$ $, Z) \notin RS$.

Следствие 1. *Если* $(X, Y, Z) \notin RS$ *для некоторого бесконеч-* *омерного СБП* $Z$, *то* $(X, Y, Z) \notin RS$ *для произвольного бесконечно-* *ерного СБП* $Z$.

Следствие 2. *Необходимым условием для* $(X, Y, Z) \notin RS$ *вляется неквазирефлексивность пространства* $X$.

Действительно, если $A$ и $M$ удовлетворяют условиям предложе- ия 1, то $A^*M$ — тотальное подпространство в $X^*$, обязанное быть ормирующим для квазирефлексивного $X$.

Следствие 3. *Необходимым условием для* $(X, Y, Z) \notin RS$ *вляется существование в* $Y^*$ *замкнутых нормирующих подпро-* *транств бесконечной коразмерности*,

Действительно, пусть $(X, Y, Z) \in RS$. Тогда найдутся подпро- анство $M \subset Y^*$ и оператор $A \notin L_0(X, Y)$, удовлетворяющие усло- м предложения 1. Легко видеть, что можно считать подпространство замкнутым. Тогда $A^*M$ является тотальным подпространством ечной коразмерности в нормирующем подпространстве $A^*Y^* \subset X^*$. естно [4], что такое подпространство обязано быть нормирующим.

Ниже мы увидим, что совокупность условий из следствий 2, 3 является достаточной для $(X, Y, Z) \notin RS$.

Для тотального подпространства $M \subset X^*$ через $X_M$ обозначим олнение пространства $X$ по норме

$$\| x \|_M = \sup \{ | f(x) | : f \in M, \quad \| f \| = 1 \}.$$

Слабым* секвенциальным замыканием $M_{(1)}$ множества $M \subset X^*$ ывается множество всех пределов слабо* сходящихся последо- тельностей из $M$; $M_{(2)}$ определяется как $(M_{(1)})_{(1)}$.

**Предложение 2.** *Для того, чтобы* $(X, Y, Z) \notin RS$, *достаточно, обы в* $X$ *нашлось такое дополняемое подпространство* $U$, *что я некоторого* $N \subset U^*$, *удовлетворяющего условию*

$$N_{(1)} \neq N_{(2)} = U^*, \tag{1}$$

*ространство* $U_N$ *было изоморфно некоторому подпространству в* $Y$, *и при этом* $\dim(X/U) \leqslant \dim(Y/W)$.

Доказательство. Ясно, что $N$, рассматриваемое как подпро- транство в $(U_N)^*$, является нормирующим. Выберем в пространстве полную минимальную систему $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, биортогональные функ- ионалы которой содержатся в $N$ и натягивают нормирующее под- остранство в $(U_N)^*$. Будем отождествлять $U_N$ и $W$. Воспользо- вшись теоремой о расширении минимальных систем с нормирующими опряженными [7], находим векторы $\{y_i\}_{i=1}^{k}$ (где $k = \dim Y/U_N$) такие, то система $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{y_i\}_{i=1}^{k}$ является полной минимальной системой $Y$, а ее биортогональные функционалы натягивают нормирующее подпространство $M$ в $Y^*$. Ясно, что для любого $y^* \in M$ имеем $y^*|_{U_N} \in \mathrm{cl}\,(N)$.

По условию пространство $X$ можно представить в виде прямой суммы $X = U \oplus V$. В соответствии с этим векторы пространства $X$ будем записывать в виде $(u, v)$, где $u \in U$, $v \in V$. Выберем в пространстве $V$ полную минимальную систему $\{v_i\}_{i=1}^{m}$ (где $m = \dim X/U$), биортогональные функционалы $\{v_i^*\}_{i=1}^{m}$ которой натягивают нормирующее подпространство в $V^*$. Оператор естественного вложения $U \to U_N$ обозначим через $C$.

Введем оператор $A \in L_0(X, Y)$ равенством

$$A(u, v) = Cu + \sum_{i=1}^{m} \frac{v_i^*(v)\, y_i}{2^i \| v_i^* \| \| y_i \|}.$$

То, что подпространство $A^*M \subset X^*$ не является нормирующим, вытекает из того, что $A^*M|_U$ принадлежит $\mathrm{cl}\,(N)$, а подпространство $N \subset U^*$ не является нормирующим в силу условия (1) [6, с. 47].

Остается показать, что $A^*Y^*$ — нормирующее подпространство в $X^*$. Имеем

$$(A^*y_j^*)(u, v) = y_j^*\left(Cu + \sum_{i=1}^{m} \frac{v_i^*(v)\, y_i}{2^i \| v_i^* \| \| y_i \|}\right) = \frac{v_j^*(v)}{2^j \| v_j^* \| \| y_j \|}.$$

Следовательно,

$$(0,\ v_j^*) \in A^*Y^*.$$

Рассмотрим произвольный элемент $f^* \in N_{(1)}$. Из теоремы о биполяре следует, что $f^*$ является функционалом вида $C^*g^*$, где $g^* \in (U_N)^*$. Рассмотрим некоторое продолжение $\tilde{g}^*$ функционала $g^*$ на все $Y$. Имеем

$$A^*\tilde{g}^*(u, v) = \tilde{g}^*\left(Cu + \sum_{i=1}^{m} \frac{v_i^*(v)\, y_i}{2^i \| v_i^* \| \| y_i \|}\right) =$$

$$= \left(C^*g^*,\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\tilde{g}^*(y_i)\, v_i^*}{2^i \| v_i^* \| \| y_i \|}\right)(u, v).$$

Воспользовавшись (2), заключаем, что $(f^*, 0) \in \mathrm{cl}\,(A^*Y^*)$. Известно [6, с. 47], что из (1) вытекает: подпространство $N_{(1)} \subset U^*$ является нормирующим. Это в совокупности с (2) доказывает требуемое.

Многочисленные примеры применения этого предложения можно получить с помощью результатов [4, 8].

**Предложение 3.** *Условие дополняемости подпространства $U$ в предложении 2 нельзя опустить.*

Доказательство. Положим $X = C(0, 1)$, $Y = L_1(0, 1)$. По теореме Банаха — Мазура в $X$ найдется подпространство $U$, изометричное $L_1(0, 1)$. В [4] доказано, что в $(L_1(0, 1))^*$ найдется подпространство $N$, удовлетворяющее условию (1), для которого $(L_1(0, 1))_N$ изоморфно $L_1(0, 1)$ и, следовательно, подпространству бесконечно оразмерности в $Y$. Таким образом, все условия предложения 2, роме дополняемости $U$ в $X$, выполнены. В то же время известно , с. 57], что любой оператор из $C(0, 1)$ в $L_1(0, 1)$ слабо компакен, а необходимым условием для $(X, Y, Z) \notin RS$ является существование не слабо компактного оператора в $L_0(X, Y)$ [9].

*Замечание.* Нетрудно видеть, что этот пример доказывает недотаточность условий следствий 2, 3 для $(X, Y, Z) \notin RS$.

**Теорема.** *Условия предложения 2 не являются необходимыми для* $, Y, Z) \notin RS$, *даже если опустить условие дополняемости подространства* $U$.

**Предложение 4.** *Для любого неквазирефлексивного СБП* $X$ и *юбого бесконечномерного СБП* $Z$ *имеем* $(X, c_0, Z) \notin RS$.

Доказательство. В силу теоремы 2 из [10] в $X$ найдется кая нормированная базисная последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, что мноество

$$\{\| \sum_{k=i}^{p} x_{n_k+i} \|\}_{i=0,}^{\infty} {}_{p=i}^{\infty},$$

$n_k = k(k+1)/2$, является ограниченным. Воспользовавшись ветствующей теоремой о расширении минимальных систем [7], олняем последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ до полной минимальной нормованной системы $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \cup \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, биортогональные функционалы ${}_{k=0}^{\infty} \cup \{y_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ которой равномерно ограничены и натягивают норующее подпространство в $X^*$. Можно считать $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ бесконечной темой, так как в противном случае мы часть $x_k$ «переквалифицизали» бы в $y_i$. Перенумеруем векторы $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ и их биортогональные нкционалы в двойные последовательности $\{x_{ij}\}_{i, j=1}^{\infty}$ и $\{x_{ij}^*\}_{i, j=1}^{\infty}$ так, бы

$$\sup_{i, k} \| \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \| = C < \infty.$$

Орты пространства $c_0$ занумеруем в двойную последовательность ${}_{ij}\}_{i=1,}^{\infty} {}_{j=0}^{\infty}$. Зафиксируем последовательность чисел $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, для корых $b_i > 0$ и $\lim\limits_{i \to \infty} b_i = 0$.

Определим оператор $A \in L_0(X, c_0)$ равенством

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i^*(x) e_{i0} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij}^*(x) e_{ij}.$$

Это определение корректно в силу того, что система $\{y_i^*\} \cup \{x_{ij}^*\}$ раничена, а система $\{y_i\} \cup \{x_{ij}\}$ полна. Так как $A^*(e_{i0}^*) = b_i y_i^*$ и $(e_{ij}^*) = x_{ij}^*$ $(i, j \in N)$, а система $\{y_i^*\} \cup \{x_{ij}^*\}$ натягивает нормирующее дпространство в $X^*$, то $A^* l_1$ — нормирующее подпространство в $X^*$.

Положим $M = \lim \{e_{i0}^* + e_{ij}^*\}_{i=1,}^{\infty} {}_{j=1}^{\infty}$. Непосредственно проверяется, о $M$ — нормирующее подпространство в $c_0^*$. Пространство $A^*M$ — о линейная оболочка векторов $\{b_i y_i^* + x_{ij}^*\}_{i, j=1}^{\infty}$. Покажем, что оно является нормирующим. Действительно, пусть $x^* \in A^*M$, т. е.

$$x^* = \sum_{i,\, j=1}^{k} a_{ij} (b_i y_i^* + x_{ij}^*).$$

Тогда, с одной стороны,

$$\| x^* \| \geqslant | x^* ( \sum_{j=1}^{k} x_{ij}) / C | = | \sum_{j=1}^{k} a_{ij} |,$$

а, с другой стороны,

$$x^* (y_i) = b_i ( \sum_{j=1}^{k} a_{ij}).$$

Так как $\lim\limits_{i \to \infty} b_i = 0$, $A^*M$ — не нормирующее подпространство. Предложение доказано.

**Предложение 5** (Бессага—Пелчинский [5, с. 103]). *Если пространство $X^*$ содержит подпространство, изоморфное $c_0$, то пространство $X$ содержит подпространство, изоморфное $l_1$.*

Следствие. *Пусть $U$ — некоторое банахово пространство, $N \subset U^*$ — тотальное подпространство. Если $U_N$ содержит подпространство, изоморфное $c_0$, то $U^*$ содержит подпространство, изоморфное $l_1$.*

Доказательство. Пространство $N$, рассматриваемое как подпространство в $(U_N)^*$, является нормирующим. Следовательно, $U_N$ изоморфно подпространству в $N^*$. Воспользовавшись предложением 5, заключаем, что $N$, а следовательно, и $U^*$ содержат подпространства, изоморфные $l_1$.

Для завершения доказательства теоремы осталось привести пример такого неквазирефлексивного СБП $X$, что для любого подпространства $U \subset X$ пространство $U^*$ не содержит подпространств, изоморфных $l_1$. Таким является, например, $X = ( \sum\limits_{i=1}^{\infty} \oplus J)_2$ (где $J$ — пространство Джеймса [5, с. 25]).

**Список литературы:** 1. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач//Докл. АН СССР. 1963. **153**, №1. С. 49—52. 2. *Винокуров В. А., Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Измеримость и регуляризуемость отображений, обратных к непрерывным линейным операторам//Мат. заметки. 1979. **26**, №4. С. 583—591. 3. *Доманский Е. Н., Островский М. И.* О регуляризуемости обратных операторов к линейным инъекциям и их суперпозициям//Сиб. мат. журн. 1988. **29**, №3. С. 190—193. 4. *Островский М. И.* Пары регуляризуемых обратных линейных операторов с нерегуляризуемой суперпозицией//Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1989. Вып. 52. С. 78—88. 5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Berlin, 1977. **1**. 188 p. 6. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения. К., 1980. 216 с. Terenzi P. On the theory of fundamental norming bounded biorthogonal systems in Banach spaces//Trans. Amer, Math. Soc. 1987. **299**, №2. P. 497—511. 8. *Островский М. И.* О тотальных не нормирующих подпространствах сопряженного банахова пространства//Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1990. Вып. 53. С. 9. *Винокуров В. А., Доманский Е. Н., Менихес Л. Д., Пличко А. Н.* О некоторых проблемах линейной регуляризуемости//Докл. АН СССР. 1983. **270**, №1. С. 31—34. 10. Davis W. J., Johnson W. B. Basic sequences and norming subspaces in non—quasi—reflexive Banach spaces//Isr. J. Math. 1973. **14**. P. 353—367.

*Поступила в редколлегию 26.09.89*

**УДК 517.53**

В. П. МАНЖОЛОВСКИЙ

# ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ФУНКЦИЙ

1. В теории дифференциальных уравнений рассматривается функция

$$\{\varphi,\ x\} = \frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{2}{3}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2, \qquad (1)$$

называемая производной Шварца или шварцианом функции $\varphi(x)$.

Как показал А. Кэли, равенство

$$\left\{\frac{a\varphi+b}{c\varphi+d},\ x\right\} = \{\varphi,\ x\} \qquad (2)$$

выражает основное свойство производной Шварца, а именно, ее нвариантность указанного вида так, что она не меняется при замене ункции $\varphi$ на $\frac{a\varphi+b}{c\varphi+d}$, где приведенный вид преобразования

$$f = \frac{a\varphi+b}{c\varphi+d} \qquad (3)$$

зывается дробно-линейным.

2. Вместо производной Шварца (1) рассмотрим дифференциальное выражение

$$\Phi = k\frac{\zeta''}{\zeta} + l\frac{\zeta'''}{\zeta'} + p\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^2 + q\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2, \qquad (4)$$

в котором $k$, $l$, $p$ и $q$ — некоторые числа.

Функцию преобразования, играющую ту же роль, что и дробно-линейная для Шварца (3), запишем в виде

$$\zeta = f[\varphi(x)]. \qquad (5)$$

Тогда основное уравнение инвариантности функции (4) относительно преобразования (5) будет

$$\{f[\varphi(x)],\ x\}_{\Phi} = \{\varphi,\ x\}_{\Phi}, \qquad (6)$$

где $\varphi = \varphi(x)$.

Рассмотрим, при каких условиях функция (4) будет инвариантна относительно преобразования (5); определим вид преобразования и соответствующие значения постоянных $k$, $l$, $q$ и $p$.

Подставляя $\zeta$ из (5) в (4), находим функцию $\Phi$ и, исходя из условия инвариантности (6), приходим к равенству

$$\left\{k\frac{f''}{f} + l\frac{f'''}{f'} + p\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{\varphi^2}\right] + q\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right\}\dot{\varphi}^2 + \\ + \left[k\left(\frac{f'}{f} - \frac{1}{\varphi}\right) + (3l+2q)\frac{f''}{f'}\right]\ddot{\varphi} = 0. \qquad (7)$$

Решение полученного уравнения (7) позволит определить функцию преобразования $f(x)$, которая будет удовлетворять основному уравнению инвариантности $\{f[\varphi(x)],\ x\}_\Phi = \{\varphi,\ x\}_\Phi$.

Так как уравнение (7) должно удовлетворяться при любых $\varphi$, выражения, стоящие перед $\dot{\varphi}^2$ и $\ddot{\varphi}$, мы должны принять равными нулю и, следовательно, получим следующие два равенства:

$$k\frac{f''}{f} + l\frac{f'''}{f'} + p\left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{\varphi^2}\right] + q\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = 0; \tag{8}$$

$$k\left(\frac{f'}{f} - \frac{1}{\varphi}\right) + (3l + 2q)\frac{f''}{f'} = 0. \tag{9}$$

Решая уравнение (9), получим искомое выражение для функции преобразования $f(\varphi)$

$$f = A\left(\varphi^{\frac{3l+2q+k}{3l+2q}} + \varepsilon\right)^{\frac{3l+2q}{3l+2q+k}} \tag{10}$$

при условиях $3l + 2q + k \neq 0, \qquad 3l + 2q \neq 0.$

Коэффициенты $k$, $l$, $p$ и $q$ являются величинами постоянными и могут принимать любые значения: целые, дробные, положительные, отрицательные и равные нулю.

Введем для удобства записи обозначение

$$\frac{3l + 2q + k}{3l + 2q} = m. \tag{11}$$

Тогда будем иметь

$$f_m = A\sqrt[m]{\varphi^m + \varepsilon} \tag{12}$$

или

$$f_m = q\sqrt[m]{d\varphi^m + c}\,. \tag{13}$$

Подставив теперь найденное выражение функции преобразования (12) в первое уравнение системы (8) — (9), получим

$$\begin{gathered} k(m-1)\varphi^m + l(m-1)[(m-2)\varepsilon - (m+1)\varphi^m] - \\ -p(2\varphi^m + \varepsilon) + q(m-1)^2\varepsilon = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Ввиду произвольности функции $\varphi$ имеем

$$l(m-1)(m-2) - p + q(m-1)^2 = 0 \tag{15}$$

или

$$\begin{aligned} p &= l(m-1)(m-2) + q(m-1)^2 = \\ &= (m-1)[l(m-2) + q(m-1)]. \end{aligned} \tag{16}$$

Тогда выражение функции $\Phi_m$ (4) запишем в виде

$$\Phi_m = k\frac{\varphi''}{\varphi} + l\frac{\varphi'''}{\varphi'} + (m-1)[l(m-2) + q(m-1)]\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + q\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2. \tag{17}$$

Согласно (11) имеем

$$k = (m-1)(3l + 2q). \tag{18}$$

Выражение (17) запишем в связи с принятым нами обозначением (11) в виде

$$\Phi_m = l\left[3(m-1)\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'''}{\varphi'} + (m-1)(m-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2\right] + q\left[2(m-1)\frac{\varphi''}{\varphi} + (m-1)^2\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right]. \qquad (19)$$

Так как $l$ и $q$ взаимно независимы, придем к двум видам функции $\Phi_m$, являющихся инвариантами преобразования (12):

$$_q\Phi_m = \left[\frac{\varphi''}{\varphi'} + (m-1)\frac{\varphi'}{\varphi}\right]^2; \qquad (20)$$

$$_l\Phi_m = 3(m-1)\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'''}{\varphi'} + (m-1)(m-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2. \qquad (21)$$

Согласно (16), (18) определим коэффициенты $l$ и $q$, выразив их через $m$, $k$, и $p$:

$$l = (m-1)k - 2p \quad (22); \qquad q = \frac{3p-(m-2)k}{m^2-1}. \qquad (23)$$

Подставляя (22), (23) в (4), получим

$$\Phi_m = k\left[\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{1}{m+1}\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{m-2}{m^2-1}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right] + p\left[\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - \frac{2}{m^2-1}\frac{\varphi'''}{\varphi'} + \frac{3}{m^2-1}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2\right] \qquad (24)$$

и следовательно,

$$_k\Phi_m = \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{1}{m+1}\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{m-2}{m^2-1}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2; \qquad (25)$$

$$_p\Phi_m = -\frac{2}{m^2-1}\{\varphi,\ x\} + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2. \qquad (26)$$

Выражения для функций (20), (21) примем за основные.

Что касается $_k\Phi_m$ и $_p\Phi_m$, то они являются следствиями полученных выражений $_q\Phi_m$ и $_l\Phi_m$.

Действительно, будем иметь

$$_k\Phi_m = (m-1)_l\Phi_m - (m-2)_q\Phi_m; \qquad (27)$$

$$_p\Phi_m = {}_l\Phi_m - \frac{3}{2}\,{}_q\Phi_m. \qquad (28)$$

Составим алгебраические суммы вида

$$_t\Phi_m = q_t\,{}_q\Phi_m + l_t\,{}_l\Phi_m \qquad (29)$$

или

$$_t\Phi_m = q_t\left[\frac{\varphi''}{\varphi'} + (m-1)\frac{\varphi'}{\varphi}\right]^2 + l_t\left[3(m-1)\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'''}{\varphi'} + (m-1)(m-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2\right]. \qquad (30)$$

Коэффициенты $q_t$ и $l_t$ могут принимать любые значения.

Отсюда следует, что в основе бесконечного числа инвариантов ${}_t\Phi_m$, определяемых согласно (29) или, что то же, (30), лежит система из конечного числа, в данном случае лишь двух основных форм инвариантов ${}_q\Phi_m$, ${}_t\Phi_m$.

Во всех полученных формулах $m$ может быть любым вещественным числом, не равным нулю. При $m=-1$ в силу (12) будем иметь $f_{m=-1}=\frac{A\varphi}{\varepsilon\varphi+1}$ и согласно (13) $f_{m=-1}=\frac{q\varphi}{c\varphi+d}$.

Таким образом, приходим к дробно-рациональному преобразованию.

*Поступила в редколлегию 13.12.89*

---

УДК 517.56

*И. И. МАРЧЕНКО, А. И. ЩЕРБА*

## О ВЕЛИЧИНЕ ПРОТЯЖЕНИЯ МЕРОМОРФНОЙ В КРУГЕ ФУНКЦИИ

Используем стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций — $T(r, f)$, $N(r, a, f)$, $m(r, a, f)$, $\delta(a, f)$ (1, 2).

В работе (3) введена величина протяжения $\sigma(a, f)$ для мероморфных в плоскости функций:

$$\sigma(\infty, f)=\varlimsup_{r\to\infty}|\{\theta:|f(re^{i\theta})|>1\}|, \qquad \sigma(a, f)=\sigma\left(\infty, \frac{1}{f-a}\right),$$

где $|E|$ — мера Лебега множества $E$. Для функций конечного нижнего порядка $\lambda$ известна точная оценка снизу для величины $\sigma(a, f)$ [4]:

$$\sigma(a, f)\geqslant\min\left\{2\pi, \frac{4}{\lambda}\arcsin\sqrt{\frac{\delta(a, f)}{2}}\right\}.$$

Отметим, что в работе [5] получена оценка снизу для величины

$$\sigma(t, \infty, f)=\varlimsup_{r\to\infty}|\{\theta:\ln|f(re^{i\theta})|>tT(r, f)\}| \qquad (0\leqslant t\leqslant\delta(\infty, f))$$

через $\delta(\infty, f)$, $\lambda$, $t$.

В работах В. П. Петренко была введена и исследована величина отклонения $\beta(a, f)$ мероморфных функций от значения $a$. Напомним ее определение

$$\beta(\infty, f)=\varliminf_{r\to\infty}\max_{|z|=r}\ln^+|f(z)|/T(r, f), \qquad \beta(a, f)=\beta\left(\infty, \frac{1}{f-a}\right).$$

Величина $\beta(a, f)$ характеризует скорость приближения функции $f(z)$ к значению $a$ в более сильной метрике, чем величина $\delta(a, f)$. Очевидно, что $\delta(a, f)\leqslant\beta(a, f)$. Для функций конечного нижнего порядка известна точная оценка сверху для $\beta(a, f)$ [6]. В работах

7] исследовался вопрос об оценке протяжения через величину тклонения.

В случае мероморфных в единичном круге функций величина $(a, f)$ может быть равна $\infty$. В связи с этим в работе [8] рассмотрена величина

$$\hat{\beta}(\infty, f) = \varliminf_{r \to 1} \frac{(1 - r) \ln^+ \max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{T(r, f)}, \qquad \hat{\beta}(a, f) = \hat{\beta}\left(\infty, \frac{1}{f - a}\right).$$

работе [9] для мероморфных в круге функций конечного нижнего порядка получена точная оценка сверху для $\hat{\beta}(a, f)$.

Поскольку для мероморфных в круге функций конечного порядка величина $\sigma(a, f)$ может быть равна 0, встает вопрос о возможной скорости стремления к нулю меры множества $\{\theta : |f(re^{i\theta})| > 1\}$ при $r \to 1$. С этой целью введем следующие величины:

$$\omega_1(t, f) = \varlimsup_{r \to 1} \operatorname{arctg} \frac{|\{\theta : \ln |f(re^{i\theta})| > tT(r, f)/(1 - r)\}|}{2(1 - r)};$$

$$\omega_2(t, f) = \varlimsup_{r \to 1} \operatorname{arctg} \frac{|\{\theta : \ln |f(re^{i\theta})| > tT(r, f)\}|}{2(1 - r)};$$

$$\omega_3(t, f) = \varlimsup_{r \to 1} \operatorname{arctg} \frac{|\{\theta : \ln |f(re^{i\theta})| > t \max\limits_{|z|=r} \ln |f(z)|\}|}{2(1 - r)},$$

$t \in [0, \infty)$.

Цель работы — получение оценок снизу для величин $\omega_i(t, f)$ $(i = 1, 2, 3)$ для мероморфных в круге функций конечного нижнего порядка через величины $\delta(\infty, f)$, $\hat{\beta}(\infty, f)$. Перейдем к формулировке полученных результатов.

**Теорема 1.** *Пусть мероморфная в круге функция* $f(z)$ *имеет конечный нижний порядок* $\lambda$ *такая, что* $\hat{\beta}(\infty, f) > 0$. *Тогда для каждого фиксированного* $t$, $0 \leqslant t < \beta(\infty, f)$ *справедливо неравенство* $\omega_1(t, f) \geqslant x_0$, где $x_0$ — *наименьший положительный корень уравнения*

$$\hat{\beta}(\infty, f) = t \frac{\cos \lambda x}{\cos^{\lambda+2} x} + \pi\lambda \frac{\sin(\lambda + 1) x}{\cos^{\lambda+1} x}.$$

*Если* $\lambda = 0$, *то* $\omega_1(t, f) \geqslant \arccos \sqrt{t/\hat{\beta}(\infty, f)}$.

**Теорема 2.** *Для мероморфной в круге функции* $f(z)$ *конечного нижнего порядка* $\lambda$ *такой, что* $\delta(\infty, f) > 0$, *и для каждого* $t$, $0 \leqslant t < \delta(\infty, f)$, *выполнено неравенство* $\omega_2(t, f) \geqslant y_0$, где $y_0$ — *наименьший положительный корень уравнения*

$$(1 - t) \frac{\cos(\lambda + 1) x}{\cos^{\lambda+1} x} = 1 - \delta(\infty, f).$$

*Если* $\lambda = 0$, *то* $\omega_2(t, f) = \frac{\pi}{2}$.

**Теорема 3.** *Пусть мероморфная в круге функция* $f(z)$ *имеет конечный нижний порядок* $\lambda$ *и* $\beta(\infty, f) > 0$. *Тогда для каждого* $t$,

$0 < t < \frac{1}{\pi\lambda}\hat{\beta}(\infty, f)\cos^{\lambda+1}\frac{\pi}{2(1+\lambda)}$, *справедливо неравенство* $\omega_3(t, f) \geqslant z_0$, *где* $z_0$ — *наименьший положительный корень уравнения:*

$$\hat{\beta}(\infty, f) = \frac{\pi\lambda}{\cos^{\lambda+1} x}\left\{\sin(\lambda+1)x + \frac{t\cos\lambda x}{\cos x \cdot \cos^{\lambda+1}\frac{\pi}{2(1+\lambda)}}\right\}.$$

*Если* $\lambda = 0$, *то* $\omega_3(t, f) \geqslant \arccos\sqrt{2t/\beta(\infty, f)}$.

В случае $t = 0$ полученные оценки для $\omega_i(t, f)$ $(i = 1, 2, 3)$ являются точными. Они достигаются на функции $f_\lambda(z) = E_{\lambda+1}\left(\frac{z}{1-z}\right)$, где $E_\lambda(z)$ — функция Миттаг—Леффлера [10].

Часть результатов настоящей работы была анонсирована авторами в работе [11].

Перейдем к доказательству сформулированных теорем. Весь вспомогательный материал для их доказательства был подготовлен ранее [9]. В связи с этим мы будем использовать обозначения из этой работы, а также соответствующие формулы и утверждения.

Докажем теорему 1. Вначале докажем ее для $\lambda > 0$. В формуле (2.2) [9] положим $\psi = 0$:

$$R^{\lambda+1}\sigma'_\gamma(R)\Big|_{R_k}^{v_k} - \lambda R^\lambda\sigma_\gamma(R)\Big|_{R_k}^{v_k} \geqslant \int_{R_k}^{v_k}\Big\{\frac{\partial}{\partial\varphi}W_\gamma(R, \alpha_1)\cos\lambda\alpha_1 - \\ - \frac{\partial}{\partial\varphi}W_\gamma(R, \alpha)\cos\lambda\alpha - \lambda W_\gamma(R, \alpha)\sin\lambda\alpha + \\ + \lambda W_\gamma(R, \alpha_1)\sin\lambda\alpha_1\Big\}R^{\lambda-1}\,dR. \tag{1}$$

В силу (1.9) [9] следует

$$\frac{\partial}{\partial r}V_\gamma(r, \theta_2) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V_\gamma(r, \theta_2)\,\mathrm{tg}(\theta_2 + \alpha) - \frac{\partial}{\partial R}W_\gamma(R, \alpha)\frac{1}{\cos(\theta_2 + \alpha)};$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}W_\gamma(R, \alpha) = \frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V_\gamma(r, \theta_2)\frac{1}{\cos(\theta_2 + \alpha)} - R\,\mathrm{tg}(\theta_2 + \alpha)\frac{\partial}{\partial R}W_\gamma(R, \alpha). \tag{2}$$

Подставляя (2) в неравенство (1), получим

$$R^{\lambda+1}\sigma'_\gamma(R)\Big|_{R_k}^{v_k} - \lambda R^\lambda\sigma_\gamma(R)\Big|_{R_k}^{v_k} \geqslant \int_{R_k}^{v_k}\Big\{\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V_\gamma(r, \theta_1)\cos(\theta_1+\alpha_1)\cos\lambda\alpha_1 - \\ - \frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V_\gamma(r, \theta_2)\cos\lambda\alpha/\cos(\theta_2 + \alpha) + R\frac{\partial}{\partial r}W_\gamma(R, \alpha)\,\mathrm{tg}(\theta_2 + \alpha)\cos\lambda\alpha - \\ - \lambda W_\gamma(r, \alpha)\sin\lambda\alpha\Big\}R^{\lambda-1}dR. \tag{3}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} R^{\lambda} \frac{\partial}{\partial R} W_{\gamma}(R,\alpha) \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\, dR = W_{\gamma}(R,\alpha) R^{\lambda} \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha) \Big|_{R_k}^{v_k} -$$

$$-\lambda \int\limits_{R_k}^{v_k} W_{\gamma}(R,\alpha) R^{\lambda-1} \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\, dR - \int\limits_{R_k}^{v_k} W_{\gamma}(R,\alpha) R^{\lambda} \frac{\partial\theta_2}{\partial R} \frac{dR}{\cos^2(\theta_2+\alpha)}.$$

ак как $1 - Re^{-i\alpha} = re^{i\theta_2}$, то

$$t\,\theta_2 = \frac{R\sin\alpha}{1-R\cos\alpha}, \qquad \frac{\partial\theta_2}{\partial R}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta_2} = \frac{\sin\alpha}{(1-R\cos\alpha)^2} > 0 \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

оэтому

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} R^{\lambda} \frac{\partial}{\partial R} W_{\gamma}(R,\alpha) \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\, dR = W_{\gamma}(R,\alpha) R^{\lambda} \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha) \Big|_{R_k}^{v_k} -$$

$$-\lambda \int\limits_{R_k}^{v_k} W_{\gamma}(R,\alpha) R^{\lambda-1} \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\, dR -$$

$$-\int\limits_{R_k}^{v_k} W_{\gamma}(R,\alpha) \frac{\sin\alpha\cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2+\alpha)(1-R\cos\alpha)^2}\, dR. \tag{4}$$

ее в силу (3) имеем

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \Big\{ \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} V_{\gamma}(r,\theta_1) \cos(\theta_1+\alpha_1) - \lambda W_{\gamma}(R,\alpha)\sin\lambda\alpha -$$

$$-\lambda W_{\gamma}(R,\alpha) \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\cos\lambda\alpha - W_{\gamma}(R,\alpha) \frac{\sin\alpha\cos\lambda\alpha\cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2+\alpha)(1-R\cos\alpha)^2} -$$

$$-\frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} V_{\gamma}(r,\theta_2) \frac{\cos\lambda\alpha}{\cos(\theta_2+\alpha)} \Big\} R^{\lambda-1}\, dR \leqslant$$

$$\leqslant R^{\lambda+1}\sigma'_{\gamma}(R)\Big|_{R_k}^{v_k} - \lambda R^{\lambda}\sigma_{\gamma}(R)\Big|_{R_k}^{v_k} - W_{\gamma}(R,\alpha) R^{\lambda}\cos\lambda\alpha \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\Big|_{R_k}^{v_k}. \tag{5}$$

налогично, как и в доказательстве теоремы 1 [9], используя емму 4 [9] и делая предельный переход при $\gamma\to 0$ и $\alpha_1 \to 0$, поучим при $k\to\infty$

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \Big\{ \frac{R}{1-R} \frac{u^*(1-R,\,0)}{\pi} - \frac{R}{r} \frac{u^*(1-Re^{-i\alpha})}{\pi} \cdot \frac{\cos\lambda\alpha}{\cos(\theta_2+\alpha)} -$$

$$-\lambda T^*(1-Re^{-i\alpha})\sin\lambda\alpha - \lambda T^*(1-Re^{-i\alpha}) \operatorname{tg}(\theta_2+\alpha)\cos\lambda\alpha -$$

$$-T^*(1-Re^{-i\alpha}) R \frac{\sin\alpha\cos\lambda\alpha\cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2+\alpha)(1-R\cos\alpha)^2} \Big\} R^{\lambda-1}\, dR \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_2 \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-R,\, f) R^{\lambda-1} dR. \tag{6}$$

Теорему 1 достаточно доказать для $\omega_1(t, f) < \min\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\lambda}\right\}$. Выберем $\alpha$ так, чтобы $\omega_1(t, f) < \alpha < \min\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\lambda}\right\}$. В силу определения $\omega_1(t, f)$ следует

$$\varlimsup_{R\to 0}\left\{u^*(1 - Re^{-i\alpha}) - \frac{t}{1 - |1 - Re^{-i\alpha}|}T(|1 - Re^{-i\alpha}|, f)\right\} \leqslant 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_{R_k}^{v_k}\left\{\frac{R}{1-R}\cdot\frac{u^*(1-R)}{\pi} - t\frac{R}{r}\frac{T(|1 - Re^{-i\alpha}|, f)\cos\lambda\alpha}{\pi\cos(\theta_2+\alpha)(1 - |1 - Re^{-i\alpha}|)} - \right.$$
$$- \lambda T(|1 - Re^{-i\alpha}|, f)\frac{\sin((\lambda+1)\alpha + \theta_2)}{\cos(\theta_2+\alpha)} -$$
$$\left. - RT(|1 - Re^{-i\alpha}|, f)\frac{\sin\alpha\cos\lambda\alpha\cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2+\alpha)(1 - R\cos\alpha)^2}\right\}R^{\lambda+1}dR \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_2\int\limits_{R_k}^{v_k}T(1-R, f)R^{\lambda-1}dR.$$

Так как $|1 - Re^{-i\alpha}| = 1 - R\cos\alpha + o(R)$ и $\theta_2(R) \to 0$ при $R \to 0$ то

$$\int\limits_{R_k}^{v_k}\left\{\frac{R}{1-R}\frac{u^*(1-R)}{\pi} - T(|1 - Re^{-i\alpha}|, f)\left[\frac{t\cos\lambda\alpha}{\pi\cos^2\alpha}(1 + o(1)) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda\frac{\sin(1+\lambda)\alpha}{\cos\alpha}(1 + o(1))\right]\right\}R^{\lambda+1}dR \leqslant \varepsilon_2\int\limits_{R_k}^{v_k}T(1-R, f)R^{\lambda-1}dR, k \to \infty.$$

Далее, используя лемму 5 [9], имеем

$$\int\limits_{R_k}^{v_k}\left\{\frac{R}{1-R}\frac{u^*(1-R)}{T(1-R, f)} - \frac{\pi}{\cos^\lambda\alpha}\left[\frac{t\cos\lambda\alpha}{\pi\cos^2\alpha}(1 + o(1)) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda\frac{\sin(1+\lambda)\alpha}{\cos\alpha}(1 + o(1))\right] - \varepsilon_3\right\}R^{\lambda-1}dR \leqslant 0 \quad (k \to \infty, \varepsilon_3 > 0).$$

Отсюда

$$\hat\beta(\infty, f) \leqslant t\frac{\cos\lambda\alpha}{\cos^{\lambda+2}\alpha} + \pi\lambda\frac{\sin(\lambda+1)\alpha}{\cos^{\lambda+1}\alpha}. \tag{7}$$

Правая часть неравенства (7) является непрерывной функцией от $\alpha$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2(\lambda+1)}\right]$. Обозначим ее через $\varphi(\alpha)$. В силу теоремы 1 [9] и ограничений, наложенных на постоянную в теореме 1, имеем

$$0 < \varphi(0) = t < \hat\beta(\infty, f) \leqslant \varphi\left(\frac{\pi}{2(\lambda+1)}\right).$$

ереходя к пределу при $\alpha \to \omega_1(t, f)$ в неравенстве (6), приходим к еравенству $\beta(\infty, f) \leqslant \varphi(\omega_1(t, f))$. Отсюда следует, что существует аименьший корень $x_0$ уравнения $\beta(\infty, f) = \varphi(x)$, который удовлеворяет неравенству $\omega_1(t, f) \geqslant x_0$. Итак, теорема 1 доказана для $\lambda > 0$. случае $\lambda = 0$ доказательство теоремы 1 аналогично предыдущему лучаю.

Докажем теорему 2. Вначале рассмотрим случай $\lambda > 0$. Полагая формуле (2.2) [9] $\psi = -\frac{\pi}{2\lambda}$ и используя формулу (4), получим

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \left\{ \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} V_\gamma(r, \theta_1) \cos(\theta_1 + \alpha_1) \sin\lambda\alpha_1 + \lambda W_\gamma(R, \alpha) \cos\lambda\alpha - \right.$$

$$- \lambda W_\gamma(R, \alpha_1) \cos\lambda\alpha_1 - \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} V_\gamma(r, \theta_2) \frac{\sin\lambda\alpha}{\cos(\theta_2 + \alpha)} -$$

$$- \lambda W_\gamma(R, \alpha) \operatorname{tg}(\theta_2 + \alpha) \sin\lambda\alpha -$$

$$\left. - RW_\gamma(R, \alpha) \frac{\sin\alpha \sin\lambda\alpha \cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2 + \alpha)(1 - R\cos\alpha)^2} \right\} R^{\lambda-1} dR \leqslant R^{\lambda-1} \sigma'_\gamma(R) \Big|_{R_k}^{v_k} -$$

$$- \lambda R^\lambda \sigma_\gamma(R) \Big|_{R_k}^{v_k} - W_\gamma(R, \alpha) R^\lambda \operatorname{tg}(\theta_2 + \alpha) \sin\lambda\alpha \Big|_{R_k}^{v_k}.$$

лее, используя лемму 4 [9] и устремляя $\gamma \to 0$, $\alpha_1 \to 0$, получим

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \left\{ \lambda T^*(1 - Re^{-i\alpha}) \cos\lambda\alpha - \lambda T^*(1 - Re^{-i\alpha}) \operatorname{tg}(\theta_2 + \alpha) \sin\lambda\alpha - \right.$$

$$- \lambda N(1 - R, \infty, f) - \frac{R}{r} \frac{u^*(1 - Re^{-i\alpha})}{\pi} \frac{\sin\lambda\alpha}{\cos(\theta_2 + \alpha)} -$$

$$\left. - RT^*(1 - Re^{-i\alpha}) \frac{\sin\alpha \sin\lambda\alpha \cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2 + \alpha)(1 - R\cos\alpha)^2} \right\} R^{\lambda-1} dR \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1 - R, f) R^{\lambda-1} dR, \quad k \to \infty.$$

еорему 2 достаточно доказать для $\omega_2(t, f) = \frac{\pi}{2(\lambda + 1)}$. Выберем $\alpha$ ак, чтобы $\omega_2(t, f) < \alpha < \frac{\pi}{2(\lambda + 1)}$. В силу определения величины $_2(t, f)$ имеем

$$\varlimsup_{R \to 0} \{u^*(1 - Re^{-i\alpha}) - tT(|1 - Re^{-i\alpha}|, f)\} \geqslant 0.$$

оэтому

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \left\{ T^*(1 - Re^{-i\alpha}) \frac{\cos((\lambda + 1)\alpha + \theta_2)}{\cos(\theta_2 + \alpha)} - N(1 - R, \infty, f) R^{\lambda-1} dR \leqslant \right.$$

$$\leqslant \varepsilon_5 \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1 - R, f) R^{\lambda-1} dR, \quad k \geqslant k_0(\varepsilon_5).$$

Так как

$$m^*(|1-Re^{-i\alpha}|,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\theta_2}u^*(re^{i\varphi})\,d\varphi+\frac{1}{\pi}\int_{\theta_2}^{\pi}u^*(re^{i\varphi})\,d\varphi\leqslant$$
$$\leqslant m^*(r,\theta_2,f)+\frac{\pi-\theta_2}{\pi}tT(r,f)\leqslant m^*(r,\theta_2,f)+tT(|1-$$
$$-Re^{-i\alpha}|,f)\ (r=|1-Re^{-i\alpha}|),\ \text{то}\ T^*(1-Re^{-i\alpha})\geqslant$$
$$\geqslant(1-t)\,T(|1-Re^{-i\alpha}|,f).$$

Таким образом,

$$\int_{R_k}^{v_k}\left\{(1-t)\,T(|1-Re^{-i\alpha}|,f)\frac{\cos((\lambda+1)\alpha+\theta_2)}{\cos(\theta_2+\alpha)}-N(1-\right.$$
$$\left.-R,\infty,f)\right\}R^{\lambda-1}dR\leqslant\varepsilon_5\int_{R_k}^{v_k}T(1-R,f)\,R^{\lambda-1}dR.$$

Далее, используя лемму 5 [9], имеем

$$\int_{R_k}^{v_k}\left\{T(1-R,f)\frac{\cos(\lambda+1)\alpha}{\cos^{\lambda+1}\alpha}(1-t)-N(1-R,\infty,f)\right\}R^{\lambda-1}dR\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_6\int_{R_k}^{v_k}T(1-R,f)\,R^{\lambda-1}dR,\ k\geqslant k_0(\varepsilon_6).$$

Отсюда $(1-t)\dfrac{\cos(\lambda+1)\alpha}{\cos^{\lambda+1}\alpha}\leqslant1-\delta(\infty,f)$.

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha\to\omega_2(t,f)$, получим утверждение теоремы 2 в случае $\lambda>0$. Рассмотрим случай $\lambda=0$. Предположим, что утверждение теоремы 2 неверно, т. е. существует число $t\in[0,\delta(\infty,f))$ такое, что $\omega_2(t,f)<\frac{\pi}{2}$. Выберем в соотношении (2.10) [9] $\psi=-\frac{\pi}{2\mu}$. Далее, проводя аналогичные рассуждения как и при $\lambda>0$, получим

$$\int_{R_k}^{v_k}\left\{T(1-R,f)\frac{\cos(1+\mu)\alpha}{\cos^{1+\mu}\alpha}(1-t)-N(1-R,\infty,f)\right\}\frac{dR}{R}\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\int_{R_k}^{v_k}T(1-R,f)\frac{dR}{R}.$$

Отсюда

$$(1-t)\frac{\cos(1+\mu)\alpha}{\cos^{1+\mu}\alpha}\leqslant1-\delta(\infty,f).$$

этом неравенстве перейдем к пределу при $\mu \to 0$: $t \geqslant \delta(\infty, f)$. Это ротиворечит условию теоремы 2. Таким образом, теорема 2 доказана олностью.

Докажем теорему 3. Вначале докажем ее для $\lambda > 0$. Выберем $\alpha$ ак, чтобы $\omega_3(t, f) < \alpha < \frac{\pi}{2\lambda}$. Из определения величины $\omega_3(t, f)$ сле-ует

$$\overline{\lim_{R \to 0}} \{u^*(1 - Re^{-i\alpha}) - tu^*(|1 - Re^{-i\alpha}|)\} \leqslant 0.$$

алее, используя соотношение (6), получим

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \left\{ \frac{R}{1-R} \frac{u^*(1-R)}{\pi} - t \frac{\cos \lambda\alpha\, u^*(|1 - Re^{-i\alpha}|)}{\pi r \cos(\alpha + \theta_2)} - \right.$$

$$- \lambda T^*(1 - Re^{-i\alpha}) \frac{\sin((\lambda + 1)\alpha + \theta_2)}{\cos(\alpha + \theta_2)} - R \frac{\sin \alpha \cos \lambda\alpha \cos^2 \theta_2}{\cos^2(\theta_2 + \alpha)(1 - R\cos\alpha)^2} T^*(1 -$$

$$\left. - Re^{-i\alpha}) \right\} R^{\lambda - 1} dR \leqslant \varepsilon_2 \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1 - R, f) R^{\lambda - 1} dR, \ k \to \infty. \qquad (8)$$

ложим

$$(1 - 2R\cos\alpha + R^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - l. \qquad (9)$$

егко видеть, что

$$R = \frac{l}{\cos\alpha}(1 + o(1)), \ dR = \frac{dl}{\cos\alpha}(1 + o(1)), \ R \to 0.$$

елая замену переменных (9), имеем

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \frac{R^\lambda}{r} u^*(|1 - Re^{-i\alpha}|) dR = \frac{1 + o(1)}{\cos^{\lambda+1} \alpha} \int\limits_{R_k(1+o(1))\cos\alpha}^{v_k(1+o(1))\cos\alpha} l^\lambda u^*(1 -$$

$$- l) dl, \ k \to \infty.$$

ыберем в формуле (2.8) [9] $\alpha = \frac{\pi}{2(\lambda + 1)}$

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \left\{ \frac{R}{1-R} \frac{u^*(1-R)}{\pi} - \frac{\lambda T(1 - R, f)}{\cos^{\lambda+1} \frac{\pi}{2(\lambda + 1)}} \right\} R^{\lambda - 1} dR \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_3 \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1 - R, f) R^{\lambda - 1} dR. \qquad (10)$$

Далее отметим, что если проинтегрировать соотношение (2.1) [9] о $R$ от $R_k(1 + o(1))\cos\alpha$ до $v_k(1 + o(1))\cos\alpha$ и провести все после-ующие рассуждения, то получим следующий аналог формулы (10):

$$\int\limits_{R_k(1+o(1))\cos\alpha}^{v_k(1+o(1))\cos\alpha} \left\{ \frac{l}{1-l} u^*(1-l) - \frac{\pi\lambda T(1-l, f)}{\cos^{1+\lambda}\frac{\pi}{2(\lambda+1)}} \right\} l^{\lambda-1} dl \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_4 \int\limits_{R_k(1+o(1))\cos\alpha}^{v_k(1+o(1))\cos\alpha} T(1-l, f) l^{\lambda-1} dl.$$

Из этого неравенства и леммы 1 [9] следует

$$\cos^{\lambda+1}\frac{\pi}{2(\lambda+1)} / (\pi\lambda) \int\limits_{R_k(1+o(1))\cos\alpha}^{v_k(1+o(1))\cos\alpha} \frac{l^\lambda}{1-l} u^*(1-l)\, dl \leqslant$$

$$\leqslant (1+o(1)) \int\limits_{R_k(1+0(1))\cos\alpha}^{v_k(1+o(1))\cos\alpha} T(1-l, f) l^{\lambda-1} dl \leqslant$$

$$\leqslant (1+o(1)) \left\{ \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-l, f) l^{\lambda-1} dl + \int\limits_{R_k(1+0(1))\cos\alpha}^{R_k} T(1 -\right.$$

$$\left. - l, f) l^{\lambda-1} dl \right\} \leqslant (1+o(1)) \left\{ \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-l, f) l^{\lambda-1} dl + \frac{1}{\lambda} R_k^\lambda T(1 -\right.$$

$$\left. - R_k, f) \right\} \leqslant (1+o(1)) \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-l, f) l^{\lambda-1} dl.$$

Поэтому в силу (8)

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \left\{ \frac{R}{1-R} \frac{u^*(1-R)}{\pi} - t\lambda \frac{T(1-R, f)\cos\lambda\alpha}{\cos^{\lambda+1}\frac{\pi}{2(\lambda+1)}\cos^{2+\lambda}\alpha} - \right.$$

$$- \lambda T^*(1-Re^{-i\alpha}) \frac{\sin((\lambda+1)\alpha+\theta_2)}{\cos(\alpha+\theta_2)} - T^*(1-Re^{-i\alpha}) R \times$$

$$\left. \times \frac{\sin\alpha\cos\lambda\alpha\cos^2\theta_2}{\cos^2(\theta_2+\alpha)(1-R\cos\alpha)^2} \right\} R^{\lambda-1} dR \leqslant \varepsilon_5 \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1 -$$

$$- R, f) R^{\lambda-1} dR, \; k \to \infty.$$

Из этого неравенства и леммы 5 вытекает

$$\int\limits_{R_k}^{v_k} \left\{ \frac{R}{1-R} u^*(1-R) - \frac{\pi\lambda T(1-R, f)}{\cos^{\lambda+1}\alpha} \left[ \sin(\lambda+1)\alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left. + t \frac{\cos\lambda\alpha}{\cos\alpha\cos^{1+\lambda}\frac{\pi}{2(1+\lambda)}} \right] \right\} R^{\lambda-1} dR \leqslant \varepsilon_6 \int\limits_{R_k}^{v_k} T(1-R, f) R^{\lambda-1} dR.$$

тсюда

$$\tilde{\beta}(\infty, f) \leqslant \frac{\pi\lambda}{\cos^{\lambda+1}\alpha}\left[\sin(\lambda+1)\alpha + \frac{t\cos\lambda\alpha}{\cos\alpha\cos^{1+\lambda}\frac{\pi}{2(1+\lambda)}}\right].$$

стремляя $\alpha \to \omega_3(t, f)$, получим утверждение теоремы 3 для $\lambda > 0$.
ля $\lambda = 0$ теорема 3 доказывается совершенно аналогично, только
качестве $\lambda$ будет выступать произвольное положительное число.

исок литературы: *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М., 1941.
8—148. 2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений меромо-
рных функций. М., 1970. С. 12—145. 3. *Edrei A.* Sums of dificiencies of mero-
rphic functions // J. Anal. Math. 1965. 14. P. 79—104. 4. *Baernstein A.* Proof
Edrei's conjecture // Proc. London Math. Soc. 1973. 26 (3). P. 418—434. 5.
*erson J. M., Baernstein A.* The size of the set on which a meromorphic fun-
n is large // Proc. London Math. Soc. 1978. 35 (3). P. 518—539. 6. *Петренко В. П.*
ые кривые. Х., 1984. С. 1—215. 7. *Марченко И. И.* О росте мероморфных
нкций конечного нижнего порядка // Докл. АН СССР. 1982. **264**, № 5. С. 1077—
. 8. *Крытов А. В.* О росте мероморфных функций и аналитических кривых
единичном круге. М., 1981. 52 с. Деп. ВИНИТИ 20.07.81. № 1657—81. 9. *Мар-*
*о И. И., Щерба А. И.* О величинах отклонений мероморфных функций // Мат.
ник. 1990. С. 53—60. 10. *Крутинь В. И.* О величинах дефектов Р. Неванлин-
для мероморфных при $|z| < 1$ функций // Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. 1973.
5. С. 347—358. 11. *Марченко И. И., Щерба А. И.* О росте мероморфных в
ге функций конечного нижнего порядка // Докл. АН СССР. 1987. **295**, № 4.
05—808.

*Поступила в редколлегию 07.10.89*

---

УДК 517.55

*Д. Е. ПАПУШ*

# ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ДИСКРЕТНЫХ МНОЖЕСТВ В $C^l$

Построению целых функций в $C^l$ с заданной оценкой роста и с
данными значениями в точках дискретного множества (в узлах
герполяции) посвящены работы [1—3 и др.]. В этих работах мно-
ество узлов интерполяции либо задавалось как множество общих
лей $l$ целых в $C^l$ функций, либо предполагалось «близким» в том
ли ином смысле к точкам целочисленной решетки.

Для решения подобных задач мы применили в [4] другой метод,
ри котором узлы интерполяции характеризовались поведением по-
роенного по ним специальным образом канонического произведения,
интерполирующая функция искалась в виде некоторого многомер-
го аналога ряда Лагранжа, традиционно используемого в теории
терполяции функций одного переменного. Целью настоящей работы,
одолжающей [4], является получение для указанной задачи интерпо-
ции условий разрешимости чисто геометрического характера. Основ-

ным результатом является теорема 3, в которой доказан аналог теоремы Б. Я. Левина о разрешимости задачи интерполяции в случае, когда множество узлов интерполяции есть $R$-множество.

*§ 1. Постановка задачи и предварительные результаты.* Пусть $A=\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — дискретная последовательность точек пространства $\boldsymbol{C}^l$ с конечным показателем сходимости $\rho$[*]/. Введем в рассмотрение функцию

$$\pi(z)=\prod_{k=1}^{\infty} G_p(<z, a^{(k)}\,|\,a^{(k)}\,|^{-2}>),$$

где $G_p(u)=(1-u)\exp\left(u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p}\right)$ — первичный множитель Вейерштрасса, $\langle z, w\rangle=z_1\bar{w}_1+\cdots+z_l\bar{w}_l$ — эрмитово скалярное произведение в $\boldsymbol{C}^l$, а число $p\in\boldsymbol{Z}^+$ выбрано так, что $\sum^{\infty}|a^{(k)}|^{-p}=\infty$, $\sum^{\infty}|a^{(k)}|^{-p-1}<\infty$. Как было показано в [5], $\pi(z)$ — целая функция порядка $\rho$. Обратим внимание на то, что нулевое множество функции $\pi(z)$ есть счетное объединение гиперплоскостей $H_k$, для которых точки $a^{(k)}$ являются основаниями перпендикуляров, опущенных из начала координат на $H_k$.

Пусть $\rho(r)\to\rho$ — некоторый уточненный порядок[**]. Через $L(z)$ мы всюду в дальнейшем обозначаем радиальный индикатор функции $\pi(z)$ относительно $\rho(r)$:

$$L(z)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)}\ln|\pi(tz)|.$$

Отметим, что в силу результата Л. Грумена [6], функция $L(z)$ непрерывна.

Мы будем решать задачу свободной интерполяции с последовательности $A$ в классе целых функций, радиальный индикатор которых относительно $\rho(r)$ не превосходит $L(z)$. Это означает, что нас будут интересовать условия на последовательность $A$, при которых для всякой числовой последовательности $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left(\frac{\ln|w_k|}{|a^{(k)}|^{\rho(|a^{(k)}|)}}-L(a^{(k)}\,|\,a^{(k)}\,|^{-1})\right)\leqslant 0, \tag{1}$$

существует целая функция $f(z)$ конечного порядка не выше $\rho$ и такая, что

$$1)\ f(a^{(k)})=w_k\forall k=1,2,\ldots;$$

$$2)\ L_r(f;z)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)}\ln|f(tz)|\leqslant L(z).$$

---

[*] $\rho^{\mathrm{def}}\inf\left\{\lambda\in R^+\colon \sum^{\infty}|a^{(k)}|^{-\lambda}<\infty\right\}$.

[**] Уточненным порядком называется функция $\rho(r)\in C^1(R^+)$, удовлетворяющая условиям $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$ и $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r=0$.

Для указанной интерполяционной задачи автором [4] было дока-
но следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть* $A = \{\xi a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность попарно зличных точек пространства* $\boldsymbol{C}^l$ *с конечным показателем сходи-сти* $\rho$, $\pi(z)$ — *каноническое произведение, построенное по после-вательности* $A$, $\pi_k(z) = \pi(z)(|a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1}\rangle)^{-1}$. *Пусть да-е выполнены условия* $\pi_k(a^{(k)}) \neq 0$ *и*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left(\frac{\ln|\pi_k(a^{(k)})|}{|a^{(k)}|^{\rho(|a^{(k)}|)}} - L(a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1})\right) = 0. \tag{2}$$

*гда для всякой последовательности комплексных чисел* $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, *овлетворяющей условию (1), существует целая функция* $f(z)$ *конеч-го порядка не выше* $\rho$, *решающая интерполяционную задачу* {*1*), } *и представимая в виде*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{w_k\,\pi_k(z)\,\omega_k(z)}{\pi_k(a^{(k)})\,\omega_k(a^{(k)})},$$

$\omega_k(z)$ — *некоторые целые функции, нулевое множество которых ь объединение гиперплоскостей.*

Фигурирующее в теореме 1 условие (2) трудно проверяемо для кретных последовательностей $A$. Поэтому естественно возникает рос о нахождении более наглядных достаточных условий, при ко-ых разрешима интерполяционная задача {1), 2)}. Решению этого проса и посвящена настоящая работа.

Для заданной последовательности $A$ через $n_z(t)$ обозначим число точек этой последовательности, для которых гиперплоскость $H_k =$ $= z \in \boldsymbol{C}^l: \langle z, a^{(k)}|a^{(k)}|^{-2}\rangle = 1\}$ пересекает шар $B(z, t) = \{w \in \boldsymbol{C}^l: |w -$ $- z| < t\}$. Далее для заданного $\delta > 0$ введем множества

$$Z_\delta(z) = \{k \in \boldsymbol{N}: ||a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1}\rangle| < \delta|z|\};$$

$$\tilde{Z}_\delta(z) = \{k \in \boldsymbol{N}: 0 < ||a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1}\rangle| < \delta|z|\}.$$

ложим далее

$$\pi^\delta(z) = \prod_{k \in Z_\delta(z)}\frac{|a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1}\rangle}{(1+\delta)|z|};$$

$$\tilde{\pi}^\delta(z) = \prod_{k \in \tilde{Z}_\delta(z)}\frac{|a^{(k)}| - \langle z, a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1}\rangle}{(1+\delta)|z|}.$$

ли $z \in H_j$ для некоторой гиперплоскости с основанием перпендику-ра $a^{(j)}$, то $\pi^\delta(z) = 0$; в противном случае $\pi^\delta(z) = \tilde{\pi}^\delta(z)$.

**Лемма 1.** *Имеет место оценка*

$$|\ln|\tilde{\pi}^\delta(z)|| \leqslant \tilde{n}_z(\delta|z|)\ln(1+\delta^{-1}) + \int_0^{\delta|z|}\frac{1}{t}\tilde{n}_z(t)\,dt,$$

$\tilde{n}_z(t) = n_z(t) - n_z(0)$.

**Доказательство.** Заметим, что величина $||a^{(k)}|-\langle z, a^{(k)}\times$ $\times|a^{(k)}|^{-1}\rangle|$ есть в точности расстояние от гиперплоскости $H_k$ до точки $z$. Поэтому

$$|\ln|\tilde{\pi}^\delta(z)|| \leqslant -\sum_{k\in\tilde{Z}_\delta(z)}\{\ln||a^{(k)}|-\langle z, a^{(k)}|a^{(k(}|^{-1}\rangle|-\ln((1+\delta)|z|)\}=$$

$$=-\int\limits_0^{\delta|z|}\ln t d\tilde{n}_z(t)+\tilde{n}_z(\delta|z|)\ln((1+\delta)|z|).$$

Интегрируя последнее по частям, получаем требуемое.

Положим теперь

$$\pi^\delta(z,\ w)=\prod_{k\in Z_\delta(z)}\frac{|a^{(k)}|-\langle z+w,\ a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1}\rangle}{(1+\delta)|z|};$$

$$\tilde{\pi}^\delta(z,\ w)=\prod_{k\in\tilde{Z}_\delta(z)}\frac{|a^{(k)}|-<z+w,\ a^{(k)}|a^{(k)}|^{-1}>}{(1+\delta)|z|}.$$

Тогда $\tilde{\pi}^\delta(z,\ 0)=\tilde{\pi}^\delta(z)$. При $\delta<1$ и $|w|<\delta|z|$

$$\ln|\pi^\delta(z,\ w)|<0. \tag{3}$$

**Теорема 2.** *Пусть* $A=\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность попарно различных точек пространства* $\mathbf{C}^l$ *с показателем сходимости* $\rho$, *причем функция* $\pi(z)$, *построенная по последовательности* $A$, *является функцией вполне регулярного роста* (в.р.р)* *относительно некоторого уточненного порядка* $\rho(r)\to\rho$. *Пусть, кроме того, для некоторых* $c_0$, $\alpha$ *и* $\delta_0$ *имеет место оценка*

$$n_{a^{(k)}}(t)\leqslant 1+c_0t^\alpha|a^{(k)}|^{\rho(|a^{(k)}|)-\alpha} \tag{4}$$

*для* $t<\delta_0|a^{(k)}|$ *и* $k\in\boldsymbol{N}$. *Тогда выполнено условие (2), и, следовательно, для любой последовательности* $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, *удовлетворяющей условию (1), разрешима интерполяционная задача* {*1*), *2*)}.

**Доказательство.** Обозначим $\pi_j^\delta(w)=\pi^\delta(a^{(j)},\ w)$, $\tilde{\pi}_j^\delta(w)=$ $=\tilde{\pi}^\delta(a^{(j)},\ w)$, $q_j^\delta(w)=\pi(a^{(j)}+w)(\pi_j^\delta(w))^{-1}$.

Так как в силу условия (4) $n_{a^{(j)}}(0)=1$, и, следовательно, $\pi_j^\delta(w)$ и $\tilde{\pi}_j^\delta(w)$ различаются одним множителем, то

$$q_j^\delta(w)=\pi_j(a^{(j)}+w)(\pi_j^\delta(w))^{-1}(1+\delta)^{-1}|a^{(j)}|^{-1}.$$

Заметим сразу, что функция $q_j^\delta(w)$ не имеет нулей в шаре B$(0,$ $\delta|a^{(j)}|)$, и, следовательно, $\ln|q_j^\delta(w)|$ является в этом шаре плюригармонической функцией.

Оценим величину $\ln|q_j^\delta(0)|$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Так как $\pi(z)$ — функция в.р.р., вне некоторого $C_0$-множества** $E_\varepsilon$ и вне шара $B(0,\ R_\varepsilon)$

---

* Для целых функций многих переменных имеются два различных определения вполне регулярного роста (см. [7]). Для целых функций, нулевое множество которых есть объединение гиперплоскостей, эти определения эквивалентны (см. [5], теорема 4).

** Определение $C_0$-множества см. [8].

остаточно большого радиуса $R_\varepsilon$ в силу теоремы о сходимости вне сключительных множеств (см. [8], с. 165) имеет место неравенство $z|^{-\rho(|z|)}\ln|\pi(z)|>L(z|z|^{-1})-\varepsilon$. Поэтому для $w$ таких, что $a^{(j)}+$ $w\,\bar{\in}\,E_\varepsilon$ и $|a^{(j)}+w|>R_\varepsilon$ с учетом (3) справедливо неравенство

$$|a^{(j)}+w|^{-\rho(|a^{(j)}+w|)}\ln|q_j^\delta(w)|>L\left(\frac{a^{(j)}+w}{|a^{(j)}+w|}\right)-\varepsilon$$

ля $\delta<1$, $|w|<\delta|a^{(j)}|$. В силу непрерывности функции $L(z)$ (см. ]), можно выбрать $\delta_1$ столь малым, что будет выполнена имплиация

$$(|w|<\delta_1|a^{(j)}|,\quad a^{(j)}+w\,\bar{\in}\,E_\varepsilon,\quad |a^{(j)}+w|>R_\varepsilon)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|a^{(j)}|^{-\rho(|a^{(j)}|)}\ln|q_j^\delta(w)|>L(a^{(j)}|a^{(j)}|^{-1})-2\varepsilon. \tag{5}$$

Воспользуемся следующим утверждением, которое докажем зже, чтобы не прерывать изложение.

**Лемма 2.** *Если $E\subset\mathbf{C}^l$ — $C_0$-множество, $\delta>0$, то при некотором $R_0>0$ для всякого $z\in\mathbf{C}^l$ такого, что $|z|>R_0$, найдутся омплексная прямая $\varkappa$, проходящая через точку $z$, и окружность $\gamma$, адиуса меньшего, чем $\delta|z|$, с центром в точке $z$, лежащая на $\varkappa$, акие, что $\gamma\cap E=\varnothing$.*

В силу этой леммы, примененной к множеству $E=E_\varepsilon$, точке $z=$ $a^{(j)}$ и числу $\delta=\delta_1$, мы получим, что при $|a^{(j)}|>R_0$ указанная ужность найдется в любом шаре $B(a^{(j)},\delta_1|a^{(j)}|)$. Если теперь $|a^{(j)}|>$ $\max(2R_\varepsilon,R_0)$, $|w|<\delta_1|a^{(j)}|$, то отсюда, учитывая плюригармоничть функции $-\ln|q_j^\delta(w)|$ в шаре $B(0,\delta|a^{(j)}|)$ при $\delta<\delta_1$ и исполья принцип максимума модуля для гармонических функций, заключаем о справедливости неравенства (5) при $w=0$. Следовательно,

$$|a^{(j)}|^{-\rho(|a^{(j)}|)}\ln|b_j^\delta(0)|>L(a^{(j)}|a^{(j)}|^{-1})-2\varepsilon. \tag{6}$$

означая $\tilde{n}_j(t)=n_{a^{(j)}}(t)-1$ и применяя лемму 1 и неравенство (4), меем

$$|\ln|\pi_j^\delta(0)||\leqslant\tilde{n}_j(\delta|a^{(j)}|)\ln(1+\delta^{-1})+\int\limits_0^{\delta|a^{(j)}|}\tilde{n}_j(t)\frac{dt}{t}\leqslant$$
$$\leqslant c_0\delta^\alpha|a^{(j)}|^{\rho(|a^{(j)}|)}\ln(1+\delta^{-1})+c_0|a^{(j)}|^{\rho(|a^{(j)}|)-\alpha}\int\limits_0^{\delta|a^{(j)}|}t^{\alpha-1}dt\leqslant$$
$$\leqslant c_1\delta^{\alpha/2}|a^{(j)}|^{\rho(|a^{(j)}|)}.$$

ак как $\ln|\pi_j(a^{(j)})|=\ln|q_j^\delta(0)|+\ln|\pi_j^\delta(0)|+\ln((1+\delta)|a^{(j)}|)$, из посдней оценки и (6) получаем, что при выборе $\delta<\delta_1$ достачно малым и $|a^{(j)}|>R_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|a^{(j)}|^{-\rho(|a^{(j)}|)}\ln|\pi_j(a^{(j)})|\geqslant L(a^{(j)}|a^{(j)}|^{-1})-3\varepsilon.$$

ереходя к пределу при $j\to\infty$ с учетом произвольности выбора $\varepsilon$, лучаем

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{\ln|\pi_j(a^{(j)})|}{|a^{(j)}|^{\rho(|a^{(j)}|)}}-L(a^{(j)}|a^{(j)}|^{-1})\right)\leqslant 0.$$

Противоположное неравенство для верхнего предела следует из неравенства $|\pi_k(z)| \leqslant \max\{|\pi(z')| : |z-z'| \leqslant 2\}$, которое легко выводится из принципа максимума модуля (см. [4]).

Итак, в условиях теоремы выполняется условие (2), и для завершения доказательства нам остается сослаться на теорему 1.

В заключение данного параграфа докажем лемму 2, представляющую, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Доказательство леммы 2. Будем рассуждать от противного: предположим, что ни для какой комплексной прямой $\varkappa$, проходящей через точку $z$, указанной в формулировке леммы, окружности $\gamma$ не существует. Покажем, что это противоречит предположению о том, что $E$ — $C_0$-множество.

Пусть $E_z = E \cap B(z, \delta|z|)$ и пусть $\boldsymbol{B} = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — некоторое покрытие множества $E_z$ шарами $b_j = B(z^{(j)}, r_j)$. Оценим величину $\sum\limits_j r_j^{2l-3/2}$.

Для $\zeta \in S_1 = \{w \in \boldsymbol{C}^l : |w| = 1\}$ через $L_\zeta$ обозначим $(2l-1)$-мерную вещественную гиперплоскость, проходящую через точку $z$ перпендикулярно к вектору $\zeta$. Тем самым мы устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между сферой $S_1$ и множеством $(2l-1)$-мерных гиперплоскостей, проходящих через точку $z$.

Пусть $w \in \boldsymbol{C}^l$. Круговой проекцией точки $w$ на гиперплоскость $L_\zeta$ назовем точки пересечения окружности $\{z + e^{i\theta}w,\ \theta \in [0, 2\pi)\}$ с гиперплоскостью $L_\zeta$ (таких точек существует ровно две, если точка $w$ не лежит в $(l-1)$-мерной комплексной гиперплоскости $M_\zeta \subset L_\zeta$; в последнем случае круговой проекцией точки $w$ считаем точки $\pm w$). Соответственно круговой проекцией некоторого множества $D \subset \boldsymbol{C}^l$ на $L_\zeta$ мы называем объединение круговых проекций всех точек $w \in D$. Для обозначения круговой проекции на гиперплоскость $L$ мы будем использовать $\mathrm{pr}_L(\cdot)$.

Обозначим через $R$ величину $\delta|z|$. В дальнейшем, не нарушая общности, будем считать, что среди элементов покрытия $\boldsymbol{B}$ нет шаров радиуса большего, чем $R/4$.

Заметим, что в силу предположения, сделанного в начале доказательства, всякая окружность $\gamma$ с центром в точке $z$, лежащая на комплексной прямой, проходящей через точку $z$, и имеющая радиус $r \in (R/2, R)$, содержит хотя бы одну точку множества $E_z$. Поэтому если $\Gamma_z = B(z, R) \diagdown B(z, R/2)$, то

$$\mathrm{pr}_{L_\zeta}(E_z \cap \Gamma_z) = L_\zeta \cap \Gamma_z \quad \forall \zeta \in S_1. \tag{7}$$

Обозначим $(2l-1)$-мерную меру Лебега в $\boldsymbol{R}^{2l-1}$ через $m$ и рассмотрим величину

$$J = \sum \int\limits_{S_1} m(\mathrm{pr}_{L_\zeta}(b_j))\, d\sigma(\zeta),$$

где сумма распространяется на все $b_j \in \boldsymbol{B}$, для которых $|z^{(j)} - z| > R/4$, а $\sigma$ — нормированная мера Лебега на $S_1$. С одной стороны, в силу (7)

$$J \geqslant \int\limits_{S_1} m(\mathrm{pr}_{L_\zeta}(E \cap \Gamma_z))\, d\sigma(\zeta) \geqslant c_1(l) R^{2l-1}. \tag{7'}$$

другой, величину $J$ можно оценить, посчитав каждое слагаемое, ходящее в $J$, а затем просуммировав результаты. Имеем

$$\int\limits_{S_1} m(\mathrm{pr}_{L_\zeta}(b_j))\,d\sigma(\zeta) = \Bigl\{ \int\limits_{\{\zeta:d(L_\zeta,\ z^{(j)})<\rho_j\}} +$$

$$+ \int\limits_{\{\zeta:d(L_\zeta,\ z^{(j)})>\rho_j\}} \Bigr\} m(\mathrm{pr}_{L_\zeta}(b_j))\,d\sigma(\zeta) = J_{1,\,j} + J_{2,\,j}.$$

десь $d(L,\ w)$ — евклидово расстояние от точки $w$ до гиперплоско-ти $L$, $\rho_j$ — некоторое положительное число, $\rho_j > r_j$.

Оценим каждый интеграл в отдельности. Для этого заметим, что ножество $\Omega = \{z + e^{i\theta}b_j,\ \theta \in [0,\ 2\pi)\}$ есть тело вращения в $C^l$, по-учающееся при движении центра шара $b_j$ вокруг точки $z$ по ок-жности радиуса $|z^{(j)} - z| < 5R/4$. Так как $(2l-1)$-мерная площадь ения тела гиперплоскостью $L_\zeta$ не превосходит $(2l-1)$-мерной лощади поверхности этого тела, мы имеем

$$m(\mathrm{pr}_{L_\zeta}(b_j)) \leqslant c_2(l)\, r_j^{2l-2}\, |z^{(j)} - z|.$$

Нетрудно видеть, что $\sigma\{\zeta \in S_1 : d(L_\zeta,\ z^{(j)}) \leqslant \rho_j\} \leqslant c_3(l)\,\rho_j\,|z^{(j)} - z|^{-1}$. Поэтому $J_{1,\,j} \leqslant c_4(l)\, r_j^{2l-2}\rho_j$.

Более сложной является оценка второго интеграла. Для просто-будем считать, что $L_\zeta = z + \{w \in C^l : \mathrm{Jm}\, w_l = 0\}$. Для $w \in b_j$ оце- разность $|\arg w_l - \arg z_l{}^{(j)}|$. Имеем

$$|w - z^{(j)}| \leqslant r_j \Rightarrow |w_l - z_l^{(j)}| \leqslant r_j;\ d(L_\zeta,\ z^{(j)}) = |\mathrm{Jm}\, z_l^{(j)}| \geqslant \rho_j.$$

гко видеть, что тогда $|\arg w_l - \arg z_l^j| \leqslant \mathrm{tg}\,|\arg w_l - \arg z_l^{(j)}| \leqslant$ $r_j\rho_j{}^{-1}$ (рис. 1); угол $\varphi$ наибольший, когда $z_l^{(j)} = i\rho_j$; $z_l = (r_j + i\rho_j)$.

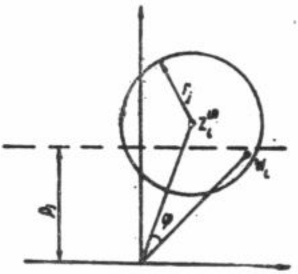

Рис. 1

Следовательно, в этом случае пересе-ние $L_\zeta \cap \Omega$ содержится в области $\{z + e^{i\theta}b_j;\quad |\theta - \arg z_l^{(j)}| \leqslant r_j\rho_j^{-1}\}$, $(2l-1)$-рная площадь поверхности которой не евосходит

$$c_5(l)\, r_j^{2l-1}\, |z^{(j)} - z|\, \rho_j^{-1} + c_6(l)\, r_j^{2l-1}.$$

оэтому $m(\mathrm{p}_{L_\zeta}(b_j)) \leqslant c_7(l)\, r_j^{2l-1}\, |z^{(j)} -$ $|\rho_j^{-1} \leqslant \frac{5}{4} c_7(l)\ R r_j^{2l-1}\rho_j^{-1}$ и, следователь-, $J_{2,\,j} \leqslant c_8(l) r_j^{2l-1} R\rho_j^{-1}$. Выбирая $\rho_j = \sqrt{Rr_j}$ и суммируя по множеству $\{j \in N:$ $/4 < |z - z^{(j)}| < 5R/4\}$, получаем оценку $J \leqslant c_9(l) \sum\limits_{b_j \in B} r_j^{2l-\frac{3}{2}} R^{\frac{1}{2}}$.

авнивая эту оценку с (7′), имеем, что

$$\sum_{b_j \in B} r_j^{2l-\frac{3}{2}} \geqslant c_{10}(l)\, R^{2l-\frac{3}{2}},$$

откуда в силу произвольности покрытия $\boldsymbol{B}$ следует, что $E$ не является $C_0^{1/2}$-множеством* (и тем более $C_0$-множеством). Последнее противоречит условию леммы.

§ 2. *Интерполяция с $R$-множеств в $\boldsymbol{C}^l$.* Введем понятие дискретного $R$-множества в $\boldsymbol{C}^l$ по аналогии с одномерным случаем (см. [9], с. 259). Именно, дискретную последовательность $A=\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ с конечным показателем сходимости $\rho$ мы будем называть $R$-множеством относительно некоторого уточненного порядка $\rho(r)\to\rho$, если выполнены следующие условия:

1) каноническое произведение $\pi(z)$, построенное по последовательности $A$, есть целая функция с правильным множеством «плоских» нулей**;

2) существует положительное число $c$ такое, что шары $B(a^{(k)}, c\,|a^{(k)}|^{1-\rho(|a^{(k)}|)/2l})$ не пересекаются.

Следующая теорема, являющаяся в данной работе основной, может рассматриваться как аналог результата Б. Я. Левина об интерполяции с $R$-множеств на плоскости (см. [9], с. 259—260).

Теорема 3. *Пусть $A=\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — $R$-множество в $\boldsymbol{C}^l$ относительно некоторого уточненного порядка $\rho(r)\to\rho$. Тогда для всякой числовой последовательности, удовлетворяющей условию (1), существует решение интерполяционной задачи {1), 2)}.*

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы можн так выбрать новое начало координат — точку $O_1$, что она, во-первых попадет в единичный шар с центром в начале координат — точке ( и, во-вторых, для системы гиперплоскостей с основаниями перпендикуляров $\{\overrightarrow{O_1a^{(k)}}\}_{k=1}^{\infty}$ будет выполняться оценка (4) теоремы 2. При таком сдвиге начала координат, как нетрудно видеть, условия 1) на $R$-множество и (1) не изменяться, и мы сможем применить теорему 2. Отметим, что возможность ее применения обусловлена тем обстоятельством, что всякая функция с правильным множеством «плоских» нулей является функцией в.р.р. (см. [10]).

Через $B_1$ обозначим шар $B$ (0; 1).

**Лемма 3.** *В условиях теоремы 3 существует точка $O_1\in B_1$ и положительные числа $\sigma$ и $\varkappa$ такие, что при любых натуральных $k$ и $j$, $k\neq j$, выполняется равенство*

$$B(a^{(k)},\ \sigma\,|a^{(k)}|^{-\varkappa})\cap H_j=\varnothing,$$

*где $H_j$ — гиперплоскость, проходящая через точку $a^{(j)}$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{O_1a^{(j)}}$.*

---

* Определение $C_0^{\alpha}$-множества см. в [8].

** Определение правильного множества «плоских» нулей см. в [10]. Это определение дает условия лишь на геометрию расположения точек последовательвости $A$. В частности, в простом случае $\rho\,\overline{\in}\,Z^+$ оно означает существование плотности точек последовательности $A$ относительно $r^{\rho(r)}$ в «почти каждом» конусе с вершиной в начале координат.

**Доказательство леммы 3** мы опускаем. Идея его заключается том, чтобы для каждого $a^{(k)}$ указать семейство таких областей $T_{k,j}$, что при $a^{(i)} \overline{\in} T_{k,j}$ выполняется вывод леммы, а затем проверить, что сумма объёмов пересечений всех областей $T_{k,j}$ с $B_1$ за счет выбора чисел $\sigma$ и $\varkappa$ может быть сделана меньше объёма $B_1$.

Воспользуемся леммой 3 для доказательства теоремы.

Пусть $O_1$ — точка, выбранная согласно лемме 3. Обозначим $\overrightarrow{OO_1} = b$, $\tilde{z} = z + b$ и через $\tilde{\pi}(\tilde{z})$ обозначим каноническое произведение, построенное по последовательности точек $\{\tilde{a}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\tilde{a}^{(k)} = a^{(k)} + b$. Нетрудно проверить, что $\tilde{\pi}(\tilde{z})$ будет целой функцией с правильным множеством «плоских» нулей и радиальным индикатором $L(\tilde{z})$. Это следует из того, что правильность множества «плоских» нулей и величина индикатора функции с «плоскими» нулями определяется лишь множеством оснований перпендикуляров к нулевым гиперплоскостям, геометрия которого не меняется при сдвиге начала координат; подробности см. в [10].

Так как функция с правильным множеством «плоских» нулей сть функция в.р.р., для завершения доказательства нам достаточно получить оценку (4) с некоторым $\alpha > 0$. Для получения этой оцен- изучим область $G_t$, образованную точками $a$ такими, что гиперлоскость с основанием перпендикуляра $\overrightarrow{O_1 a}$ пересекает шар $B(a^{(k)}$,

Рассмотрим сечение этой области любой двумерной плоскостью , проходящей через точки $O_1$ и $a^{(k)}$. Кривая $\Sigma$, ограничивающая это сечение, образована точками пересечения касательных к кругу радиса $t$ и центром в точке $a^{(k)}$ в плоскости П с перпендикулярами, опущенными на касательные из точки $O_1$. Направляя ось ординат в плоскости П по прямой $O_1 a^{(k)}$, а ось абсцисс — в перпендикулярном направлении (рис. 2), получим уравнение искомой кривой $\Sigma$

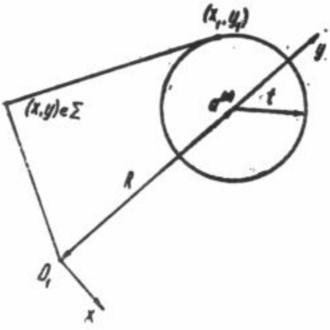

Рис. 2

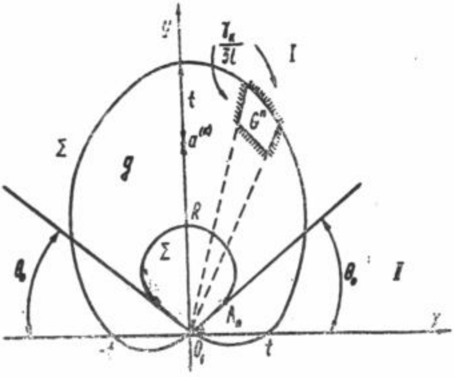

Рис. 3

$$(x^2 + y^2 - Ry)^2 = t^2 (x^2 + y^2), \quad R = |\tilde{a}^{(k)}|,$$

т. е. $\Sigma$ — улитка Паскаля (рис. 3). Её длина $s$ легко оценивается:

$2\pi$

$s=\int\limits_0^2 \sqrt{R^2+t^2+2Rt\sin\psi}\,d\psi\leqslant 2\pi(R+t)\leqslant 4\pi R$ при $t<R$. Заметим, что всякая прямая, проходящая через начало координат $O_1$, высекает из области $g$, ограниченной кривой $\Sigma$, отрезок длины $2t$.

В дальнейшем рассмотрим отдельно два случая.

1) $\rho\geqslant 2l$. Разобьем область $G_t$ на ячейки $G^n$ следующим образом. В плоскости $\Pi_0$, проходящей через точки $O_1$ и $a^{(k)}$, следы ячеек $G^n$ таковы, как показано на рис. 3. Кроме того, добавим разбиение по всем угловым координатам $\theta_j$, $j=1, 2, \ldots, 2l-2$, на отрезки дуг величиной $\gamma_k$, где $\gamma_k=c|\tilde{a}^{(k)}|^{1-\rho(|\tilde{a}^{(k)}|)/2l}$. Тогда, как нетрудно видеть, диаметр каждой ячейки не будет превосходить $\gamma_k$. В силу сделанного нами предположения ($\rho\geqslant 2l$) функцию $r^{1-\rho(r)2l}$ можно считать монотонно убывающей, и, следовательно, в силу условия 2) на множество $A$, каждая ячейка $G^n$ может содержать не более одной точки $a^{(j)}$. Оценивая число $\# G^n$ ячеек имеем

$$n_{\tilde{a}^{(k)}}(t)\leqslant \# G^n\leqslant (c_1R\gamma_k^{-1}+1)^{2l-1}(c_2t\gamma_k^{-1}+1)\leqslant 1+$$

$$+c_3|\tilde{a}^{(k)}|^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|)-1}t+c_4|\tilde{a}^{(k)}|^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|)\left(1-\frac{1}{2l}\right)}. \tag{8}$$

Оценим последнее слагаемое. Для этого заметим, что согласно выбору точки $O_1$ по лемме 3 $n_{\tilde{a}^{(k)}}(t)\equiv 1$ при $t<\sigma_1|\tilde{a}^{(k)}|^{-\varkappa}$. При $t\geqslant\sigma_1|\tilde{a}^{(k)}|^{-\varkappa}$ имеем $|\tilde{a}^{(k)}|^{\delta}<\sigma_2 t^{\delta}|\tilde{a}^{(k)}|^{\delta(\varkappa+1)}\ \forall\,\delta>0$. Поэтому при $t<|a^{(k)}|$

$$n_{\tilde{a}^{(k)}}(t)\leqslant 1+c_3t|\tilde{a}^{(k)}|^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|)-1}+$$

$$+c_4|\tilde{a}^{(k)}|^{\rho(|\tilde{a}^{\cdot k)}|)\left(1-\frac{1}{2l}\right)-\delta}\sigma_2t^{\delta}|\tilde{a}^{(k)}|^{\delta(\varkappa+1)}\leqslant 1+$$

$$+c_3t|\tilde{a}^{(k)}|^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|)-1}+c_5t^{\delta}|\tilde{a}^{(k)}|^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|)-\delta+\delta(\varkappa+1)-\frac{\rho}{4l}}.$$

Выбирая $\delta=\rho(4l(\varkappa+1))^{-1}$, получаем неравенство

$$n_{\tilde{a}^{(k)}}(t)\leqslant 1+c_6t^{\delta}|\tilde{a}^{(k)}|^{\rho(|\tilde{a}^{(k)}|)-\delta}.$$

Итак, оценка (4) с $\alpha=\delta$ и $\sigma=c_6$, а с ней и теорема 3 в рассматриваемом случае доказана.

2) $\rho<2l$. Получение оценки (4) и в этом случае основано на той же идее, что и в случае 1), однако связано с несколько бо́льшими техническими трудностями. Эти трудности возникают из-за того, что функция $r^{1-\rho(r)/2l}$ является возрастающей и размер ячеек $G^n$ должен уменьшаться при приближении к точке $O_1$. Для упрощения выкладок дальнейшее доказательство проведем для $\rho(r)\equiv\rho$. Разобьем пространство $\boldsymbol{C}^l$ на три области, которые обозначим соответствующими римскими цифрами, следующим образом:

$$\mathrm{I}=\{z\in\boldsymbol{C}^l:\mathrm{Re}<z,\ \tilde{a}^{(k)}>|z|^{-1}|\tilde{a}^{(k)}|^{-1}>\cos\theta_0\};$$
$$\mathrm{III}=\{z\in\boldsymbol{C}^l:\mathrm{Re}<z,\ \tilde{a}^{(k)}>\ <0\};$$
$$\mathrm{II}=\boldsymbol{C}^l\diagdown(\mathrm{I}\cup\mathrm{III}).$$

Пересечение этих областей с любой двумерной вещественной плоскостью, проходящей через точки $O_1$ и $a^{(k)}$, по указанной на рис. 3. Проведем оценку числа точек $a^{(j)}$ в пересечении области $G_t$ с каждой из выделенных областей.

В пересечении области $G_t$ с областью I точкой с наименьшим модулем является точка $A_0$. Считая, что $\theta_0$ таково, что, $|A_0|>0$, и выбрав $\delta_0<\sin\theta_0$, имеем $|A_0|>(\sin\theta_0-\delta_0)R=\alpha_0 R$ при $t<\delta_0 R$. Выберем $\gamma_k=c(\alpha_0 R)^{1-\rho/2l}$. Рассуждая так же, как и в пункте 1), мы получим, что число точек $a^{(j)}$, которые могут попасть в область $G_t\cap$ I, не превосходит правой части неравенства (8) с некоторыми постоянными, зависящими только от величин $\theta_0$ и $\delta_0$.

Получение оценок в областях II $\cap G_t$ и III $\cap G_t$ однотипно, поэтому мы ограничимся рассмотрением случая III $\cap G_t$, а для области II $\cap G_t$ лишь сформулируем соответствующий результат.

Заметим, что число точек $a^{(j)}$ в области III $\cap G_t$ заведомо не превосходит числа этих точек в шаре $\boldsymbol{B}(O_1, t)$. Пусть $\beta=1-\rho/2l$. Применим теперь следующую процедуру. Разобьем шаровой слой $B(O_1, t)\setminus B(O_1, t-ct^\beta/3l)$ на ячейки $G^n$ таким образом, чтобы сечение ячейки в плоскости $\Pi_0$, проходящей через точки $O_1$ и $a^{(k)}$, имело вид, указанный на рис. 4. Кроме того, добавим разбиение по всем угловым координатам $\theta_j$, $j=1, 2, \ldots,$ $2l-2$, на отрезки дуг величиной $t^\beta/3l$. Тогда диаметр каждой ячейки не превосходит $2ct^\beta/3$. Считая, что $<1$, и, следовательно, функция $-cr^\beta$ монотонно возрастает при $r>0$, заметим, что всякая ячейка при таком построении содержится в шаре $B(t_0, c|t_0|^\beta)$ для любой точки $t_0\in G^n$. Следовательно, всякая ячейка $G^n$ содержит не более одной точки $a^{(j)}$. Число $N$ таких ячеек, очевидно, не превосходит $\left(\frac{\pi t}{ct^\beta/3l}\right)^{2l-1}\leqslant c_7 t^{\rho\left(1-\frac{1}{2l}\right)}$.

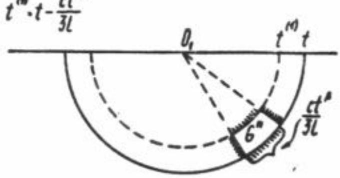

Рис. 4

В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем, что $A\cap\cap B(O_1, 2^{1/\beta})=\varnothing$, и, значит, все оценки можно проводить для $t>>2^{1/\beta}$. Обозначим $t^{(1)}=t-ct^\beta/3l$ и проделаем аналогичную процедуру для $t^{(1)}$ и так далее до тех пор, пока величина «смещения» внутрь» — $c(t^{(q)})^\beta/3l$ — не станет меньше, чем $c(t^\beta-1)/3l$. При этом $t^{(q-1)}\geqslant(t^\beta-1)^{1/\beta}$. Пользуясь неравенством $s^\alpha-(s-1)^\alpha\leqslant c_\alpha s^{\alpha-1}$, справедливым при $\alpha>1$ с некоторым $c_\alpha$ для всех $s>1$, получим

$$t-t^{(q-1)}\leqslant t-(t^\beta-1)^{1/\beta}\leqslant c_8 t^{\rho/2l}.$$

Число смещений $q$ легко оценить. Действительно, так как при каждом смещении его величина была не меньше, чем $c(t^\beta-1)/3l$, то $q\leqslant c_8 t^{\rho/2l}(c(t^\beta-1)/3l)^{-1}\leqslant c_9 t^{\rho/2l}(t^\beta-1)^{-1}$. Если при этом $t^{(q)}\leqslant\leqslant 2^{1/\beta}$, то процесс останавливается и число ячеек $\# G^n$, а с ним и число точек $a^{(j)}$ в шаре $B(O_1, t)$ не превосходит

$$\# G^n\leqslant c_7 t^{\rho-\rho/2l} c_9 t^{\rho/2l}(t^\beta-1)^{-1}\leqslant c_{10} t^{\rho-\beta},$$

так как $t^\beta - 1 \geqslant t^\beta/2$. Если же $t^{(a)} > 2^{1/\beta}$, то, обозначив $t_1 = t^{(a)}$, повторим ту же процедуру для $t = t_1$ и т. д. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока число $t_{j+1}^\beta$, $t_{j+1}^\beta \leqslant t_j^\beta - 1 \leqslant t_{j-1}^\beta - 2 \leqslant \ldots \leqslant t^\beta - j - 1$ не станет меньше 2. Следовательно, не позже, чем на $([t^\beta] - 2)$-м шаге процесс оборвется. Так как на каждом шаге число ячеек $\# G^n$ не превосходит величины $c_{10} t^{\rho - \beta}$, общее число ячеек $\# G_{\mathrm{III}}^n$ не превосходит $c_{10} t^{\rho - \beta} ([t^\beta] - 2) \leqslant c_{10} t^\rho$. Следовательно, и в области $G_t \cap \mathrm{III}$ содержится не более $c_{10} t^\rho$ точек последовательности $A$.

Аналогичная процедура для области $G_t \cap \mathrm{II}$ дает оценку $\# G_{\mathrm{II}}^n \leqslant c_{11} R^{\rho - 1} t$. Окончательно получаем, что число точек последовательности $A$ в области $G_t$ не превосходит

$$n_{a(k)}(t) \leqslant 1 + c_{12} t^\delta R^{\rho - \delta} \text{ с } \delta = \rho (4l(\varkappa + 1))^{-1},$$

где число $\varkappa$ выбрано согласно лемме 3. Таким образом, снова получена оценка (4) с $\sigma = c_{12}$ и $\alpha = \delta$. Для завершения доказательства нам осталось сослаться на теорему 2.

В заключение автор выражает благодарность проф. Л. И. Ронкину за внимание к работе.

**Список литературы:** 1. *Логвиненко В. Н.* Об интерполировании целыми функциями многих комплексных переменных//Докл. АН СССР. 1977. 234, № 2. С. 302—304. 2. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* Interpolation problems in $C^n$ with applications to harmonicanalysis//J. Anal. Math. 1980. 38. P. 188—254. 3. *Gruman L* Interpolation in spaces of entire functions in $C^n$//Canad. Math. Bull. 1976. 19, № 1. P. 109 — 112. 4. *Папуш Д. Е.* Об аналоге ряда Лагранжа для последовательности точек в $C^l$//Теория операторов и субгармонии функции. 1991. С.85—93. 5. *Папуш Д. Е.* О росте целых функций с «плоскими» нулями//Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1987. 48. С. 117 — 125. 6. *Gruman L.* The regularitu of growth of entire functions whose zeros are hyperplanes // Arkiv. Mat. 1972. 10, № 1. S. 23 — 31. 7. *Ронкин Л. И.* Целые функции//Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. 1986. 9. С.5 — 36. 8. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка//Матсборник. 1979. 108 (150). С.147 — 167. 9. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 10. *Папуш Д. Е.* Целые функции нескольких комплексных переменных с правильным множеством «плоских» нулей//Сиб. мат. журн. 1991. С.120 — 130.

*Поступила в редколлегию 13.12.89*

---

УДК 517.53.57

*Н. Н. БИЛОЦКИЙ*

# ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ ФАТУ

Последовательность комплексных чисел $S = \{S_n\}$ называют почти сходящейся к числу $L$, если

$$\lim_{m \to \infty} \frac{S_p + S_{p+1} + \ldots + S_{p+m}}{m + 1} = L$$

равномерно относительно $p = 0, 1, 2, \ldots$ и коротко пишут $F - \lim S_n = L$(см. [4, с. 30—32; 5, с. 167—168]). Если последовательность почти сходится, то она будет ограниченной [5, с. 169]. Примеры почти сходящихся последовательностей приведены в работах [4—7]. В частности, почти сходящимися будут сходящиеся последовательности, а среди расходящихся последовательностей — периодические и почти периодические последовательности [6].

Известна теорема Фату следующего содержания: если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ при } |z| < 1, \text{ и } a_n \to 0 \; (n \to \infty), \qquad (1)$$

тогда данный степенной ряд сходится в каждой точке единичной окружности, в которой функция $f(z)$ регулярна к значению этой функции в этой точке [1, с. 225; 2, с. 67; 3, с. 531].

В данной работе предлагается доказательство утверждения типа теоремы Фату.

**Теорема.** *Пусть функция* $f(z)$ *регулярна в точке* $z = 1$ и

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ при } |z| < 1, \text{ и } F - \lim a_n = 0. \qquad (2)$$

*Тогда* $F - \lim S_n = f(1)$, *где* $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ *при* $n = 0,$ , $2, \ldots .$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы Фату, приведенного в [1, с. 225—227].

Можем считать, что $f(1) = 0$. Необходимо доказать, что при условиях теоремы $F - \lim S_n = 0$, где $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ $(n = 0,$ , $2, \ldots)$. Так как $S_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{1 - z} \frac{1}{z^{n+1}} dz$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,

где в качестве контура интегрирования $\Gamma$ может быть взята окружность $|z| = r$ при $0 < r < 1$, то

$$\sigma_{pm}(s) = \frac{S_p + S_{p+1} + \ldots + S_{p+m}}{m+1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(m+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1 - re^{i\theta}} \sum_{k=0}^{m} r^{-(p+k)} e^{-(p+k)i\theta} \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi r^{p+m}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1 - re^{i\theta}} \left( \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} r^k e^{ik\theta} \right) e^{-i(p+m)\theta} d\theta$$

для каждого $m = 0, 1, 2, \ldots, p = 0, 1, 2, \ldots .$

Пусть $0 < \delta < \pi$. Определим функцию $\varphi(\theta) = \varphi(\theta, \delta, r)$ следующими условиями:

$$\varphi(\theta, \delta, r) = \begin{cases} (1 - re^{i\theta})^{-1} \text{ при } \delta < |\theta| \leqslant \pi; \\ a_0\theta^3 + a_1\theta^2 + a_2\theta + a_3 \text{ при } |\theta| \leqslant \delta, \end{cases}$$

где коэффициенты $a_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ выбраны так, чтобы для $0 \leqslant r \leqslant 1$ были выполнены равенства

$$\varphi(\pm\delta) = (1 - re^{\pm i\delta})^{-1},\ \varphi'(\pm\delta) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}(1 - re^{\pm i\theta})^{-1}\right)\Big|_{\theta=\delta} =$$

$$= \frac{ire^{\pm i\delta}}{(1 - re^{\pm i\delta})^2}. \qquad (3)$$

Положив $(1 - re^{i\theta})^{-1} = \Psi(r, \theta)$, из системы (3) получим:

$$a_0 = \frac{1}{4\delta^2}(\psi_0'(r\delta) + \psi'(r, -\delta)) - \frac{1}{4\delta^3}(\psi(r, \delta) - \psi(r, -\delta));$$

$$a_1 = \frac{1}{4\delta}(\psi_\theta'(r, \delta) - \psi_\theta'(r, -\delta)); \qquad (4)$$

$$a_2 = \frac{3}{4\delta}(\psi(r, \delta) - \psi(r, -\delta)) - \frac{1}{4}(\psi_\theta'(r, \delta) + \psi_\theta'(r, -\delta));$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(\psi(r, \delta) - \psi(r, -\delta)) - \frac{\delta}{2}(\psi_\theta'(r, \delta) + \psi_\theta'(r, -\delta)).$$

Так как $|1 - re^{i\theta}|^2 = (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos\theta \geqslant 4r\sin^2\frac{\theta}{2}$ при $0 <$ $< |\theta| < \pi$ и $0 < r \leqslant 1$, легко показать, что при тех же значениях $\theta$ и $r$ верны неравенства

$$|\psi(r, \theta)| \leqslant \left(2\sqrt{r}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)^{-1};\ |\psi_\theta'|(r, \theta)| \leqslant \left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1};$$

$$|\psi_{\theta^2}''(r, \theta)| \leqslant \left(4\sqrt{r}\left|\sin^3\frac{\theta}{2}\right|\right)^{-1}. \qquad (5$$

Наконец, учитывая условия определения функции $\varphi(\theta)$, соотношения (3) — (5), а также неравенства

$$\lim_{\theta\to-\delta-0}|\varphi_{\theta^2}''(\theta, \delta, r)| \leqslant \left(2\sqrt{r}\left|\sin^3\frac{\delta}{2}\right|\right)^{-1};$$

$$\lim_{\theta\to\delta+\theta}|\varphi_{\theta^2}''(\theta, \delta, r)| \leqslant \left(2\sqrt{r}\left|\sin^3\frac{\delta}{2}\right|\right)^{-1};$$

$$\lim_{\theta\to-\delta+0}|\varphi_{\theta^2}''(\theta, \delta, r)| \leqslant 6|a_0|\delta;$$

$$\lim_{\theta\to\delta-0}|\varphi_{\theta^2}''(\theta, \delta, r)| \leqslant 6|a_0|\delta,$$

справедливые при $0 < \delta < \pi$ и $0 < r \leqslant 1$, можно утверждать, что определенная выше функция $\varphi(\theta)$ удовлетворяет условиям:

1) для фиксированных $\delta \in ]0; \pi[$ и $r \in ]0; 1]$ функции $\varphi(\theta) = \varphi(\theta, \delta, r)$ и $\varphi'(\theta) = \varphi_\theta'(\theta, \delta, r)$ непрерывны на отрезке $[-\pi; \pi]$;

2) $|\varphi(\theta)| \leqslant H(r_0, \delta)$, $|\varphi'(\theta)| \leqslant H(r_0, \delta)$, $|\varphi''(\theta)| \equiv |\varphi_{\theta^2}''(\theta, \delta, r) \leqslant H(r_0, \delta)$, где число $H(r_0, \delta) > 0$ не зависит от $r \in [r_0, 1]$ при $r_0 > 0$, но зависит от $\delta \in ]0; \pi[$ и $H(r_0, \delta) \to +\infty$ $(\delta \to 0)$ (6).

Теперь можем написать

$$2\pi r^{p+m}\sigma_{pm}(s)=\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}}\cdot\frac{e^{-i(p+m)\theta}}{m+1}\sum_{k=0}^{m}r^k e^{i\theta k}d\theta+$$

$$+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{m+1}\sum_{k=0}^{m}r^k e^{i\theta k}\varphi(\theta)e^{-i(p+m)\theta}d\theta-$$

$$-\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{f(re^{i\theta})}{m+1}\sum_{k=0}^{m}r^k e^{i\theta k}\varphi(\theta)e^{-i(p+m)\theta}d\theta=$$

$$=J_1(p,\ m,\ r,\ \delta)+J_2(p,\ m,\ r,\ \delta)+J_3(p,\ m,\ r,\ \delta). \qquad (7)$$

Из условия регулярности функции $f(z)$ при $z=1$ и $f(1)=0$ следует уществование такого $\theta_0>0$, что $f(re^{i\theta})=O(1-re^{i\theta})$ при $|\theta|<\theta_0$ авномерно относительно $r\in[r_0,\ 1]$ и, стало быть, независимо от $\in[r_0;\ 1]$

$$J_1(p,\ m,\ r,\ \delta)=\int\limits_{-\delta}^{\delta}O(1)\,d\theta=O(\delta)\ \text{при}\ \delta\in]0;\ \theta_0]$$

$$\text{и всех}\ m,\ p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \qquad (8)$$

сть теперь $\delta$ фиксировано. В силу равномерной сходимости данного пенного ряда внутри круга $|z|<1$, справедливо равенство

$$J_2(p,\ m,\ r,\ \delta)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n e^{in\theta}\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}r^k e^{ik\theta}\varphi(\theta)\,e^{-i(p+m)\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{m+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}a_k r^n e^{in\theta}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}a_{k+n}r^{n+m}e^{i(n+m)\theta}\Big)\varphi(\theta)e^{-i(p+m)\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}a_k r^n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\,e^{i(n-p-m)\theta}d\theta+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{n+m}}{m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{k+n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\,e^{i(n-p)\theta}d\theta=$$

$$=J_{21}(p,\ m,\ r,\ \delta)+J_{22}(p,\ m,\ r,\ \delta)$$

ля всех $m$, $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и $r\in[r_0;\ 1[$, где $J_{21}(p,\ 0,\ r,\ \delta)=0$. Оценим ервое слагаемое $J_{21}$. Дважды интегрируя по частям, для каждого $=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ получим

$$J_{21}(p,\ m,\ r,\ \delta)=-\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{r^n}{(m+p-n)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi''(\theta)\,e^{i(n-p-m)\theta}\,d\theta.$$

Используя условия (6), можем для каждого фиксированного $\delta\in]0;\ \theta_0]$ олучить такие оценки:

$$|J_{21}(p,\ m,\ r,\ \delta)| \leqslant \frac{2\pi H(r_0,\ \delta)}{m+1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(m-n)^2} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| = 2\pi \cdot H(r_0,\ \delta) \sum_{n=0}^{m-1} b_{mn} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_k \right|$$

для всех $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ независимо от $p$ и $r \in [r_0;\ 1[$, где элементы матрицы $B = (b_{mn})$ определяются равенствами

$$b_{mn} = \begin{cases} \dfrac{n}{(m+1)(m-n)^2} \text{ при } 0 \leqslant n < m,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ \qquad 0 \qquad \text{при } n \geqslant m,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \end{cases}$$

и удовлетворяет условиям

а) $b_{mn} \to 0\ (m \to \infty)$ для каждого $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$;

б) $\sup\limits_{0<m<+\infty} \sum\limits_{n=0}^{m-1} |b_{mn}| \leqslant \sup\limits_{0<m<+\infty} \dfrac{m-1}{m+1} \sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{1}{n^2} < +\infty.$

Таким образом, матрица $B = (b_{mn})$ преобразовывает всякую сходящуюся к нулю последовательность в последовательность также сходящуюся к нулю [3, с. 126—127]. Если после этого учесть условие (2), то

$$|J_{21}(p,\ m,\ r,\ \delta)| \leqslant 2\pi \cdot H(r_0,\ \delta) \left| \sum_{n=0}^{m-1} b_{mn} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \to 0\ (m \to \infty)$$

для каждого фиксированного $\delta \in ]0;\ \theta_0]$, независимо от $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ при любом $r \in [r_0;\ 1]$. Оценим после этого второе слагаемое $J_{22}$. Дважды интегрируя по частям все члены ряда, кроме члена с номером $n = p$, получим равенство

$$J_{22}(p,\ m,\ r,\ \delta) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} a_{k+p}}{m+1}\, r^{p+m} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\, d\theta - \sum_{n \neq p} \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} a_{k+n}}{m+1} \times \frac{r^{n+m}}{(n-p)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi''(\theta)\, e^{i(n-p)\theta}\, d\theta,$$

справедливое при всех $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p = 0,\ 1, 2,\ \ldots,\ r \in [r_0,\ 1[$ и для каждого фиксированного $\delta \in [0;\ \theta_0]$. Положим

$$\varepsilon_m = \max_{0 \leqslant p < +\infty} \left( \frac{1}{m+1} \left| \sum_{k=0}^{m} a_{k+p} \right| \right) \ (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда, в силу условия (2) $\varepsilon_m \to 0\ (m \to \infty)$. Отсюда и из условий (6) следует, что для каждого фиксированного $\delta \in ]0;\ \theta_0]$

$$|J_{22}(p,\ m,\ r,\ \delta)| \leqslant 2\pi \cdot H(r_0,\ \delta) \cdot \varepsilon_m \cdot \left(1 + \sum_{n \neq p} \frac{1}{(n-p)^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \cdot H(r_0,\ \delta) \cdot \varepsilon_m \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \cdot H(r_0,\ \delta) \cdot \varepsilon_m \cdot \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \to 0\ (m \to \infty) \tag{9}$$

равномерно относительно $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и независимо от $r \in [r_0,\ 1]$.

Далее,

$$J_3(p,\ m,\ r,\ \delta) = \frac{1}{m+1} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(re^{i\theta})}{1 - re^{i\theta}} \left(1 - r^{m+1} e^{i(m+1)\theta}\right) e^{-i(p+m)\theta}\, \varphi(\theta)\, d\theta$$

и, как уже ранее отмечалось, из регулярности функции $f(z)$ в точке $z = 1$ и равенства $f(1) = 0$ следует существование такого $\theta_0 > 0$, что $f(re^{i\theta}) = 0\,(1 - re^{i\theta})$ при $|\theta| \leqslant \theta_0$ равномерно относительно $r \in [r_0;\ 1[$. Тогда, обратившись к условиям (6) еще раз, получаем, что

$$|J_3(p,\ m,\ r,\ \delta)| \leqslant \frac{4\delta \cdot H(r_0,\ \delta)}{m+1} \mathrm{O}(\delta) \to 0\ (m \to \infty) \tag{10}$$

для каждого фиксированного $\delta \in ]0;\ \theta_0]$ независимо от $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ для всех $r \in [r_0;\ 1[$.

Наконец, используя последовательно соотношения (8) — (10), для любого $\varepsilon > 0$ можно сначала найти $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \in ]0;\ \theta_0]$, для которого $|J_1(p, m, r, \delta)| < \frac{1}{3}\varepsilon$, а затем выбрать $m_0 = m_0(\varepsilon,\ \delta_1)$ такое, что для всех $m > m_0(\varepsilon,\ \delta_1)$: $|J_2(p, m, r, \delta_1)| < \frac{1}{3}\varepsilon$, $|J_3(p, m, r, \delta_1)| < \frac{1}{3}\varepsilon$, равномерно относительно $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и независимо от $r \in [r_0;\ 1[$. Тогда равенство (7) позволяет заключить: $2\pi r^{p+m} |\sigma_{pm}(s)| < \varepsilon$ для всех $m > m_0(\varepsilon,\ \delta_1(\varepsilon))$ равномерно относительно $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и $r \in [r_0;\ 1[$. Так как $r$ сколь угодно близко к единице, $|\sigma_{pm}(s)| < \varepsilon/2\pi$ равномерно относительно $p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. В силу произвольной малости $\varepsilon > 0$ теорема доказана.

Заметим, что с помощью доказанной теоремы можно получить теорему Фату. Действительно, пусть выполняются условия (1) и $z = e^{i\varphi_0}$ — точка регулярности функции $f(z)$ на единичной окружности. В этой точке частные суммы степенного ряда (1) имеют вид

$$\overline{S}_n = a_0 + a_1 e^{i\varphi_0} + a_2 e^{i2\varphi_0} + \ldots + a_n e^{in\varphi_0}\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда точка $z = 1$ будет точкой регулярности для функции $f(\widetilde{z} \cdot e^{i\varphi_0})$, где $\widetilde{z} = z \cdot e^{-i\varphi_0}$. Кроме того,

$$f(\widetilde{z} \cdot e^{i\varphi_0}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\varphi_0} \widetilde{z} \quad \text{при } |\widetilde{z}| < 1,\ a_n e^{in\varphi_0} \to 0\ (n \to \infty)$$

и, следовательно, $F - \lim a_n e^{in\varphi_0} = 0$. То есть для функции $f(\tilde{z}e^{i\varphi_0})$ выполняются условия доказанной выше теоремы и поэтому $F - \lim \bar{S}_n = f(e^{i\varphi_0})$, что вместе с условием $a_n e^{in\varphi_0} \to 0 \ (n \to \infty)$ приводит к утверждению: $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = f(e^{i\varphi_0})$ (см. [4, теорема 4; 5, теорема 6; 7, следствие 1]).

Необходимо так же отметить, что условия (2) теоремы выполняются, например, для функции

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \text{ при } |z| < 1, \tag{11}$$

где $a_n = (-1)^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$, и поэтому $F - \lim a_n = 0$. Так как

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 2k, \ k = 0, 1, 2, \ldots; \\ 0 \text{ при } n = 2k+1, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$F - \lim S_n = \frac{1}{2}$, что совпадает со значением функции (11) в ее точке регулярности $z = 1$.

Из доказанной нами теоремы, сославшись на теорему 3 работы [7], нетрудно получить

Следствие. *Пусть функция* $f(z)$ *регулярна в точке* $z = 1$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n \textit{ при } |z| < 1, \text{ и } F - \lim a_n = 0.$$

*Если последовательность* $S = \{S_n\}$ *удовлетворяет условию* $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} |S_m - S_{n_k}| \leqslant r < +\infty \ (r \geqslant 0)$, когда $0 < m - n_k = O(1) \ (k \to \infty)$, или условию $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} |S_{n_k} - S_m| \leqslant r < +\infty \ (r \geqslant 0)$, *когда* $0 < n_k - m = O(1) \ (k \to \infty)$, где $n_k$ — *заданная возрастающая последовательность натуральных чисел, тогда* $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} |S_{n_k} - f(1)| \leqslant r$.

Подобные следствия из основной теоремы данной работы могут быть получены после привлечения теорем тауберового типа для почти сходящихся последовательностей, содержащихся в работе [7].

**Список литературы:** 1. *Титчмарш Е.* Теория функций. М., 1980. 463 с. 2. *Постников А. Г.* Тауберова теория и ее применения // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. М., 1979. Т. 144. 148 с. 3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М., Мир, 1965. Т. 1. 615 с. 4. Лоренц Г. Г. Абсолютная сходимость // Учен. зап. ЛГУ, 1941. Сер. мат. Вып. 12. С. 30—41. 5. *Lorentz G. G.* A contribution to the theory divergent sequences // Acta Math. 1948. 80. P. 167—190. 6. *Siddiqi J. A.* Infinite matrices summing everi almost periodic sequence // Pacific. J. Math. 1971. 39, № 1. P. 235—251. 7. *Билоцкий Н. Н.* Теоремы тауберового типа для матричных методов суммирования рядов, равномерно транслятивных справа // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1982. Вып. 38. С. 12—15.

*Поступила в редколлегию 01.09.89*

УДК 517.521.8

В. Ф. ВЛАСЕНКО

# ОДНА ТЕОРЕМА МЕРСЕРОВА ТИПА

В данной работе дается одно обобщение теоремы Мерсера. Справедлива

**Теорема.** *Пусть положительные последовательности* $(p_n)$, $(b_n^{(q)})$ *и неотрицательные последовательности* $(b_n^{(i)})$, $i = 1,\ 2, \ldots,\ q - 1$, *удовлетворяют условиям:*

$$P_n = p_0 + \ldots + p_n \to +\infty \quad (n \to \infty); \tag{1}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \Big(b_n^{(q)} - \sum_{i=1}^{q-1} b_n^{(i)}\Big) = b > 0, \qquad \sum_{i=1}^{q} b_n^{(i)} \leqslant H \ (n = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{2}$$

*где* $H$ *не зависит от* $n$,

$$\frac{b_n^{(q)}}{p_n} \geqslant \frac{b_n^{(q-1)}}{p_{n-1}} \geqslant \frac{b_n^{(q-2)}}{p_{n-2}} \geqslant \cdots \geqslant \frac{b_n^{(2)}}{p_{n-q+2}} \geqslant \frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}}. \tag{3}$$

*Тогда преобразование*

$$t_n = \frac{1 - \sum\limits_{i=1}^{q} b_n^{(i)}}{P_n} \cdot \sum_{k=0}^{n} p_k S_k + \sum_{i=1}^{q} b_n^{(i)} S_{n-q+i} \tag{4}$$

*вполне неэффективно.*

**Доказательство.** Из условий, наложенных на $(p_n)$, $(b_n^{(i)})$, $i = 1, \ldots, q$, следует, что матрица $A$ преобразования (4) является нижней треугольной $T$-матрицей. Поэтому в силу теоремы Мазура—Орлича [1, стр. 375] достаточно установить, что матрица $A$ не суммирует ни одной неограниченной последовательности.

Обозначим $\frac{1}{P_n}\sum\limits_{k=0}^{n} p_k S_k$ через $\omega_n$ $(n = 0,\ 1, \ldots)$. Тогда

$$S_n = \frac{1}{p_n}(\omega_n P_n - \omega_{n-1} P_{n-1});$$

$$t_n = \Big(1 - \sum_{i=1}^{q} b_n^{(i)} + b_n^{(q)} \frac{P_n}{p_n}\Big)\omega_n + \Big(\frac{b_n^{(q-1)}}{p_{n-1}} - \frac{b_n^{(q)}}{p_n}\Big) P_{n-1}\omega_{n-1} +$$

$$+ \Big(\frac{b_n^{(q-2)}}{p_{n-2}} - \frac{b_n^{(q-1)}}{p_{n-1}}\Big) P_{n-2}\omega_{n-2} + \ldots +$$

$$+ \Big(\frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}} - \frac{b_n^{(2)}}{p_{n-q+2}}\Big) P_{n-q+1}\omega_{n-q+1} - \frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}} P_{n-q}\omega_{n-q},$$

откуда

$$\left(1-\sum_{i=1}^{q} b_n^{(i)}+b_n^{(q)}\frac{P_n}{p_n}\right)\omega_n=\left(\frac{b_n^{(q)}}{p_n}-\frac{b_n^{(q-1)}}{p_{n-1}}\right)P_{n-1}\omega_{n-1}+$$

$$+\left(\frac{b_n^{(q-1)}}{p_{n-1}}-\frac{b_n^{(q-2)}}{p_{n-2}}\right)P_{n-2}\omega_{n-2}+\ldots+$$

$$+\left(\frac{b_n^{(2)}}{p_{n-q+2}}-\frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}}\right)P_{n-q+1}\omega_{n-q+1}+\frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}}P_{n-q}\,\omega_{n-q}+t_n. \qquad (5)$$

Из неравенств (3) следует, что коэффициенты при $\omega_k$ в правой части равенства (5) неотрицательны. Убедимся, что коэффициент при $\omega_n$ положителен. Действительно, используя (3), неотрицательность $(b_n^{(i)})$, $i=1,\ \ldots,\ q$, получим

$$b_n^{(q)}\frac{P_n}{p_n}-(b_n^{(q)}+b_n^{(q-1)}+\ldots+b_n^{(1)})=$$

$$=b_n^{(q)}\frac{P_n}{p_n}-b_n^{(q)}-(b_n^{(q-1)}+\ldots+b_n^{(1)})=b_n^{(q)}\frac{P_{n-1}}{p_n}-$$

$$-(b_n^{(q-1)}+\ldots+b_n^{(1)})\geqslant b_n^{(q-1)}\frac{P_{n-1}}{p_{n-1}}-(b_n^{(q-1)}+\ldots+b_n^{(1)})\geqslant\ldots$$

$$\ldots\geqslant b_n^{(2)}\frac{P_{n-q+2}}{p_{n-q+2}}-(b_n^{(2)}+b_n^{(1)})=b_n^{(2)}\frac{P_{n-q+1}}{p_{n-q+2}}-b_n^{(1)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{b_n^{(1)}}{p_{n-q+1}}P_{n-q+1}-b_n^{(1)}=b_n^{(1)}\frac{P_{n-q}}{p_{n-q+1}}\geqslant 0.$$

Не умаляя общности, последовательность $(S_n)$ можно считать действительной.

Пусть действительная неограниченная последовательность $(S_n)$ суммируется матрицей $A$ к числу $S\neq\infty$. Тогда последовательность $(\omega_n)$ ограничена. Действительно, предполагая противное, выделим возрастающую последовательность $(n_k)$ натуральных чисел такую, что $|\omega_n|\leqslant|\omega_{n_k}|$, $\forall n\leqslant n_k$; $|\omega_{n_k}|\to+\infty$ $(k\to\infty)$.

Полагая в (5) $n=n_k$, используя неотрицательность коэффициентов при $\omega_i$, теорему о модуле суммы и деля обе части (5) на $|\omega_{n_k}|$, получим

$$1-\sum_{i=1}^{q} b_{n_k}^{(i)}+b_{n_k}^{(q)}\frac{P_{n_k}}{p_{n_k}}\leqslant\left(\frac{b_{n_k}^{(q)}}{p_{n_k}}-\frac{b_{n_k}^{(q-1)}}{p_{n_k-1}}\right)P_{n_k-1}+$$

$$+\left(\frac{b_{n_k}^{(q-1)}}{p_{n_k-1}}-\frac{b_{n_k}^{(q-2)}}{p_{n_k-2}}\right)P_{n_k-2}+\ldots+\left(\frac{b_{n_k}^{(2)}}{p_{n_k-q+2}}-\frac{b_{n_k}^{(1)}}{p_{n_k-q+1}}\right)P_{n_k-q+1}+$$

$$+\frac{b_{n_k}^{(1)}}{p_{n_k-q+1}}P_{n_k-q}+\frac{|t_{n_k}|}{|\omega_{n_k}|}.$$

Группируя слагаемые при $b_{n_k}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, q)$ и приводя подобные члены, имеем $1 \leqslant \frac{|t_{n_k}|}{|\omega_{n_k}|}$, что для достаточно больших $k$ невозможно в силу ограниченности $(t_{n_k})$ и неограниченности $(\omega_{n_k})$.

Из ограниченности $(t_n)$, $(\omega_n)$ и из (4) следует ограниченность $\sum\limits_{i=1}^{q} b_n^{(i)} S_{n-q+i} \equiv \gamma_n$, откуда в силу условия (2) вытекает ограниченность $(S_n)$. Действительно, предполагая противное, возьмем возрастающую последовательность $(m_k)$ натуральных чисел такую, что $|S_n| \leqslant |S_{m_k}|$, $\forall n \leqslant m_k$, $|S_{m_k}| \to +\infty$ $(k \to \infty)$. Тогда для всех достаточно больших $k$ запишем

$$|\gamma_{m_k}| = |\sum_{i=1}^{q} b_{m_k}^{(i)} S_{m_k-q+i}| \geqslant b_{m_k}^{(q)} |S_{m_k}| - |S_{m_k}| \sum_{i=1}^{q-1} b_{m_k}^{(i)} =$$

$$= |S_{m_k}| (b_{m_k}^{(q)} - \sum_{i=1}^{q-1} b_{m_k}^{(i)}) > \frac{b}{2} |S_{m_k}| \to +\infty \quad (k \to +\infty),$$

что противоречит ограниченности $(\gamma_n)$.

Значит, матрица $A$ не суммирует ни одной неограниченной (и и одной ограниченной расходящейся) последовательности.

Теорема доказана. При $q = 1$ из нее получаем один результат Н. А. Давыдова [2].

*Замечание*. Условие (2) существенно для справедливости теоремы. Так, взяв $q = 2$, $b_n^{(1)} = b_n^{(2)} = 1$, $p_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, получим

$$t_n = \frac{1-2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k + (S_{n-1} + S_n) =$$

$$= -\frac{(S_0 + \cdots + S_{n-2})}{n+1} + S_{n-1} - \frac{S_{n-1}}{n+1} + S_n - \frac{S_n}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

для $S_n = (-1)^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Условия (1), (3) для $(b_n^{(1)})$, $(b_n^{(2)})$ и $(p_n)$ выполнены, а условие (2) не выполнено, так как $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n^{(2)} - b_n^{(1)}) = 0$.

В заключение благодарю Г. А. Михалина за ценные советы.

**Список литературы:** 1. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., 1960. 471 с. 2. *Давыдов Н. А.* Обобщение мерсеровой теоремы Кноппа—Белинфанте//Теория функций, функциональный анализ и их прил. 1966. Вып. 3. С. 73—77.

***Поступила в редколлегию 01.09.89***

УДК 517.925.71

В. Р. СМИЛЯНСКИЙ

# РЕШЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ И БОКОВОЙ ЗАДАЧ СВЯЗИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ $n$-го ПОРЯДКА. II

Ниже следует доказательство результатов, изложенных ранее (см. настоящий сб., вып. 52. с. 126—129) применительно к уравнению

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(z)\, y^{(\nu)}(z) = 0; \qquad P_\nu(z) = \sum_{\mu=\nu}^{n} a_{\nu,\mu} z^\mu; \qquad a_{nn} = 1,$$

где $a_{\nu,\mu}$ — постоянные из (6), (7).

Анонсированные результаты доказаны в работе [6]. Поэтому ниже будем ссылаться на соответствующие выражения из [6].

**Теорема 3.** *Для уравнения (1) с коэффициентами (6), (7) уравнением, определяющим функцию $v_k(\xi)$ в выражении (3) («трансформанту Лапласа»), является следующее уравнение Жордана—Похгаммера:*

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu C_{\varsigma+n-\nu-1}^{n-\nu} Q^{(n-\nu)}(\xi)\, v^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu C_{\varsigma+n-\nu-1}^{n-\nu-1} K^{(n-\nu-1)}(\xi)\, v^{(\nu)} = 0. \tag{23}$$

**Лемма 1.** *Для уравнения (1) с произвольными $a_{\nu,\mu}$ уравнение, определяющее трансформанту Лапласа, может быть приведено к виду*

$$\sum_{\nu=0}^{n} v^{(\nu)} \Bigl(\sum_{k=0}^{\nu} b_{\nu,k} \xi^k\Bigr) = 0; \quad b_{\nu,k} = \sum_{\mu=\nu}^{n} (-1)^\mu C_\mu^\nu \gamma_{(\mu-\nu+k),(k+1)} a_{\mu-\nu+k,\mu}. \tag{24}$$

Доказательство леммы 1. Согласно [3, с. 120; 4, гл. VIII] дифференциальный оператор $M_\xi^*(v)$ уравнения, определяющего трансформанту Лапласа для уравнения (1), имеет вид

$$M_\xi^*(v) = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu (vC_\mu)^{(\mu)} = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} C_\mu^\nu v^{(\nu)} C_\mu^{(\mu-\nu)}; \tag{25}$$

$$G_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\nu,\mu} \xi^\nu. \tag{26}$$

Меняя в (25) порядок суммирования, получаем

$$M_\xi^*(v) = \sum_{\nu=0}^{n} v^{(\nu)} \sum_{\mu=\nu}^{n} (-1)^\mu C_\mu^\nu G_\mu^{(\mu-\nu)}. \tag{27}$$

С другой стороны,
$$G_\mu^{(\mu-\nu)} = \sum_{k=0}^{\nu} \gamma_{(\mu-\nu+k),(k+1)} a_{\mu-\nu+k,\mu} \xi^k. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (27), а затем, меняя порядок суммирования, последовательно получаем

$$\begin{aligned} M_\xi^*(v) &= \sum_{\nu=0}^{n} v^{(\nu)} \sum_{\mu=\nu}^{n} (-1)^\mu C_\mu^\nu \sum_{k=0}^{\nu} \gamma_{(\mu-\nu+k),(k+1)} a_{\mu-\nu+k,\mu} \xi^k = \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} v^{(\nu)} \sum_{k=0}^{\nu} \xi^k \Bigl( \sum_{\mu=\nu}^{n} (-1)^\mu C_\mu^\nu \gamma_{(\mu-\nu+k),(k+1)} a_{\mu-\nu+k,\mu}\Bigr). \end{aligned} \tag{29}$$

Из последнего в (29) выражения следует уравнение (24).

**Лемма 2.**
$$C_{(\varsigma+m)}^{\delta} = \sum_{\varphi=0}^{\delta} (-1)^\varphi C_{n-(m+1)+\varphi}^{\varphi} C_{(\varsigma+n)}^{\delta-\varphi} \tag{30}$$

**Доказательство леммы 2.** Введем символ Похгаммера $(a)_\delta = a(a+1)(a+2)\cdots(a+\delta-1)$, где $a$ — произвольное комплексное число. В этом обозначении $\delta! = (1)_\delta$; $\binom{a}{\delta} = \frac{(a-\delta+1)_\delta}{(1)_\delta}$. (31)

Как известно ([5], с. 7, 8),

$$(a-b)_\delta = \sum_{\varphi=0}^{\delta} (-1)^\varphi \binom{\delta}{\varphi} (a+\varphi)_{(\delta-\varphi)} (b)_\varphi, \tag{32}$$

где $b$ — также произвольное комплексное число. Согласно формулам (31)

$$C^{\delta}_{(\zeta+m)} = \frac{(\zeta+m-\delta+1)_\delta}{(1)_\delta} \equiv \frac{([\zeta+n-\delta+1]-[n-m])_\delta}{(1)_\delta}. \tag{33}$$

Преобразуя последнее выражение в правой части равенства (33) с помощью выражений (32), (31) получаем

$$C^{\delta}_{(\varsigma+m)} = \frac{1}{(1)_\delta} \sum_{\varphi=0}^{\delta} (-1)^\varphi \frac{(\delta-\varphi+1)_\varphi}{(1)_\varphi} (\zeta+n-\delta+\varphi+1)_{(\delta-\varphi)} (n-m)_\varphi. \tag{34}$$

Легко проверить, что $(\delta-\varphi+1)_\varphi \,|\, (1)_\delta = 1 \,|\, (1)_{(\delta-\varphi)}$. Поэтому

$$C^{\delta}_{(\varsigma+m)} = \sum_{\varphi=0}^{\delta} (-1)^\varphi \frac{(\zeta+n-\delta+\varphi-1)_{(\delta-\varphi)}}{(1)_{(\delta-\varphi)}} \frac{(n-m)_\varphi}{(1)_\varphi}, \tag{3 5}$$

откуда в силу выражений (31) следует соотношение (30).

**Доказательство теоремы 3.** Подставим в уравнение (23) полиномы $Q(\xi)$ и $K(\xi)$ в явном виде. Так как

$$Q^{(n-\nu)}(\xi) = \sum_{k=0}^{\nu} \gamma_{(n-\nu+k),\,(k+1)} q_{(n-\nu+k)} \xi^k; \tag{36}$$

$$K^{(n-\nu-1)}(\xi) = \sum_{k=0}^{\nu} \gamma_{(n-1-\nu+k),\,(k+1)} p_{(n-1-\nu+k)} \xi^k,$$

уравнение (23) можно записать

$$v^{(n)} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} q_k \xi^k + \sum_{\nu=0}^{n-1} v^{(\nu)} (-1)^\nu \sum_{k=0}^{\nu} \xi^k \bigl(C^{n-\nu}_{\varsigma+n-1-\nu} \gamma_{(n-\nu+k),\,(k+1)} q_{(n-\nu+k)} +$$
$$+ C^{n-1-\nu}_{\varsigma+n-1-\nu} \gamma_{(n-1-\nu+k),\,(k+1)} p_{(n-1-\nu+k)}\bigr) = 0. \tag{37}$$

Приравнивая коэффициенты при $v^{(\nu)}$ в уравнениях (24) и (37), получаем равенство (6) и следующую систему уравнений (из которой можно найти остальные $a_{k,\,n-m}$):

$$b_{\nu,\,k} \equiv \sum_{\mu=\nu}^{n} (-1)^\mu C^{\nu}_{\mu} \gamma_{(\mu-\nu+k),\,(k+1)} a_{\mu-\nu+k,\,\mu} =$$
$$= (-1)^\nu \bigl(C^{n-\nu}_{\varsigma+n-1-\nu} \gamma_{(n-\nu+k),\,(k+1)} q_{(n-\nu+k)} + C^{n-1-\nu}_{\varsigma+n-1-\nu} \gamma_{(n-1-\nu+k),\,(k+1)} \times$$
$$\times p_{(n-1-\nu+k)}\bigr), \quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,\nu \quad \nu=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1. \tag{38}$$

Последовательно полагая в выражении (38) $\nu = n-1$, $n-2$, $n-3$, можно прямым вычислением убедиться в справедливости соотношения (7) для $m = 1, 2, 3$. Пусть (7) справедливо для $\nu = n-1, n-2, \ldots, n-m$ в уравнениях (38). Полагая в (38) $\nu = n-m-1$ и затем подставляя в (38) выражения (6), (7) (соответствующие $\nu = n-1, n-2, \ldots, n-m$), получаем для левой части (38)

$$b_{n-m-1,\,k} = (-1)^{n-m-1} a_{k,\,n-m-1} + \sum_{\mu=n-m}^{n-1} (-1)^{\mu} C_{\mu}^{n-m-1} \times$$
$$\times\, \gamma_{(k+1+m-n+\mu),\,(k+1)} [q_{(k+1+m)} \gamma_{(k+1+m),\,(k+2+m-n+\mu)} C_{(\varsigma+n)}^{n-\mu} +$$
$$+\, p_{(k+m)} \gamma_{(k+m),\,(k+2+m-n+\mu)} C_{(\varsigma+n)}^{n-\mu-1}] +$$
$$+\, (-1)^{n} C_{n}^{n-m-1} \gamma_{(k+1+m),\,(k+1)} q_{(k+1+m)}. \tag{39}$$

Так как
$$\gamma_{(k+m),\,(k+\omega)} \gamma_{(k+\omega-1),\,(k+1)} = \gamma_{(k+m),\,(k+1)}, \tag{40}$$
выражение (39) можно записать в виде

$$b_{n-m-1,\,k} = (-1)^{n-m-1} a_{k,\,n-m-1} + q_{(k+1+m)} \gamma_{(k+1+m),\,(k+1)} \times$$
$$\times \sum_{\varphi=1}^{m+1} (-1)^{n-m-1+\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{n-m-1} C_{(\varsigma+n)}^{m+1-\varphi} +$$
$$+\, p_{(k+m)} \gamma_{(k+m),\,(k+1)} \sum_{\varphi=1}^{m} (-1)^{n-m-1+\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{n-m-1} C_{(\varsigma+n)}^{m-\varphi}. \tag{41}$$

Приравнивая правую часть выражения (41) к последней правой части выражения (38), взятой при $\nu = n-m-1$, находим

$$a_{k,\,n-m-1} = q_{(k+1+m)} \gamma_{(k+1+m),\,(k+1)} [C_{(\varsigma+m)}^{m+1} -$$
$$- \sum_{\varphi=1}^{m+1} (-1)^{\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{\varphi} C_{(\varsigma+n)}^{m+1-\varphi}] + p_{(k+m)} \gamma_{(k+m),\,(k+1)} \times$$
$$\times [C_{(\varsigma+m)}^{m} - \sum_{\varphi=1}^{m} (-1)^{\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{\varphi} C_{(\varsigma+n)}^{m-\varphi}]. \tag{42}$$

Теорема будет доказана, если выражение (42) может быть преобразовано к виду

$$a_{k,\,n-m-1} = q_{(k+1+m)} \gamma_{(k+1+m),\,(k+1)} C_{(\varsigma+n)}^{m+1} + p_{(k+m)} \gamma_{(k+m),\,(k+1)} C_{(\varsigma+n)}^{m}. \tag{43}$$

Очевидно, что выражения (42), (43) совпадают, если выполняется

$$C_{(\varsigma+m)}^{m} = \sum_{\varphi=0}^{m} (-1)^{\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{\varphi} C_{(\varsigma+n)}^{m-\varphi}; \tag{44}$$

$$C_{(\varsigma+m)}^{m+1} = \sum_{\varphi=0}^{m+1} (-1)^{\varphi} C_{(n-m-1+\varphi)}^{\varphi} C_{(\varsigma+n)}^{m+1-\varphi}. \tag{45}$$

Полагая в выражении (30) $\delta = m$, $m+1$, находим, что соотношения (44), (45) действительно имеют место.

*Замечание.* В [1] предполагается, что $X_{\infty}$ каноническая ф. м. при $\xi = \infty$. Введем ф. м. $X'_{\infty}(\xi) = X_{\infty}(\xi) P$, где $P$ — постоянная неособая матрица. Соответственно $X'_{\infty}(\xi) = X_k(\xi) H'_k$, где $H'_k = H_k P$. По аналогии с выражением (6) в [1] введем $\psi'(z) = \int\limits_{\Omega_n} X'_{\infty}(\xi) e^{z\xi} d\xi = \psi(z) P$, где $\psi(z)$ — каноническая ф. м. системы (1) в [1] в окрестности $z = 0$. Следовательно, $\psi'(z)$ — произвольная ф. м. в окрестности $z = 0$. Теорема 1 в [1] полностью справедлива для произвольной ф. м. $X'_\infty(\xi)$, а значит и для соответствующей ф. м. $\psi'(z)$. Доказательство этого утверждения дословно повторяет доказательство теоремы 1 (с заменой $H_k$ на $H'_k$). Под $X_\infty(\xi)$ в выражении (13) подразумевается не каноническая ф. м.

Далее под функцией $v_k(\xi)$ в выражении (3) понимается единственное неголоморфное в точке $\xi = \lambda_k$ решение уравнения (23), соответствующее показателю $-(r_k + 1) = \zeta + n - 1 + \alpha_k$. Отсюда следует выражение для $r_k$ в формулах (10). Как известно, $v_k(\xi) = (\xi - \lambda_k)^{-(r_k+1)} v'_k(\xi)$, где функция $v'_k(\xi)$ голоморфна в точке $\xi = \lambda_k$.

Ф. м. $\Phi_1(z)$ для уравнения (1) с коэффициентами (6), (7) выбираем в виде $\Phi_1(z) = \{y_1(z), \ldots, y_n(z)\}$, где $y_k(z)$ задается выражением (3), в котором $v_k(\xi) = W_{k\xi}$ ($W_{k\xi}$ — решение уравнения (23), рассмотренное в работе [6, см. там выражение (4)]. Ф. м. $X_k$ ($k = \overline{1, n}$) выбираем в виде выражений (17) — (27) в работе [6].

**Предложение.** *Для выбранной выше ф. м.* $\Phi_1(z)$ *коэффициенты* $C_{j0} (\equiv g_j)$ *в разложении* (2) *имеют вид* (*18*), (*19*).

Доказательство. Как известно ([4], гл. 18), первый член асимптотического представления (2) решения уравнения (3) имеет вид

$$z^{r_j} e^{\lambda_j z} C_{j0} = e^{\lambda_j z} \int\limits_{\Sigma_j} e^{z(\xi - \lambda_j)} (\xi - \lambda_j)^{-(r_j+1)} v'_j(\lambda_j)\, d\xi \tag{46}$$

$(v'_j(\lambda_j) \equiv v'_j(\xi)_{\xi=\lambda_j})$. Производя в (46) замену $(\xi - \lambda_j) = u$, находим

$$\int\limits_{\Sigma_j} e^{z(\xi - \lambda_j)} (\xi - \lambda_j)^{-(r_j+1)}\, d\xi = z^{r_j} e^{-i\pi r_j} (e^{-i2\pi r_j} - 1)\, \Gamma(-r_j), \tag{47}$$

где $\Gamma(-r_j)$ — гамма-функция. (Формула (47) получается с использованием формулы (5) на с. 29 в [7], если предварительно в (5) сделать замену $t = e^{-i\pi}\tau$.) Подставляя в формулу (46) выражение для $v'_j(\lambda_j)$ из работы [6, формула (30) и выражение (47)], получаем (18), (19).

Доказательство выражений (14) — (16). Подставляем выражения (28), (29) из работы [6] в соотношение (13) настоящей статьи. Получается интеграл, по структуре совпадающий с интегралом в левой части равенства (47) (если положить в последнем $\lambda_j = 0$).

Доказательство теоремы 2. А. Выражение (17) следует из равенств

$$\psi'(z) = \psi^*(z) \operatorname{diag}\{u_{11}, \ldots, u_{1n}\} = \Phi_1(z) T'_1 =$$
$$= Z_1(z) \operatorname{diag}\{g_1, \ldots, g_n\} T'_1.$$

Б. Рассмотрим случай $\nu = \overline{4, n-3}$; $n \geqslant 7$. Пусть у ф. м. $X_\infty$ исходное положение точки $\xi$ в окрестности точки $\xi = \infty$, слева (или на) от луча $f_n$ (если смотреть из точки $\xi = \lambda_n$) см. [1]. Произведем аналитическое продолжение ф. м. $X_\infty$ по указанной на рис. 1 кривой до точки, которая находится в окрестности точки $\xi = \lambda_\nu$, слева (или на) от луча $f_\nu$ (если смотреть из точки $\xi = \lambda_\nu$). В результате $X_\infty = X_\nu L_\nu$, где $L_\nu$ — постоянная неособая матрица. Как показано в [1], $[T'_1]_{\nu k} = [L_\nu]_{1k}$. Предположим, что аргумент левой сторо-

Рис. 1

ны луча $\tau_k$ в $t$-плоскости в [6] совпадает с аргументом левой стороны луча $f_k$ $(k = \overline{1, n})$ в $\xi$-плоскости в [1], т. е. лучи $\tau_k$ расположены в $t$-плоскости по отношению к проведенным из начала координат векторам $\lambda_k$ точно также, как расположены в $\xi$-плоскости по отношению к проведенным из начала координат векторам $\lambda_k$ лучи $f_k$. Поэтому при указанном аналитическом продолжении ф. м. $X_\infty$ соответственно в $t$-плоскости точка $\xi$ перемещается по такой же кривой от исходного положения в окрестности точки $t = \infty$ слева (или на) от луча $\tau_n$ (если смотреть из точки $t = \lambda_n$) в окрестность точки $t = \lambda_\nu$ слева от луча $\tau_\nu$ (если смотреть из точки $t=\lambda_\nu$) см. [6]. При этом петля $A_{\xi\infty}$ переходит в петлю ${}_\nu A_{\xi\infty}$ (рис. 2), а петли $A_l$ $(l = \overline{1, n})$ не деформируются, т. е. ${}_\nu A_l = A_l$. Для того чтобы после аналитического продолжения выразить решение $W_{\infty\xi}$ через элементы ф. м. $X_\nu$, стянем петлю $A_\infty$ вокруг конечных особых точек подынтегрального выражения $\lambda_l$ $(l = \overline{1, n})$ и $\xi$. Обозначим такую петлю через ${}_\nu A_\infty$. Деформируем петли ${}_\nu A_{\xi\infty}$, ${}_\nu A_\infty$ так, чтобы представить их в виде совокупности петель $A_l$, $A_{\xi\nu}$, $A_l^{-1}$, $A_{\xi\nu}^{-1}$. Это дает (см. рис. 2)

$$ {}_\nu A_{\xi\infty} = A_n A_{n-1} \cdots A_{\nu+1} A_{\xi\nu} A_{\nu+1}^{-1} A_{\nu+2}^{-1} \cdots A_n^{-1}; \tag{48} $$

$$ {}_\nu A_\infty = A_1^{-1} A_2^{-1} \cdots A_\nu^{-1} A_{\xi\nu}^{-1} A_{\nu+1}^{-1} A_{\nu+2}^{-1} \cdots A_n^{-1}. \tag{49} $$

Подчеркнем, что и для ${}_\nu A_\infty$ выражение зависит от положения точки $\xi$, т. е. от $\nu$. Обозначим через $W_\infty$, $W_l^{[\infty]}$, $W_\xi^{[\infty]}$ значения интеграла (3) в [6], взятого соответственно по петлям $A_\infty$, $A_l$, $A_{\xi\infty}$ при исходном положении точки $\xi$ в окрестности точки $t = \infty$. Тогда элементы ф. м. $X_\infty$ по определению имеют вид

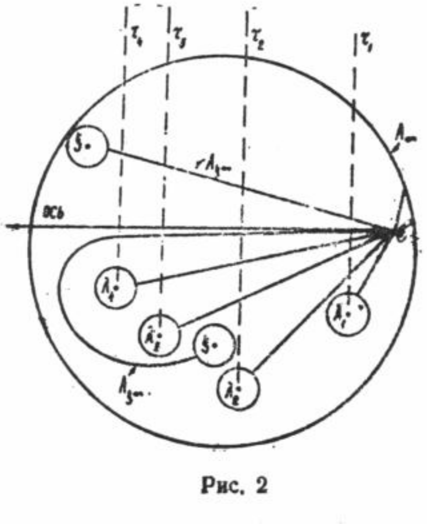

Рис. 2

$$ W_{\infty\xi} = \delta W_\infty - (1 - e^{i2\pi x}) W_\xi^{[\infty]}, $$

$$ \delta = (1 - e^{i2\pi\varsigma}); \tag{50} $$

$$ W_{l-1,\,l} = \delta_l W_{l-1}^{[\infty]} - \delta_{l-1} W_l^{[\infty]}, $$

$$ l = \overline{2, n}. \tag{51} $$

Обозначим результат аналитического продолжения интегралов $W_\infty$, $W_l^{[\infty]}$, $W_\xi^{[\infty]}$ по кривой рис. 1 (т. е. интеграл (3) в [6], взятый соответственно по петлям ${}_\nu A_\infty$, ${}_\nu A_l$, ${}_\nu A_{\xi\infty}$), через ${}_\nu W_\infty$, ${}_\nu W_l^{[\infty]}$, ${}_\nu W_\xi^{[\infty]}$, а результат аналогичного продолжения элементов $W_{\infty\xi}$, $W_{l-1,\,l}$ ф. м. $X_\infty$ соответственно через ${}_\nu W_{\infty\xi}$, ${}_\nu W_{l-1,\,l}$. Тогда по определению

$$ {}_\nu W_{\infty\xi} = {}_\nu W_\infty \delta - {}_\nu W_\xi^{[\infty]} (1 - e^{i2\pi x}); \tag{52} $$

$$_{\nu}W_{l-1,\,l} = {}_{\nu}W_{l-1}^{[\infty]}\delta_l - {}_{\nu}W_l^{[\infty]}\delta_{l-1}, \quad l = \overline{2,\, n}. \tag{53}$$

Рассмотрим ф. м. $X_k$. Обозначим через $W_\nu$, $W_\xi^{[k]}$ значения интеграла (3) в [6], взятого соответственно по петлям $A_\nu$, $A_{\xi k}$, при исходном положении точки $\xi$ в окрестности точки $t = \lambda_k$, вблизи (или на) левой стороны луча $\tau_k$. Тогда по определению для элементов ф. м. $X_k$:

$$W_{l\nu} = \delta_\nu W_l - \delta_l W_\nu; \qquad W_{k\xi} = \delta W_k - \delta_k W_\xi^{[k]}. \tag{53a}$$

Так как $_{\nu}A_l = A_l$, то $_{\nu}W_l^{[\infty]} = W_l$, а значит $_{\nu}W_{l-1,\,l} = W_{l-1,\,l}$ $(l = \overline{2,\, n})$. Следовательно (см. (6) в [6]), $[L_\nu]_{lk} = \delta_{lk}$ $(k = \overline{2,\, \nu - 1};$ $k = \overline{\nu + 2,\, n})$, где $\delta_{lk}$ — символ Кронекера. Отсюда следует, что ненулевыми могут быть только те элементы $[T'_1]_{\nu k} = [L_\nu]_{1k}$, которые фигурируют в выражениях (20) — (22). Следовательно, остается найти только $[L_\nu]_{11}$, $[L_\nu]_{1\nu}$, $[L_\nu]_{1,\,\nu+1}$. Из соотношений (48), (49) следует

$$_{\nu}W_\xi^{[\infty]} = \delta\,[W_n + W_{n-1}e^{i2\pi\alpha_n} + W_{n-2}e^{i2\pi(\alpha_n+\alpha_{n-1})} + \cdots +$$
$$+ W_{\nu+1}e^{i2\pi(\alpha_n+\cdots+\alpha_{\nu+2})}] + W_\xi^{[k]}e^{i2\pi(\alpha_n+\cdots+\alpha_{\nu+1})}; \tag{54}$$

$$_{\nu}W_\infty = -\sum_{l=1}^{\nu} W_l e^{-i2\pi(\alpha_1+\cdots+\alpha_l)} - \sum_{l=\nu+1}^{n} W_l e^{-i2\pi(\alpha_1+\cdots+\alpha_l+\xi)} -$$
$$- W_\xi^{[k]} e^{-i2\pi(\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu+\xi)}. \tag{55}$$

Подставляя соотношения (54), (55) в выражении (52), получаем

$$_{\nu}W_{\infty\xi} = -\delta\sum_{l=1}^{\nu} W_l e^{-i2\pi(\alpha_1+\cdots+\alpha_l)} - \delta\sum_{l=\nu+1}^{n-1} W_l e^{i2\pi(\alpha_{l+1}+\cdots+\alpha_n)} -$$
$$- \delta W_n - W_\xi^{[k]} e^{i2\pi(\alpha_{\nu+1}+\cdots+\alpha_n)}\,(1 - e^{-i2\pi(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}). \tag{56}$$

Выражая из соотношения $X_\infty = X_\nu L_\nu$ элемент $[X_\infty]_{1k}$ через элементы ф. м. $X_\nu$, а сами эти элементы — через интегралы $W_j$, $W_\xi^{[\nu]}$ (см. выражения (9), (10) в [6], получаем $([L_\nu]_{lk} \equiv \theta_l)$:

$$[X_\infty]_{1k} = \theta_2\delta_2 W_1 + \sum_{l=2}^{\nu-2} (\theta_{l+1}\delta_{l+1} - \theta_l\delta_{l-1})\, W_l +$$
$$+ (\theta_\nu\delta_{\nu+1} - \theta_{\nu-1}\delta_{\nu-2})\, W_{\nu-1} + [\theta_1\delta + (\beta_\nu\delta - \delta_{\nu+1})\,\theta_{\nu+1}]\, W_\nu +$$
$$+ (\theta_{\nu+2}\delta_{\nu+2} - \theta_\nu\delta_{\nu-1} + \theta_{\nu+1}\delta_\nu)\, W_{\nu+1} + \sum_{l=\nu+2}^{n-1} (\theta_{l+1}\delta_{l+1} - \theta_l\delta_{l-1})\, W_l -$$
$$- \theta_n\delta_{n-1}W_n - (\theta_1\delta_\nu + \theta_{\nu+1}\beta_\nu\delta_\nu)\, W_\xi^{[\nu]}; \qquad \beta_\nu = \frac{\delta_{\nu+1}}{\nu} \quad (\nu \neq n). \tag{57}$$

Приравнивая коэффициенты при $W_l$, $W_\xi^{[\nu]}$ в выражениях (56), (57), имеем систему уравнений для $[L_\nu]_{l1}$ $([L_\nu]_{l1} \equiv \theta_l)$, из которой можно выделить следующую подсистему:

$$\delta_\nu\theta_1 + \delta_\nu\beta_\nu\theta_{\nu+1} = e^{i2\pi(\alpha_{\nu+1}+\cdots+\alpha_n)}\,(1 - e^{-i2\pi(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)})$$
$$\delta\theta_1 + (\beta_\nu\delta - \delta_{\nu+1})\,\theta_{\nu+1} = -\delta e^{-i2\pi(\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu)}. \tag{58}$$

Из подсистемы (58) следует выражение (20) $([L_\nu]_{11} = [T'_1])_{\nu 1}$. Из изложенного выше следует: $_{\nu}W_{\nu-1,\,\nu} = \delta_\nu W_{\nu-1} - \delta_{\nu-1}W_\nu \equiv W_{\nu-1,\,\nu}$.

Приравнивая коэффициенты при $W_l$, $W_\xi^{[\nu]}$ в этом выражении и в (57) $([L_\nu]_{l\nu} \equiv \theta_l)$, можно выделить следующую подсистему:

$$\theta_1 + \beta_\nu \theta_{\nu+1} = 0; \qquad \delta\theta_1 + (\beta_\nu \delta - \delta_{\nu+1})\,\theta_{\nu+1} = -\delta_{\nu-1}, \qquad (59)$$

из которой следует выражение (21). Аналогично из выражений ${}_\nu W_{\nu,\,\nu+1} = W_{\nu,\,\nu+1} = \delta_{\nu+1} W_\nu - \delta_\nu W_{\nu+1}$ и (57) $(\theta_l \equiv [L_\nu]_{l,\,\nu+1})$ получаем подсистему

$$\theta_1 + \beta_\nu \theta_{\nu+1} = 0; \qquad \delta\theta_1 + (\beta_\nu \delta - \delta_{\nu+1})\,\theta_{\nu+1} = \delta_{\nu+1}, \qquad (60)$$

из которой следует выражение (22). Прочие случаи $\nu = 1, 2, 3, n-2, n-1, n$; $n = \overline{2, 6}$) доказываются совершенно аналогично.

Схема доказательства теоремы 1. Существуют соотношения: 1) $\Phi_1(ze^{i2\pi}) = \Phi_1(z)\,Y$, где $Y$ — постоянная неособая («циклическая») матрица; 2) $Y = T'_1 e^{i2\pi\Delta} T'^{\,-1}_1$ ([1], формула (35)); 3) $F_2 F_1 = e^{-i2\pi R} Y$, где $R = \operatorname{diag}\{r_1, \ldots, r_n\}$ и матрицы $F_1$, $F_2$ относятся к ф. м. $\Phi_1(z)$ (см. [1] по списку литературы работы [1], теоремы 1.2, 1.7). По известным матрицам $Y$ и $R$ матрицы $F_1$, $F_2$ могут быть однозначно определены по теореме о разложении матрицы в произведение треугольных матриц. Именно таким образом они были найдены для ф. м. $\Phi_1(z)$, поскольку матрица $T'_1$ дана в п. Б теоремы 2. Из соотношений $\Phi_1(z) = \Phi_{L+1}(z)\,F_1$, $\Phi_{L+1}(z) = \Phi_{2L+1}(z)\,F_2$ и определения ф. м. $Z_1(z)$ легко следует, что матрицы $\operatorname{diag}\{g_1, \ldots, g_n\}\, F_k \operatorname{diag}\{g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1}\}$ ($k = 1, 2$; величины $g_j$ задаются формулами (18), (19)) — это соответственно матрицы $F_k$ для ф. м. $Z_1(z)$. Так были получены выражения (10) — (12).

**Список литературы:** 3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961. 703 с. 4. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Х., 1939. 719 с. 5. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. М., 1963. 466 с. 6. *Смилянский В. Р.* Матрицы перехода для фундаментальных систем решений уравнения Жордана-Похгаммера. 1//Мат. анализ и диф. уравнения. Новосибирск, 1987. С. 131—148. 7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М., 1965. 294 с.

*Поступила в редколлегию 22.11.87*

---

УДК 517.982

*В. П. ФОНФ*

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СЕМЕЙСТВ ВЛОЖЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $\{E_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ — семейство вложенных банаховых пространств т. е. для каждой пары чисел $\alpha < \beta$, $(\alpha, \beta \in [0, 1])$ определено взаимнооднозначное линейное ограниченное отображение (в дальнейшем— вложение) $T_{\beta\alpha} : E_\beta \to E_\alpha$, причем выполняются свойства 1) $\operatorname{Cl} T_{\beta\alpha} E_\beta = E_\alpha$, т. е. $T_{\beta\alpha}$ — плотное вложение; 2) $T_{\alpha\gamma} T_{\beta\alpha} = T_{\beta\gamma}$, $0 \leqslant \gamma < \alpha < \beta \leqslant 1$; 3) $T_{\beta\alpha}^{-1}$ — неограниченное отображение.

Примерами таких семейств являются семейство пространств $L_p\,[0, 1]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $E_\alpha = L_{\frac{1}{1-\alpha}}[0, 1]$, $\alpha \in [0, 1]$ и другие семейства банаховых пространств, построенные различными методами интерполяции [1].

Цель данной статьи — доказательство теорем 1, 2, которые развивают некоторые результаты работ [2—4]. Через $U(E)$ $(S(E))$ будем обозначать единичный шар (единичную сферу) пространства $E$. Начнем с вспомогательных утверждений.

**Лемма 1.** *Пусть* $\{E_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ *— семейство вложенных банаховых пространств. Для каждого числа* $\alpha \in (0, 1)$ *найдутся два банаховых пространства* $X = X(\alpha)$, $Y = Y(\alpha)$ *обладающие свойствами:*

а) *Существует плотное вложение* $A : X \to E_\alpha$ *и для каждого числа* $\beta > \alpha$ *вложения* $A_\beta : E_\beta \to X$ *такие, что* $AA_\beta = T_{\beta\alpha}$ *и отображения* $A^{-1}$, $A_\beta^{-1}$ *неограничены. В частности* $AX \supset \bigcup_{\beta > \alpha} T_{\beta\alpha} E_\beta$;

б) *Существуют плотное вложение* $B : E_\alpha \to Y$ *и для каждого числа* $\gamma < \alpha$ *плотное вложение* $B_\gamma : Y \to E_\gamma$, *причем* $B_\gamma B = T_{\alpha\gamma}$ *и отображения* $B^{-1}$, $B_\gamma^{-1}$ *неограничены.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $\{\beta_n\} \subset (0, 1)$ — убывающая, а $\{\gamma_n\} \subset (0, 1)$ — возрастающая последовательности, причем $\lim \beta_n = \lim \gamma_n = \alpha$. Положим
$$V = \mathrm{cl\,co} \bigcup_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\| T_{\beta_n\alpha} \|} T_{\beta_n\alpha} \cup (E_{\beta_n}),$$
и в качестве пространства X возьмем линейную оболочку $\lim V$ ножества $V$ с единичным шаром $V$. Все требуемые свойства пространства X достаточно очевидны. Обозначим теперь
$$L = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_{\gamma_n 0} E_{\gamma_n}, \quad M = \left\{ x \in L : ||| X ||| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \| T_{\alpha\gamma_n} \|} \| T_{\gamma_n 0}^{-1} x \| < \infty \right\}.$$

Непосредственно проверяется полнота линейного многообразия $M$ в норме $||| \cdot |||$ (упрощенно говоря, сходимость в норме $||| \cdot |||$ равносильна сходимости в каждом пространстве $E_{\gamma_n}$; полнота $M$ в норме $||| \cdot |||$ получается, как следствие полноты пространств $E_0$, $E_{\gamma_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ и того, что норма $||| \cdot |||$ сильнее нормы $E_0$). Пусть $x \in T_{\alpha 0} E_\alpha$, тогда
$$||| x ||| = \sum_n \frac{1}{2^n \| T_{\alpha\gamma_n} \|} \| T_{\gamma_n 0}^{-1} x \| = \sum_n \frac{1}{2^n \| T_{\alpha\gamma_n} \|} \| T_{\alpha\gamma_n} T_{\alpha 0}^{-1} x \| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_n 2^{-n} \| T_{\alpha 0}^{-1} \| = \| T_{\alpha 0}^{-1} x \|,$$
откуда следует, что оператор $T_{\alpha 0}$ осуществляет вложение пространства $E_\alpha$ в $M$. Положим $Y = ||| \cdot ||| - \mathrm{cl}\, T_{\alpha 0} E_\alpha$. Таким образом, отображение $B = T_{\alpha 0}$ осуществляет плотное вложение пространства $E_\alpha$ в $Y$. Проверим, что $B$ не является изоморфизмом. Пусть $\varepsilon > 0$, $2^{-n+1} < \varepsilon/2$ и элемент $y \in S(E_\alpha)$ таков, что $\| T_{\alpha\gamma_n} y \| \leqslant \varepsilon \; (2 \times \times \max_{1 < i \leqslant n-1} \| T_{\gamma_n \gamma_i} \|)^{-1}$ $(T_{\alpha\gamma_n}$ — не изоморфизм).

Имеем
$$||| By ||| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i \| T_{\alpha\gamma_i} \|} \| T_{\alpha\gamma_i} y \| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i \| T_{\alpha\gamma_i} \|} \| T_{\gamma_n\gamma_i} T_{\alpha\gamma_n} y \| +$$
$$+ \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^n \| T_{\alpha\gamma_i} \|} \| T_{\alpha\gamma_i} y \| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Проверка остальных свойств пространства $Y$ не вызывает затруднений (например, в качестве вложений $B_\gamma : Y \to E_\gamma$ необходимо взять $T_{\gamma 0}^{-1}$).

Лемма доказана.

*Замечание 1.* Если семейство $\{E_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ состоит из сепарабельных пространств, то пространство $Y$ также сепарабельно.

Лемма 2. *Пусть* $\{z_i\}$ — *нормированная базисная последовательность в сепарабельном банаховом пространстве* $E$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует сопряженная система* $\{f_i\} \subset E^*$ *такая, что подпространство* $[f_i]_1^\infty$ — *нормирующее и* $\|f_i\| \leqslant 2Ci^{1+\varepsilon}$, $i = 1, 2, \ldots$, $C$ — *базисная постоянная базиса* $\{z_i\}$.

Доказательство. Обозначим через $q : [z_i]_1^\infty \to E$ естественное вложение подпространства $[z_i]_1^\infty$ в $E$, и пусть $F = [z_i^*]_1^\infty$ — подпространство, натянутое на сопряженную систему. Пользуясь нормируемостью $F$, нетрудно проверить, что $q^{*^{-1}}(F)$ — также нормирующее подпространство. Пусть $\{t_k\}_1^\infty w^*$ — плотное подмножество в открытом шаре $\mathring{U}(q^{*^{-1}}(F))$. Таким образом, каждый элемент $q^* t_k$ можно сколь угодно точно приблизить комбинацией вида $\sum\limits_{i=1}^{m_k} a_i^k z_i^*$. Без ущерба общности можно считать, что последовательность номеров $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ обладает свойствами:

$$1)\ m_1 < m_2 < \ldots; \qquad 2)\ \left\| q^* t_k - \sum_{i=1}^{m_k} a_i^k z_i^* \right\| < \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

3) $a_{m_k}^k = 1/m_k^{\varepsilon_2}$, $k = 1, 2, \ldots$;

4) $m_k^{1+\varepsilon} < m_{k+1}^{\varepsilon/2}$, $k = 1, 2, \ldots$;

Пусть $h_k = q^* t_k - \sum\limits_1^{m_k} a_i^k z_i^*$ и $H_k$ — продолжение с сохранением нормы функционала $h_k$ на все пространство $E$.

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_{m_1-1}$ — продолжения с сохранением нормы на $E$ функционалов $z_1^*, \ldots, z_{m_1-1}^*$. Очевидно, $\|f_i\| \leqslant 2C$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, m_1 - 1$. Положим

$$f_{m_1} = \frac{1}{a_{m_1}^1}\left(t_1 - H_1 - \sum_{i=1}^{m_1-1} a_i^1 f_i\right)$$

и оценим $\|f_{m_1}\|$. Имеем

$$\|f_{m_1}\| \leqslant m_1^{\varepsilon/2}(1 + 1 + (m_1 - 1)\,2C) \leqslant 2Cm_1^{1+\varepsilon/2} \leqslant 2Cm_1^{1+\varepsilon}.$$

Далее пусть $f_{m_1+1}, \ldots, f_{m_2-1}$ — продолжения с сохранением нормы на $E$ функционалов $z_{m_1+1}^*, \ldots, z_{m_2-1}^*$.

Положим
$$f_{m_2} = \frac{1}{a_{m_2}^2}\left(t_2 - H_2 - \sum_{i=1}^{m_2-1} a_i^2 f_i\right).$$

Тогда

$$\|f_{m_2}\| \leqslant m_2^{\varepsilon/2}\left(1+\frac{1}{2}+2Cm_1^{1+\varepsilon}+2C(m_2-2)\right)\leqslant$$
$$\leqslant m_2^{\varepsilon/2}\cdot 2Cm_1^{1+\varepsilon}m_2 \leqslant 2Cm_2^{\varepsilon/2}m_2^{1+\varepsilon/2}=2Cm_2^{1+\varepsilon},$$

и так далее построим последовательность $\{f_i\}_1^\infty$, обладающую свойствами

$$\|f_i\| \leqslant 2Ci^{1+\varepsilon}, \qquad \Big\|t_i-\sum_{j=1}^{m_i} a_j^i f_j\Big\| < \frac{1}{i}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots .$$

Легко видеть, что $[f_i]$ — нормирующее подпространство. Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть $V$ — абсолютно выпуклое ограниченное замкнутое и нетелесное подмножество банахового пространства $E$, $[V]=E$, $\{t_n\}$ — нормированная последовательность элементов $E$ и $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел. Тогда существуют нормированная последовательность элементов $\{w_n\}\subset E$ и последовательность положительных чисел $\{\gamma_n\}$ такие, что $\|t_n-w_n\|<\varepsilon_n$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, $\operatorname{cl}\operatorname{co}\{\pm\gamma_n w_n\}_1^\infty \cap V=0$.*

Доказательство. Пусть $L=\operatorname{lin} V$ — линейная оболочка множества $V$. Так как $L\neq E$ ($V$ — не телесно), существует элемент $w_1\in S(E)\setminus L$ такой, что $\|w_1-t_1\|<\varepsilon_1$. Положим $L_1=\operatorname{lin}\{w_1,\ L\}$. Снова $L_1\neq E$ (противное противоречило бы $\operatorname{cl} L=E$ и $L\neq E$) и, значит, существует элемент $w_2\in S(E)\setminus L_1$ такой, что $\|w_2-t_2\|<\varepsilon_2$. Положим $L_2=\operatorname{lin}\{w_1,\ w_2,\ L\}$ и так далее построим последовательность $\{w_m\}_1^\infty$. Легко видеть, что для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$ $[w_m]_1^n\cap L=0$. Для каждого $n=1,\ 2,\ \ldots$ рассмотрим функцию

$$r_n(\alpha)=\inf\{\|x-y\|: x\in\alpha S([w_m]_1^n),\ y\in V\},\ \alpha>0.$$

Нетрудно проверить, что $r_n(\alpha)$ — строго возрастающая функция и, кроме того, $r_{n+1}(\alpha)\leqslant r_n(\alpha)$, $n=1,\ 2,\ \ldots .$ Положим $\gamma_k=2^{-k}r_k\left(\frac{1}{k}\right)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ и покажем, что $\operatorname{cl}\operatorname{co}\{\pm\gamma_k w_k\}_1^\infty\cap V=0$. Прежде всего из приведенных свойств функций $r_n(\alpha)$ следует $\sum\limits_{n+1}^\infty \gamma_k<r_n\left(\frac{1}{n}\right)$, $n=1,\ 2,\ \ldots .$ Пусть $y=\sum a_k\gamma_k w_k\in\operatorname{cl}\operatorname{co}\{\pm\gamma_k w_k\}_1^\infty$, $\sum|a_k|\leqslant 1$, $\|y\|=\alpha>0$ и номер $n$ таков, что $\alpha/2\geqslant\|\sum\limits_1^n a_k\gamma_k w_k\|$, $\alpha/2>1/_n$.

Для каждого $z\in V$ получаем

$$\|y-z\|\geqslant\|\sum_1^n a_k\gamma_k w_k-z\|-\|\sum_{n+1}^\infty a_k\gamma_k w_k\|\geqslant$$
$$\geqslant r_n(\|\sum_1^n a_k\gamma_k w_k\|)-\sum_{n+1}^\infty\gamma_k\geqslant r_n(\alpha/_2)+r_n(1/_n)>0,$$

откуда $y\notin V$. Лемма доказана.

Прежде чем переходить к теореме 1 напомним, что раствором двух подпространств $E_1$ и $E_2$ банахова пространства $E$ называет
число

$$\theta(E_1, E_2) = \max\{\sup\{d(x, E_1), x \in S(E_2)\}, \sup\{d(x, E_2), x \in S(E_1$$

**Теорема 1.** *Пусть $X$, $Y$, $E$ — банаховы пространства, приче $Y$ и $E$ сепарабельны и отображения $A: X \to E$ и $B: E \to Y$ — плотные вложения, не являющиеся изоморфизмами. Пусть далее подпространство $E_1 \subset E$ таково, что оператор $B/_{E_1}$ не является изоморфизмом и $E_1 + AX \neq E$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует подпространство $L \subset E$ такое, что*

$$L \cap AX = 0;$$
$$\mathrm{cl}\, BL = Y;$$
$$\theta(L, E_1) < \varepsilon.$$

Доказательство. Положим $V = \mathrm{cl\,co}\{AU(X) \cup U(E_1)\}$ и пусть последовательность $\{t_i\} \subset S(E)$ такова, что $\{Bt_i\}$ есть $M$-базис пространства $Y$ (образ $BE$ плотен в $Y$). Пусть далее последовательность $\{\varepsilon_i\}$ такова, что из неравенств $\|Bt_i - y_i\| < \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots$ следует, что $\{y_i\}$ — также $M$-базис $Y$. Применяя лемму 3, найдем последовательность $\{w_i\} \subset S(E)$ и числовую последовательность $\{\gamma_i\}$, $0 < \gamma_i < 2^{-i-2}$ такие, что $\|t_i - w_i\| < \varepsilon_i (2\|B\|)^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ и $\mathrm{cl\,co}\{\pm\gamma_n w_n\}_1^\infty \cap V = 0$. Легко видеть, что последовательность $\{Bw_i\}$ — $M$-базис $Y$, откуда, в частносги, следует, что последовательность $\{w_i\}$ минимальна.

Далее, пользуясь тем, что отображение $B/_{E_1}$ не изоморфизм, с помощью стандартных рассуждений выберем на сфере $S(E_1)$ базисную последовательность $\{z_i\}$ с базисной постоянной $C \leqslant 2$, обладающую свойством $\|Bz_i\| \leqslant 2^{-4}\varepsilon\varepsilon_i\gamma_i i^{-1-\varepsilon}$, $i = 1, 2, \ldots$. По лемме 2 найдем сопряженную систему $\{f_i\} \subset E_1^*$ такую, что подпространство $[f_i]$ — нормирующее и $\|f_i\| \leqslant 4i^{1+\varepsilon}$, $i = 1, 2, \ldots$. Определим изоморфное вложение $T: E_1 \to E$ по формуле

$$Tx = x + \frac{\varepsilon}{8}\sum_{i=1}^{\infty} i^{-1-\varepsilon}\gamma_i f_i(x)\, w_i, \quad x \in E_1$$

и положим $L = TE_1$. Легко проверить, что $\theta(L, E_1) < \varepsilon$. Убедимся, что $L \cap AX = 0$. Пусть для некоторого элемента $x \in E_1$ $Tx \in AX$, тогда $Tx - x \in \mathrm{lin\,cl\,co}\{\pm\gamma_n w_n\}$, ($\mathrm{lin}\, D$ — линейная оболочка множества $D$), но $Tx - x \in \mathrm{lin}\, V$, значит $Tx - x = 0$, ($\mathrm{lin}\, V \cap \mathrm{lin\,cl\,co}\{\pm\gamma_n \times \times w_n\} = 0$). Откуда, пользуясь тотальностью системы $\{f_i\}$ и минимальностью системы $\{w_i\}$, делаем вывод $x = 0$. Докажем, что $\mathrm{cl}\, BL = Y$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\left\| B\left(\frac{8i^{1+\varepsilon}}{\varepsilon\gamma_i} Tz_i\right) - Bt_i \right\| \leqslant \frac{8i^{1+\varepsilon}}{\varepsilon\gamma_i}\left(\|Bz_i\| + \frac{\varepsilon\gamma_i}{8i^{1+\varepsilon}}\|B\|\|w_i - t_i\|\right) < \varepsilon_i,$$

**отсюда**, учитывая выбор последовательности $\{\varepsilon_i\}$, получаем, что $\{BTz_i\}$ — $M$-базис пространства $Y$, что и завершает доказательство равенства $\mathrm{cl}\, BL = Y$. Теорема доказана.

*Замечание 2.* Подпространство $E_1$ с требуемыми в теореме 1 свойствами можно построить с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 1. Именно, возьмем в качестве $V = \mathrm{cl}\, AU(X)$, а в качестве $E_1$ любое собственное бесконечномерное подпространство пространства $T[z_i]_1^\infty$.

*Замечание 3.* Свойство $L \cap AX = 0$ равносильно $w^* - \mathrm{cl}\, A^* L^\perp = X^*$.

*Замечание 4.* Последовательность $\{Tz_i\}$ является базисной.

**Теорема 2.** *Пусть* $\{E_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ *— семейство вложенных сепарабельных банаховых пространств. Тогда для каждого* $\alpha \in [0, 1]$ *в пространстве* $E_\alpha$ *существует подпространство* $G_\alpha$ *с базисом* $\{g_i\}$ *такое, что*

1) $G_\alpha \cap \bigcup\limits_{\beta > \alpha} T_{\beta\alpha} E_\beta = 0$;

2) для всех $\gamma < \alpha$ система $\{T_{\alpha\gamma} g_i\}_{i=1}^\infty$ есть $M$-базис пространства $E_\gamma$; в частности, образ $T_{\alpha\gamma} G_\alpha$ плотен в пространстве $E_\gamma$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 1 и пусть $X$ и $Y$ — пространства, о которых в ней идет речь, причем $Y$ сепарабельно (замечание 1). Будем пользоваться обозначениями леммы 1. Выберем в пространстве $Y$ $M$-базис $\{x_i\}$ с сопряженной системой $\{x_i^*\} \subset B_0^* E_0^*$ и пусть последовательность $\{\delta_i\}$, $\delta_i > 0$ удовлетворяет требованию $\sum \delta_i (\| B_0^{*^{-1}} x_i^* \| + \| x_i^* \|) < 1$. Легко видеть, что для всех $\gamma < \alpha$ $\{B_\gamma x_i\}_{i=1}^\infty$ — $M$-базис пространства $E_\gamma$ и по теореме Крейна—Мильмана—Рутмана об устойчивости $M$-базиса из неравенства $\| \bar{x}_i - x_i \| < \delta_i (\| B_0 \| + 1)^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ следует, что $\{\bar{x}_i\}$ — $M$-базис $Y$, а $\{B_0 \bar{x}_i\}$ — $M$-базис $E_0$. Откуда нетрудно получить, что $\{B_\gamma \bar{x}_i\}$ — $M$-базис $E_\gamma$, $\gamma < \alpha$.

Теперь для завершения доказательства теоремы 2 достаточно применить рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, выбрав $t_i \in S(E_\alpha)$ так, чтобы

$$\| Bt_i - x_i \| \leqslant \delta_i / 2(\| B_0 \| + 1), \qquad \varepsilon_i < \delta_i / 2(\| B_0 \| + 1), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

**Список литературы:** 1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М., 1978. С. 400. 2. *Пличко А. Н.* Выбор в банаховом пространстве подпространств со специальными свойствами и некоторые свойства квазидополнений//Функцион. анализ и его прил. 1981. **15**, №2. С. 88—89. 3. *Шевчик В. В.* О подпространствах в паре банаховых пространств//Мат. заметки. 1985. **38**, №4. С. 545—553. 4. *Shevchik V. V.* On subspaces of a Banach space that coincide with the ranges of continuous linear operators//Rev. Roumaine de math. pures e. a. 1986. **XXXI**, №1. P. 65—71.

*Поступила в редколлегию 05.07.89*

2 р.

# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ
НАУЧНЫЙ
СБОРНИК

Основан в 1965г.

ISSN 0321-4427. Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1991. Вып. 55. 1—145.

«ОСНОВА»