

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

магістра

на тему **«Неявні лінійні різницеві рівняння вищого порядку з  
випадковою правою частиною»**

Виконав:

студент групи МП-61

спеціальність 113 – прикладна математика  
освітньо-професійна програма «Прикладна  
математика»

**Чахмахчян Д.М.**

Науковий керівник:

кандидат фіз.-мат. наук, доцент з/во кафедри  
прикладної математики

**Півень О.Л.**

Рецензент:

к. ф.-м. наук, старший науковий  
співробітник відділу теорії функцій ФТІНТ  
імені Б.І. Веркіна НАН України

**Гефтер С.Л.**

Харків – 2025 рік

### **Анотація**

#### **Чахмахчян Давид Мартінович Неявні лінійні різницеві рівняння вищого порядку з випадковою правою частиною**

Розглянуто неявне лінійне різницеве рівняння над кільцем цілих чисел зі сталими коефіцієнтами та випадковими правими частинами, що приймають цілі значення. Для випадку скінченного проміжку часу надано явний опис випадкової події, яка полягає в існуванні розв'язку рівняння в цілих числах. Для випадку нескінченного часу знайдено достатні умови, за яких ймовірність цієї події дорівнює нулю. Одержані результати ілюструються конкретними прикладами.

**Ключові слова:** ймовірність, неявне лінійне різницеве рівняння, рівняння над кільцем цілих чисел, випадкова подія.

### **Abstract**

#### **Chakhmakhchian Davyd. Martinovich. Implicit higher order linear difference equations with a random right-hand side**

An implicit linear difference equation over the ring of integers with constant coefficients and integer-valued random right-hand sides is considered. For the case of a finite time interval, an explicit description of the random event consisting in the existence of an integer solution to the equation is provided. For the case of infinite time, sufficient conditions are found under which the probability of this event is zero. The obtained results are illustrated by specific examples.

**Keywords:** probability, implicit linear difference equation, equation over the ring of integers, random event.

## Зміст

| Розділ                                                                                                          | Сторінка |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Вступ                                                                                                           | 4        |
| 1 Допоміжні твердження                                                                                          | 7        |
| 2. Неявне лінійне різницеве рівняння вищого порядку з випадковою правою частиною на скінченному проміжку часу   | 12       |
| 2.1 Неявне лінійне різницеве рівняння з невідповідною правою частиною.                                          | 12       |
| 2.1.1 Постановка задачі                                                                                         | 12       |
| 2.1.2 Умови розв'язності системи (2.2)                                                                          | 12       |
| 2.1.3 Приклади                                                                                                  | 19       |
| 2.2. Дослідження неявного лінійного різницєвого рівняння з випадковою правою частиною.                          | 21       |
| 2.2.1 Постановка задачі                                                                                         | 21       |
| 2.2.2 Ймовірність існування розв'язку рівняння (2.19).                                                          | 21       |
| 2.2.3 Приклади                                                                                                  | 22       |
| 3. Неявне лінійне різницеве рівняння вищого порядку з випадковою правою частиною на нескінченному проміжку часу | 25       |
| 3.1 Постановка задачі                                                                                           | 25       |
| 3.2 Основні результати                                                                                          | 25       |
| 3.3 Приклади                                                                                                    | 37       |
| Висновки                                                                                                        | 42       |
| Список використаних джерел                                                                                      | 43       |

## Вступ

Нехай  $a$  та  $b$  – цілі числа,  $\mathbb{N}_0$  – множина невід'ємних цілих чисел,  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  – послідовність цілозначних випадкових величин, які визначено на повному ймовірнісному просторі  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . В роботі [1] для  $\omega \in \Omega$  розглядалось неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку

$$bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1)$$

В [1, Теорема 3.5] було доведено, що якщо  $b \neq 0, a$  не ділиться на  $b$ , і випадкові величини  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) незалежні, однаково розподілені та мають не вироджений розподіл, то

$$P(\{\omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega)\}) = 0,$$

тобто ймовірність існування розв'язку в цілих числах рівняння (1) дорівнює нулю. В роботі [2] цей результат узагальнено на випадок наступного неповного неявного рівняння порядку  $N$ :

$$bx_{n+N} + ax_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

При тих самих умовах на  $a, b$  та  $\{f_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$  доведено, що

$$P(\{\omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad bx_{n+N} + ax_n = f_n(\omega)\}) = 0.$$

Також в [2] розглядалось неявне лінійне різницеве рівняння другого порядку

$$cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

з коефіцієнтами  $a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0, \pm 1$ . Доведено, що якщо  $\gcd(a+b, c) = 1$  і  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  – послідовність незалежних цілозначних однаково розподілених випадкових величин, які мають не вироджений розподіл, то

$$P(\omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \quad cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0) = 0.$$

Тепер нехай  $N \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Z}$  – задані цілі числа, причому  $a_0, a_N \neq 0$ . В другому розділі кваліфікаційної роботи для  $\omega \in \Omega$  розглядається неявне лінійне різницеве рівняння порядку  $N$  на скінченному проміжку часу

$$a_N x_{n+N} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n(\omega), \quad n = 0, \dots, t$$

і аналізується пов'язана з ним випадкова подія

$$A = \{\omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{m+N} \in \mathbb{Z}^{m+N+1} : a_N x_{n+N} + \dots + a_0 x_n = f_n(\omega), \quad n = \overline{0, m}\}.$$

Основний результат цього розділу – теорема 2.3, в якій надано явний вигляд події  $A$ . При доведенні цієї теореми використовується наслідок теореми 2.2, яка в свою чергу доводиться за допомоги теореми 2.1 про розв’язність системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_N x_N + \dots + a_1 x_1 + a_0 x_0 = f_0, \\ a_N x_{N+1} + \dots + a_1 x_2 + a_0 x_1 = f_1, \\ \dots \\ a_N x_{N+m} + \dots + a_1 x_{m+1} + a_0 x_m = f_m, \end{cases}$$

з не випадковою правою частиною. Теорема 2.1 доводиться із застосуванням нормальної форми Сміта, тотожності Якобі та властивості найбільшого спільного дільника цілих чисел (див. допоміжний розділ 1)

У третьому розділі кваліфікаційної роботи для  $\omega \in \Omega$  розглядається наступне неявне лінійне різницеве рівняння порядку  $N$  на нескінченному проміжку часу

$$a_N x_{n+N} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

з незалежними випадковими величинами  $f_n(\omega)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . З цим рівнянням пов’язана випадкова подія

$$A = \{\omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} : a_N x_{n+N} + \dots + a_0 x_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Як і в [1,2] для рівнянь першого та другого порядку відповідно, знайдено умови, за яких ймовірність події  $A$  дорівнює нулю (теореми 3.1 та 3.2). Суттєвість умов теорем 3.1 та 3.2 продемонстровано на конкретних прикладах.

Зауважимо, що умови існування та єдиності розв’язку в цілих числах аналогічного неявного лінійного різницевого рівняння порядку  $N$

$$a_N x_{n+N} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

на нескінченному проміжку часу із заданими цілими числами  $a_n, f_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) наведено в [3].

Результати третього розділу кваліфікаційної роботи у частковому випадку  $N = 2$  було оприлюднено на XVIII Міжнародній науково-практичній конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях" (2024 р.) [2], а результати другого розділу – на XIX

Міжнародній науково-практичній конференції студентів та молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (2025 р.) [4].

Третій розділ даної роботи є продовженням третього розділу кваліфікаційної роботи першого (бакалаврського) рівня [5], де було знайдено умови, за яких ймовірність того, що неявне лінійне різницеве рівняння другого порядку

$$cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

має розв'язок в цілих числах, дорівнює нулю.

## Розділ 1 Допоміжні твердження

Як відомо, найбільший спільний дільник  $\gcd(b_0, b_1, \dots, b_n)$  цілих чисел  $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$  визначається із точністю до знаку. Далі скрізь у роботі ми будемо вважати, що  $\gcd(b_0, b_1, \dots, b_n) > 0$ .

Спочатку наведемо деякі властивості найбільшого спільного дільника.

### 1.1 Найбільший спільний дільник

#### Лема 1.1

Нехай  $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$  — такі, що

$$\gcd(b_0, b_1, \dots, b_n) = 1.$$

Тоді

$$\gcd(b_0, b_1^2 - b_0 b_2, b_2^2 - b_1 b_3, \dots, b_{n-1}^2 - b_{n-2} b_n, b_n) = 1.$$

*Доведення*

Припустимо протилежне: існує просте число  $p$ , що ділить усі елементи множини

$$b_0, b_1^2 - b_0 b_2, b_2^2 - b_1 b_3, \dots, b_{n-1}^2 - b_{n-2} b_n, b_n.$$

Тоді  $p \mid b_0$  і  $p \mid b_n$ , а також для кожного  $i = 1, \dots, n-1$  маємо:

$$p \mid (b_i^2 - b_{i-1} b_{i+1}). \quad (1.1)$$

Припустимо за індукцією, що  $p \mid b_{i-1}$ . Тоді:

Оскільки  $p \mid b_{i-1}$ , то добуток  $b_{i-1} b_{i+1}$  також ділиться на  $p$ .

Тоді з (1.1) випливає, що  $p \mid b_i^2$  і тоді  $p \mid b_i$

Таким чином, якщо  $p \mid b_0$  і  $p \mid b_n$ , то крок за кроком можемо показати, що  $p \mid b_i$  для всіх  $i = 0, 1, \dots, n$ , тобто:

$$p \mid \gcd(b_0, b_1, \dots, b_n),$$

що суперечить початковій умові  $\gcd(b_0, b_1, \dots, b_n) = 1$ .

Тому такого простого числа  $p$  не існує, а отже:

$$\gcd(b_0, b_1^2 - b_0 b_2, \dots, b_{n-1}^2 - b_{n-2} b_n, b_n) = 1.$$

*Лему доведено.*

#### Приклад 1.1

Розглянемо наступну множину цілих чисел: 8, 20, 76, 35, 34.

$$\gcd(8, 20, 76, 35, 34) = 1.$$

Тоді, за лемою 1.1

$$\gcd(8, 20^2 - 8 * 76, 76^2 - 20 * 35, 35^2 - 20 * 34, 34) = 1.$$

Перевіримо це

$$20^2 - 8 * 76 = 400 - 608 = -208,$$

$$76^2 - 20 * 35 = 5776 - 700 = 5076,$$

$$35^2 - 20 * 34 = 1225 - 680 = 545.$$

Отримаємо

$$\gcd(8, -208, 5076, 545, 34) = 1.$$

### Лема 1.2

Нехай  $a, b, c, s \in \mathbb{Z}$ ,  $s > 0$ ,  $\gcd(a, b) = c$ . Тоді  $\gcd(a^s, b^s) = \gcd^s(a, b) = c^s$ .

*Доведення*

Якщо  $\gcd(a, b) = c$ , то  $\gcd\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = 1$ .

Тоді за [6, Ст.12, власт. 6] справедлива наступна рівність:

$$\gcd\left(\left(\frac{a}{c}\right)^s, \left(\frac{b}{c}\right)^s\right) = 1.$$

Помноживши на  $c^s$  обидві частини рівності отримаємо

$$\gcd(a^s, b^s) = c^s.$$

Очевидно, що  $\gcd^s(a, b) = c^s$ , а отже

$$\gcd(a^s, b^s) = \gcd^s(a, b) = c^s.$$

*Лему доведено.*

### 1.2 Тотожність Якобі

Тепер наведемо тотожність Якобі [7], яку буде використано для одержання основного результату роботи.

**Лема 1.3 Тотожність Якобі [7. Теорема 3.12]:**

Нехай  $A$  – квадратна матриця порядку  $k$ , і для всіх  $1 \leq i, j \leq k$  позначимо  $M_i^j$  – мінор матриці  $A$ , який отримується при викресленні рядку з номером  $i$  та стовпця  $j$ . Аналогічно для  $1 \leq i, j, p, q \leq k$  позначимо  $M_{i,j}^{p,q}$  – мінор, що отримується з матриці  $A$  шляхом викреслення рядків з номерами  $i$  та  $j$  й стовпців  $p$  та  $q$ . Тоді:

$$\det(A)M_{1,k}^{1,k} = M_1^1 M_k^k - M_1^k M_k^1. \quad (1.2)$$

Наведемо приклад використання тотожності Якобі.

### Приклад 1.2

Візьмемо

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 15 & 8 & 6 \\ 22 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Тут  $k = 2$ . Обчислюємо

$$\det(A) = 400 + 528 + 315 - 528 - 210 - 600 = -95,$$

$$M_{1,k}^{1,k} = 8,$$

$$M_1^1 = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 38,$$

$$M_k^k = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 15 & 8 \end{vmatrix} = -20,$$

$$M_1^k = \begin{vmatrix} 15 & 8 \\ 22 & 7 \end{vmatrix} = -71,$$

$$M_k^1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Далі

$$M_1^1 M_k^k - M_1^k M_k^1 = 38 \cdot (-20) - (-71) \cdot 0 = -760 = -95 \cdot 8 = \det(A)M_{1,k}^{1,k},$$

тобто перевірили справедливість формули (1.2).

### 1.3 Нормальна форма Сміта

**Лема 1.4 Нормальна форма Сміта [8. Теорема 3.18]:**

Для будь-якої прямокутної матриці  $A$  рангу  $m$  і розмірності  $m \times n$  існують оборотні над кільцем цілих чисел  $\mathbb{Z}$  матриці  $U$  – розміром  $m \times m$ , та  $V$  – розміром  $n \times n$  такі, що

$$UAV = A' = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

де  $g_{i+1}$  ділиться на  $g_i$  для будь-якого  $i$  від 1 до  $m - 1$ .

### Визначення 1.1

Матрицю  $A'$ , побудовану в лемі 1.4, називають *нормальною формою Сміта* матриці  $A$ .

Знайти  $g_i$  можна наступним чином [8, формула (3.21)]:

$$g_i = \frac{M_i(A)}{M_{i-1}(A)}, i = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

де  $M_k(A)$  – найбільший спільний дільник усіх мінорів порядку  $k \in \mathbb{N}$  матриці  $A$ ,  $M_0(A) = 1$ .

Наведемо приклад обчислення нормальної форми Сміта.

### Приклад 1.3

Візьмемо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 18 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо  $M_k(A)$  – найбільший спільний дільник усіх мінорів порядку  $k \in \mathbb{N}$  матриці  $A$ .

$$M_0(A) = 1,$$

$$M_1(A) = \gcd(3, 4, 5, 7, 18) = 1,$$

$$M_2(A) = \gcd \left( \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 18 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 18 \end{vmatrix} \right) = \gcd(1, 38, 62) = 1.$$

За формулою (1.3) обчислимо  $g_i, i = 1, 2$

$$g_1 = \frac{M_1(A)}{M_0(A)} = 1,$$

$$g_2 = \frac{M_2(A)}{M_1(A)} = 1.$$

Отже за лемою 1.4 існують такі оборотні матриці  $U$  – розміром  $2 \times 2$ , та  $V$  – розміром  $3 \times 3$  такі, що

$$UAV = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наприклад,

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 205 & -546 & 62 \\ -125 & 333 & -38 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Розділ 2 Неявне лінійне різницеве рівняння вищого порядку з випадковою правою частиною на скінченному проміжку часу

### 2.1 Неявне лінійне різницеве рівняння з невідповідною правою частиною

#### 2.1.1 Постановка задачі

Нехай  $a_0, a_1, \dots, a_N, f_0, \dots, f_m \in \mathbb{Z}$  – задані цілі числа,  $m$  – невід'ємне ціле число,  $a_0, a_N \neq 0$ . Розглянемо задачу розв'язання в цілих числах наступного лінійного різницєвого рівняння вищого порядку:

$$a_N x_{n+N} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n, \quad n = 0, \dots, m. \quad (2.1)$$

Рівняння (2.1) приймає вигляд системи з  $m + 1$  лінійних алгебраїчних рівнянь із  $m + N + 1$  невідомими:

$$\begin{cases} a_N x_N + \dots + a_1 x_1 + a_0 x_0 = f_0, \\ a_N x_{N+1} + \dots + a_1 x_2 + a_0 x_1 = f_1, \\ \dots \\ a_N x_{N+m} + \dots + a_1 x_{m+1} + a_0 x_m = f_m. \end{cases} \quad (2.2)$$

#### 2.1.2 Умови розв'язності системи (2.2)

Наступна теорема дає умови розв'язності системи (2.2) у випадку взаємно простих цілих чисел  $a_0, a_1, \dots, a_N$ .

##### Теорема 2.1

*Припустимо, що  $\gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) = 1$ . Тоді для будь-яких чисел  $f_0, \dots, f_m \in \mathbb{Z}$  система рівнянь (2.2) має розв'язок в цілих числах. Цей розв'язок не є єдиним.*

*Доведення*

Нехай  $\gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) = 1$ . Якщо  $m = 0$ , то система (2.2) перетворюється в одне діофантове рівняння

$$a_N x_N + \dots + a_1 x_1 + a_0 x_0 = f_0. \quad (2.3)$$

За [9, Ch.5, Theorem 1] рівняння (2.3) має розв'язок в цілих числах і цей розв'язок є неєдиним.

Тепер розглянемо випадок  $m \geq 1$ . Система (2.2) при  $m \geq 1$  переписується у векторно-матричному вигляді:

$$Sx = q, \quad (2.4)$$

де матриця  $S$  розміром  $(m + 1) \times (m + N + 1)$ , вектор  $x$  та вектор  $q$  виглядають наступним чином:

$$S = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_N \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N+m} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}.$$

Скористаємось нормальною формою Сміта. Тоді за лемою 1.4 існують оборотні матриці  $U$  – розміром  $(m + 1) \times (m + 1)$ , та  $V$  – розміром  $(m + N + 1) \times (m + N + 1)$  такі, що

$$USV = S' = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & g_{m+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для цілих  $j \notin \{0, \dots, N\}$  покладемо для зручності  $a_j = 0$ . Тоді для будь-якого  $k \leq m + 1$ , серед мінорів порядку  $k$ , матриці  $S$  наявні мінори наступного вигляду:

$$\Delta_i^k = \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} & a_{i+2} & \cdots & a_{i+k-2} & a_{i+k-1} \\ a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{i+k-3} & a_{i+k-2} \\ a_{i-2} & a_{i-1} & a_i & \cdots & a_{i+k-4} & a_{i+k-3} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{i-k+2} & a_{i-k+3} & a_{i-k+4} & \cdots & a_i & a_{i+1} \\ a_{i-k+1} & a_{i-k+2} & a_{i-k+3} & \cdots & a_{i-1} & a_i \end{vmatrix}, \quad (i = 0, \dots, N).$$

Мінор  $\Delta_i^k$  утворюється з рядків матриці  $S$  з номерами  $\{1, \dots, k\}$  та стовпчиків з номерами  $\{i + 1, \dots, i + k\}$ . Відзначимо, що  $\Delta_0^k = a_0^k, \Delta_N^k = a_N^k$ .

Специфіка мінорів  $\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k$  така, що, взявши в тотожності Якобі (1.2) за  $\det(A)$  мінор  $\Delta_i^k$  ( $i = 1, \dots, N - 1, k = 2, \dots, m$ ) то в якості  $M_{1,k}^{1,k}, M_1^1, M_k^k, M_1^k$  та  $M_k^1$  ми отримаємо  $\Delta_i^{k-2}, \Delta_i^{k-1}, \Delta_i^{k-1}, \Delta_{i-1}^{k-1}$  та  $\Delta_{i+1}^{k-1}$  відповідно.

Тобто, застосовуючи тотожність (1.2) для наших визначників  $\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k$ , отримаємо

$$\Delta_i^k \Delta_i^{k-2} = (\Delta_i^{k-1})^2 - \Delta_{i-1}^{k-1} \Delta_{i+1}^{k-1}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad k = 3, \dots, m + 1. \quad (2.5)$$

Методом математичної індукції доведемо, що  $\gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k) = 1$ .

**База індукції:**

**$k = 1$ :**

Оскільки  $\Delta_i^1 = a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , то

$$\gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k) = \gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) = 1.$$

**$k = 2$ . Маємо наступні мінори**

$$\begin{aligned} \Delta_0^2 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix}, \\ \Delta_1^2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}, \\ &\dots \\ \Delta_i^2 &= \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} \\ a_{i-1} & a_i \end{vmatrix}, (i = 1, \dots, N-1), \\ &\dots \\ \Delta_N^2 &= \begin{vmatrix} a_N & 0 \\ a_{N-1} & a_N \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \Delta_0^2 &= a_0^2, \\ \Delta_N^2 &= a_N^2, \\ \Delta_i^2 &= a_i^2 - a_{i-1}a_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k) &= \gcd(\Delta_0^2, \Delta_1^2, \dots, \Delta_N^2) = \\ &= \gcd(a_0^2, a_1^2 - a_0a_2, a_2^2 - a_1a_3, \dots, a_{N-1}^2 - a_{N-2}a_N, a_N^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Згрупуємо елементи використовуючи асоціативність операції обчислення найбільшого спільного дільника та лему 1.2:

$$\begin{aligned} &\gcd(a_0^2, a_1^2 - a_0a_2, a_2^2 - a_1a_3, \dots, a_{N-1}^2 - a_{N-2}a_N, a_N^2) = \\ &= \gcd(\gcd(a_0^2, a_N^2), \gcd(a_1^2 - a_0a_2, a_2^2 - a_1a_3, \dots, a_{N-1}^2 - a_{N-2}a_N)) = \\ &= \gcd(\gcd^2(a_0, a_N), \gcd(a_1^2 - a_0a_2, \dots, a_{N-1}^2 - a_{N-2}a_N)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тепер розглянемо наступний вираз:

$$\gcd(a_0, a_1^2 - a_0a_2, a_2^2 - a_1a_3, \dots, a_{N-1}^2 - a_{N-2}a_N, a_N).$$

Оскільки  $\gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) = 1$ , то за лемою 1.1

$$\gcd(a_0, a_1^2 - a_0 a_2, a_2^2 - a_1 a_3, \dots, a_{N-1}^2 - a_{N-2} a_N, a_N) = 1.$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} & \gcd(a_0, a_1^2 - a_0 a_2, a_2^2 - a_1 a_3, \dots, a_{N-1}^2 - a_{N-2} a_N, a_N) = \\ & = \gcd(\gcd(a_0, a_N), \gcd(a_1^2 - a_0 a_2, \dots, a_{N-1}^2 - a_{N-2} a_N)), \end{aligned}$$

тому

$$\gcd(\gcd(a_0, a_N), \gcd(a_1^2 - a_0 a_2, \dots, a_{N-1}^2 - a_{N-2} a_N)) = 1,$$

і за [6, С.12, власт. 6],

$$\gcd(\gcd^2(a_0, a_N), \gcd(a_1^2 - a_0 a_2, \dots, a_{N-1}^2 - a_{N-2} a_N)) = 1. \quad (2.8)$$

Тепер з (2.7) та (2.8) випливає, що

$$\gcd(a_0^2, a_1^2 - a_0 a_2, a_2^2 - a_1 a_3, \dots, a_{N-1}^2 - a_{N-2} a_N, a_N^2) = 1.$$

Отже з (2.6) отримуємо, що

$$\gcd(\Delta_0^2, \Delta_1^2, \dots, \Delta_N^2) = 1.$$

**Індуктивний перехід:**

Припустимо, що для деякого  $k \geq 3$

$$\gcd(\Delta_0^{j-1}, \Delta_1^{j-1}, \dots, \Delta_N^{j-1}) = 1, \quad j = 2, \dots, k.$$

Доведемо, що

$$\gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k) = 1.$$

Домножимо визначники  $\Delta_i^k$   $i = 1, 2, \dots, N-1$  на відповідні  $\Delta_i^{k-2}$ , отримаємо

$$\gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k) \leq \gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k \Delta_1^{k-2}, \dots, \Delta_{N-1}^k \Delta_{N-1}^{k-2}, \Delta_N^k). \quad (2.9)$$

Отже, тепер достатньо довести, що  $\gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k \Delta_1^{k-2}, \dots, \Delta_{N-1}^k \Delta_{N-1}^{k-2}, \Delta_N^k) = 1$ .

Далі розпишемо цей найбільший спільний дільник за допомоги формули (2.5):

$$\begin{aligned} & \gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k \Delta_1^{k-2}, \dots, \Delta_{N-1}^k \Delta_{N-1}^{k-2}, \Delta_N^k) = \\ & = \gcd\left(\Delta_0^k, (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1}, \Delta_N^k\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Зауважимо, що  $\Delta_0^k = a_0^k$ ,  $\Delta_N^k = a_N^k$ , тому

$$\begin{aligned} & \gcd\left(\Delta_0^k, (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1}, \Delta_N^k\right) = \\ & = \gcd\left(a_0^k, (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1}, a_N^k\right) = \\ & = \gcd\left(\gcd(a_0^k, a_N^k), \gcd\left((\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1}\right)\right) = \end{aligned}$$

$$= \gcd \left( \gcd^k(a_0, a_N), \gcd \left( (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1} \right) \right).$$

Таким чином, з (2.10) отримаємо наступне

$$\begin{aligned} & \gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k \Delta_1^{k-2}, \dots, \Delta_{N-1}^k \Delta_{N-1}^{k-2}, \Delta_N^k) = \\ & = \gcd \left( \gcd^k(a_0, a_N), \gcd \left( (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тепер розглянемо наступний вираз:

$$\gcd \left( \Delta_0^{k-1}, (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1}, \Delta_N^{k-1} \right).$$

Оскільки за припущенням індукції

$$\gcd(\Delta_0^{j-1}, \Delta_1^{j-1}, \dots, \Delta_N^{j-1}) = 1, \quad j = 2, \dots, k,$$

то за лемою 1.1

$$\gcd \left( \Delta_0^{k-1}, (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1}, \Delta_N^{k-1} \right) = 1.$$

Оскільки

$$\Delta_0^{k-1} = a_0^{k-1}, \Delta_N^{k-1} = a_N^{k-1},$$

то

$$\begin{aligned} 1 &= \gcd \left( \Delta_0^{k-1}, (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1}, \Delta_N^{k-1} \right) = \\ &= \gcd \left( a_0^{k-1}, (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1}, a_N^{k-1} \right) = \\ &= \gcd \left( \gcd^{k-1}(a_0, a_N), \gcd \left( (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1} \right) \right). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} & \gcd \left( \gcd^{k-1}(a_0, a_N), \gcd \left( (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1} \right) \right) = \\ & = 1, \end{aligned}$$

то, за [6, С.12, власт. 7],

$$\gcd \left( \gcd(a_0, a_N), \gcd \left( (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1} \right) \right) = 1.$$

Отже за [6, С.12, власт. 6] випливає, що

$$\gcd \left( \gcd^k(a_0, a_N), \gcd \left( (\Delta_1^{k-1})^2 - \Delta_0^{k-1} \Delta_2^{k-1}, \dots, (\Delta_{N-1}^{k-1})^2 - \Delta_{N-2}^{k-1} \Delta_N^{k-1} \right) \right) = 1.$$

Тоді, з рівняння (2.11) отримуємо наступне:

$$\gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k \Delta_1^{k-2}, \dots, \Delta_{N-1}^k \Delta_{N-1}^{k-2}, \Delta_N^k) = 1.$$

Отже з рівняння (2.9)

$$\gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k) \leq 1.$$

Тобто

$$\gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k) = 1.$$

Таким чином,  $M_k(S)$  з рівняння (1.3) можна знайти наступним чином:

$$\begin{aligned} M_k(S) &= \gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k, e_1, \dots, e_l) = \\ &= \gcd(\gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k), e_1, \dots, e_l), \end{aligned}$$

де  $e_1, \dots, e_l$  – визначники всіх інших мінорів порядку  $k$ , матриці  $S$ .

Оскільки  $\gcd(\Delta_0^k, \Delta_1^k, \dots, \Delta_N^k) = 1$ , то:

$$M_k(S) = \gcd(1, e_1, \dots, e_l) = 1, \quad \forall k = 1, \dots, m+1.$$

Тому, за рівнянням (1.3),  $g_i = 1$  для будь-якого  $i$  від 1 до  $m+1$ , а матриця  $S'$  розміром  $(m+1) \times (m+n+1)$  виглядає наступним чином:

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Здійснивши в рівнянні (2.4) заміну

$$x' = V^{-1}x = \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_{n+m} \end{pmatrix},$$

і позначивши

$$q' = Uq = \begin{pmatrix} f'_0 \\ \vdots \\ f'_m \end{pmatrix},$$

одержимо, що рівняння (2.4) є еквівалентним наступному рівнянню

$$S'x' = q', \tag{2.12}$$

де

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_{N+m} \end{pmatrix}, \quad q' = \begin{pmatrix} f'_0 \\ \vdots \\ f'_m \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок рівняння (2.12) має вигляд:

$$\begin{aligned} x'_0 &= f'_0; \\ x'_1 &= f'_1; \\ &\vdots \\ x'_m &= f'_m; \\ x'_{m+1}, x'_{m+2}, \dots, x'_{m+N} &- \text{довільні цілі числа.} \end{aligned}$$

Отже, оскільки рівняння (2.12) має неєдиний розв'язок в цілих числах для будь-яких цілих  $f_0, \dots, f_m$ , то і еквівалентне йому рівняння (2.4) та система рівнянь (2.2) теж завжди мають неєдиний розв'язок в цілих числах для будь-яких цілих  $f_0, \dots, f_m$ . Теорему доведено.

Наступна теорема встановлює критерій існування розв'язку в цілих числах системи рівнянь (2.2) у випадку довільних цілих  $a_0, a_1, \dots, a_N$ .

### Теорема 2.2

Нехай  $d = \gcd(a_0, a_1, \dots, a_N)$  та  $f_0, \dots, f_m$  – задані цілі числа. Система рівнянь (2.2) має розв'язок в цілих числах тоді і тільки тоді, коли кожне із чисел  $f_0, \dots, f_m$  є кратним до  $d$ , тобто

$$d|f_0, \dots, d|f_m. \quad (2.13)$$

При цьому розв'язок системи (2.2) не є єдиним.

*Доведення*

При  $d = 1$ , за Теоремою 2.1, система рівнянь (2.2) завжди має розв'язок й, очевидно, умова (2.13) виконана для будь-яких цілих чисел  $f_0, \dots, f_m$ .

Нехай тепер  $\gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) = d > 1$ .

Доведемо необхідність твердження теореми 2.2

Необхідною умовою розв'язності системи (2.2) є розв'язність кожного з рівнянь системи (2.2) окремо.

З [9, Ch.5, Theorem 1] випливає, що при  $f \in \mathbb{Z}$  діофантове рівняння виду

$$a_N x_N + \dots + a_1 x_1 + a_0 x_0 = f,$$

має розв'язок  $x_0, x_1, \dots, x_N$  в цілих числах тоді і тільки тоді, коли  $\gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) | f$ . Отже умова (2.13) є необхідною умовою розв'язності системи (2.2).

Доведемо достатність твердження теореми 2.2.

Припустимо, що умова (2.13) виконується та поділимо кожне з двох рівнянь системи (2.2) на  $d$ , отримаємо:

$$a_0' = \frac{a_0}{d}; a_1' = \frac{a_1}{d}; \dots; a_N' = \frac{a_N}{d},$$

$$f_0' = \frac{f_0}{d}; \dots; f_m' = \frac{f_m}{d}.$$

Тоді система (2.2) є еквівалентною наступній системі

$$\begin{cases} a_N' x_N + \dots + a_1' x_1 + a_0' x_0 = f_0' \\ a_N' x_{N+1} + \dots + a_1' x_2 + a_0' x_1 = f_1', \\ \dots \dots \dots \\ a_N' x_{N+m} + \dots + a_1' x_{m+1} + a_0' x_m = f_m'. \end{cases} \quad (2.14)$$

При цьому  $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ ,  $\gcd(a_0', a_1', \dots, a_N') = 1$ ,  $f_0', \dots, f_m' \in \mathbb{Z}$ . За теоремою система (2.14) завжди має розв'язок, до того ж не єдиний. Отже, умова (2.13) є необхідною та достатньою умовою розв'язності системи (2.2). Теорему доведено.

З теореми 2.2 випливає наступне твердження.

**Наслідок 2.1** Нехай  $d = \gcd(a_0, a_1, \dots, a_N)$  та  $f_0, \dots, f_m \in \mathbb{Z}$ . Різницеве рівняння (2.1) має розв'язок в цілих числах тоді і тільки тоді, коли виконано умову (2.13). Цей розв'язок не є єдиним.

### 2.1.3 Приклади.

Розглянемо приклади застосування теореми 2.1.

#### Приклад 2.1

Розглянемо наступне різницеве рівняння

$$5x_{n+4} + 4x_{n+3} + 3x_{n+2} + 7x_{n+1} + 6x_n = f_n, \quad n = 0, 1, 2. \quad (2.15)$$

Це рівняння записується у вигляді (2.1), де  $N = 4$ ,  $m = 2$ ,  $a_0 = 6$ ,  $a_1 = 7$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_4 = 5$ ,

Тоді система (2.2), яка відповідає рівнянню (2.15), приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} 5x_4 + 4x_3 + 3x_2 + 7x_1 + 6x_0 = f_0, \\ 5x_5 + 4x_4 + 3x_3 + 7x_2 + 6x_1 = f_1, \\ 5x_6 + 4x_5 + 3x_4 + 7x_3 + 6x_2 = f_2. \end{cases} \quad (2.16)$$

Оскільки  $\gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) = \gcd(6, 7, 3, 4, 5) = 1$ , то за теоремою 2.1 система (2.16) має розв'язок в цілих числах при будь-яких цілих числах  $f_0, f_1, f_2$

## Приклад 2.2

Розглянемо наступне різницеве рівняння

$$54x_{n+3} + 3x_{n+2} + 9x_{n+1} + 6x_n = f_n, \quad n = 0, 1, 2. \quad (2.17)$$

Це рівняння записується у вигляді (2.1), де  $N = 3$ ,  $m = 2$ ,  $a_0 = 6$ ,  $a_1 = 9$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 54$ ,

Тоді система (2.2), яка відповідає рівнянню (2.17), приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} 54x_3 + 3x_2 + 9x_1 + 6x_0 = f_0, \\ 54x_4 + 3x_3 + 9x_2 + 6x_1 = f_1, \\ 54x_5 + 3x_4 + 9x_3 + 6x_2 = f_2. \end{cases} \quad (2.18)$$

Так як  $\gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) = \gcd(6, 9, 3, 54) = 3$ , то за теоремою 1.2 система (2.18) буде мати розв'язки в цілих числах тоді й тільки тоді, коли числа  $f_0, f_1, f_2$  будуть націло ділитись на 3.

Наприклад, при  $f_0 = 9$ ,  $f_1 = 18$ ,  $f_2 = 6$  система (2.18) буде мати розв'язки, а при  $f_0 = 3$ ,  $f_1 = 3$ ,  $f_2 = 4$  розв'язків не буде, оскільки  $3 \nmid f_2$ .

## 2.2 Дослідження неявного лінійного різницевого рівняння з випадковою правою частиною.

### 2.2.1 Постановка задачі

Тепер нехай  $a_0, a_1, \dots, a_N$  – цілі числа,  $a_0, a_N \neq 0$ ,  $m$  – невід’ємне ціле число, а  $f_0(\omega), \dots, f_m(\omega)$  – випадкові величини, які приймають цілі значення і визначені на повному ймовірнісному просторі  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Для  $\omega \in \Omega$  розглянемо лінійне різницеве рівняння:

$$a_N x_{n+N} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n(\omega), \quad n = 0, \dots, m. \quad (2.19)$$

Нехай  $\mathbb{Z}^q$  – множина всіх  $q$  - вимірних векторів з цілими координатами. З рівнянням (2.19) пов’язано наступну випадкову подію:

$$A = \{\omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{m+N} \in \mathbb{Z}^{m+N+1} : a_N x_{n+N} + \dots + a_0 x_n = f_n(\omega), \quad n = \overline{0, m}\}.$$

Для кожного  $\omega \in \Omega$  рівняння (2.19) приймає вигляд системи з  $m+1$  лінійних рівнянь із  $m+3$  невідомими:

$$\begin{cases} a_N x_N + \dots + a_1 x_1 + a_0 x_0 = f_0(\omega), \\ a_N x_{N+1} + \dots + a_1 x_2 + a_0 x_1 = f_1(\omega), \\ \dots \\ a_N x_{N+m} + \dots + a_1 x_{m+1} + a_0 x_m = f_m(\omega). \end{cases} \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Ймовірність існування розв’язку рівняння (2.19).

Настання події  $A$  означає існування розв’язку системи (2.20). Наступна теорема встановлює еквівалентне означення події  $A$ .

#### Теорема 2.3

Нехай  $a_0, a_1, \dots, a_N$  – цілі числа,  $d = \gcd(a_0, a_1, \dots, a_N)$  та  $f_0(\omega), \dots, f_m(\omega)$  – цілозначні випадкові величини. Тоді

$$A = \{\omega \in \Omega: d|f_0(\omega), \dots, d|f_m(\omega)\}.$$

*Доведення*

Доведемо включення  $A \subset \{\omega \in \Omega: d|f_0(\omega), \dots, d|f_m(\omega)\}$ .

Припустимо, що для деякого  $\omega \in \Omega$  різницеве рівняння (2.19) має розв’язок в цілих числах, тобто  $\omega \in A$ . Це означає, що існують цілі числа  $x_0, \dots, x_{m+N}$ , що є розв’язком рівняння (2.19) для деякого  $\omega \in \Omega$ . А отже, за наслідком 2.1

$$d|f_0(\omega), \dots, d|f_m(\omega).$$

Тепер доведемо протилежне включення  $A \supset \{\omega \in \Omega: d|f_0(\omega), \dots, d|f_m(\omega)\}$ .

Нехай для деякого  $\omega \in \Omega$  виконано наступну умову:

$$d|f_0(\omega), \dots, d|f_m(\omega),$$

тоді, за наслідком 2.1, для  $\omega \in \Omega$  система рівнянь (2.20) має розв'язок в цілих числах, а отже  $\omega \in A$ . Теорему доведено.

## Наслідок 2.2

Нехай  $a_0, a_1, \dots, a_N$  - цілі числа, та  $a_j = 1$  при деякому  $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Припустимо, що  $f_0(\omega), \dots, f_m(\omega)$  - цілозначні випадкові величини. Тоді  $P(A) = 1$ .

## 2.2.3 Приклади

Наведемо приклади застосування теореми 2.3.

### Приклад 2.3

Нехай  $N = 3$ ,  $m = 1$ ,  $a_0 = 30, a_1 = 12, a_2 = 15, a_3 = 7$  і  $f_0, f_1$  - випадкові величини, що мають наступну таблицю розподілу:

| $f_0 \backslash f_1$ | 4   | 35  | 66  |
|----------------------|-----|-----|-----|
| 9                    | 0.2 | 0.1 | 0   |
| 21                   | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 77                   | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

Рівняння (2.19) приймає наступний вигляд:

$$7x_{n+3} + 15x_{n+2} + 12x_{n+1} + 30x_n = f_n(\omega), \quad n = 0, 1.$$

Тоді система (2.20) приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} 7x_3 + 15x_2 + 12x_1 + 30x_0 = f_0(\omega), \\ 7x_4 + 15x_3 + 12x_2 + 30x_1 = f_1(\omega). \end{cases}$$

Оскільки  $d = \gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) = \gcd(7, 15, 12, 30) = 1$ , то за теоремою 2.3  $P(A) = 1$ .

### Приклад 2.4

Нехай  $N = 2$ ,  $m = 1$ ,  $a_0 = 30$ ,  $a_1 = 12$ ,  $a_2 = 15$ , і  $f_0, f_1$  - випадкові величини, що мають наступну таблицю розподілу:

| $f_0 \backslash f_1$ | 32  | 45  | 66  |
|----------------------|-----|-----|-----|
| 9                    | 0.2 | 0.1 | 0   |
| 20                   | 0.1 | 0.1 | 0.2 |
| 78                   | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

Рівняння (2.19) приймає наступний вигляд:

$$15x_{n+2} + 12x_{n+1} + 30x_n = f_n(\omega), \quad n = 0, 1.$$

Тоді система (2.20) приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} 15x_2 + 12x_1 + 30x_0 = f_0(\omega), \\ 15x_3 + 12x_2 + 30x_1 = f_1(\omega). \end{cases}$$

Оскільки  $d = \gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) = \gcd(15, 12, 30) = 3$ , то за теоремою 2.3

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\omega \in \Omega: d|f_0(\omega), d|f_1(\omega)) = \\ &= P(\omega \in \Omega: f_0(\omega) = 45, f_1(\omega) = 9) + P(\omega \in \Omega: f_0(\omega) = 66, f_1(\omega) = 9) + \\ &+ P(\omega \in \Omega: f_0(\omega) = 45, f_1(\omega) = 78) + P(\omega \in \Omega: f_0(\omega) = 66, f_1(\omega) = 78) = \\ &= 0.1 + 0 + 0.1 + 0.1 = 0.3. \end{aligned}$$

### Приклад 2.5

Нехай  $N = 2$ ,  $m = 4$ ,  $a_0 = 48$ ,  $a_1 = 33$ ,  $a_2 = 7$ , і  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$  - однаково розподілені випадкові величини, що мають наступну таблицю розподілу:

| $c_i$ | -6  | 9   |
|-------|-----|-----|
| $p_i$ | 0.5 | 0.5 |

Рівняння (2.19) приймає наступний вигляд:

$$7x_{n+2} + 33x_{n+1} + 48x_n = f_n(\omega), \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Тоді система (2.20) приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} 7x_2 + 33x_1 + 48x_0 = f_0(\omega), \\ 7x_3 + 33x_2 + 48x_1 = f_1(\omega), \\ 7x_4 + 33x_3 + 48x_2 = f_2(\omega), \\ 7x_5 + 33x_4 + 48x_3 = f_3(\omega), \\ 7x_6 + 33x_5 + 48x_4 = f_4(\omega), \end{cases}$$

де кожна з величин  $f_0(\omega), \dots, f_4(\omega)$  з однаковою ймовірністю приймає значення  $c_1$  або  $c_2$ , тобто -6 або 9.

Оскільки  $d = \gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) = \gcd(48, 33, 7) = 1$ , то за теоремою 2.3  $P(A) = 1$ .

### Приклад 2.6

Нехай  $N = 2$ ,  $m = 4$ ,  $a_0 = 24$ ,  $a_1 = 8$ ,  $a_2 = 14$ , і  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$  – незалежні однаково розподілені випадкові величини, що мають наступну таблицю розподілу:

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $c_i$ | 17  | 3   | 44  |
| $p_i$ | 0.4 | 0.3 | 0.3 |

Рівняння (2.19) нехай приймає наступний вигляд:

$$14x_{n+2} + 8x_{n+1} + 24x_n = f_n(\omega), \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Тоді система (2.20) приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} 14x_2 + 8x_1 + 24x_0 = f_0(\omega), \\ 14x_3 + 8x_2 + 24x_1 = f_1(\omega), \\ 14x_4 + 8x_3 + 24x_2 = f_2(\omega), \\ 14x_5 + 8x_4 + 24x_3 = f_3(\omega), \\ 14x_6 + 8x_5 + 24x_4 = f_4(\omega), \end{cases}$$

де кожна з величин  $f_j(\omega)$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ) приймає значення  $c_1, c_2$  або  $c_3$ , тобто 17, 3 або 44, з відповідними ймовірностями.

Оскільки  $d = \gcd(a_0, a_1, \dots, a_N) = \gcd(14, 8, 24) = 2$ , то за теоремою 2.3 з урахуванням незалежності випадкових величин  $f_j(\omega)$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ) маємо

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\omega \in \Omega: d|f_j(\omega), j = 0, 1, 2, 3, 4) = \\ &= P(\omega \in \Omega: f_0(\omega) = f_1(\omega) = f_2(\omega) = f_3(\omega) = f_4(\omega) = 44) = \\ &= \prod_{j=0}^4 P(f_j(\omega) = 44) = 0.3^5 = 0.00243. \end{aligned}$$

## Розділ 3 Неявне лінійне різницеве рівняння вищого порядку з випадковою правою частиною на нескінченному проміжку часу

### 3.1 Постановка задачі

Нехай  $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Z}$  і  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  – послідовність незалежних, однаково розподілених цілозначних випадкових величин, які визначено на повному ймовірнісному просторі  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Для  $\omega \in \Omega$  розглянемо неявне лінійне різницеве рівняння вищого порядку:

$$a_N x_{n+N} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

або

$$\sum_{i=0}^N a_i x_{i+n} = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.1)$$

З рівнянням (3.1) пов'язано наступну подію

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}, \sum_{i=0}^N a_i x_{i+n} = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0 \right\}. \quad (3.2)$$

Будемо досліджувати ймовірність даної події.

### 3.2 Основні результати

За аналогією з результатами робіт [1,5], що стосуються неявного лінійного рівняння першого та другого порядку, в теоремах 3.1 та 3.2 наведемо достатні умови перетворення ймовірності події  $A$  в нуль.

#### Теорема 3.1

Нехай  $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Z}, a_N \neq 0, \pm 1$  і  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  – послідовність незалежних однаково розподілених цілозначних випадкових величин таких, що

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} P(\omega \in \Omega : f_n(\omega) = a_N j + r) < 1, \quad r = 0, \dots, |a_N| - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.3)$$

Тоді  $P(A) = 0$ , де подія  $A$  визначається за допомогою (3.2).

*Доведення*

Як і в [1,5], визначимо ймовірнісну міру  $\mu$  на  $\mathbb{Z}$  наступним чином:

$$\mu(\{z\}) = P(\omega \in \Omega : f_n(\omega) = z), \quad z \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Розглянемо події

$$A_{x_0, \dots, x_{N-1}} = \left\{ \omega \in \Omega : \exists \{x_n\}_{n=N}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_N}, \sum_{i=0}^N a_i x_{i+n} = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

та

$$A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^m = \left\{ \omega \in \Omega : \exists \{x_n\}_{n=N}^{m+N} \in \mathbb{Z}^{m+N}, \sum_{i=0}^N a_i x_{i+n} = f_n(\omega), \quad n = 0, \dots, m \right\},$$

для чисел  $x_0, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{Z}$  та  $m \in \mathbb{N}_0$ . Маємо

$$A = \bigcup_{x_0, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{Z}} A_{x_0, \dots, x_{N-1}}, \quad (3.4)$$

$$A_{x_0, \dots, x_{N-1}} = \bigcap_{m=0}^{\infty} A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^m, \quad A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^m \supset A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^{m+1}. \quad (3.5)$$

Покажемо, що для будь-яких  $x_0, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{Z}$  виконується рівність

$$P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}) = 0. \quad (3.6)$$

Для  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m+N} \in \mathbb{Z}$  введемо подію

$$B_{x_0, x_1, \dots, x_{m+N}} = \left\{ \omega \in \Omega : f_n(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_{i+n}, \quad n = 0, \dots, m \right\}.$$

Маємо

$$A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^m = \bigcup_{x_N = -\infty}^{\infty} \dots \bigcup_{x_{m+N} = -\infty}^{\infty} B_{x_0, x_1, \dots, x_{m+N}}. \quad (3.7)$$

Покажемо, що

$$B_{x_0, \dots, x_{N-1}, y_N, \dots, y_{m+N}} \cap B_{x_0, x_1, \dots, x_{m+N}} = \emptyset, \quad (3.8)$$

де  $(x_N, \dots, x_{m+N}) \neq (y_N, \dots, y_{m+N})$ ,  $y_N, \dots, y_{m+N} \in \mathbb{Z}$ .

Припустимо протилежне, тобто існують числа  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m+N}, y_N, \dots, y_{m+N} \in \mathbb{Z}$

такі, що  $(x_N, \dots, x_{m+N}) \neq (y_N, \dots, y_{m+N})$  та

$$B_{x_0, \dots, x_{N-1}, y_N, \dots, y_{m+N}} \cap B_{x_0, x_1, \dots, x_{m+N}} \neq \emptyset.$$

Це означає існування елементу  $\omega \in B_{x_0, \dots, x_{N-1}, y_N, \dots, y_{m+N}} \cap B_{x_0, x_1, \dots, x_{m+N}}$ , для якого виконано рівності

$$\begin{cases} f_n(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_{i+n}, \\ f_n(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i y_{i+n}, \end{cases} \quad n = 0, \dots, m, \quad (3.9)$$

причому

$$(x_0, \dots, x_{N-1}) = (y_0, \dots, y_{N-1}).$$

Тепер скористаємось методом математичної індукції по  $m$  для доведення рівності

$$(x_N, \dots, x_{m+N}) = (y_N, \dots, y_{m+N}). \quad (3.10)$$

**База індукції.** Нехай  $m = 0$ . Розглянемо рівності (3.9) при  $n = 0$

$$\begin{cases} f_0(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_i, \\ f_0(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i y_i, \end{cases}$$

Оскільки  $(x_0, \dots, x_{N-1}) = (y_0, \dots, y_{N-1})$ , то з цих рівностей випливає

$$a_N(x_N - y_N) = 0.$$

Тепер з урахуванням  $a_N \neq 0$  маємо  $x_N = y_N$ .

**Індуктивний перехід.** Нехай рівність (3.10) виконано при  $m = l - 1$  для деякого  $l \in \mathbb{N}$ :

$$(x_N, \dots, x_{N+l-1}) = (y_N, \dots, y_{N+l-1}).$$

Доведемо рівність (3.8) при  $m = l$ . Для цього достатньо показати, що  $x_{N+l} = y_{N+l}$ .

При  $n = l$  з рівності (3.9) випливає

$$\begin{cases} f_l(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_{i+l}, \\ f_l(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i y_{i+l}. \end{cases}$$

За припущенням індукції  $(x_l, \dots, x_{l+N-1}) = (y_l, \dots, y_{l+N-1})$ , тому

$$a_N(x_{l+N} - y_{l+N}) = 0.$$

Оскільки  $a_N \neq 0$ , то  $x_{l+N} = y_{l+N}$ . Таким чином, рівність (3.10) доведено для будь-якого  $m$  і разом з нею доведено властивість (3.8). Застосуємо зліченню адитивність міри  $P$  до рівності (3.7):

$$P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^m) = \sum_{x_N \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{x_{N+m} \in \mathbb{Z}} P(B_{x_0, x_1, \dots, x_{N+m}}). \quad (3.11)$$

Оскільки випадкові величини  $f_0, \dots, f_m$  незалежні, то

$$P(B_{x_0, x_1, \dots, x_{N+m}}) = \prod_{n=0}^m P\left(\omega \in \Omega : f_n(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_{i+n}\right). \quad (3.12)$$

Підставляючи (3.12) у (3.11), одержимо

$$\begin{aligned} P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^m) &= \\ &= \sum_{x_N \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{x_{N+m} \in \mathbb{Z}} \prod_{n=0}^m P\left(\omega \in \Omega : f_n(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_{i+n}\right) = \\ &= \sum_{x_N \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{x_{N+m} \in \mathbb{Z}} \prod_{n=0}^{m-1} P\left(\omega \in \Omega : f_n(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_{i+n}\right) \cdot \\ &\quad \cdot P\left(\omega \in \Omega : f_m(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_{i+m}\right) = \\ &= \sum_{x_N \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{x_{N+m-1} \in \mathbb{Z}} \prod_{n=0}^{m-1} P\left(\omega \in \Omega : f_n(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_{i+n}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{x_{N+m} \in \mathbb{Z}} P\left(\omega \in \Omega : f_m(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_{i+m}\right) = \\ &= \sum_{x_N \in \mathbb{Z}} \mu\left(\left\{\sum_{i=0}^N a_i x_i\right\}\right) \cdot \dots \cdot \sum_{x_{N+m} \in \mathbb{Z}} \mu\left(\left\{\sum_{i=0}^N a_i x_{i+m}\right\}\right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^m) &= \\ &= \sum_{x_N \in \mathbb{Z}} \mu\left(\left\{\sum_{i=0}^N a_i x_i\right\}\right) \cdot \dots \cdot \sum_{x_{N+m} \in \mathbb{Z}} \mu\left(\left\{\sum_{i=0}^N a_i x_{i+m}\right\}\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Оскільки  $a_N \neq 0, \pm 1$ , для будь-яких  $x_m, \dots, x_{m+N-1} \in \mathbb{Z}$ , існують цілі числа  $k \in \mathbb{Z}$  і  $r \in \{0, \dots, |a_N| - 1\}$  такі, що

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i x_{i+m} = a_N k + r.$$

Для будь-якого  $x_m, \dots, x_{m+N-1} \in \mathbb{Z}$  маємо

$$\begin{aligned} \sum_{x_{N+m} \in \mathbb{Z}} P \left( \omega \in \Omega : f_m(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_{i+m} \right) &= \\ &= \sum_{x_{N+m} \in \mathbb{Z}} \mu \left( \left\{ \sum_{i=0}^N a_i x_{i+m} \right\} \right) = \\ &= \sum_{x_{N+m} \in \mathbb{Z}} \mu(\{a_N x_{N+m} + a_N k + r\}) = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu(\{a_N j + r\}) \leq q, \end{aligned}$$

де

$$q = \max_{r=0, \dots, |a_N|-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu(\{a_N j + r\}) \in (0, 1)$$

за припущенням (3.3) теореми та умовою  $a_N \neq 0, \pm 1$ . Отже,

$$\sum_{x_{N+m} \in \mathbb{Z}} P \left( \omega \in \Omega : f_m(\omega) = \sum_{i=0}^N a_i x_{i+m} \right) \leq q, \quad \forall x_m, \dots, x_{m+N-1} \in \mathbb{Z}. \quad (3.14)$$

Оцінюючи праву частину рівності (3.13) за допомогою нерівності (3.14), отримаємо

$$\begin{aligned} &P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^m) \leq \\ &\leq q \sum_{x_N \in \mathbb{Z}} \mu \left( \left\{ \sum_{i=0}^N a_i x_i \right\} \right) \dots \sum_{x_{N+m-1} \in \mathbb{Z}} \mu \left( \left\{ \sum_{i=0}^N a_i x_{i+m-1} \right\} \right) = \\ &= q P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^{m-1}), \end{aligned}$$

де остання рівність є справедливою внаслідок формули (3.13) після заміни  $m$  на  $m - 1$ .

Тому маємо

$$P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^m) \leq qP(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^{m-1}) \leq \dots \leq q^{m-1}P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^1).$$

Оскільки  $q \in (0,1)$ , то  $\lim_{m \rightarrow \infty} P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^m) = 0$  для всіх  $x_0, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{Z}$ .

За неперервністю зверху міри  $P$  з співвідношень (3.5) випливає

$$P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}^m) = 0,$$

що доводить рівність (3.6). За зліченною півадитивністю міри  $P$  та рівністю (3.4), одержимо

$$P(A) \leq \sum_{x_0, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{Z}} P(A_{x_0, \dots, x_{N-1}}) = 0.$$

Тому  $P(A) = 0$ .

*Теорему доведено.*

Наступна теорема показує, що при додаткових умовах на коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_N$  рівняння (3.1) твердження теореми 3.1 є справедливим для будь-яких незалежних цілозначних однаково розподілених випадкових величин  $f_n$ , які мають не вироджений розподіл.

### Теорема 3.2

Нехай  $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{Z}$ ,  $a_N \neq 0, \pm 1$ . Припустимо, що

$$\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = 1.$$

$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  - послідовність незалежних цілозначних однаково розподілених випадкових величин, які мають не вироджений розподіл. Тоді ймовірність існування розв'язку в цілих числах різницевого рівняння (3.1) дорівнює нулю, тобто

$$P(A) = 0.$$

При доведенні теореми буде використовуватись наступна лема

### Лема 3.1 [1, Лема 3.6]

Нехай  $b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 1$  та  $M \subset \mathbb{Z}$  - множина, яка містить принаймні два елементи. Припустимо, що всі елементи  $M$  належать одному і тому ж класу лишків за модулем  $b$ . Тоді існують  $k \in \mathbb{N}$  та  $r_0 \in \mathbb{Z}$  такі, що  $b^k$  ділить усі числа  $l - r_0$  ( $l \in M$ )

і принаймні два числа  $\frac{c-r_0}{b^k}, \frac{d-r_0}{b^k}$  ( $c, d \in M$ ) належать до різних класів лишків за модулем  $b$ .

*Доведення*

Не порушуючи загальності, ми припускаємо, що  $a_N \in \mathbb{N}$ , тобто  $a_N \geq 2$ . Теорему 3.2 достатньо довести у випадку невиконання умови (3.3), тобто для випадку

$$\exists r \in \{0, 1, \dots, a_N - 1\}: \sum_{j \in \mathbb{Z}} P(f_n = a_N j + r) = 1. \quad (3.15)$$

Розглянемо множину  $M \subset \mathbb{Z}$  всіх значень випадкової величини  $f_n$ . Оскільки випадкова величина  $f_n$  має не вироджений розподіл, то ця множина містить принаймні два елементи. За умовою (3.15), кожен елемент множини  $M$  має одну й ту саму остачу  $r$  при діленні на  $a_N$ . Це означає, що всі елементи  $M$  належать до одного класу лишків за модулем  $a_N$ . За Лемою 3.1, існують числа  $k \in \mathbb{N}$  та  $r_0 \in \mathbb{Z}$  такі, що  $a_N^k$  ділить всі числа  $l - r_0$  ( $l \in M$ ) і принаймні два числа  $\frac{h-r_0}{a_N^k}, \frac{s-r_0}{a_N^k}$  ( $h, s \in M$ ) належать до різних класів лишків за модулем  $a_N$ . Таким чином, випадкові величини  $g_n = \frac{f_n - r_0}{a_N^k}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  приймають принаймні два різних значення  $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ , які належать різним класам лишків за модулем  $a_N$ . Крім того, випадкові величини  $g_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  є незалежними та мають не вироджений розподіл. Отже,

$$f_n(\omega) = a_N^k g_n(\omega) + r_0, \quad \omega \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.16)$$

Підставляючи (3.16) у рівняння (3.1), ми отримуємо різницеве рівняння

$$a_N x_{n+N} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = a_N^k g_n(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.17)$$

Це означає, що для будь-якого  $n \in \mathbb{N}_0$  число

$$r_0 - (a_{N-1} x_{n+N-1} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n),$$

є кратним числу  $a_N$ . Тому існує послідовність  $\{x_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$  така, що

$$r_0 - (a_{N-1} x_{n+N-1} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n) = a_N x_n^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тобто

$$a_{N-1} x_{n+N-1} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = r_0 - a_N x_n^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.18)$$

Підставляючи (3.18) у (3.17), отримаємо

$$a_N x_{n+N} + r_0 - a_N x_n^{(1)} = a_N^k g_n(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Звідси одержуємо рівності

$$\begin{aligned} x_{n+N} &= x_n^{(1)} + a_N^{k-1} g_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ x_{n+N-1} &= x_{n-1}^{(1)} + a_N^{k-1} g_{n-1}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_1, \\ &\dots \\ x_n &= x_{n-N}^{(1)} + a_N^{k-1} g_{n-N}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_N, \end{aligned}$$

де  $\mathbb{N}_k = \{q \in \mathbb{N}_0 : q \geq k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Підставляючи отримані вище рівності у (3.17), отримуємо, що послідовність  $\{x_n^{(1)}\}_{n=0}^\infty$  є розв'язком в цілих числах різницевого рівняння

$$\begin{aligned} &a_N (x_n^{(1)} + a_N^{k-1} g_n(\omega)) + a_{N-1} (x_{n-1}^{(1)} + a_N^{k-1} g_{n-1}(\omega)) + \dots \\ &\dots + a_0 (x_{n-N}^{(1)} + a_N^{k-1} g_{n-N}(\omega)) = a_N g_n(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_N, \end{aligned}$$

або

$$\sum_{i=0}^N a_i (x_{n-N+i}^{(1)} + a_N^{k-1} g_{n-N+i}(\omega)) = a_N^k g_n(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_N.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N a_i x_{n-N+i}^{(1)} + a_N^{k-1} \sum_{i=0}^N a_i g_{n-N+i}(\omega) &= a_N^k g_n(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_N, \\ \sum_{i=0}^N a_i x_{n-N+i}^{(1)} &= r_0 - a_N^{k-1} \sum_{i=0}^{N-1} a_i g_{n-N+i}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_N. \end{aligned}$$

Зсунемо індекс  $n - N \rightarrow n$ . Отримаємо різницеве рівняння

$$\sum_{i=0}^N a_i x_{n+i}^{(1)} = r_0 - a_N^{k-1} \sum_{i=0}^{N-1} a_i g_{n+i}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.19)$$

Рівняння (3.19) переписується в вигляді

$$\sum_{i=0}^N a_i x_{n+i}^{(1)} = r_0 + a_N^{k-1} g_n^{(1)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.20)$$

де

$$g_n^{(1)}(\omega) = - \sum_{i=0}^{N-1} a_i g_{n+i}(\omega),$$

Аналогічно переходу від рівняння (3.17) до рівняння (3.20), існує послідовність цілих чисел  $\{x_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ , яка задовольняє лінійне різницеве рівняння

$$\sum_{i=0}^N a_i x_{n+i}^{(2)} = r_0 + a_N^{k-2} g_n^{(2)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де

$$\begin{aligned} g_n^{(2)} &= - \left( a_{N-1} g_{n+N-1}^{(1)}(\omega) + a_{N-2} g_{n+N-2}^{(1)}(\omega) + \dots + a_0 g_n^{(1)}(\omega) \right) = \\ &= - \left( -a_{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} a_i g_{n+N-1+i}(\omega) - \dots - a_0 \sum_{i=0}^{N-1} a_i g_{n+i}(\omega) \right) = \\ &= (-1)^2 \left( \sum_{j=0}^{N-1} a_j \sum_{i=0}^{N-1} a_i g_{n+i+j}(\omega) \right). \end{aligned}$$

Тепер методом математичної індукції доведемо, що якщо існує послідовність цілих чисел  $\{x_n^{(0)}\}_{n=0}^{\infty} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ , що задовольняє рівняння (3.17), то при будь-якому  $m = 0, \dots, k$  існує послідовність цілих чисел  $\{x_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty}$ , яка задовольняє лінійне різницеве рівняння

$$\sum_{i=0}^N a_i x_{n+i}^{(m)} = r_0 + a_N^{k-m} g_n^{(m)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де

$$g_n^{(m)}(\omega) = (-1)^m \sum_{i_m=0}^{N-1} a_{i_m} \sum_{i_{m-1}=0}^{N-1} a_{i_{m-1}} \dots \sum_{i_1=0}^{N-1} a_{i_1} g_{n+i_1+\dots+i_m}(\omega).$$

**База індукції:**  $m = 1$ . Це вже описаний перехід від рівняння (3.17) до рівняння (3.20).

**Індуктивний перехід**

Нехай твердження індукції вірне при  $m = l - 1$ . Тобто існують число  $l \in \mathbb{N}$  і послідовність цілих чисел  $\{x_n^{(l-1)}\}_{n=0}^{\infty}$ , яка задовольняє лінійне різницеве рівняння

$$\sum_{i=0}^N a_i x_{n+i}^{(l-1)} = r_0 + a_N^{k-l+1} g_n^{(l-1)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.21)$$

де

$$g_n^{(l-1)}(\omega) = (-1)^{l-1} \sum_{i_{l-1}=0}^{N-1} a_{i_{l-1}} \dots \sum_{i_1=0}^{N-1} a_{i_1} g_{n+i_1+\dots+i_{l-1}}(\omega). \quad (3.22)$$

Це означає, що для будь-якого  $n \in \mathbb{N}_0$  число

$$r_0 - \left( a_{N-1} x_{n+N-1}^{(l-1)} + \dots + a_1 x_{n+1}^{(l-1)} + a_0 x_n^{(l-1)} \right)$$

є кратним числу  $a_N$ . Тому існує послідовність  $\{x_n^{(l)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$  така, що

$$r_0 - \left( a_{N-1} x_{n+N-1}^{(l-1)} + \dots + a_1 x_{n+1}^{(l-1)} + a_0 x_n^{(l-1)} \right) = a_N x_n^{(l)}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

тобто

$$a_{N-1} x_{n+N-1}^{(l-1)} + \dots + a_1 x_{n+1}^{(l-1)} + a_0 x_n^{(l-1)} = r_0 - a_N x_n^{(l)}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.23)$$

Підставимо (3.23) у (3.21)

$$a_N x_{n+N}^{(l-1)} + r_0 - a_N x_n^{(l)} = a_N^{k-l+1} g_n^{(l-1)}(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Звідси одержуємо рівності

$$x_{n+N}^{(l-1)} = x_n^{(l)} + a_N^{k-l} g_n^{(l-1)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$x_{n+N-1}^{(l-1)} = x_{n-1}^{(l)} + a_N^{k-l} g_{n-1}^{(l-1)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_1,$$

...

$$x_n^{(l-1)} = x_{n-N}^{(l)} + a_N^{k-l} g_{n-N}^{(l-1)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_N.$$

Підставляючи отримані вище рівності у (3.21) ми отримуємо, що послідовність

$\{x_n^{(l)}\}_{n=0}^{\infty}$  є розв'язком в цілих числах різничевого рівняння

$$\begin{aligned} & a_N \left( x_n^{(l)} + a_N^{k-l} g_n^{(l-1)}(\omega) \right) + a_{N-1} \left( x_{n-1}^{(l)} + a_N^{k-l} g_{n-1}^{(l-1)}(\omega) \right) + \dots \\ & \dots + a_0 \left( x_{n-N}^{(l)} + a_N^{k-l} g_{n-N}^{(l-1)}(\omega) \right) = a_N^{k-l+1} g_n^{(l-1)}(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_N, \end{aligned}$$

або

$$\sum_{i=0}^N a_i \left( x_{n-N+i}^{(l)} + a_N^{k-l} g_{n-N+i}^{(l-1)}(\omega) \right) = a_N^{k-l+1} g_n^{(l-1)}(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_N.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N a_i x_{n-N+i}^{(l)} + a_N^{k-l} \sum_{i=0}^N a_i g_{n-N+i}^{(l-1)}(\omega) &= a_N^{k-l+1} g_n^{(l-1)}(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_N, \\ \sum_{i=0}^N a_i x_{n-N+i}^{(l)} &= r_0 - a_N^{k-l} \sum_{i=0}^{N-1} a_i g_{n-N+i}^{(l-1)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_N. \end{aligned}$$

Тепер для зручності зсунемо індекс  $n - N \rightarrow n$ . Отримаємо різницеве рівняння

$$\sum_{i=0}^N a_i x_{n+i}^{(l)} = r_0 - a_N^{k-l} \sum_{i=0}^{N-1} a_i g_{n+i}^{(l-1)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.24)$$

Розкладемо суму з правої частини згідно припущенню індукції за формулою (3.22), для зручності замінімо індекс  $i$  у правій сумі на  $i_l$ :

$$\begin{aligned} & - \sum_{i_l=0}^{N-1} a_{i_l} g_{n+i_l}^{(l-1)}(\omega) = \\ & = - \sum_{i_l=0}^{N-1} a_{i_l} (-1)^{l-1} \sum_{i_{l-1}=0}^{N-1} a_{i_{l-1}} \dots \sum_{i_1=0}^{N-1} a_{i_1} g_{n+i_1+\dots+i_{l-1}+i_l}(\omega) = \\ & (-1)^l \sum_{i_l=0}^{N-1} a_{i_l} \sum_{i_{l-1}=0}^{N-1} a_{i_{l-1}} \dots \sum_{i_1=0}^{N-1} a_{i_1} g_{n+i_1+\dots+i_l}(\omega) = g_n^{(l)}(\omega). \end{aligned}$$

Отже рівняння (3.24) можна переписати у вигляді

$$\sum_{i=0}^N a_i x_{n+i}^{(l)} = r_0 + a_N^{k-l} g_n^{(l)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Цим завершується обґрунтування індуктивного переходу.

Тому отримуємо,

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \omega \in \Omega : \exists \{x_n\}_{n=0}^\infty \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 \sum_{i=0}^N a_i x_{n+i} = f_n(\omega) \right\} \subset \\ &\subset \left\{ \omega \in \Omega : \exists \{x_n^{(1)}\}_{n=0}^\infty \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 \sum_{i=0}^N a_i x_{n+i}^{(1)} = r_0 + a_N^{k-1} g_n^{(1)}(\omega) \right\} \subset \end{aligned}$$

$$\subset \left\{ \omega \in \Omega : \exists \left\{ x_n^{(2)} \right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 \sum_{i=0}^N a_i x_{n+i}^{(2)} = r_0 + a_N^{k-2} g_n^{(2)}(\omega) \right\} \subset$$

$$\subset \dots \subset$$

$$\subset \left\{ \omega \in \Omega : \exists \left\{ x_n^{(k)} \right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 \sum_{i=0}^N a_i x_{n+i}^{(k)} = r_0 + g_n^{(k)}(\omega) \right\},$$

тобто  $A \subset B$ , де

$$B = \left\{ \omega \in \Omega : \exists \left\{ x_n^{(k)} \right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 \sum_{i=0}^N a_i x_{n+i}^{(k)} = r_0 + g_n^{(k)}(\omega) \right\},$$

де

$$g_n^{(k)}(\omega) = (-1)^k \sum_{i_k=0}^{N-1} a_{i_k} \sum_{i_{k-1}=0}^{N-1} a_{i_{k-1}} \dots \sum_{i_1=0}^{N-1} a_{i_1} g_{n+i_1+\dots+i_k}(\omega). \quad (3.25)$$

Покажемо, що випадкові величини  $g_n^{(k)}(\omega)$  задовольняють умову (3.3), тобто ці випадкові величини приймають принаймні два значення, що належать різним класам лишків за модулем  $a_N$ . Оскільки

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1})^k &= \left( \sum_{i_1=0}^{N-1} a_{i_1} \right)^k = \left( \sum_{i_2=0}^{N-1} a_{i_2} \right) \left( \sum_{i_1=0}^{N-1} a_{i_1} \right)^{k-1} = \\ &= \sum_{i_2=0}^{N-1} \left( a_{i_2} \left( \sum_{i_1=0}^{N-1} a_{i_1} \right)^{k-1} \right) = \\ &= \sum_{i_k=0}^{N-1} \left( a_{i_k} \sum_{i_{k-1}=0}^{N-1} \left( a_{i_{k-1}} \sum_{i_{k-2}=0}^{N-1} \left( \dots \sum_{i_1=0}^{N-1} a_{i_1} \right) \right) \dots \right) = \\ &= \sum_{i_k=0}^{N-1} \left( a_{i_k} \sum_{i_{k-1}=0}^{N-1} \left( a_{i_{k-1}} \sum_{i_{k-2}=0}^{N-1} \left( \dots \sum_{i_1=0}^{N-1} a_{i_1} \right) \right) \dots \right), \end{aligned}$$

то з зображення (3.25) випливає

$$\left\{ \omega \in \Omega : g_{n+i}(\omega) = l_j : i = 0, \dots, (N-1)k \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \omega \in \Omega: g_n^{(k)}(\omega) = (-1)^k l_j \sum_{i_k=0}^{N-1} a_{i_k} \sum_{i_{k-1}=0}^{N-1} a_{i_{k-1}} \dots \sum_{i_1=0}^{N-1} a_{i_1} \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \omega \in \Omega: g_n^{(k)}(\omega) = (-1)^k l_j (a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1})^k \right\}, \quad j \in \{1, 2\}; \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

та  $P\{\omega \in \Omega: g_{n+i}(\omega) = l_j: i = 0, \dots, (N-1)k\} > 0$ , то за властивості монотонності ймовірнісної міри  $P$

$$P\left\{\omega \in \Omega: g_n^{(k)}(\omega) = (-1)^k l_j (a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1})^k\right\} \geq$$

$$\geq P\{\omega \in \Omega: g_{n+i}(\omega) = l_j: i = 0, \dots, (N-1)k\} > 0.$$

Припустимо протилежне, що числа  $(-1)^k l_1 (a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1})^k$  та  $(-1)^k l_2 (a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1})^k$  належать одному класу лишків за модулем  $a_N$ . Тоді число  $(l_1 - l_2)(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1})^k$  ділиться на число  $a_N$ . За умовою теореми числа  $(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1})$  та  $a_N$  є взаємно простими, тоді числа  $(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1})^k$  та  $a_N$  теж є взаємно простими. Тоді [10. с.26], отримуємо що  $a_N | (l_1 - l_2)$ . Це суперечить припущенню, що числа  $l_1$  та  $l_2$  належать до різних класів за модулем  $a_N$ . Таким чином, випадкові величини  $g_n^{(k)}(\omega)$  задовольняють умову (3.3). Тоді за теоремою 3.2  $P(B) = 0$ . Оскільки  $A \subset B$ , то  $P(A) = 0$ .

*Теорему доведено.*

**Зауваження 3.1.** Теореми 3.1 та 3.2 узагальнюють відповідні теореми 3.1 та 3.2 роботи [5] для рівняння другого порядку на випадок рівняння (3.1) вищого порядку.

### 3.3 Приклади

Спочатку покажемо що умова  $\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = 1$  в теоремі 3.2, як і умова (3.3) теореми 3.1 є суттєвою для твердження  $P(A) = 0$  цих теорем. А саме, наступний приклад показує, що якщо умови теорем 3.1 та 3.2 порушуються, то  $P(A) \neq 0$ .

#### Приклад 3.1

Нехай  $a_N = 3$  та  $a_i = -3(i+1), \forall i = 0, 1, \dots, N-1$ . Оскільки кожне з  $a_i$  теж кратне трьом ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ), то і їх сума  $(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1})$  буде кратна

трём. Тепер з урахуванням того, що  $a_N$  ділиться лише на 3, одержуємо  $\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = 3$ . Нехай  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  – послідовність незалежних однаково розподілених величин, що мають наступну таблицю розподілу:

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $d_i$ | -6  | 9   |
| $p_i$ | 0.5 | 0.5 |

Оскільки

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} P(f_n(\omega) = a_N j) = P(f_n(\omega) = -6) + P(f_n(\omega) = 9) = 1,$$

то умову (3.3) теореми 3.1 також не виконано.

Рівняння (3.1) приймає наступний вигляд:

$$3x_{N+n} - \sum_{i=0}^{N-1} 3(i+1)x_{i+n} = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.26)$$

Оскільки всі значення випадкової величини  $f_n(\omega)$  діляться на  $a_N$ , то рівняння (3.26) переписується у вигляді

$$x_{N+n} = \sum_{i=0}^{N-1} (i+1)x_{i+n} + g_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.27)$$

де випадкові величини  $g_n(\omega) = \frac{f_n(\omega)}{3}$  мають наступну таблицю розподілу:

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $d_i$ | -2  | 3   |
| $p_i$ | 0.5 | 0.5 |

Отже, з (3.27) випливає, що для будь-яких  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{Z}$ , існує послідовність  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ , яка є розв'язком рівняння (3.26).

Тому

$$P(A) = 1,$$

де

$$A = \left\{ \omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad 3x_{N+n} - \sum_{i=0}^{N-1} 3(i+1)x_{i+n} = f_n(\omega) \right\}.$$

Наступний приклад показує, що умова невиродженості розподілу випадкових величин  $f_n$  в Теоремі 3.2 є суттєвою навіть якщо  $\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = 1$ .

### Приклад 3.2

Нехай  $a_0 = a_1 = \dots = a_{N-1} = 1$ ,  $a_N = -(N+1)$  і  $f_n(\omega) = -1 \forall \omega \in \Omega$ .

Маємо  $(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}) = N$ ,  $a_N = -(N+1)$ . Оскільки для будь-якого дільника  $d$  числа  $N$  виконується наступна рівність

$$(N+1) \bmod d = 1,$$

то числа  $N+1$  та  $N$  – взаємно прості. Отже  $-(N+1)$  та  $N$  – теж взаємно прості, тобто

$$\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = 1.$$

Рівняння (3.1) переписується у вигляді

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_{i+n} - (N+1)x_{n+N} = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \omega \in \Omega. \quad (3.28)$$

Для будь-якого  $\omega \in \Omega$  рівняння (3.28) має розв'язок

$$x_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Тому

$$P(A) = 1,$$

де

$$A = \left\{ \omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 \sum_{i=0}^{N-1} x_{i+n} - (N+1)x_{n+N} = f_n(\omega) \right\}.$$

Далі наведемо приклад рівняння (3.1), для якого виконано умову (3.3) теореми 3.1, та не виконано умову  $\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = 1$  теореми 3.2.

### Приклад 3.3.

Нехай  $a_i = i+1$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $N \geq 2$  та  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  – послідовність незалежних однаково розподілених величин, що мають наступну таблицю розподілу:

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $d_i$ | 12  | 13  |
| $p_i$ | 0.5 | 0.5 |

Маємо  $\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = \gcd\left(\frac{N(1+N)}{2}, N+1\right)$ ,

Розглянемо два випадки:

1)  $N$  – парне. Тоді  $\frac{N}{2}$  ціле число, а отже

$$\gcd\left(\frac{N(1+N)}{2}, N+1\right) = \gcd\left(\frac{N}{2}(N+1), N+1\right) = N+1.$$

Отже умову  $\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = 1$  теореми 3.2 не виконано, оскільки  $N \geq 2$ .

2)  $N$  – непарне. Тоді  $N+1$  ділиться націло на 2 й  $\frac{N+1}{2}$  ціле число, а отже

$$\gcd\left(\left(\frac{1+N}{2}N\right), N+1\right) = \frac{1+N}{2}.$$

Отже умову  $\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = 1$  теореми 3.2 не виконано, оскільки  $N \geq 2$ .

Таким чином, незалежно від парності  $N$  умову  $\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = 1$  теореми 3.2 не виконано.

Рівняння (3.1) записується у наступному вигляді:

$$\sum_{i=0}^N (i+1)x_{i+n} = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки  $d_1 = 12$  та  $d_2 = 13$  належать різним класам лишків за модулем  $N+1$ , то умову (3.3) теореми 3.1 виконано. А отже, за теоремою 3.1

$$P(A) = 0,$$

де

$$A = \left\{ \omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 \sum_{i=0}^N (i+1)x_{i+n} = f_n(\omega) \right\}.$$

Тепер наведемо приклад рівняння (3.1), для якого не виконано умову (3.3) теореми 3.1, та виконано умову  $\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = 1$  теореми 3.2.

### Приклад 3.4

Нехай  $N \geq 2, a_N = 3, a_0 = 1, a_i = 3i, i = 1, \dots, N-1$  та  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  – послідовність незалежних однаково розподілених величин, що мають наступну таблицю розподілу:

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| $d_i$ | 3   | 6   |
| $p_i$ | 0.5 | 0.5 |

Оскільки  $d_1 = 3$  та  $d_2 = 6$  належать одному класу лишків за модулем  $a_N$ , то умову (3.3) теореми 3.1 не виконано.

Рівняння (3.1) записується у наступному вигляді:

$$3x_{N+n} + \sum_{i=1}^{N-1} 3ix_{i+n} + x_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Маємо,

$$\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = \gcd\left(\frac{3N(N-1)}{2} + 1, 3\right).$$

Оскільки 3 – просте число, та  $\left(\frac{3N(N-1)}{2} + 1\right) \bmod 3 = 1$ , то числа 3 та  $\left(\frac{3N(N-1)}{2} + 1\right)$  взаємно прості. Тому

$$\gcd(a_0 + a_1 + \dots + a_{N-1}, a_N) = \gcd\left(\frac{3N(N-1)}{2} + 1, 3\right) = 1.$$

Отже умову теореми 3.2 виконано.

Тоді, за теоремою 3.2

$$P(A) = 0,$$

де

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : \exists \{x_n\}_{n=0}^\infty \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad 3x_{N+n} + \sum_{i=1}^{N-1} 3ix_{i+n} + x_n = f_n(\omega) \right\}.$$

## Висновки

В роботі досліджено неявне лінійне різницеве рівняння вищого порядку з випадковою правою частиною. Окремо розглянуто випадки скінченного та нескінченного проміжку часу. Нехай  $a_0, a_1, \dots, a_N$  – цілі числа, причому  $a_0, a_N$  не дорівнюють нулю, а  $\{f_n\}_{n=0}^m$  – послідовність цілозначних випадкових величин, які визначено на повному ймовірнісному просторі  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Для кожного  $\omega \in \Omega$  розглянуто неявне лінійне різницеве рівняння  $a_N x_{n+N} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n(\omega)$ ,  $n = 0, 1, \dots, m$ . Показано, що подія  $A = \{\omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{m+1} \in \mathbb{Z}^{m+2} \forall n = 0, \dots, m \ a_N x_{n+N} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n(\omega)\}$ , яка означає множину тих  $\omega \in \Omega$ , для яких існує розв’язок цього рівняння, співпадає з подією  $\{\omega \in \Omega: d|f_0(\omega), \dots, d|f_m(\omega)\}$ , де  $d = \gcd(a_0, a_1, \dots, a_N)$ . Для встановлення цього результату попередньо формулюється теорема про розв’язання в цілих числах систем лінійних алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами, яка доводиться з використанням нормальної форми Сміта матриці. Робота доведених теорем ілюструється конкретними прикладами. Також знайдено умови, за яких ймовірність того, що неявне лінійне різницеве рівняння  $a_N x_{n+N} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = f_n(\omega)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  на нескінченному проміжку часу має розв’язок в цілих числах, дорівнює нулю. Цей результат означає, при випадковому виборі цілих чисел  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) відповідне неявне лінійне різницеве рівняння з ймовірністю 1 не має розв’язків в цілих числах. Теоретичні результати ілюструються прикладами. Зокрема, в роботі наведено приклади, які показують хибність тверджень теорем при порушенні їх умов.

### Список використаних джерел

1. Gefter S.L., Piven' A.L., Implicit Linear Nonhomogeneous Difference Equation over  $\mathbb{Z}$  with a Random Right-Hand Side, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.— 2022.— Vol.18, No.1.—P. 105–117.
2. Чахмахчян Д.М., Неявні лінійні різницеві рівняння з випадковою правою частиною. Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: XVIII Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених (10–11 травня 2024 року, м. Харків, Україна) : тези доповідей / редкол. О.Л. Ямпольський, В.І. Коробов, Є.С. Меньяйлов, С.Ю. Фаворов, В.Т. Лисиця, С.Ю. Ігнатович, С.Л. Гефтер. – Харків : Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2024. – С.49–51.
3. Martseniuk V., Gefter S., Piven' A. Uniqueness Criterion and Cramer's Rule for Implicit Higher Order Linear Difference Equations Over  $\mathbb{Z}$ . In: Baigent, S., Bohner, M., Elaydi, S. (eds) Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems. ICDEA 2019. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 341. Springer, Cham.—P. 311–325
4. Чахмахчян Д.М., Неявне лінійне різницеве рівняння вищого порядку з випадковою правою частиною на скінченному проміжку часу, «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях». Тези доповідей XIX Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих вчених (6 - 7 травня 2025 р. м. Харків, Україна) – Харків. Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2025 – С. 94–97
5. Чахмахчян Д.М., Неявні лінійні різницеві рівняння з випадковою правою частиною : кваліфікаційна робота першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 113 «Прикладна математика» освітньо-професійної програми «Прикладна математика». – Харків : Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2024. – 42 с.
6. Завало С.Т., Левіщенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О., Алгебра і теорія чисел. Практикум. 2 частина, – К. Вища шк. Головне вид-во, 1986.

7. Bressoud David M. Proofs and confirmations the story of the alternating sign matrix conjecture, The Mathematical Association of America, 1999. – C. 111
8. Cohn, Paul M. Introduction to Ring Theory. Springer Undergraduate Mathematics Series. London: Springer-Verlag, 2000.
9. Mordell L. J., Diophantine equations, Academic Press (London) – C. 30.
10. Hasse H., Number Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1980.