УДК 517

А. Е. ФРЫНТОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С ЛАКУНАМИ ФЕЙЕРА

В 1952 г. Макинтайром была доказана такая теорема единственности:

Теорема А (*Macintyre* [*1*]). Пусть $f(z)=\sum c_k z^{\lambda_k}$, $\lambda_k \in N^+$, *целая функция и* $\sum \lambda_k^{-1}<\infty$. *Если* $|f(z)|<C$ *для некоторого* $C>0$ *при всех* $z\in \boldsymbol{R}^+$, *то* $f(z)\equiv 0$.

Верна также аналогичная теорема для целых функций представимых абсолютно сходящимися рядами Дирихле с положительными коэффициентами, а именно:

Теорема В (*Евграфов* [2]). *Пусть* $f(z)=\sum c_k e^{\lambda_k z^2}$, $\lambda_k\in \boldsymbol{R}^+$, *целая функция и* $\sum \lambda_k^{-1}<\infty$. *Если* $|f(z)|<C$ *для некоторого* $C>0$ *при всех* $z\in \boldsymbol{R}^+$, *то* $f(z)\equiv 0$.

Эти теоремы точны в следующем смысле.

Теорема С (*Евграфов* [2]). *Если* $\lambda_k>0$ *таковы, что* $\sum \lambda_k^{-1}=+\infty$, *то существует отличная от нуля целая функция вида* $f(z)=\sum c_k e^{\lambda_k z^2}$, *ограниченная на действительной оси.*

Макинтайром был поставлен вопрос, можно ли в теореме А требование ограниченности на вещественной оси заменить требованием ограниченности функции на произвольной неограниченной кривой. Этот вопрос до сих пор не имеет полного ответа и известен как гипотеза Макинтайра. Подробный обзор по этому вопросу можно найти в работе Korevaar'a [4], там же приведена обширная библиография по исследованию этой проблемы и представлены результаты, дающие положительный ответ на поставленный вопрос при некоторых дополнительных ограничениях на последовательность λ_k.

В настоящей работе мы дадим одно обобщение теоремы Макинтайра. Заменив требование ограниченности функции на луче требованием ограниченности на другом более редком множестве, мы покажем, что утверждение теоремы остается в силе. В качестве такого множества у нас будет выступать объединение отрезков фиксированной длины и произвольно ориентированных в комплексной плоскости, или, другими словами, множество Ω, такое, что

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

где $I_k=[a_k,\ b_k]$; $a_k, b_k\in \boldsymbol{C}$; $|a_k-b_k|=\delta>0$ и $\overline{\lim}\ \mathrm{Re}\ a_k=+\infty$.

Теорема. *Пусть* $f(z)=\sum c_k e^{\lambda_k z^2}$ — *целая функция, где* $\lambda_k\in \boldsymbol{R}^+$ *и* $\sum \lambda_k^{-1}<\infty$. *Если для некоторого* $C>0$ *выполнено* $|f(z)|<C$, *как только* $z\in\Omega$, где Ω — *множество, определенное выше, то* $f(z)\equiv 0$.

Наиболее интересным в этой теореме, на наш взгляд, является тот факт, что на расположение отрезков, образующих множество Ω, не накладывается никаких ограничений кроме естественного, что множество Ω должно быть неограниченным справа, они могут быть расположены как угодно редко и произвольно ориентированы в C-плоскости.

Вкратце приведем схему доказательства теоремы. Условимся через I'_k обозначать отрезок $I_k - z_k$, где $z_k = (a_k + b_k)/2$. Рассмотрим пространство $L^2(I'_k, |dz|)$. Система функций $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит этому пространству. Допустим, что мы доказали для этой системы функций ее неполноту и минимальность в $L^2(I'_k, |dz|)$. Тогда существует биортогональная система функций $\{\varphi_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ (k — номер отрезка I'_k), т.е.

$$(e^{\lambda_n z}, \varphi_k^{(k)}) = \int\limits_{I'_k} e^{\lambda_k z}\overline{\varphi_m^{(k)}(z)}\, d|z| = \delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера. Из абсолютной сходимости ряда, представляющего функцию $f(z)$, имеем

$$f(z + z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z} e^{\lambda_n z_k}. \tag{1}$$

Далее заметим, что $f(z + z_k) \in L^2(I'_k, |dz|)$ и сходимость имеет место в $L^2(I'_k, |dz|)$, поэтому применение биортогонального функционала $\varphi_m^{(k)}$ к обеим частям равенства (1) нам дает

$$(f(z + z_k), \varphi_m^{(k)}) = c_m e^{\lambda_m z_k}$$

или

$$|(f(z + z_k), \varphi_m^{(k)})| = |c_m| e^{\mathrm{Re}\lambda_m z_k}.$$

Из неравенства Шварца имеем

$$|(f(z + z_k), \varphi_m^{(k)})| \leqslant \|f(z + z_k)\| \cdot \|\varphi_m^{(k)}\| \leqslant C\sqrt{2\delta}\,\|\varphi_m^{(k)}\|$$

(неравенство $\|f(z + z_k)\| \leqslant C\sqrt{2\delta}$ следует из того, что функция $f(z)$ ограничена на отрезке I_k константой C по условию теоремы). Из последнего неравенства следует, что

$$|c_m| \leqslant C\sqrt{2\delta}\, e^{-\mathrm{Re}\lambda_m z_k}\, \|\varphi_m^{(k)}\|.$$

Теперь сделаем предположение о том, что нам удалось оценить норму биортогонального функционала $\varphi_m^{(k)}$ некоторой величиной, не зависящей от номера отрезка I_k, обозначив эту величину через α_m, получим

$$|c_m| \leqslant C\sqrt{2\delta}\, e^{-\mathrm{Re}\lambda_m z_k}\, \alpha_m.$$

Устремляя теперь $k \to +\infty$ по той подпоследовательности, где $\mathrm{Re} z_k \to +\infty$, имеем $c_m = 0$, т.е все коэффициенты c_m разложения функции $f(z)$ в ряд по системе $\{e^{\lambda_m z}\}_{m=1}^{\infty}$ равны нулю, а следовательно, и $f(z) \equiv 0$.

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы мы реализуем приведенную выше схему: а именно мы докажем наличие биортогональной системы $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ для системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L^2(I, |dz|)$, где I — произвольный отрезок в комплексной плоскости длины 2δ, середина которого совпадает с началом координат, а затем оценим норму m-го элемента этой биортогональной системы некоторой величиной α_m, не зависящей от ориентации отрезка l.

Построим функцию $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Функция $\psi(z) = \Phi(\sqrt{z})$ является целой функцией порядка не выше $1/2$ и так как ее корни λ_k^2 принадлежат классу сходимости при порядке $1/2$ (не целое число), т.е. $\sum (\lambda_k^2)^{1/2} < \infty$, то и сама функция $\psi(z)$ принадлежит классу сходимости при порядке $1/2$, т.е.

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(r, \psi)}{r^{1+1/2}}\, dr < \infty,$$

где $M(r, \psi) = \max\limits_{|z|=r} |\psi(z)|$. Из последнего неравенства следует, что

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(r, \Phi)}{r^2}\, dr < \infty,$$

т.е. функция $\Phi(z)$ принадлежит классу сходимости при порядке 1. Таким образом, при любом θ, $|\theta| = 1$, функция $\Phi(\theta z)$ принадлежит классу Картрайт, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |\Phi(\theta x)|}{1 + x^2}\, dx < \infty,$$

так как справедлива оценка ($x \in R$)

$$|\Phi(\theta x)| \leqslant \Phi(ix) = M(x, \Phi). \tag{2}$$

Теперь нам понадобится теорема Берлинга — Малявена о мультипликаторе [3]. Напомним ее.

Теорема (Beurling, Malliavin [3]). Пусть $u(z)$ — функция экспоненциального типа σ, которая удовлетворяет условию Картрайт:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |u(x)|}{1 + x^2}\, dx < \infty.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ найдется целая функция $g_\delta(z)$, такая, что $u(z) \cdot g_\delta(z) \in W(\sigma + \delta)$, где $W(a)$ — класс Винера типа a. Или, другими словами, $u(z) \cdot g_\delta(z)$ — функция экспоненциального типа не выше $\sigma_+\delta$ и $u(z)\, g_\delta(z) \in L^2(-\infty, \infty)$.

Воспользовавшись этой теоремой, мы и построим биортогональную систему $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ к системе экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L^2(l, |dz|)$. Зафиксируем m и рассмотрим функцию $\Phi_m(iz) = \Phi(iz)/$ $/\Phi'(-\lambda_m) \cdot \Phi'(\lambda_m)(\lambda_m^2 + z^2)$. Это функция не выше экспоненциального типа 0, принадлежащая классу Картрайт и по теореме Берлинга — Малявена найдется такая целая функция $g_\delta(z)$, что, $\Phi_m(iz)\, g_\delta(z) \in$ $\in W(\delta)$, не ограничивая общности, можно считать, что на окружности $|z| = \lambda_m$ нет корней функции $g_\delta(z)$ (если они имеются, то вместо $g_\delta(z)$ можно взять функцию

$$g_\delta^1(z) = \frac{\Pi\,(z - e^{i\theta_k}(\lambda_m + \varepsilon))}{\Pi\,(z - e^{i\theta_k})}\, g_\delta(z),$$

где $e^{i\theta_k}\lambda_m$ — корни функции $g_\delta(z)$ на окружности $|z| = \lambda_m$). В силу неравенства (2) имеем оценку ($z \in R$)

$$\left|\varphi_m(\theta z)\frac{g_\delta(z)}{g_\delta(\theta\lambda_m)}\right| \leqslant \frac{|\Phi_m(iz)\,g_\delta(z)|}{|g_\delta(\theta\lambda_m)|}.$$

А это значит, что в $L^2(-\infty, \infty)$

$$\left\|\Phi_m(\theta z)\frac{g_\delta(z)}{g_\delta(\theta\lambda_m)}\right\| \leqslant \|\Phi_m(iz)\,g_\delta(z)\| \cdot \frac{1}{\min\limits_{|z|=\lambda_m}|g_\delta(z)|}.$$

Так как $\Phi_m(iz)\,g_\delta(z) \in W(\delta)$, то, по теореме Винера — Пели, существует функция $\varphi_m(t)$, такая, что

$$\Phi_m(\theta z)\frac{g_\delta(z)}{g_\delta(\theta\lambda_m)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{izt}\varphi_m(t)\,dt. \tag{3}$$

А из равенства Парсеваля следует, что $\varphi_m(t) \in L^2(-\delta, \delta)$

$$\|\varphi_m(t)\| \leqslant \|\Phi_m(iz)\,g_\delta(z)\| \cdot \frac{1}{\min\limits_{|z|=\lambda_m}|g_\delta(z)|} \leqslant \alpha_m,$$

причем α_m не зависит от θ. Из соотношения (3) имеем

$$\delta_{m,j} = \Phi_m(\lambda_j)\frac{g_\delta(-\theta\lambda_j)}{g_\delta(-\theta\lambda_m)} = \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-i\lambda_j\theta t}\varphi_m(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{i\theta\delta}^{-i\theta\delta} e^{\lambda_j z}\varphi_m\left(\frac{z}{-i\theta}\right)d|z|.$$

Таким образом, функция $\left\{\varphi_m\left(\frac{z}{-i\theta}\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ образуют биортогональную систему к системе экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L^2(l, |dz|)$, где $l = (i\theta\delta, -i\theta\delta)$ и их нормы оцениваются величинами α_m, не зависящими от θ. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Macintype A. I.* Asymptotic paths of integral functions with gap power sipies//Proc. London Math. Soc. 1952. 2, № 3. P. 268—296. 2. *Евграфов М. А.* Об одной теореме единственности для рядов Дирихле//Успехи мат. наук. 1962. 17, № 3. С. 169—175. 3. *Beurling A., Malliavin P.* On fourier transforms of measupes with compact support//Acta Math. 1962. 107. P. 291—309. 4. *Korevaap I.* Muntz-type theorems for ares and for R^n//J. Canadian Math. Society. 1980. 3. P. 199—225.

Поступила в редколлегию 25.12.90