

ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Как известно, многие свойства ортогональных систем переносятся на ряды, близкие к ортогональным. При изучении рядов Фурье по ортогональным системам важную роль играют функции Лебега. В настоящей работе вводятся функции Лебега для биортогональных систем. Это позволяет; в частности, перенести на гильбертовы системы теорему А. М. Олевского о том, что в пространстве непрерывных функций не существует базиса, состоящего из равномерно ограниченных ортонормированных функций.

1. Система векторов банахова пространства

Как известно [1—3,5], система векторов $\{x_n\}$ банахова пространства B над полем комплексных чисел называется системой Бесселя, если она 1) минимальна, 2) полна в B и если для каждого $x \in B$ сходится ряд $\sum |f_k(x)|^2$, где $\{f_k\}$ — система непрерывных функционалов, биортогональных данной системе. Минимальная полная система $\{x_k\}$ называется системой Гильберта, если выполнено следующее условие: для всякой последовательности комплексных чисел $\{a_k\} \in l^2$ существует, притом единственный, элемент $x \in B$, такой, что $f_k(x) = a_k$.

Всякая система Бесселя (система Гильберта) обладает следующим свойством: существует такая постоянная $m > 0$ ($M > 0$), что для любых конечных наборов комплексных чисел $c_1, \dots, c_n$ выполняется соответственно неравенство

$$\|\sum c_k x_k\| \geq m \sqrt{\sum |c_k|^2}, \quad (1)$$

$$\|\sum c_k x_k\| \leq M \sqrt{\sum |c_k|^2}. \quad (2)$$

Многие свойства ортонормированных систем переносятся на системы Бесселя или Гильберта именно благодаря выполнению неравенств (1) или (2), и при этом не используется полнота или минимальность системы. Условия (1) или (2) имеют то преимущество, что они выражены только в терминах исходной системы, удовлетворяющую условию (1) или (2), будем называть соответственно 2-бесселевой или 2-гильбертовой, исходя из следующего определения.

Определение 1. Систему элементов $\{x_k\}$, $1 \leq k \leq \infty$ комплексного банахова пространства B будем называть p -бесселевой (p -гильбертовой), если существует такая постоянная $m > 0$ ($M > 0$), что для любых конечных наборов комплексных чисел $c_1, \dots, c_n$ выполняется, соответственно, условие ($1 < p < \infty$)

$$\|\sum c_k x_k\| \geq m \sqrt[p]{\sum |c_k|^p}, \quad (3)$$

$$\|\sum c_k x_k\| \leq M \sqrt[p]{\sum |c_k|^p}. \quad (4)$$

Такие системы рассматривал Р. П. Боас [9] в пространстве $L^2 [0,1]$ и Н. К. Бари [1—3] в пространстве $L^2 [0,1]$ при $p=2$ и дополнительном предположении полноты и минимальности. Объединяя их методы и распространяя их на общий случай, получим следующие утверждения (теоремы 1—4).

Теорема 1. а) Для того, чтобы система была p -гильбертовой, необходимо и достаточно, чтобы существовал ограниченный линейный оператор, переводящий естественный базис комплексного пространства l^p в эту систему.

б) Для того, чтобы система была p -бесселевой, необходимо и достаточно, чтобы существовал ограниченный линейный оператор, заданный на замкнутой линейной оболочке этой системы и переводящий эту систему в естественный базис пространства l^p .

Следствие. Для того, чтобы система $\{x_k\}$ была p -гильбертовой, необходимо и достаточно, чтобы из сходимости ряда $\sum |c_k|^p$ следовала сходимость ряда $\sum c_k x_k$.

Теорема 2. а) Для того, чтобы система $\{x_k\}$ была p -гильбертовой, необходимо и достаточно, чтобы для каждого непрерывного линейного функционала $f \in B^*$ при $q^{-1} + p^{-1} = 1$ сходилась ряд $\sum |f(x_k)|^q$. При выполнении этого условия существует такая постоянная M , что для каждого $f \in B^*$.

$$\sqrt[q]{\sum |f(x_k)|^q} \leq M \|f\|,$$

б) Для того, чтобы система $\{x_k\}$ была p -бесселевой, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $\{a_n\} \subset l^q$ существовал функционал $f \in B^*$, принимающий на этой системе заданные значения $f(x_k) = a_k$. При этом f можно выбрать так, что $\|f\| \leq m \sqrt[q]{\sum |a_k|^q}$, где постоянная m определяется только системой.

Замечание. Очевидно, p -гильбертова система может быть линейно зависимой, т. е. она не обязана быть минимальной.

Теорема 3. а) Если p -гильбертова система минимальна, то любая сопряженная (биортогональная с ней) система функционалов является q -бесселевой ($p^{-1} + q^{-1} = 1$); если при этом $p = q = 2$, то для любой сопряженной системы функционалов найдется ограниченный линейный оператор, переводящий ее в данную систему.

б) Любая p -бесселева система минимальна.

в) Если p -бесселева система полна (или исходное пространство гильбертово), то она имеет сопряженную q -гильбертову систему.

Пример. Пусть $\{e_n\}$ — полная ортонормированная система гильбертова пространства H ; $\varphi_k = e_{k+2}$; $g_k = \varphi_k + e_1$. Тогда $\{\varphi_k, g_k\}$ — биортогональная система; причем $\{\varphi_k\}$ является 2-гильбертовой и 2-бесселевой системой, а сопряженная

система $\{g_k\}$ — 2-бесселева, но не 2-гильбертова. Вместе с тем система $\{\varphi_k\}$ обладает и 2-гильбертовой сопряженной системой.

Теорема 4. а) Если данную систему векторов можно преобразовать ограниченным линейным оператором в сопряженную (биортогональную с ней) систему функционалов, то данная система является 2-бесселевой.

б) Для того, чтобы система векторов гильбертова пространства была 2-бесселева, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой положительный оператор, который преобразует ее в сопряженную систему, при этом последняя будет 2-гильбертовой системой.

2. Системы функций в пространстве $L^2 [0,1]$

Рассмотрим подробнее 2-гильбертовы системы функций в пространстве $L^2 [0,1]$. Напомним, что система измеримых функций $\{f_n(x)\}$ ($x \in E$, $\mu E > 0$) называется продолжимой, если существует множество F ($\mu, E > 0$, $F \cap E = \emptyset$), и ортонормированный на $E \cup F$ система функций $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что для некоторой постоянной $c > 0$ выполняется условие $f_n(x) = c\varphi_n(x)$, ($x \in E$). Справедливо следующее утверждение (см. [3] или [7]):

Теорема Шура. Для того, чтобы система функций из $L^2 [0,1]$ была продолжимой, необходимо и достаточно, чтобы она была 2-гильбертовой.

В работе А. М. Олевского центральное место занимает теорема 1 (см. [6, с. 390—399]), посвященная рядам по равномерно ограниченным ортонормированным системам функций в $L^2 [0,1]$. Эта теорема допускает обобщение в следующем виде.

Теорема 5. Пусть $\{\varphi_n\}$ 2-бесселева равномерно ограниченная система функций в $L^2 [0,1]$, отделенная от нуля в метрике $L^1 [0,1]$, а ряд $\sum c_n \varphi_n$ ограничен в метрике $L^1 [0,1]$, т. е. существуют такие $M > 0$ и $\delta > 0$, что для всех n

$$|g_n(x)| \leq M,$$

$$\int_0^1 |\sum c_k \varphi_k(x)| dx < M,$$

$$\int_0^1 |\varphi_k(x)| dx \geq \delta.$$

Тогда

$$\frac{1}{n} \sum_1^n c_k^2 \rightarrow 0.$$

При изучении сходимости рядов Фурье по ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$ большую роль играют функции Лебега [3, 4]

$$L_n(x) = \int_0^1 |K_n(x, t)| dt, \quad K_n(x, t) = \sum_1^n \varphi_k(x) \varphi_k(t).$$

Эти функции удобны и при изучении сходимости рядов $\sum c_n \varphi_n(x)$ по произвольной системе $\{\varphi_n(x)\}$ (см. [10], где система $\{\varphi_n\}$ произвольна, а ряд не обязательно является рядом Фурье какой-нибудь функции). Однако, если поставить задачу изучения именно рядов Фурье, то естественно ввести сопряженную систему функций и определить функции Лебега для биортогональной системы, как это сделано в [8].

Пусть $\{\varphi_n, g_n\}$ — биортогональная система функций в $L^2[0, 1]$. Тогда частные суммы рядов Фурье любой функции имеют вид

$$S_n(x, f) = \int_0^1 K_n(x, t) f(t) dt, \quad (5)$$

$$K_n(x, t) = \sum_1^n \varphi_k(x) g_k(t). \quad (6)$$

Введем для системы $\{\varphi_n, g_n\}$ две последовательности функций Лебега, «управляющие» поведением сумм ряда Фурье функций из $C[0, 1]$ и из $L^2[0, 1]$ соответственно:

$$L_n(x) = \int_0^1 |K_n(x, t)| dt, \quad (7)$$

$$l_n(x) = \sqrt{\int_0^1 K_n^2(x, t) dt}. \quad (8)$$

Из теоремы Банаха-Штейнгауса обычным способом (см. [3]) получается, что ограниченность $L_n(x_0)$ или $l_n(x_0)$ равносильна ограниченности $S_n(x_0, f)$ для всех $f \in C[0, 1]$ или $f \in L^2[0, 1]$.

В некоторых случаях полезна третья функция

$$F_n(x) = \sqrt{\sum_1^n \varphi_k^2(x)}. \quad (9)$$

Между этими функциями нетрудно установить соотношения:

- 1) $L_n(x) \leq l_n(x)$ (для любой системы),
- 2) $l_n(x) = F_n(x)$ (для ортонормированной системы),

- 3) $I_n(x) \leq MF_n(x)$ (если $\{\varphi_n\}$ — 2-гильбертова, а $\{g_n\}$, следовательно, 2-бесселева),
 4) $mF_n(x) \leq I_n(x)$ (если $\{g_n\}$ — 2-гильбертова, а $\{\varphi_n\}$ следовательно, 2-бесселева).

Метод доказательства теорем Качмажа (см. теоремы 5.5.4 и 5.5.5 в [3] или 3.1.1 и 3.1.2 в [4]) в применении к неортогональным системам позволяет получить следующие результаты.

Теорема 6. Если на множестве $E \subset [0,1]$ равномерно выполняется условие

$$I_{\nu_n}(x) = O(\lambda_{\nu_n}), \quad (\nu_1 < \nu_2 < \dots),$$

то для частных сумм ряда Фурье любой функции $f \in L^2[0,1]$ почти всюду на E выполняется оценка $S_{\nu_n}(x) = O_x(\lambda_{\nu_n})$.

Теорема 7. (Связь между функциями Лебега и множителями Вейля). Пусть $\{\varphi_n, g_n\}$ — биортогональная система, у которой $\{\varphi_n\}$ 2-гильбертова (а, значит, $\{g_n\}$ 2-бесселева). Если почти всюду на E выполняется соотношение

$$I_n(x) = O(\sqrt{\lambda_n}), \quad (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots),$$

то из сходимости ряда $\sum c_n \lambda_n$ следует, что почти всюду на E сходится последовательность частных сумм ряда $\sum c_n \varphi_n(x)$.

Определение. Систему функций $\{\varphi_n\}$ будем называть мажорируемой, если существует такая функция $h \in L^2[0,1]$, что $|\varphi_n(x)| \leq h(x)$.

Лемма 1. Если $\{\varphi_n\} \subset L^2$, $\|\varphi_n\| < c$, $\lambda \uparrow \infty$, $\sum \lambda_n^{-2} < \infty$, то почти всюду $F_n(x) = O_x \lambda_n$, в частности $F_n(x) = O_x(n^{\frac{1}{2} + \delta})$.

2) Если $\{\varphi_n\}$ — мажорируемая и отделена от нуля в метрике L^2 , то не может быть почти всюду $F_n(x) = O_x(n^{\frac{1}{2}})$.

Применяя к функциям $L_n(x)$ и $F_n(x)$ теорему 5, получаем следующее: если $\{\varphi_n\} \subset L^2[0,1]$ мажорируемая 2-гильбертова система, обладающая равномерно ограниченной сопряженной $\{g_n\}$, то из ограниченности функций Лебега $L_n(x_0) \leq M$ следует $F_n(x_0) = o(n^{\frac{1}{2}})$. Если теперь использовать лемму, получится обобщение основной теоремы А. М. Олевского из работы [6, теорема 2].

Теорема 8. Если мажорируемая 2-гильбертова система имеет равномерно ограниченную сопряженную, то существует множество E положительной меры, в каждой точке которого множество функций Лебега не ограничено:

$$\lim Z_n(x) = \infty (x \in E, \mu E > 0).$$

Следствие. Если мажорируемая 2-гильбертова система имеет равномерно ограниченную сопряженную, то она не может быть базисом ни в $C[0,1]$, ни в $L^1[0,1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н. К. О базисах в Гильбертовых пространствах. — ДАН СССР 1946, 54, с. 383—386.
2. Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовых пространствах. — Уч. зап. МГУ, 1951, вып. 148, т. IV, с. 69—107.
3. Качмаж С. и Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958, 507 с.
4. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., ИЛ, 1963, 359 с.
5. Вейц Б. Е. Системы Бесселя и Гильберта в пространстве Банаха и вопросы устойчивости. — Изв. вузов СССР. Математика, 1965, № 2, (45) с. 7—23.
6. Олевский А. М. Ряды Фурье непрерывных функций по ограниченным ортонормальным системам. — Изв. АН СССР, серия математическая, т. 30, 1966, № 2, с. 287—432.
7. Никишин Е. М. О сходимости некоторых функциональных рядов. — Изв. АН СССР, серия математическая, 1967, т. 31, № 1, с. 15—26.
8. Гурарий В. И., Пашкова Т. В. Суммирование рядов, близких к ортогональным. — Вестник Харьк. ун-та, Математика и механика, вып. 38, 1973, с. 114—120.
9. Boas R. P. A general moment problem — „Amer. Journ. of Math.“, 1941, vol. 63, N 2, p. 361—370.
10. Alexitz G., Charma J. The influence of Lebesgue functions on the convergence and summability of function series. — „Acta Sci Math.“, 1972, vol. 33, N 1, p. 1—10.

УДК 518:517.944+513.88

В. Э. КАЦНЕЛЬСОН, канд. физ.-мат. наук,
В. В. МЕНЬШИКОВ, Б. С. ЭЛЬКИН

АЛЬТЕРНИРУЮЩИЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИВЕРГЕНТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В работе изложен приближенный метод для вычисления собственных значений и собственных функций краевой задачи (1), (2):

$$L[u(x)] = \mu u(x) \quad (x \in G), \quad (1)$$

$$l[u(x)] = 0 \quad (x \in \partial G), \quad (2)$$

где G — область в R^n , $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, ∂G — граница области G ,

$$L[u] = -\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + qu, \quad (3)$$

$$l[u] = \beta \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u, \quad (4)$$

$\lambda(x)$, $q(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — заданные вещественные, кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\alpha(x) \geq 0, \quad \beta(x) \geq 0, \quad \beta(x) \notin (0, \varepsilon),$$

$$\alpha(x) + \beta(x) > 0 \quad (x \in \partial G);$$

$$\lambda(x) > \varepsilon > 0; \quad q(x) \geq 0 \quad (x \in G),$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней относительно G нормали.

В монографии Коллатца [1] изложен метод последовательных приближений для задач на собственные значения. Последовательность приближений $F_k(x)$ ($x \in G$, $k=0,1, \dots$) к собственной функции, отвечающей наименьшему собственному значению, строится следующим образом:

$F_0(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция. Следующие приближения строятся индуктивно. Если $F_k(x)$ ($k \geq 0$) построено, то $F_{k+1}(x)$ определяется как решение краевой задачи (5)

$$\begin{aligned} L[F_{k+1}(x)] &= F_k(x) \quad (x \in G); \\ l[F_{k+1}(x)] &= 0 \quad (x \in \partial G). \end{aligned} \quad (5)$$

При этом k -м приближением к наименьшему собственному значению μ_1 объявляется отношение

$$\Lambda_k = \frac{\int_G F_k \cdot L[F_k] dx}{\int_G F_k^2 dx} = \frac{\int_G F_k \cdot F_{k-1} dx}{\int_G F_k^2 dx} \quad (6)$$

Хорошо известно [1], что $\Lambda_k \rightarrow \mu_1$ ($k \rightarrow \infty$), а последовательность нормированных надлежащим образом $F_k(x)$ при $k \rightarrow \infty$ сходится равномерно внутри G к нормированной в $L_2(G)$ собственной функции $u_1(x)$, отвечающей собственному значению μ_1 .

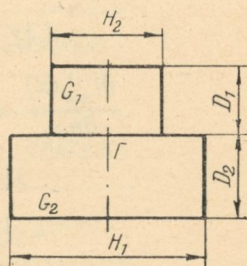
Изложенный метод эффективен лишь в случае, когда мы умеем эффективно решать возникающие при его реализации краевые задачи (5).

В [2] был предложен эффективный метод для приближенного решения краевых задач (5) в случае, когда область G является объединением областей с кусочно-координатной границей.

Метод, предлагаемый в настоящей работе, является гибридом методов, изложенных в [1, 2].

Проиллюстрируем решение задачи на собственные значения в случае, когда область G представляет собой систему двух соприкоснутых прямоугольников (рисунок): $G = G_1 \cup G_2$.

Для построения приближений к наименьшему собственному значению и соответствующей собственной функции осуществляется «цикл Коллатца»: решается последовательность краевых задач (5). Для решения каждой из краевых задач (5) используется метод, предложенный в [2] — «цикл Шварца». «Цикл



Шварца» организуется следующим образом: строится последовательность функций

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} f_{n,k}^{(1)}(x) & (x \in G_1) \\ f_{n,k}^{(2)}(x) & (x \in G_2) \end{cases} \quad (7)$$

$$(n = 0, 1, \dots; k = 1, 2, \dots)$$

сходящаяся в G при $n \rightarrow \infty$ к решению $F_k(x)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} L[F_k(x)] &= F_{k-1}(x) \quad (x \in G), \\ l[F_k(x)] &= 0 \quad (x \in \partial G) \\ &\quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (8)$$

Эта последовательность строится рекуррентно: если функции $f_{n-1,k}^{(1)}(x)$ ($x \in G_1$), $f_{n-1,k}^{(2)}(x)$ ($x \in G_2$) уже построены, то функции $f_{n,k}^{(1)}(x)$ ($x \in G_1$), $f_{n,k}^{(2)}(x)$ ($x \in G_2$) определяются как решения краевых задач (9), (10) и (11), (12) соответственно:

$$L[f_{n,k}^{(1)}(x)] = F_{k-1}(x) \quad (x \in G_1), \quad (9)$$

$$\frac{\partial f_{n,k}^{(1)}(x)}{\partial n_{G_1}} = -\frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)} \frac{\partial f_{n-1,k}^{(2)}(x)}{\partial n_{G_2}} \quad (x \in \Gamma), \quad (10)$$

$$l[f_{n,k}^{(1)}(x)] = 0 \quad (x \in \partial G_1/\Gamma),$$

$$L[f_{n,k}^{(2)}(x)] = F_{k-1}(x) \quad (x \in G_2), \quad (11)$$

$$f_{n,k}^{(2)}(x) = (1-t)f_{n,k}^{(1)}(x) + tf_{n-1,k}^{(2)}(x) \quad (x \in \Gamma),$$

$$l[f_{n,k}^{(2)}(x)] = 0 \quad (x \in \partial G_2/\Gamma), \quad (12)$$

$$(\Gamma = \partial G_1 \cap \partial G_2)$$

$$(n = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots).$$

Параметр t обеспечивает и регулирует сходимость описанного метода. В качестве $\frac{\partial f_{0,k}^{(2)}(x)}{\partial n_{G_2}}$ ($x \in \Gamma$) берется произвольная достаточно гладкая функция.

Таким образом,

$$u_1(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,k}(x). \quad (13)$$

Существенным является следующее обстоятельство: при любом фиксированном n существует $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n,k}(x) = u_1(x)$, если первое приближение $F_0(x)$ выбрано достаточно близким к $u_1(x)$. (При этом в (9) — (12) вместо $F_{k-1}(x)$ берется $f_{n,k-1}(x)$)

Если решать краевые задачи (5), фиксируя не количество «циклов Шварца», а точность вычислений, то число N_k «циклов Шварца» внутри k -го «цикла Коллатца» будет уменьшаться с увеличением k и в конце концов станет равным 1. Этот факт иллюстрируется данными, приведенными в таблице. Доказательство этого факта опускается.

k	N_k	Δ_k	U_k	V_k
-----	-------	------------	-------	-------

2	9	8,662819	1,095098	0,584455
4	8	8,627938	1,138125	0,514791
6	6	8,624907	1,147260	0,495995
8	6	8,624324	1,149505	0,490991

2	10	8,639945	1,118242	0,547929
4	7	8,625419	1,145883	0,498812
6	6	8,624317	1,149609	0,490746
8	5	8,624164	1,150184	0,489441

2	10	8,639945	1,157885	0,488562
4	7	8,624236	1,149975	0,489157
6	5	8,624166	1,150309	0,489188

Сходимость описанного процесса можно существенно ускорить, если вместо оператора L (3), (2) рассматривать оператор $L_c = L - cI$, где $c > 0$ и область допустимых значений c определяется геометрией области G .

В случае, если известна хотя бы грубая оценка собственного значения μ_2 , процесс нахождения наименьшего собственного

значения и соответствующей собственной функции можно ускорить, используя следующую модификацию «цикла Коллатца»: пусть известно $F_k(x)$ (k — четное число). Определим $\tilde{F}_{k+1}(x)$ как решение краевой задачи (14):

$$\begin{aligned} L[\tilde{F}_{k+1}(x)] &= F_k(x) \quad (x \in G); \\ l[\tilde{F}_{k+1}(x)] &= 0 \quad (x \in \partial G). \end{aligned} \quad (14)$$

Положим

$$\hat{F}_{k+1}(x) = -\frac{1}{M-1} F_k(x) + \frac{M}{M-1} \tilde{F}_{k+1}(x). \quad (15)$$

Определим $\tilde{F}_{k+2}(x)$ как решение краевой задачи

$$L[\tilde{F}_{k+2}(x)] = \hat{F}_{k+1}(x) \quad (x \in G); \quad (16)$$

$$l[\tilde{F}_{k+2}(x)] = 0 \quad (x \in \partial G)$$

и положим

$$\hat{F}_{k+2}(x) = -\frac{1}{M-1} \hat{F}_{k+1}(x) + \frac{M}{M-1} \tilde{F}_{k+2}(x). \quad (17)$$

Наконец определим

$$F_{k+2}(x) = -\frac{1}{N-1} F_k(x) + \frac{N}{N-1} \hat{F}_{k+2}(x). \quad (18)$$

Здесь $N=2(M-1)^2$, $M \cong 2\mu_2$.

Предложенная модификация может быть мотивирована из анализа «процесса Коллатца».

Совместное применение обоих методов ускорения сходимости дает хорошие результаты (см. таблицу). В таблице приведены результаты расчета на ЭЦВМ М-220 для области, изображенной на рисунке, причем $H_1=2$, $H_2=1$, $D_1=1$, $D_2=1$, $L=-\Delta$, $\beta \equiv 0$, $\alpha \equiv 1$.

В приводимой ниже таблице V_k, U_k — значения k -х приближений к нормированной собственной функции в точках A и B , где A и B — центры прямоугольников G_1 и G_2 соответственно, N_k — число «циклов Шварца», приходящихся на два «цикла Коллатца» (k и $(k-1)$ -й).

В таблице приведены результаты расчета без ускорения сходимости ($c=0$, $M=\infty$), результаты расчета при $c=3,14$; $M=\infty$ и при $c=3,14$, $M \approx 23$. Небольшая модификация описанного метода позволяет также отыскивать высшие собственные значения и высшие собственные функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968. 504 с.
2. Кацнельсон В. Э., Меньшиков В. В. Об одном аналоге альтернирующего метода Шварца. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 17, Харьков, 1973, с. 206—215.

УДК 517.9:535.4

А. В. БОРЗЕНКОВ, В. Г. СОЛОГУБ, канд. физ.-мат. наук

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ НА ПОЛОСЕ

Рассмотрены некоторые аспекты, связанные с численным решением задачи о дифракции на полосе с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно преобразования Фурье плотности «поверхностного» тока.

1. Введение

В работе [1] предложен метод, с помощью которого задачи о дифракции на системе из бесконечных полос, отрезков плоского и круглого волноводов могут быть сведены к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода с ядрами простого вида. Задачи такого сорта представляют значительный интерес для приложений.

В данной работе затронуты некоторые вопросы, связанные с численным решением простейшего среди этих уравнений, возникающего в задаче о дифракции на отдельной полосе. Показано, что при сравнительно небольшом порядке решаемых систем линейных алгебраических уравнений можно достичь высокой точности в определении энергетических характеристик рассеяния вплоть до значений параметра ka (k — волновое число, $2a$ — ширина полосы), когда коротковолновая асимптотика решения задачи имеет относительную погрешность не хуже, чем 10^{-3} [2].

2. Сведение задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

Если на бесконечно тонкую идеально проводящую полосу под углом ψ падает плоская электромагнитная волна, поляризованная перпендикулярно к ребрам (граничное условие Неймана), то как известно [2], в этом случае задача о дифракции состоит в нахождении функции $U(x, \xi, \eta)$, представимой в виде

$$U(x, \xi, \eta) = e^{i\alpha x} - \frac{|\eta|}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) e^{iV\sqrt{x^2 - \lambda^2}|\eta|} e^{i\lambda \xi} d\lambda,$$

где функция $X(\lambda)$, с точностью до множителя совпадающая с преобразованием Фурье плотности поверхностного тока, удовлетворяет следующей системе парных интегральных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda = 0 \quad \text{при } |\xi| > 1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) \sqrt{x^2 - \lambda^2} e^{i\lambda\xi} d\lambda = \kappa\beta e^{i\lambda\alpha\xi} \quad \text{при } |\xi| < 1. \quad (1)$$

Здесь $\kappa = ka$, ξ , η — отнесенные к полуширине полосы декартовы координаты точки наблюдения; $\alpha = \sin \psi$, $\beta = \cos \psi$ и выбрана та ветвь $\sqrt{x^2 - \lambda^2}$, для которой $\text{Im} \sqrt{x^2 - \lambda^2} > 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ вдоль вещественной оси.

Отметим, что помимо уравнений (1) функция $X(\lambda)$ должна удовлетворять также условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(\lambda)|^2 \sqrt{x^2 - \lambda^2} d\lambda < \infty,$$

которое формально вытекает из требования конечности энергии рассеянной волны в любой ограниченной части пространства.

Для того, чтобы систему парных уравнений (1) свести к одному уравнению Фредгольма второго рода, введем в рассмотрение функцию

$$Y(\lambda) = \lambda X(\lambda). \quad (2)$$

В силу первого уравнения (1) эта функция, очевидно, будет удовлетворять условию

$$Y(0) = 0. \quad (3)$$

Обозначим также через $\varepsilon(\lambda)$ функцию

$$\varepsilon(\lambda) = 1 + i|\lambda|^{-1} \sqrt{x^2 - \lambda^2}.$$

Заметим, что $\varepsilon(\lambda) = 0(\lambda^{-2})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Дифференцируя первое уравнение системы (1) по ξ , приходим к следующей системе парных интегральных уравнений относительно $Y(\lambda)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda = 0 \quad \text{при } |\xi| > 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\lambda) \frac{|\lambda|}{\lambda} e^{i\lambda\xi} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\mu) \frac{|\mu|}{\mu} \varepsilon(\mu) e^{i\mu\xi} d\mu - i\kappa\beta e^{i\lambda\alpha\xi} \quad \text{при } |\xi| < 1$$

с дополнительным условием (3).

Отсюда, вводя в рассмотрение две вспомогательные функции

$$Y^+(\xi) = \int_0^{\infty} Y(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda; \quad Y^-(\xi) = - \int_{-\infty}^0 Y(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda,$$

аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексного переменного ξ , приходим к задаче Римана-Гильберта о нахождении аналитической всюду вне отрезка вещественной оси $-1 < \xi < 1$, убывающей на бесконечности функции.

$$\tilde{Y}(\xi) = \begin{cases} Y^+(\xi) & \text{при } \operatorname{Im} \xi > 0, \\ Y^-(\xi) & \text{при } \operatorname{Im} \xi < 0 \end{cases}$$

по сумме предельных значений ее на этом отрезке из верхней и нижней полуплоскости.

Учитывая решение задачи Римана-Гильберта и принимая во внимание определение функции $Y(\lambda)$, вместо (1) получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mu) \frac{|\mu|}{\mu} \varepsilon(\mu) V_{\mu}^{\lambda} d\mu - i \frac{\beta}{\alpha} V_{\alpha}^{\lambda} \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad (4)$$

где функция V_{μ}^{λ} имеет вид [1],

$$V_{\mu}^{\lambda} = \frac{\mu}{2(\mu - \lambda)} [I_0(\lambda) I_1(\mu) - I_1(\lambda) I_0(\mu)].$$

Здесь $I_p(x)$ — функции Бесселя первого рода ($p=0, 1$). Нетрудно показать, что интегральный оператор, соответствующий уравнению (4), будет вполне непрерывным в гильбертовом пространстве $L_2(\sqrt{x^2 - \lambda^2})$ функций $X(\lambda)$ со скалярным произведением

$$(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) X_2^*(\lambda) |\sqrt{x^2 - \lambda^2}| d\lambda,$$

причем для всякого решения (4) из $L_2(\sqrt{x^2 - \lambda^2})$ имеет место оценка

$$X(\lambda) = O(\lambda^{-3/2}) \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty \quad (\operatorname{Im} \lambda = 0).$$

Отсюда непосредственно вытекает эквивалентность уравнения (4) системе парных уравнений (1). Разрешимость (4) в $L_2(\sqrt{x^2 - \lambda^2})$ (а, значит, и в $C(-\infty, \infty)$ при любых значениях параметра κ ($\operatorname{Im} \kappa \geq 0$)) следует теперь из соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{X}(\lambda)|^2 \sqrt{x^2 - \lambda^2} d\lambda,$$

справедливого для любого решения $\tilde{X}(\lambda)$ однородного уравнения (4) из $L_2(\sqrt{x^2 - \lambda^2})$. Последнее соотношение получается путем применения равенства Парсеваля к функциям, определяемым левыми частями соответствующей (1) однородной системы парных интегральных уравнений.

3. Способы решения интегрального уравнения Фредгольма

Хотя интегральное уравнение (4) является уравнением на всей оси, однако оно оказывается удобным для нахождения посредством его энергетических характеристик рассеяния. Удобство это двоякого рода: во-первых, в простоте и хороших аналитических свойствах интегрального оператора и, во-вторых, в простоте выражений характеристик рассеяния через функцию $X(\lambda)$. Так, диаграмма направленности, дающая распределение рассеиваемой мощности по углам, непосредственно определяется функцией $X(\kappa \sin \theta)$, где θ — угол между направлением нормали к плоскости, в которой расположена полоса, и направлением в точку наблюдения. Коэффициент рассеяния σ , характеризующий величину полной рассеиваемой полосой мощности, связан с решением уравнения (4) соотношением

$$\sigma = -2\pi\beta \operatorname{Re} X(\kappa\alpha).$$

Нетрудно показать (см. приложение), что когда $\kappa = \kappa\alpha < 1$, решение уравнения (4) можно получить с помощью метода последовательных приближений. Этот метод позволяет также найти длинноволновую асимптотику решения задачи с любой интересующей нас точностью (по порядку параметра κ)¹.

Если $\kappa = \kappa\alpha > 1$, уравнение (4) приходится решать численно. При этом, в силу убывания его ядра при $|\lambda|, |\mu| \rightarrow \infty$ достаточно ограничиться решением соответствующего ему уравнения на некотором достаточно большом, но конечном интервале $(-N, N)$. Погрешность в вычислении функции $X(\lambda)$, возникающая при замене бесконечного интервала конечным, может быть оценена следующим образом.

Пусть $X_N(\lambda)$ — решение «усеченного» уравнения

$$X_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} X_N(\mu) \frac{|\mu|}{\mu} \varepsilon(\mu) V_{\mu}^{\lambda} d\mu - i \frac{\beta}{\alpha} V_{\kappa\alpha}^{\lambda}, \quad (|\lambda| < N), \quad (5)$$

продолженного на всю вещественную ось его правой частью. Эта функция будет, очевидно, удовлетворять следующей системе парных интегральных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_N(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda = 0 \quad \text{при } |\xi| > 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_N(\lambda) \sqrt{\kappa^2 - \lambda^2} e^{i\lambda\xi} d\lambda = \kappa\beta e^{i\kappa\alpha\xi} - i \int_{|\lambda| > N} X_N(\lambda) |\lambda| \varepsilon(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda$$

при $|\xi| < 1$.

¹ Мы не станем ее приводить, поскольку она хорошо известна (см. например, [2]).

Отсюда вытекает разрешимость уравнения (5) при любом значении параметра «усечения» N , если только $N > x$. В самом деле, применяя равенство Парсеваля к функциям, определяемым левыми частями соответствующих (5) однородных уравнений, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{X}_N(\lambda)|^2 \sqrt{x^2 - \lambda^2} d\lambda = -i \int_{|\lambda| > N} |\tilde{X}_N(\lambda)| |\varepsilon(\lambda)| d\lambda.$$

Выделяя в этом равенстве вещественную и мнимую части, находим, что функция $X_N(\lambda)$, являющаяся решением однородного уравнения (5), тождественно равна нулю.

Обозначим, далее, через $\Delta_N(\lambda)$ разность между точным значением функции $X(\lambda)$ и решением «усеченного» уравнения (4), т. е.

$$\Delta_N(\lambda) = X(\lambda) - X_N(\lambda).$$

Функция $\Delta_N(\lambda)$ будет удовлетворять тогда такой системе парных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_N(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda = 0 \quad \text{при } |\xi| > 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_N(\lambda) \sqrt{x^2 - \lambda^2} e^{i\lambda\xi} d\lambda = i \int_{|\lambda| > N} X_N(\lambda) |\varepsilon(\lambda)| e^{i\lambda\xi} d\lambda \quad \text{при } |\xi| < 1.$$

Применяя равенство Парсеваля к функциям, определяемым левыми частями этих уравнений, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_N(\lambda)|^2 \sqrt{x^2 - \lambda^2} d\lambda = i \int_{|\lambda| > N} X_N(\lambda) \Delta_N^*(\lambda) |\varepsilon(\lambda)| d\lambda$$

(звездочкой здесь обозначена операция комплексного сопряжения). Отсюда следует, если отделить вещественную и мнимую части, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_N(\lambda)|^2 \sqrt{x^2 - \lambda^2} d\lambda < 2 \max_{|\lambda| > N} \frac{\lambda^2 \varepsilon^2(\lambda)}{\lambda^2 - x^2} \int_{|\lambda| > N} |X(\lambda)|^2 \sqrt{x^2 - \lambda^2} d\lambda.$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся соотношением, которое получается из системы парных уравнений (1) с помощью равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(\lambda)|^2 \sqrt{x^2 - \lambda^2} d\lambda = x\beta X^*(x\alpha). \quad (6)$$

Величину $X(\kappa\alpha)$ можно оценить из уравнения (4), если воспользоваться соотношением (6)

$$|X(\kappa\alpha)| < \sqrt{2\kappa\beta|X(\kappa\alpha)|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varepsilon(\mu)|^2}{|V_{\kappa^2 - \mu^2}|} |V_{\mu}^{\kappa\alpha}|^2 d\mu \right)^{1/2} + \frac{\beta}{\alpha} |V_{\kappa\alpha}^{\kappa\alpha}|.$$

Решая квадратное уравнение относительно $|X(\kappa\alpha)|^{1/2}$ и пользуясь оценкой

$$|V_{\mu}^{\lambda}| < \frac{\mu}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \right),$$

которая вытекает из определения функции V_{μ}^{λ} найдем

$$|X(\kappa\alpha)| < 9\kappa\beta(1+\kappa^2)/8.$$

Таким образом, для погрешности решения «усеченного» уравнения (5) получаем следующую интегральную оценку:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_N(\lambda)|^2 |V_{\kappa^2 - \lambda^2}| d\lambda < \frac{9}{4} \beta^2 \frac{\kappa^4 (1 + \kappa^2)}{(N^2 - \kappa^2)(N + \sqrt{N^2 - \kappa^2})^2}.$$

Чтобы получить равномерную оценку погрешности, воспользуемся интегральным соотношением, которому удовлетворяет, очевидно, функция $\Delta_N(\lambda)$:

$$\Delta_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_N(\mu) \varepsilon(\mu) \frac{|\mu|}{\mu} V_{\mu}^{\lambda} d\mu + \int_{|\mu| > N} X(\mu) \varepsilon(\mu) \frac{|\mu|}{\mu} V_{\mu}^{\lambda} d\mu.$$

Отсюда, пользуясь неравенством Коши-Буняковского и учитывая при этом соотношение (6), а также полученное в [1] неравенство $|V_{\mu}^{\lambda}| < 1$, находим окончательно

$$|\Delta_N(\lambda)| < \frac{3}{2} \beta \frac{\kappa^3 \sqrt{1 + \kappa^2}}{N \sqrt{N^2 - \kappa^2}}.$$

Хотя эта оценка является заведомо завышенной, однако она дает правильное представление о поведении погрешности решения «усеченного» уравнения в зависимости от параметров задачи и параметра «усечения» N . Кроме того, в ряде случаев (при $\kappa \leq 1$) она может быть использована для оценки точности численных результатов.

Сделаем одно очевидное замечание. Если в интегральном уравнении (4), которое в операторной форме имеет вид

$$(1 - A)X = B,$$

где A — интегральный оператор, обратный оператор $I - A_N$, соответствующий уравнению (5)¹, то вместо (4) получим уравнение

$$X = C_N X + \Gamma_N; \quad \Gamma_N = (1 - A_N)^{-1} B \quad (7)$$

с вполне непрерывным в $L_2(\sqrt{x^2 - \lambda^2})$ оператором $C_N = (1 - A_N)^{-1} \times (A - A_N)$, норма которого будет стремиться к нулю при $N \rightarrow \infty$. Поэтому при достаточно больших значениях N решение уравнения (7) может быть получено методом последовательных приближений.

Для того, чтобы выяснить область значений параметра N , при которых этот метод применим, оценим норму оператора C_N в пространстве $L_2(q_N(\lambda))$, где

$$q_N(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - \lambda^2} & \text{при } |\lambda| < N, \\ |\lambda| & \text{при } |\lambda| > N. \end{cases}$$

Прежде всего заметим, что соотношение

$$Y = C_N X$$

будет эквивалентно следующему уравнению Фредгольма второго рода:

$$Y = A_N Y + (A - A_N) X,$$

откуда вытекает, что функция $Y(\lambda)$ будет удовлетворять такой системе парных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda = 0 \quad \text{при } |\xi| > 1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\lambda) q_N(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda = \int_{|\lambda| > N} X(\lambda) |\lambda| \varepsilon(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda \quad \text{при } |\xi| < 1. \quad (8)$$

Пользуясь равенством Парсеваля, отсюда находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\lambda)|^2 q_N(\lambda) d\lambda = \int_{|\lambda| > N} X(\lambda) Y^*(\lambda) |\lambda| \varepsilon(\lambda) d\lambda.$$

Отделяя в этом равенстве вещественную и мнимую части, получим

$$\int_{|\lambda| > N} |Y(\lambda)|^2 |\lambda| d\lambda < \max_{|\lambda| > N} \varepsilon^2(\lambda) \int_{|\lambda| > N} |X(\lambda)|^2 |\lambda| d\lambda.$$

¹ В результате, как было показано выше, мы получим ограниченный оператор.

Учитывая теперь соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\lambda)|^2 q_N(\lambda) d\lambda < \sqrt{2} \int_{|\lambda| > N} |X(\lambda)| |Y(\lambda)| \|\lambda\| \varepsilon(\lambda) d\lambda,$$

которое следует из (8), находим, что

$$\|C_N\| \leq \sqrt[4]{2} \max_{|\lambda| > N} \varepsilon(\lambda) = \sqrt[4]{2} \frac{x^2}{N(N + \sqrt{N^2 - x^2})}.$$

Таким образом, решение уравнения (7) может быть получено методом последовательных приближений, если только

$$N > 2^{1/8} x.$$

В этом случае оно имеет вид

$$X = \sum_{m=0}^{\infty} C_N^{(m)} \Gamma_N, \quad (9)$$

где $C_N^{(m)}$ — m -я — степень оператора $C_N^{(m)}$.

Отметим, что вычисление функции $X(\lambda)$ по формуле (9) предполагает, наряду с решением интегрального уравнения (7) с различными правыми частями (их число равно числу учитываемых в ряде (9) слагаемых), также численное вычисление с большой степенью точности интегралов с бесконечными пределами, что затрудняет реализацию этого метода на ЭВМ, поскольку требует большой затраты машинного времени.

4. Вычислительный алгоритм. Численные результаты

Чтобы продемонстрировать возможность применения интегрального уравнения (3) для получения численного решения рассматриваемой задачи вплоть до значений параметра x , при которых коротковолновая асимптотика дает высокую точность, были проведены численные расчеты на ЭВМ М-222. Уравнение (3) при этом заменялось «усеченным» (4) с последующим преобразованием его к двум независимым уравнениям относительно четной и нечетной части решения (см. приложение). Такое преобразование позволило уменьшить интервал, на котором ищется решение уравнения (4), в два раза. Соответствующий интеграл заменялся интегральной суммой по формуле Симпсона. Число точек разбиения ограничивалось памятью ЭВМ и было взято равным 21 (при необходимости его можно было бы путем некоторого изменения программы увеличить вдвое). Полученная таким образом система линейных алгебраических уравнений решалась численно при нескольких значениях параметра «усечения» N . Как показали расчеты, «оптимальным» значением

для этого параметра явилось значение $N = \kappa + 2$, если $\kappa > 7$, и $N = 10$, если $\kappa \leq 7$.

Результаты проведенных вычислений сравнивались по значениям коэффициента рассеяния σ в случае нормального падения, полученным в [3] путем трудоемкого суммирования ряда, по функциям Маттье, по графическим данным в случае наклонного падения, приведенным в [2] и полученным тем же способом; они также сравнивались с асимптотической формулой для σ при $\kappa \gg 1$ ([2]). Часть этих результатов в случае нормального падения представлена в табл. 1.

Таблица 1

κ	0,2	0,6	1,0	3,0	5,0
Численные данные	0,00262	0,09478	0,54619	0,96970	1,04860
Точное значение [3]	0,00262	0,09484	0,54540	0,97202	1,04992
Асимптотическая формула [2]	—	—	—	—	1,05038

Продолжение табл. 1

κ	7,0	10,0	15	17	20
Численные данные	0,96468	0,97644	1,00425	0,99681	0,99434
Точное значение [3]	0,97174	0,98224	Для $\kappa > 10$ применение метода затруднительно; данных нет		
Асимптотическая формула [2]	0,97131	0,98205	1,00532	1,00188	0,99946

При наклонном падении плоской волны полученные нами численные данные для коэффициента рассеяния полностью совпали с графическими результатами, приведенными в [2] для диапазона $0 < \kappa < 10$. Сравнение их с асимптотической формулой для σ при $\kappa \gg 1$ ([2]) в случае $\psi = 40^\circ$ приведено в табл. 2.

Таблица 2

κ	4,0	5,0	7,0	10	12	15
Численные данные	0,7442	0,8334	0,7955	0,7396	0,7680	0,7781
Асимптотическая формула	0,7528	0,8425	0,7998	0,7355	0,7593	0,7785

Таким образом, в простейшем случае отдельной полосы эффективность предложенного нами метода исследования задачи о дифракции на ограниченных экранах, обладающих плоской или круговой симметрией, можно считать полностью доказанной.

Приложение

Выясним область значений параметра κ , при которых решение интегрального уравнения (4) можно получить с помощью метода последовательных приближений.

С этой целью введем в рассмотрение две функции $X_+(\lambda)$ и $X_-(\lambda)$, являющиеся четной и нечетной частями функции $X(\lambda)$:

$$X_+(\lambda) = \frac{X(\lambda) + X(-\lambda)}{2}; \quad X_-(\lambda) = \frac{X(\lambda) - X(-\lambda)}{2}.$$

Из уравнения (4), учитывая, что

$$V_{-\lambda}^\mu = -V_\lambda^\mu,$$

получим два независимых интегральных уравнения относительно функций $X_+(\lambda)$ и $X_-(\lambda)$, справедливых уже на положительной полуоси ($0 < \lambda < \infty$):

$$X_+(\lambda) = \int_0^\infty X_+(\mu) \varepsilon(\mu) [V_\mu^\lambda + V_\mu^{-\lambda}] d\mu - i\beta [V_{\kappa\alpha}^\lambda + V_{\kappa\alpha}^{-\lambda}]/2\alpha, \quad (\text{П1})$$

$$X_-(\lambda) = \int_0^\infty X_-(\mu) \varepsilon(\mu) [V_\mu^\lambda - V_\mu^{-\lambda}] d\mu - i\beta [V_{\kappa\alpha}^\lambda - V_{\kappa\alpha}^{-\lambda}]/2\alpha. \quad (\text{П2})$$

Рассмотрим сначала последнее уравнение. Обозначим

$$Z_-(\lambda) = \sqrt{\lambda} X_-(\lambda).$$

Принимая во внимание, что

$$V_\mu^\lambda - V_\mu^{-\lambda} = \mu \int_0^1 x I_1(\lambda x) I_1(\mu x) dx,$$

вместо (П2) получим уравнение

$$Z_-(\lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^1 x I_1(\lambda x) dx \int_0^\infty Z_-(\mu) \varepsilon(\mu) I_1(\mu x) \sqrt{\mu} d\mu - \\ - i \frac{\kappa \beta \sqrt{\lambda}}{2} \int_0^1 x I_1(\lambda x) I_1(\kappa \alpha x) dx. \quad (\text{П3})$$

Нетрудно показать, что интегральный оператор A_- , соответствующий этому уравнению, будет вполне непрерывным в $L_2(0, \infty)$. Для оценки его нормы рассмотрим отображение пространства $L_2(0, \infty)$ в себя вида

$$Z = A_- Y.$$

Из определения A_- следует тогда, что

$$\begin{aligned} \|Z\|^2 &= \int_0^\infty \lambda d\lambda \left| \int_0^1 x I_1(\lambda x) dx \int_0^\infty Y(\mu) \varepsilon(\mu) I_1(\mu\lambda) V_{\mu}^- d\mu \right|^2 = \\ &= \int_0^1 x dx \left| \int_0^\infty Y(\mu) \varepsilon(\mu) I_1(\mu x) V_{\mu}^- d\mu \right|^2 \leq \\ &\leq \|Y\|^2 \int_0^1 x dx \int_0^\infty |\varepsilon(\mu)|^2 I_1^2(\mu x) \mu d\mu. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|A_-\| &< \left[\int_0^1 x dx \int_0^\infty |\varepsilon(\mu)|^2 I_1^2(\mu\lambda) \mu d\mu \right]^{1/2} < \\ &< M \left[\int_0^1 x dx \int_0^\infty I_1^2(\mu x) \mu^{-1} d\mu \right]^{1/2} = M, \end{aligned}$$

где

$$M^2 = \max_{0 < \lambda < \infty} \lambda^2 \varepsilon^2(\lambda) = \kappa^2.$$

Таким образом, метод последовательных приближений для уравнения (ПЗ) будет сходиться, если

$$\kappa < 1. \quad (\text{П4})$$

Аналогично, вводя функцию $Z_+(\lambda)$ по формуле

$$Z_+(\lambda) = \lambda^{-1/2} [X_+(\lambda) - C I_0(\lambda)],$$

где

$$C = \int_0^\infty X_+(\mu) \varepsilon(\mu) I_1(\mu) d\mu - i\beta I_1(\kappa\alpha)/2\alpha,$$

и учитывая при этом, что

$$\begin{aligned} V_{\mu}^{\lambda} + V_{\mu}^{-\lambda} &= \mu \int_0^1 x I_0(\lambda x) I_0(\mu x) dx = \\ &= \lambda \int_0^1 x I_1(\lambda x) I_1(\mu x) dx + I_0(\lambda) I_0(\mu), \end{aligned}$$

получим для $z_+(\lambda)$ интегральное уравнение того же вида, что и (ПЗ), метод последовательных приближений для которого сходится при условии (П4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сологуб В. Г. О решении одного интегрального уравнения типа свертки с конечными пределами интегрирования. — «Журн. вычисл. мат. и мех. физ.», 1971, т. 11, 4, с. 835—854.
2. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М., «Мир» 1964. 428 с.
3. Skavlem S. Arch. Math. Naturv, 1951, Vol. 51, N 61, p. 61—80.

УДК 517.944

Г. А. ДОМБРОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПРОСТЫХ ВОЛНАХ

В статье обращается внимание на некоторые свойства простых волн системы уравнений для функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ вида

$$A_1 u_x + B_1 v_y = 0, \quad A_2 u_y + B_2 v_x = 0, \quad (1)$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — известные функции u и v .

Системы вида (1) возникают при решении многих задач механики сплошной среды и физики.

Вдоль характеристик C_+ и C_- -уравнений (1) имеем соответственно [1]

$$\frac{dy}{dx} = \zeta, \quad \frac{dy}{dx} = -\zeta. \quad (2)$$

Здесь

$$\zeta = \sqrt{\frac{A_2 B_1}{A_1 B_2}}. \quad (3)$$

Будем считать для определенности, что прямолинейными в простой волне являются характеристики C_+ . Изображением всей области простой волны в плоскости uv является характеристика Γ_- . Имеем $u = u(v)$ или $v = v(u)$.

Запишем уравнение семейства прямолинейных характеристик в виде

$$y = \zeta x + b(\zeta). \quad (4)$$

Дифференцирование этого выражения дает

$$dy = (b' + x) d\zeta + \zeta dx. \quad (5)$$

Используя соотношение $dy = -\zeta dx$, справедливое вдоль поперечных характеристик C_- , получаем из (5)

$$\frac{dx}{d\zeta} + \frac{x}{2\zeta} + \frac{b'(\zeta)}{2\zeta} = 0. \quad (6)$$

В результате интегрирования этого уравнения имеем

$$x = -\frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left[\int \frac{b'(\zeta)}{2\sqrt{\zeta}} d\zeta + c \right], \quad (7)$$

где c — постоянная интегрирования, принимающая различные значения для различных поперечных характеристик C_- .

Зафиксируем некоторую поперечную характеристику C_-^* . Координаты точек этой характеристики обозначим x^* , y^* . Согласно (7), можем записать

$$x^* = -\frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left[\int \frac{b'(\zeta)}{2\sqrt{\zeta}} d\zeta + c^* \right]. \quad (8)$$

Сопоставляя (7) и (8), получаем

$$x(\zeta; k) = x^*(\zeta) + \frac{k}{\sqrt{\zeta}}, \quad (9)$$

где величина $k = c^* - c$ принимает для каждой поперечной характеристики свое постоянное значение.

Формула (9) устанавливает связь между координатами x^* и x точек пересечения прямолинейной характеристики с характеристикой C_-^* и некоторой другой поперечной характеристикой C_- рассматриваемой простой волны.

Пользуясь соотношением $y(\zeta; k) - y^*(\zeta) = \zeta[x(\zeta; k) - x^*(\zeta)]$, получаем формулу, аналогичную (9), для второй координаты точки поперечной характеристики C_- :

$$y(\zeta; k) = y^*(\zeta) + k\sqrt{\zeta}. \quad (10)$$

Если таким же образом рассмотреть простую волну с прямолинейными характеристиками C_- , то придем к следующему результату:

$$x(\zeta; k) = x^*(\zeta) + \frac{k}{\sqrt{\zeta}}, \quad y(\zeta; k) = y^*(\zeta) - k\sqrt{\zeta}. \quad (11)$$

Здесь $x^*(\zeta)$, $y^*(\zeta)$ — координаты точки фиксированной поперечной характеристики C_+^* ; $x(\zeta; k)$, $y(\zeta; k)$ — координаты точки какой-либо другой поперечной характеристики C_+ ; $k = \text{const}$ для каждой поперечной характеристики.

Очевидно, для центрированных простых волн можно записать

$$x(\zeta; k) = x_0 + \frac{k}{\sqrt{\zeta}}, \quad y(\zeta; k) = y_0 \pm k\sqrt{\zeta}, \quad (12)$$

где x_0, y_0 — координаты центра волны.

Формулы (9) — (12) удобны для применений при решении краевых задач методом годографа. С их помощью легко определяются при необходимости граничные условия на характеристиках, представляющих собой изображения в плоскости годографа uv областей простых волн.

Рассмотрим примеры.

1. Плоское установившееся потенциальное движение газа со сверхзвуковыми скоростями. Имеем систему уравнений

$$\tau_\psi - \sqrt{H} \theta_\varphi = 0, \quad \sqrt{H} \tau_\varphi - \theta_\psi = 0, \quad (13)$$

где ψ — функция тока; φ — потенциал скорости; τ — известная функция модуля скорости; θ — угол между вектором скорости и фиксированным направлением; $H(\tau)$ — функция Чаплыгина.

Согласно (9) — (11), получаем

$$\psi = \psi^* + kH^{-1/4}, \quad \varphi = \varphi^* \pm kH^{1/4}. \quad (14)$$

Первая из этих формул была ранее получена другим путем в работе [2].

2. Одномерное неустановившееся движение газа с плоскими волнами при наличии единой для всего потока связи между давлением p и плотностью ρ . Имеем систему уравнений

$$\rho a u_\psi + v_t = 0, \quad u_t + \rho a v_\psi = 0. \quad (15)$$

Здесь ψ — функция частицы; t — время; u — скорость; v — переменная Римана; a — скорость звука.

На основании (9) — (11) имеем

$$\psi = \psi^* + k\sqrt{\rho a}, \quad t = t^* \pm \frac{k}{\sqrt{\rho a}}. \quad (16)$$

Эти формулы рассматривались ранее в работе [3], специально посвященной простым волнам одномерного неустановившегося движения газа.

3. Распространение электромагнитных волн в нелинейных средах. В одномерном случае имеем систему уравнений

$$E_z + \mu H_t = 0, \quad \varepsilon E_t + H_z = 0, \quad (17)$$

где z — координата; t — время; E — напряженность электрического поля; H — напряженность магнитного поля; $\varepsilon(E)$ — диэлектрическая проницаемость; $\mu(H)$ — магнитная проницаемость.

По формулам (9) — (11) получаем

$$z = z^* + k(\varepsilon\mu)^{-1/4}, \quad t = t^* \pm k(\varepsilon\mu)^{1/4}. \quad (18)$$

Определим теперь условие, при котором в простой волне появляется предельная линия. Ясно, что известное условие, состоящее в равенстве нулю якобиана $J = x_u y_v - x_v y_u$ в точках плоскост-

ти uv , которым отвечают точки предельной линии, для простых волн теряет смысл.

Предельная линия в простой волне может образоваться как огибающая семейства прямолинейных характеристик. В качестве параметра семейства прямолинейных характеристик в уравнении $F(x, y; \xi) \equiv y - \xi x + b(\xi) = 0$ фигурирует ξ . Приравняв производную F_ξ нулю, получаем уравнение $x + b'(\xi) = 0$. На основании этого уравнения, уравнения (6) и второго из уравнений (2) нетрудно прийти к заключению, что в точке плоскости uv , которой отвечает точка пересечения поперечной характеристики $x = x(\xi; k)$, $y = y(\xi; k)$ и предельной линии, $x_\xi(\xi; k) = 0$, $y_\xi(\xi; k) = 0$. Это и есть искомое условие. Для плоского установившегося потенциального движения газа такого типа условие было получено более сложным путем в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны М., ИЛ., 1950. 426 с.
2. Hasimoto Z. A note on cross Mach lines in simple waves in the plane supersonic flow. — „Journ. Phys. Soc. Japan“, 1953, Vol. 8, N 2, p. 248—251.
3. Домбровский Г. А. О значениях функций тока на поперечных характеристиках в простой волне. — Сб. «Современные вопросы гидродинамики», Киев, 1967, с. 104—106.
4. Hasimoto Z. On the limiting line in a simple wave. — „Journ. Phys. Soc. Japan“, 1953, Vol. 8, N 2, p. 251—254.

УДК 583.4

И. М. АЛЬ-НАСАН

К ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ ПОДШИПНИКА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ СО ВТУЛКОЙ

В работе рассматривается гидродинамическая теория смазки цилиндрического подшипника конечной длины со свободно плавающей втулкой.

Считаем, что смазка несжимаема, а относительный зазор $\delta/R = (R - R_1)/R$ и число Рейнольдса $Re = \omega \delta^2/\nu$ малы по сравнению с единицей (R, R_1 — радиусы подшипника и шипа соответственно; ν — кинематическая вязкость; ω — угловая скорость вращения шипа).

Пренебрегая членами порядка δ/R и $\omega \delta^2/\nu$, безразмерные уравнения движения в смазочном слое запишем в виде

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial y^2} = 12 \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial y^2} = 12 \psi \frac{\partial p}{\partial \xi}. \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial y} + \psi \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} = 0,$$

где $\varphi = x/R_1$, $y = Y/\delta$, $\xi = z/L$ — безразмерные координаты (рис. 1); $v = (v_\varphi \equiv v_x/\omega R_1, v_y \equiv v_y/\omega \delta, v_\xi \equiv v_z/\omega R_1)$ — безразмерный вектор скорости жидкости; $p = \delta^2 p'/12 \mu \omega R_1^2$ — безразмерная величина гидродинамического давления; $\psi = R_1/L$ — отношение радиуса шипа к длине подшипника, причем $(R_1 + Y, \varphi, z)$ — цилиндрическая система координат, а v', p' — размерные скорость и давление.

Система уравнений (1) справедлива не только в области I

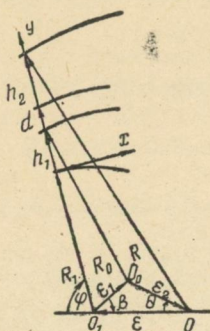


Рис. 1.

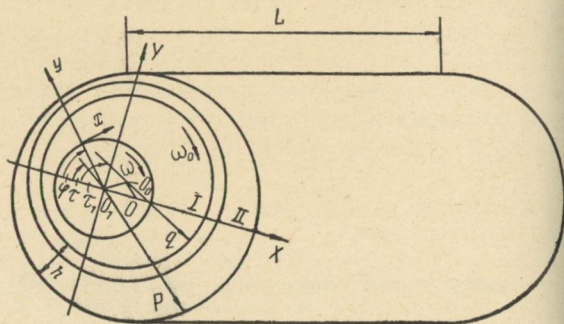


Рис. 2.

(между шипом и втулкой), но и в области II (между втулкой и подшипником).

Граничные условия на шипе, втулке и подшипнике имеют следующий вид:

$$v_\varphi^I|_{y=0} = 1, v_\varphi^I|_{y=h_1} = \Omega_L, v_\xi^I|_{y=0} = v_\xi^I|_{y=h_1} = 0; \quad (2)$$

$$v_\varphi^{II}|_{y=h-h_2} = \Omega_L, v_\varphi^{II}|_{y=h} = v_\xi^{II}|_{y=h-h_2} = 0,$$

где $h = 1 - \varepsilon \cos \varphi$, $h_1 = \frac{\delta_1}{\delta} \left(1 - \varepsilon_1 \cos(\varphi + \beta) \right)$, $h_2 = \frac{\delta_2}{\delta} (1 - \varepsilon_2(\varphi - \theta))$

— безразмерные переменные радиальные зазоры (см. рис. 1 и 2); $\Omega_L = \omega_0/\omega$, ω_0 — угловая скорость вращения втулки; $\varepsilon = e/\delta$, $\varepsilon_1 = e_1/\delta_1$, $\varepsilon_2 = e_2/\delta_2$ — относительные эксцентриситеты; $\delta_1 = R_0 - R_1$, $\delta_2 = R - R_0 - d$, d — толщина втулки; R_0 — внутренний радиус втулки; O, O_0, O_1 — центры подшипника, втулки и шипа соответственно.

Интегрируя первые два уравнения системы (1) по y и учитывая граничные условия (2), получаем

$$v_\varphi^I = 6 \frac{\partial p'}{\partial \varphi} (y^2 - h_1 y) - (1 - \Omega_L) \frac{y}{h_1} + 1;$$

$$v_\xi^I = 6\psi \frac{\partial p'}{\partial \xi} (y^2 - h_1 y);$$

$$v_{\varphi}^{II} = 6 \frac{\partial p_{\varphi}^{II}}{\partial \varphi} (y-h) (y-h+h_2) + \Omega_L \frac{h-y}{h_2}; \quad (3)$$

$$v_{\xi}^{II} = 6\psi \frac{\partial p^{II}}{\partial \xi} (y-h) (y-h+h_2).$$

Интегрируя уравнения непрерывности поперек смазочного слоя и учитывая граничные условия (2), имеем, например, для области I

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^{h_1} v_{\varphi}^I dy + \psi \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{h_1} v_{\xi}^I dy = 0$$

и аналогично для области II.

Подставляя в эти соотношения выражения для скоростей (3), получаем уравнения Рейнольдса для областей I и II:

$$h_1 \frac{\partial^2 p^I}{\partial \varphi^2} + 3 \frac{dh_1}{d\varphi} \frac{\partial p^I}{\partial \varphi} + \psi h_1 \frac{\partial^2 p^I}{\partial \xi^2} = \frac{1 + \Omega_L}{2} \frac{1}{h_1^2} \frac{dh_1}{d\varphi}; \quad (4)$$

$$h_2 \frac{\partial^2 p^{II}}{\partial \varphi^2} + 3 \frac{dh_2}{d\varphi} \frac{\partial p^{II}}{\partial \varphi} + \psi h_2 \frac{\partial^2 p^{II}}{\partial \xi^2} = \frac{\Omega_L}{2} \cdot \frac{1}{h_2^2} \cdot \frac{dh_2}{d\varphi}.$$

Эти уравнения определяют периодические по φ с периодом 2π функции давления $P^I(\varphi, \xi)$ и $P^{II}(\varphi, \xi)$ при следующих граничных условиях:

$$p^I(\varphi, 0) = p^I(\varphi, 1) = 0, \quad p^{II}(\varphi, 0) = p^{II}(\varphi, 1) = 0. \quad (5)$$

Точное решение уравнения (4) найти трудно. В литературе известен ряд приближенных методов решения уравнений Рейнольдса (см. например, [1, 2]).

В данном случае при выборе метода решения следует иметь в виду, что оно будет использовано для определения основных параметров режима работы подшипника из условий равновесия вала. Поэтому приближенное решение уравнений (4) должно быть, с одной стороны, простым по виду, а с другой — достаточно хорошо аппроксимировать точное решение.

Функции давления $P^I(\varphi, \xi)$ и $P^{II}(\varphi, \xi)$ ищем в виде следующих двойных рядов Фурье:

$$p^I(\varphi, \xi) = \left(\frac{\delta^I}{\delta^I} \right) \cdot \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{i,j}^I \frac{\sin j(\varphi + \beta) \cdot \sin(2i-1)\pi\xi}{2i-1};$$

$$p^{II}(\varphi, \xi) = \left(\frac{\delta}{\delta_2} \right)^2 \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{i,j}^{II} \frac{\sin j(\varphi - \theta) \sin(2i-1)\pi\xi}{2i-1}, \quad (6)$$

которые удовлетворяют условиям (5).

Умножив правую часть первого уравнения (4) на $4/\pi$, разложим ее в ряд Фурье (аналогично и для правой части второго уравнения)

$$F^I(\varphi) = \frac{2(1 + \Omega_L)}{\pi} \frac{1}{h_1^2} \frac{dh_1}{d\varphi} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^I \sin j(\varphi + \beta), \quad (7)$$

где

$$c_j^I = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F^I(\varphi) \sin j(\varphi + \beta) d\varphi.$$

Тогда, учитывая [3], имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i-1)\pi\xi}{2i-1} = \pi/4 \quad (0 < \xi < 1).$$

Подставляя (6) и (7) в (4), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A_{i,j}^I$

$$A_{ij}^I = \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(j-1)(j-2) + \gamma_i^2}{j^2 + \gamma_i^2} A_{i,j-1}^I + \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(j+1)(j-2)}{j^2 + \gamma_i^2} A_{i,j+1}^I - \frac{\delta_1}{\delta} \frac{c_j^I}{j^2 + \gamma_i^2}. \quad (8)$$

Здесь

$$\gamma_i = (2i-1)\pi\psi, \quad c_j^I = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\delta}{\delta_1} (1 + \Omega_L) \frac{j}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1} \right)^j. \quad (9)$$

Аналогично ищем систему для $A_{i,j}^{II}$.

Рассмотрим теперь условия, при которых центр масс шипа находится в равновесии.

Проектируя главный вектор всех сил, действующих на шип на оси O_1X и O_1Y (см. рис. 1), получаем

$$\begin{aligned} P \cdot \cos \tau &= -R_1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} p'^I \cos \varphi \cdot d\varphi dz; \\ P \cdot \sin \tau &= -R_1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} p'^I \sin \varphi \cdot d\varphi dz, \end{aligned} \quad (10)$$

где P — приложенная к шипу внешняя нагрузка.

Аналогично, рассматривая главный вектор всех сил, действующих на втулку, имеем

$$\begin{aligned} g \cdot \cos \tau_1 &= +R_1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (p'^{II} - p''^{II}) \cdot \cos \varphi d\varphi dz; \\ g \cdot \sin \tau_1 &= +R_1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (p'^{II} - p''^{II}) \sin \varphi d\varphi dz, \quad (R_0 \approx R_1), \end{aligned} \quad (11)$$

где g — вес втулки.

Моменты сил трения, действующих на втулку со стороны областей I и II, одинаковы, так как ω_0 — постоянная величина

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial v^I}{\partial y} \right)_{y=h_1} - \left(\frac{\partial v^{II}}{\partial y} \right)_{y=h-h_2} \right] d\varphi d\xi = 0. \quad (12)$$

Подставляя в уравнения (10) — (12) соответствующие выражения из (3) и (5), после несложных вычислений находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-n}{1+k} \right)^2 \hat{P}_L \cos \tau &= -\frac{2}{\pi} \sin \beta \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{i,1}^I}{(2i-1)^2}; \\ \left(\frac{1-n}{1+k} \right)^2 \hat{P}_L \sin \tau &= -\frac{2}{\pi} \cos \beta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{i,1}^I}{(2i-1)^2}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$k^2 \left(\frac{1-n}{1+k} \right)^2 (\hat{P}_L \cos \tau + \hat{g} \cos \tau_1) = +\frac{2}{\pi} \sin \theta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{i,1}^{II}}{(2i-1)^2};$$

$$k^2 \left(\frac{1-n}{1+k} \right)^2 (\hat{P}_L \sin \tau + \hat{g} \sin \tau_1) = -\frac{2}{\pi} \cos \theta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{i,1}^{II}}{(2i-1)^2};$$

$$\frac{\Omega_L}{(1-\varepsilon_2^2)^{1/2}} - \frac{1-\Omega_L}{(1-\varepsilon_1^2)^{1/2}} = \frac{6}{\pi} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k\varepsilon_1 A_{i,1}^I + \varepsilon_2 A_{i,1}^{II}}{(2i-1)^2};$$

где $k = \delta_2/\delta_1$, $n = d/\delta$, $P_L = \delta^2 P/12\pi\omega R_1^3 L$, $\hat{g} = \delta^2 g/12\pi\omega R_1^3 L$;

τ, τ_1 — углы, которые составляют векторы p и g с линией центров $O_1 X$.

Из треугольника OO_0O_1 (рис. 2) имеем геометрическое соотношение

$$\varepsilon_1 \sin \beta = k \varepsilon_2 \sin \theta. \quad (14)$$

Таким образом, мы получили систему шести нелинейных уравнений для определения неизвестных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \beta, \theta, \tau, \Omega_L$ (угол τ_1 считается заданным). Коэффициенты этой системы зависят от $A_{i,1}^I$ и $A_{i,1}^{II}$, которые являются решением бесконечной системы линейных уравнений (8) при $j=1$.

Рассмотрим свойства системы (8) подробнее. Поскольку сумма модулей коэффициентов в каждой строке

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(j-1)(j+2) + \gamma_i^2}{j^2 + \gamma_i^2} \right| + \left| \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(j+1)(j-2) + \gamma_i^2}{j^2 + \gamma_i^2} \right| &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \left| 2 - \right. \\ &\left. - \frac{4}{j^2 + \gamma_i^2} \right| \leq \varepsilon_1 < 1, \end{aligned}$$

система (8) вполне регулярна. Кроме того, свободные члены удовлетворяют условию

$$\left| \frac{\delta_1}{\delta} \frac{c_j^I}{j^2 + \gamma_j^2} \right| < \frac{c_j^I}{\gamma_j^2} < \frac{c_0}{j \cdot \gamma_j^2},$$

где c_0 — полное изменение функции $F^I(\varphi)$ в промежутке и, следовательно, система (8) имеет единственное ограниченное решение [4].

Ищем приближенное решение системы (8) при $j=1$ и с помощью следующего итерационного процесса:

$$\begin{aligned} (A_{i,j}^I)^m &= \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(j-1)(j+2) + \gamma_j^2}{j^2 + \gamma_j^2} (A_{i,j-1}^I)^{(m-1)} + \\ &+ \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(j+1)(j-2) + \gamma_j^2}{j^2 + \gamma_j^2} (A_{i,j+1}^I)^m \frac{c_j^I}{j^2 + \gamma_j^2} \frac{\delta_1}{\delta}, \end{aligned}$$

причем нулевые итерации коэффициентов равны нулю, т. е.

$$(A_{i,j}^I)^{(0)} \equiv 0.$$

Ограничиваясь в дальнейшем третьей итерацией, из (8) получаем (при $j=1$)

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta_1} (A_{i,1}^I)^{(3)} &= - \left(1 + \frac{\gamma_1^2 - 2\varepsilon_1^2}{1 + \gamma_1^2} \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{c_1^I}{1 + \gamma_1^2} - \\ &- \frac{\gamma_1^2 - 2\varepsilon_1}{1 + \gamma_1^2} \frac{c_2^I}{2} \frac{1}{4 + \gamma_1^2} - \frac{\gamma_1^2 (\gamma_1^2 - 2)}{(1 + \gamma_1^2)(4 + \gamma_1^2)} \frac{\varepsilon_1^2}{4} \frac{c_3^I}{g + \gamma_1^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Взяв сумму и подставив (9) в (15), имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(A_{i,1}^I)^{(3)}}{(2i-1)^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot (1 + \Omega_L) \cdot F_L(\varepsilon_1), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} F_L(x) &= \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1 - (1 - x^2)^{1/2}}{x(1 - x^2)^{1/2}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2(1 + \gamma_i^2)} \times \\ &\times \left[1 + \frac{\gamma_i^2 - 2}{1 + \gamma_i^2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{\gamma_i^2 - 2}{4 + \gamma_i^2} (1 - \sqrt{1 - x^2}) + \right. \\ &\left. + \frac{3}{4} \frac{\gamma_i^2 (\gamma_i^2 - 2)}{(4 + \gamma_i^2)(g + \gamma_i^2)} (1 - \sqrt{1 - x^2})^2 \right]. \end{aligned}$$

Аналогичное выражение получаем для $(A_{i,1}^{II})$. При $(A_{i,1}^I)^m$ $(A_{i,1}^{II})^m \leq 0$ (при любых значениях $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_2$ и $m \geq 1$) легко доказать, что первое и третье уравнения из (13) и (14) совмести-

мы только при $\beta = \theta = 0$, $\tau = \pi/2$ ($\tau_1 = \tau$ или $\tau_1 = \pi + \tau$), т. е. центры шипа, втулки и подшипника располагаются на одной прямой, перпендикулярной к внешней нагрузке. Этот вывод справедлив и для подшипника бесконечной длины.

Тогда система уравнений (13) приобретает вид

$$\left(\frac{1-n}{1+k}\right)^2 \hat{P}_L = (1 + \Omega_L) \cdot F_L(\varepsilon_1);$$

$$k^2 \left(\frac{1-n}{1+k}\right)^2 (1 + \gamma) \cdot \hat{P}_L = \Omega_L F_L(\varepsilon_2);$$

(17)

$$\Omega_L = \frac{k\Phi(\varepsilon_1)}{f_L(\varepsilon_2) + k f_L(\varepsilon_1)},$$

где

$$\gamma = g/P, \quad \Phi_L(x) = \frac{1 - 3x(1 - x^2)^{1/2} F_L^{(x)}}{1 + 3x(1 - x^2)^{1/2} F_L^{(x)}},$$

$$f_L(x) = \frac{1 + 3x(1 - x^2)^{1/2} F_L^{(x)}}{(1 - x^2)^{1/2}}.$$

В рассматриваемом случае имеем (см. рис. 2)

$$\varepsilon = (1 - n) \frac{\varepsilon_1 + k\varepsilon_2}{1 + k}. \quad (18)$$

Исключая $\hat{P}_L$ и Ω_L из (17), получаем зависимость между ε_1 и ε_2 в виде

$$2(1 + \gamma) \frac{F_L(\varepsilon_1)}{(1 - \varepsilon_1^2)^{1/2}} k^2 + (1 + \gamma) \cdot F_L(\varepsilon_1) f_L(\varepsilon_2) k - \Phi(\varepsilon_1) f_L(\varepsilon_2) = 0. \quad (19)$$

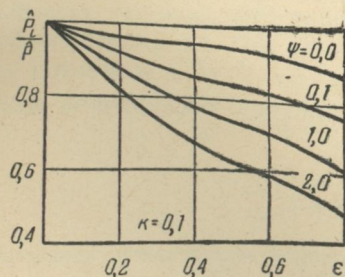


Рис. 4.

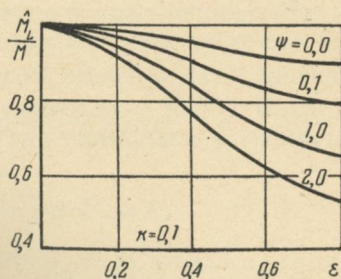


Рис. 5.

Как видим, относительная толщина втулки n на характер зависимости ε_2 от ε_1 не влияет. На эту зависимость оказывают

влияние величины γ и k , как в случае подшипника бесконечной длины, причем здесь добавляется еще влияние величины ψ .

Вычисляя момент сил, действующих на шип

$$M = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu R_1^2 \cdot \left(\frac{\partial v_\varphi^1}{\partial y} \right)_{y=0} d\varphi dz,$$

получаем

$$\hat{M}_L = \frac{1+k}{1-n} (f_L(\varepsilon_1) - \Omega_L \cdot \Phi_L(\varepsilon_1)), \quad (20)$$

где

$$\hat{M}_L = M / 2\pi \mu R_1^2 L.$$

Поскольку для $\psi \geq 1$ ряд (16) очень быстро сходится, то при использовании (17) можно ограничиться только первым членом ряда.

О влиянии отношения радиуса шипа к длине подшипника на основные характеристики подшипника со втулкой можно судить из полученного численным методом расчета.

Результаты при $n=g=0$, $k=0,1$ в сравнении с характеристиками подшипника бесконечной длины со втулкой [5] представлены на рис. 3, 4 и 5.

ВЫВОДЫ

1. С увеличением ψ угловая скорость вращения втулки уменьшается (см. рис. 3, где Ω — угловая скорость вращения втулки в подшипнике бесконечной длины со втулкой).

2. Подъемная сила и момент трения при больших значениях более чувствительны к изменению ψ . На рис. 4 и 5 представлены отношения безразмерных подъемных сил $\hat{P}_L / \hat{P}$ и моментов трения $\hat{M}_L / \hat{M}$ ($\hat{F}$, $\hat{M}$ — величины в подшипнике бесконечной длины со втулкой) в зависимости от ε .

ЛИТЕРАТУРА

1. Коровчинский М. В. Прикладная теория подшипников жидкостного трения. М., Машгиз, 1954. 326 с.
2. Сб. «Расчет и конструирование машин», Москва—Свердловск, Гостехиздат, 1955, с. 81—88.
3. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971. 1110 с.
4. Кантрович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., Физматгиз, 1962. 650 с.

ОБ УПРУГООПТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ В ДЕФОРМИРОВАННЫХ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

Поляризационные свойства однородного и изотропного в недеформированном состоянии диэлектрика изменяются с его деформацией. Эти изменения описываются наличием в тензоре диэлектрической проницаемости среды, подверженной деформации, зависимости от тензора деформаций. Когда эта зависимость мала, в выражении для тензора диэлектрической проницаемости среды ϵ_{ik} удерживаются только члены, линейные по тензору деформаций u_{ik} , и ϵ_{ik} представляется в виде [1]

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_0 \delta_{ik} + \alpha u_{mm} \delta_{ik} + \beta u_{ik}, \quad (1)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость среды в отсутствие деформаций; α , β — упругооптические постоянные, и первый член в этом выражении значительно превышает по величине остальные члены.

При рассмотрении распространения монохроматической электромагнитной волны в среде без свободных токов и зарядов исходной является система уравнений Максвелла, имеющая для физических компонент полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в цилиндрических координатах r , Θ , z следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \Theta} - \frac{\partial E_\Theta}{\partial z} + i \frac{\omega}{c} H_r &= 0; \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} + i \frac{\omega}{c} H_\Theta &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\Theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \Theta} + i \frac{\omega}{c} H_z &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \Theta} - \frac{\partial H_\Theta}{\partial z} - i \frac{\omega}{c} \epsilon_{rj} E_j &= 0; \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} - i \frac{\omega}{c} \epsilon_{\Theta j} E_j &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\Theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \Theta} - i \frac{\omega}{c} \epsilon_{zj} E_j &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Если деформации среды таковы, что компоненты тензора деформаций можно представить в виде функций только одной координаты r , вид тензора ϵ_{ik} будет

$$\epsilon_{ik} = \begin{vmatrix} \epsilon_0 + \epsilon'_{rr}(r) & \epsilon'_{r\theta}(r) & \epsilon'_{rz}(r) \\ \epsilon'_{\theta r}(r) & \epsilon_0 + \epsilon'_{\theta\theta}(r) & \epsilon'_{\theta z}(r) \\ \epsilon'_{zr}(r) & \epsilon'_{z\theta}(r) & \epsilon_0 + \epsilon'_{zz}(r) \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\epsilon'_{ik}(r) = \alpha u_{mm} \delta_{ik} + \beta u_{ik}. \quad (4)$$

Решение системы уравнений Максвелла ищется в виде

$$\vec{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\vec{E}_n^0(r) + \vec{E}'_n(r)] e^{i(n\theta - p_n z + \omega t)}, \quad (5)$$

$$\vec{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\vec{H}_n^0(r) + \vec{H}'_n(r)] e^{i(n\theta - p_n z + \omega t)} \quad (6)$$

с $p_n = p_n^0 + p'_n$, где $\vec{E}_n^0, \vec{H}_n^0$ и p_n^0 соответствуют случаю распространения электромагнитной волны в недеформированной среде; $\vec{E}'_n, \vec{H}'_n$ и p'_n — малые добавки, появляющиеся в результате деформаций. В дальнейшем рассматриваем n -ю моду колебаний и индекс n для удобства опускаем.

В первом приближении по величинам порядка упругооптических постоянных с учетом (5) и (6) уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{n}{r} E'_z + p^0 E'_\theta + \frac{\omega}{c} H'_r &= -p' E_\theta^0; \\ -p^0 E'_r + i \frac{\partial E'_z}{\partial r} + \frac{\omega}{c} H'_\theta &= p' E_r^0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E'_\theta) - i \frac{n}{r} E'_r + i \frac{\omega}{c} H'_z &= 0; \\ \frac{n}{r} H'_z + p^0 H'_\theta - \frac{\omega}{c} \epsilon_0 E'_r &= -p' H_\theta^0 + F_r; \\ p^0 H'_r - i \frac{\partial H'_z}{\partial r} + \frac{\omega}{c} \epsilon_0 E'_\theta &= -p' H_r^0 + i F_\theta; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H'_\theta) - i \frac{n}{r} H'_r - i \frac{\omega}{c} \epsilon_0 E'_z &= F_z, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$F_j = F_j(r) = i \frac{\omega}{c} \epsilon'_{jk} E_k. \quad (8)$$

Для r - и θ -компонент полей $\vec{E}'(r)$ и $\vec{H}'(r)$ из (7) получаем

$$I'_r = \frac{1}{k^2} \left[-ip^0 \frac{\partial E'_z}{\partial r} + \frac{\omega}{c} \frac{n}{r} H'_z + p' \left(p^0 E_r^0 + \frac{\omega}{c} H_\theta^0 \right) + i \frac{\omega}{c} F_r \right];$$

$$E'_\theta = \frac{1}{k^2} \left[p^0 \frac{n}{r} E'_z + i \frac{\omega}{c} \frac{\partial H'_z}{\partial r} + p' \left(p^0 E_\theta^0 - \frac{\omega}{c} H_r^0 \right) + i \frac{\omega}{c} F_\theta \right]; \quad (9)$$

$$H'_r = \frac{1}{k^2} \left[-\frac{\omega}{c} \varepsilon_0 \frac{n}{r} E'_z - ip^0 \frac{\partial H'_z}{\partial r} + p' \left(-\frac{\omega}{c} \varepsilon_0 E_\theta^0 + p^0 H_r^0 \right) - ip^0 F_\theta \right];$$

$$H'_\theta = \frac{1}{k^2} \left[-i \frac{\omega}{c} \varepsilon_0 \frac{\partial E'_z}{\partial r} + p^0 \frac{n}{r} H'_z + p' \left(\frac{\omega}{c} \varepsilon_0 E_r^0 + p^0 H_\theta^0 \right) + ip^0 F_r \right].$$

Здесь
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - (p^0)^2. \quad (10)$$

Исключая соответствующие r - и θ -компоненты полей $\vec{E}'(r)$ и $\vec{H}'(r)$ из третьего и шестого уравнений системы (7), с учетом соотношений компонент полей $\vec{E}^0(r)$ и $\vec{H}^0(r)$ в недеформированной среде [2] для $E'_z(r)$ и $H'_z(r)$ получаем неоднородные уравнения Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E'_z}{\partial r} \right) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) E'_z = \Phi(r, p'), \quad (11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H'_z}{\partial r} \right) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) H'_z = R(r, p'), \quad (12)$$

где

$$\Phi(r, p') = 2p' p^0 E_z^0 + \frac{c}{\varepsilon_0 \omega} \left[\frac{p^0}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + ip^0 \frac{n}{r} F_\theta + ik^2 F_z \right], \quad (13)$$

$$R(r, p') = 2p' p^0 H_z^0 + i \frac{n}{r} F_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta), \quad (14)$$

$E'_z(r)$ и $H'_z(r)$ находятся при решении уравнений (11) и (12) с учетом соответствующих граничных условий, p' определяется из необходимого условия существования нетривиального решения уравнения первого приближения — ортогональности правой части уравнения первого приближения собственным функциям краевой задачи нулевого приближения.

Получаемые выражения в первом приближении полностью определяют параметры электромагнитной волны, распространяющейся в деформированном диэлектрическом волноводе. Сразу следует отметить, что наличие деформаций вызывает возникновение малых продольных компонент магнитного поля в случае прохождения основной ТМ-волны и малых продольных компонент электрического поля в случае прохождения основной ТЕ-волны.

Для выяснения характера распространения электромагнитной волны рассмотрим наложение решений с $n=m$ и $n=-m$, где m — целое положительное число. В общем случае при этих значениях n получаются разные выражения как для компонент полей, так и для p' . Будем обозначать величины, соответствующие $n=m$ и $n=-m$ индексами 1 и 2 соответственно, их действительные части — индексом «+», мнимые части — индексом «-». Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \vec{E} &= \operatorname{Re}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \operatorname{Re}[\vec{E}_1(r)e^{i(m\theta - p_1 z + \omega t)} + \vec{E}_2(r)e^{-i(m\theta + p_2 z - \omega t)}] = \\ &= \operatorname{Re}\left[(\vec{E}^+ + i\vec{E}^-)e^{i\left[\frac{1}{2}(p_1^+ + p_2^+)z - \omega t\right]}\right] = \vec{E}^+ \cos\left[\frac{1}{2}(p_1^+ + p_2^+)z - \omega t\right] + \\ &\quad + \vec{E}^- \sin\left[\frac{1}{2}(p_1^+ + p_2^+)z - \omega t\right], \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{E}^+ &= [\vec{E}_1^+(r)e^{-p_1^- z} + \vec{E}_2^+(r)e^{-p_2^- z}] \cos m\left[\theta - \frac{1}{2m}(p_1^+ - p_2^+)z\right] - \\ &- [\vec{E}_1^-(r)e^{-p_1^- z} - \vec{E}_2^-(r)e^{-p_2^- z}] \sin m\left[\theta - \frac{1}{2m}(p_1^+ - p_2^+)z\right]; \quad (16) \\ \vec{E}^- &= [\vec{E}_1^-(r)e^{-p_1^- z} + \vec{E}_2^-(r)e^{-p_2^- z}] \cos m\left[\theta - \frac{1}{2m}(p_1^+ - p_2^+)z\right] + \\ &+ [\vec{E}_1^+(r)e^{-p_1^- z} - \vec{E}_2^+(r)e^{-p_2^- z}] \sin m\left[\theta - \frac{1}{2m}(p_1^+ - p_2^+)z\right]. \end{aligned}$$

Распространяющаяся электромагнитная волна, как следует из (15), является эллиптически поляризованной. Полуоси эллипса поляризации Λ_1 и Λ_2 определяются из

$$\begin{aligned} \Lambda_1^2, \Lambda_2^2 &= \frac{1}{2} \{[(\vec{E}^+ \cdot \vec{E}^+) + (\vec{E}^- \cdot \vec{E}^-)] \pm \\ &\pm \sqrt{[(\vec{E}^+ \cdot \vec{E}^+) - (\vec{E}^- \cdot \vec{E}^-)]^2 + 4(\vec{E}^+ \cdot \vec{E}^-)^2}\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Величины и ориентация осей эллипса поляризации изменяются с координатами и являются функциями параметров, определяющих деформацию среды.

Если $p_1^- = p_2^- = 0$, волна не затухает при распространении и, как следует из (18), передается без искажений, поворачиваясь при распространении на единицу длины вдоль оси z на угол

$$\chi = \frac{1}{2m} (p_1^+ - p_2^+). \quad (18)$$

Если $p_1^- = p_2^- \neq 0$, волна вращается и передается без искажений, но с ослаблением, определяемым множителем $\exp(-p_1^- z)$. Форма и ориентация эллипса поляризации сохраняются такими же, как и при $p_1^- = p_2^- = 0$. При $p_1^- \neq p_2^-$ отношение Λ_1/Λ_2 становится функцией координаты z , как следствие разной зависимости от z амплитуд полей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, и в этом случае волна вращается при своем распространении, но передается с затуханием и искажениями.

При обращении направления распространения волны на противоположное все соотношения сохраняются при замене $z \rightarrow -z$, $\theta \rightarrow -\theta$, $n \rightarrow -n$, $p \rightarrow -p$. Так как величина $|p|$ не изменяется, волна при распространении в противоположную сторону поворачивается на тот же угол, т. е. система является обратной.

Приведенный анализ можно использовать при рассмотрении распространения электромагнитной волны в несжимаемой предварительно цилиндрически-симметрично продеформированной среде, координаты которой после деформации r , θ , z определяются через координаты до деформации ρ , x_2 , x_3 следующим образом:

$$r = r(\rho), \quad \theta = a x_2 + b x_3, \quad z = g x_2 + d x_3, \quad (19)$$

где a , b , g , d — постоянные, определяющие характер деформации. Ограничимся рассмотрением кручения относительно собственной оси цилиндра, первоначально подвергнутого растяжению в направлении оси x_3 с коэффициентом λ , при этом [3] $a=1$, $b=\lambda\psi$, $g=0$, $d=\lambda$ (вообще $\lambda=ad-bg$), где ψ — угол кручения на единицу длины, простое кручение получается отсюда при $d=\lambda=1$, а также изгиба с предварительным растяжением $a \neq 1$, $b=g=0$, $d \neq 1$, $\lambda=ad$, откуда простой изгиб получается при $d=1$. Для несжимаемой среды

$$\rho = \lambda r \frac{\partial r}{\partial \rho} \quad \text{и} \quad \rho^2 = \lambda r^2 + \zeta, \quad (20)$$

где ζ — постоянная, для сплошного стержня $\zeta=0$, для коаксиального цилиндра, ограниченного поверхностями радиусов ρ_1 и ρ_2 в начальном состоянии и r_1 и r_2 в конечном состоянии $\zeta = \rho_1^2 - \lambda r_1^2 = \rho_2^2 - \lambda r_2^2$.

Приведем результаты, получаемые при кручении с растяжением и изгибе с растяжением коаксиального цилиндра, из которых соответствующим подбором постоянных можно легко получить выражения, описывающие распространение электромагнитной волны при простом кручении и простом изгибе коаксиального цилиндра, а также выражения, описывающие распространение электромагнитной волны при указанных деформациях в сплошном стержне.

При кручении с растяжением коаксиального цилиндра тензор деформаций имеет вид

$$u_{ih} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda - \frac{\zeta}{r^2} & \lambda\psi r + \psi \frac{\zeta}{r} \\ 0 & \lambda\psi r + \psi \frac{\zeta}{r} & 1 - \frac{1}{\lambda^2} - \lambda\psi^2 r^2 - \zeta\psi^2 \end{vmatrix}, \quad (21)$$

с учетом чего отличные от нуля компоненты ϵ'_{ih} будут

$$\begin{aligned} \epsilon'_{rr} &= \alpha \left(3 - \lambda - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} - \zeta\psi^2 \right) + \beta \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) - \alpha \left(\lambda\psi^2 r^2 + \frac{\zeta}{r^2} \right); \\ \epsilon'_{\theta\theta} &= \alpha \left(3 - \lambda - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} - \zeta\psi^2 \right) + \beta (1 - \lambda) - \alpha \lambda\psi^2 r^2 - (\alpha + \beta) \frac{\zeta}{r^2}; \\ \epsilon'_{zz} &= \alpha \left(3 - \lambda - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} - \zeta\psi^2 \right) + \beta \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} - \zeta\psi^2 \right) - \\ &\quad - (\alpha + \beta) \lambda\psi^2 r^2 - \alpha \frac{\zeta}{r^2}; \\ \epsilon'_{ez} &= \epsilon'_{ze} = \beta \psi \left(\lambda r + \frac{\zeta}{r} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

При распространении электромагнитной волны в коаксиальном диэлектрическом цилиндре, ограниченном абсолютно-проводящими поверхностями радиусов $r=r_1$ и $r=r_2$ (зеркальные поверхности светопровода для электромагнитных волн оптического диапазона):

$$E'_z(r) = 0 \quad \text{при } r = r_1, r = r_2;$$

$$\frac{\partial H'_z(r)}{\partial r} + \epsilon'_{er}(r) E'_r(r) = 0 \quad \text{при } r = r_1, r = r_2. \quad (23)$$

Для сплошного диэлектрического цилиндра радиуса r_0 с абсолютнопроводящей поверхностью

$$E_z(r) = 0 \quad \text{при } r = r_0, \quad |E_z(0)| < \infty;$$

$$\frac{\partial H_z'(r)}{\partial r} + \epsilon'_{\theta r}(r) E_r^0(r) = 0 \quad \text{при } r = r_0, \quad |H_z'(0)| < \infty. \quad (24)$$

В случае распространения исходной ТМ-волны с учетом значений компонент полей $\vec{E}^0(r)$ и $\vec{H}^0(r)$ в коаксиальном диэлектрическом волноводе

$$\begin{aligned} \Phi(r, p') = & 2p' p^0 Z_n(kr) + \frac{1}{\epsilon_0 k^2} \left\{ 2\beta n p^0 k^2 \lambda \psi - 2\alpha (n p^0)^2 \lambda \psi^2 + \alpha [k^4 - \right. \\ & - (k^2 p^0)^2] \left(3 - \lambda - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} - \zeta \psi^2 \right) + \beta k^4 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} - \zeta \psi^2 \right) - \beta (k p^0)^2 \left(1 - \right. \\ & - \frac{1}{\lambda} \left. \right) + [\alpha (k p^0)^2 - (\alpha + \beta) k^4] \lambda \psi^2 r^2 + \left[2\alpha (n p^0)^2 \left(3 - \lambda - \frac{1}{\lambda} - \right. \right. \\ & - \frac{1}{\lambda^2} - \zeta \psi^2 \left. \right) + \beta (n p^0)^2 \left(2 - \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) + 2\beta \zeta n p^0 k^2 \psi - \alpha \zeta k^4 - \\ & - \alpha \zeta (k p^0)^2] \frac{1}{r^2} - (2\alpha + \beta) (n p^0)^2 \frac{\zeta}{r^4} \left. \right\} Z_n(kr) + \frac{2\alpha}{\epsilon_0} \left(\frac{p^0}{k} \right)^2 \left(\frac{\zeta}{r^2} - \right. \\ & \left. - \lambda \psi^2 r^2 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial Z_n(kr)}{\partial r}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} R(r) = & i \frac{\omega}{c} \frac{1}{k^2} \left\{ 2 \left[\alpha n p^0 \lambda \psi^2 - \beta k^2 \lambda \psi^2 - (\alpha + \beta) n p^0 \frac{\zeta}{r^4} \right] Z_n(kr) + \right. \\ & + \left[\beta n p^0 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) - \beta \zeta k^2 \psi - \beta k^2 \lambda \psi r^2 + \alpha n p^0 \frac{\zeta}{r^2} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial Z_n(kr)}{\partial r}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$p'_{nm} = - \frac{1}{2p_{nm}^0 \|Z_n(kr)\|^2} \int_{r_1}^{r_2} \Phi'(r) Z_n(kr) r dr, \quad (27)$$

где

$$\Phi'(r) = \Phi(r, p') - 2p' p^0 Z_n(kr), \quad (28)$$

$$Z_n(kr) = Y_n(kr_1) J_n(kr) - J_n(kr_1) Y_n(kr), \quad (29)$$

$$\|Z_n(kr)\|^2 = \left[r^2 \frac{\partial Z_n(kr)}{\partial r} \right]_{r=r_1}^{r=r_2}, \quad (30)$$

$k = k_{mn}$ определяются как корни уравнения

$$Y_n(kr_1) J_n(kr_2) - J_n(kr_1) Y_n(kr_2) = 0, \quad (31)$$

$I_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n -го порядка; $Y_n(x)$ — функция Бесселя второго рода n -го порядка,

$$\chi_{nm} = \frac{\alpha p_{nm}^0}{4\varepsilon_0 n k^2 \|Z_n(kr)\|^2} \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\zeta}{r^2} - \lambda \psi^2 r^2 \right) \frac{\partial Z_n^2(kr)}{\partial r} dr. \quad (32)$$

В случае распространения исходной ТЕ-волны

$$\Phi(r) = i \frac{\omega}{c} \frac{1}{\varepsilon_0 k^2} \left\{ -2\alpha n p^0 \left(\lambda \psi^2 + \frac{\zeta}{r^4} \right) Z_n(kr) + \beta \left[n p^0 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) - \zeta k^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \lambda k^2 \psi r^2 + n p^0 \frac{\zeta}{r^2} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial Z_n(kr)}{\partial r} \right\}, \quad (33)$$

$$R(r, p') = 2p' p^0 Z_n(kr) - \frac{\omega^2}{c^2} \left[\alpha \left(3 - \lambda - \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} - \zeta \psi^2 \right) + \right. \\ \left. + \beta (1 - \lambda) \right] Z_n(kr) - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{k^2} \left\{ \left[\beta n^2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) - (\alpha + \beta) \zeta k^2 \right] \frac{1}{r^2} + \right. \\ \left. + \beta n^2 \frac{\zeta}{r^4} - \alpha \lambda k^2 \psi^2 r^2 \right\} Z_n(kr) - 2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{k^2} \left[\alpha \lambda \psi^2 r^2 - (\alpha + \beta) \frac{\zeta}{r^2} \right] \times \\ \times \frac{1}{r} \frac{\partial Z_n(kr)}{\partial r}, \quad (34)$$

$$p'_{nm} = - \frac{1}{2p_{nm}^0 \|Z_n(kr)\|^2} \int_{r_1}^{r_2} R'(r) Z_n(kr) r dr, \quad (35)$$

где

$$R'(r) = R(r, p') - 2p' p^0 Z_n(kr), \quad (36)$$

$$Z_n(kr) = \frac{\partial Y_n(kr_1)}{\partial r_1} J_n(kr) - \frac{\partial J_n(kr_1)}{\partial r_1} Y_n(kr), \quad (37)$$

$$\|Z_n(kr)\|^2 = \left\{ \left[r^2 - \left(\frac{n}{k} \right)^2 \right] Z_n^2(kr) \right\} \Big|_{r=r_1}^{r=r_2}, \quad (38)$$

$k = k_{n,m}$ определяются как корни уравнения

$$\frac{\partial Y_n(kr_1)}{\partial r_1} \frac{\partial J_n(kr_2)}{\partial r_2} - \frac{\partial J_n(kr_1)}{\partial r_1} \frac{\partial Y_n(kr_2)}{\partial r_2} = 0, \quad (39)$$

$$\chi_{nm} = \frac{\frac{\omega^2}{c^2}}{2n p_{nm}^0 k^2 \|Z_n(kr)\|^2} \int_{r_1}^{r_2} \left[\alpha \lambda \psi^2 r^2 - (\alpha + \beta) \frac{\zeta}{r^2} \right] \frac{\partial Z_n^2(kr)}{\partial r} dr. \quad (40)$$

При изгибе с предварительным растяжением коаксиального цилиндра тензор деформаций имеет вид

$$u_{ik} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{ad} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{d}{a} - \frac{1}{a^2} \frac{\zeta}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{d^2} \end{vmatrix}, \quad (41)$$

а отличные от нуля компоненты ϵ'_{ik} соответственно

$$\begin{aligned} \epsilon'_{rr} &= \alpha \left(3 - \frac{1}{ad} - \frac{d}{a} - \frac{1}{d^2} \right) + \beta \left(1 - \frac{1}{ad} \right) - \frac{\alpha}{a^2} \frac{\zeta}{r^2}; \\ \epsilon'_{\theta\theta} &= \alpha \left(3 - \frac{1}{ad} - \frac{d}{a} - \frac{1}{d^2} \right) + \beta \left(1 - \frac{d}{a} \right) - \frac{\alpha + \beta}{a^2} \frac{\zeta}{r^2}; \\ \epsilon'_{zz} &= \alpha \left(3 - \frac{1}{ad} - \frac{d}{a} - \frac{1}{d^2} \right) + \beta \left(1 - \frac{1}{d^2} \right) - \frac{\alpha}{a^2} \frac{\zeta}{r^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

При исходной ТМ-волне

$$\begin{aligned} \Phi(r, p') &= 2p' p^0 Z_n(kr) - \frac{1}{\epsilon_0} \left[\alpha \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \left(3 - \frac{1}{ad} - \frac{d}{a} - \frac{1}{d^2} \right) + \right. \\ &+ \beta p^{0^2} \left(1 - \frac{1}{ad} \right) + \beta k^2 \left(1 - \frac{1}{d^2} \right) \left. \right] Z_n(kr) + \frac{1}{\epsilon_0 k^2 a^2} \left\{ \left[\alpha k^2 \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \beta \frac{(np^0)^2}{r^2} \right] \frac{1}{r^2} Z_n(kr) + 2\alpha \frac{p^{0^2}}{r^3} \frac{\partial Z_n(kr)}{\partial r} \right\}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} R(r) &= in \frac{\omega}{c} \frac{p^0}{k^2} \left\{ \beta \left[\left(\frac{d}{a} - \frac{1}{ad} \right) + \frac{1}{a^2} \frac{\zeta}{r^2} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial Z_n(kr)}{\partial r} - \right. \\ &\left. - 2 \frac{\alpha + \beta}{a^2} \frac{\zeta}{r^4} Z_n(kr) \right\}, \end{aligned} \quad (44)$$

p' определяется по (27) с учетом (29), (30), (43)

$$\chi_{nm} = - \frac{\alpha \zeta p_{nm}^0}{4a^2 n \epsilon_0 k^2 \|Z_n(kr)\|^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial Z_n(kr)}{\partial r} \frac{dr}{r^2}. \quad (45)$$

При исходной ТЕ-волне

$$\Phi(r) = in \frac{\omega}{c} \frac{p^0}{k^2} \left\{ 2 \frac{\alpha}{a^2} \frac{\zeta}{r^4} Z_n(kr) + \beta \left(\frac{d}{a} - \frac{1}{ad} + \frac{1}{a^2} \frac{\zeta}{r^2} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial Z_n(kr)}{\partial r} \right\}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
 R(r, p') = & 2p' p^0 Z_n(kr) + \frac{\omega^2}{c^2} \left[\alpha \left(3 - \frac{1}{ad} - \frac{d}{a} - \frac{1}{d^2} \right) + \right. \\
 & + \beta \left(1 - \frac{d}{a} \right) \left. \right] Z_n(kr) - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{k^2} \left(\frac{n^2}{r^2} \left[2\alpha \left(3 - \frac{1}{ad} - \frac{d}{a} - \frac{1}{d^2} \right) + \right. \right. \\
 & + \beta \left(2 - \frac{d}{a} - \frac{1}{ad} \right) \left. \right] Z_n(kr) + \frac{\zeta}{a^2} \left[\left(\frac{\alpha + \beta}{r^2} k^2 - \beta \frac{n^2}{r^4} \right) Z_n(kr) + \right. \\
 & \left. \left. + 2 \frac{\alpha + \beta}{r^2} \frac{\partial Z_n(kr)}{\partial r} \right] \right\}, \quad (47)
 \end{aligned}$$

p' определяется по (35) с учетом (38), (39), (47)

$$\chi_{nm} = \frac{(\alpha + \beta) \zeta}{4a^2 n p_{nm}^0 k^2 \|Z_n(kr)\|^2} \frac{\omega^2}{c^2} \int_1^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial Z_n^2(kr)}{\partial r} dr. \quad (48)$$

В силу того, что функции $\Phi(r, p')$ и $R(r, p')$ действительные, во всех рассмотренных случаях $\text{Im } p' = 0$, т. е. при кручении и изгибе как в коаксиальном цилиндре, так и в сплошном стержне электромагнитная волна проходит без затухания и искажений. В сплошном стержне деформации изгиба и изгиба с растяжением не вызывают вращения эллипса поляризации. При кручении, кручении с растяжением сплошного стержня и всех рассмотренных деформациях коаксиального цилиндра имеется вращение эллипса поляризации, обусловленное наличием деформаций.

При деформациях сплошного стержня и коаксиального цилиндра, обусловленных действием внешних сил, прикладываемых к боковой поверхности, компоненты тензора деформаций u_{ik}

находим через компоненты вектора смещения $\vec{u}(u, v, w)$ по формуле

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

При кручении сплошного стержня и коаксиального цилиндра отличной от нуля компонентой вектора смещения является $v(r, z)$, при изгибе сплошного стержня и коаксиального цилиндра отличными от нуля компонентами вектора смещения есть $u(r, z)$ и $w(r, z)$. В силу отсутствия принципиального отличия способа описания и получаемых результатов для указанных видов деформаций ограничимся случаем распространения электромагнитной волны в сплошном стержне при его кручении в результате действия прикладываемой к боковой поверхности стержня силы $f(z)$. Тензор деформаций имеет вид

$$u_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}. \quad (49)$$

Так как система уравнений Максвелла для монохроматической волны — эллиптическая, ввиду малости величин упругооптических постоянных в тензоре диэлектрической проницаемости среды отличные от нуля компоненты ϵ'_{ik} берем в виде [4]

$$\epsilon'_{r\theta}(r) = \epsilon'_{\theta r}(r) = \frac{\beta}{2} \left(\overline{\frac{\partial v}{\partial r}} - \frac{v}{r} \right), \quad \epsilon'_{\theta z}(r) = \epsilon'_{z\theta}(r) = \frac{\beta}{2} \frac{\overline{\partial v}}{\partial z}, \quad (50)$$

где черта над выражением означает усреднение по координате z .

Для исходной ТМ-волны, учитывая значения компонент полей $E'^0(r)$ и $H'^0(r)$ в сплошном цилиндре, получаем

$$\Phi(r, p') = 2p' p^0 J_n(kr) + \frac{\beta p^0 n}{\epsilon_0 k^2 r} \left\{ i p^0 \left[\left(\overline{\frac{\partial v}{\partial r}} - \frac{v}{r} \right) \frac{\partial J_n(kr)}{\partial r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} J_n(kr) \frac{\partial}{\partial r} \left(\overline{\frac{\partial v}{\partial r}} - \frac{v}{r} \right) \right] - k^2 J_n(kr) \frac{\overline{\partial v}}{\partial z} \right\}, \quad (51)$$

$$R(r) = -\frac{\beta}{2} \frac{\omega}{c} \frac{1}{k^2 r} \left\{ p^0 \frac{n}{r} J_n(kr) \left(\overline{\frac{\partial v}{\partial r}} - \frac{v}{r} \right) + \right. \\ \left. + p^0 \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\overline{\frac{\partial v}{\partial r}} - \frac{v}{r} \right) \frac{\partial J_n(kr)}{\partial r} \right] + i k^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\overline{\partial v}}{\partial z} J_n(kr) \right] \right\}, \quad (52)$$

$$p'_{nm} = \frac{\beta n}{\epsilon_0 r_0^2 \left[\frac{\partial J_n(\mu_m^{(n)})}{\partial \mu_m^{(n)}} \right]^2} \int_0^{r_0} J_n^2(kr) \frac{\overline{\partial v}}{\partial z} dr \quad (53)$$

$$\chi_{nm} = \frac{\beta}{\epsilon_0 r_0^2 \left[\frac{\partial J_n(\mu_m^{(n)})}{\partial \mu_m^{(n)}} \right]^2} \int_0^{r_0} J_n^2(kr) \frac{\overline{\partial v}}{\partial z} dr, \quad (54)$$

и $k = k_{nm} = \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}$, где $\mu_m^{(n)}$ — корни уравнения $J_n(x) = 0$.

При исходной ТЕ-волне

$$\Phi(r) = -\frac{\beta}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{\epsilon_0 k^2} \left\{ \frac{p^0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\overline{\frac{\partial v}{\partial r}} - \frac{v}{r} \right) \frac{\partial J_n(kr)}{\partial r} \right] - \right. \\ \left. - p^0 \frac{n^2}{r^2} J_n(kr) \left(\overline{\frac{\partial v}{\partial r}} - \frac{v}{r} \right) - i k^2 \frac{\overline{\partial v}}{\partial z} \frac{\partial J_n(kr)}{\partial r} \right\}, \quad (55)$$

$$R(r, p') = 2p' p^0 J_n(kr) - i \frac{\beta}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{n}{k^2 r} \left\{ \left(\overline{\frac{\partial v}{\partial r}} - \frac{v}{r} \right) \frac{\partial J_n(kr)}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial r} \left[J_n(kr) \left(\overline{\frac{\partial v}{\partial r}} - \frac{v}{r} \right) \right] \right\}, \quad (56)$$

$$p'_{nm} = \frac{i\beta}{2p_{nm}^0 [(\mu_m^{(n)})^2 - n^2]} \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \Big|_{r=r_0}, \quad (57)$$

$$\chi_{nm} = 0 \quad (58)$$

и $k = k_{nm} = \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}$, где $\mu_m^{(n)}$ — корни уравнения $\frac{\partial J_n(x)}{\partial x} = 0$.

При кручении сплошного диэлектрического стержня и коаксиального цилиндра электромагнитная волна в случае исходной ТМ-волны передается без затухания и искажений, вращаясь при своем распространении, в случае исходной ТЕ-волны в зависимости от вида функции $v(r, z)$ возможны затухания и искажения, но наличие деформаций не оказывает влияния на вращение эллипса поляризации.

При изгибе сплошного диэлектрического стержня и коаксиального цилиндра под действием сил, приложенных к боковой поверхности, в случае исходной ТМ-волны существует вращение ее эллипса поляризации, обусловленное наличием деформаций, в зависимости от вида прилагаемых сил возможно затухание и искажение. В случае исходной ТЕ-волны распространение происходит без затухания и искажений, эллипс поляризации вращается из-за наличия деформаций.

Более детальное определение параметров распространяющейся электромагнитной волны возможно при задании конкретного вида сил, действующих на боковую поверхность. Например, при кручении сплошного стержня под действием симметричного относительно центрального сечения $z=0$ напряжения боковой поверхности силой $f(z)$ при условии, что $f(z)$ удовлетворяет всем необходимым условиям для ее представления в виде интеграла Фурье и сходимости получаемых выражений, $v(r, z)$ можно представить в виде [5]

$$v(r, z) = -\frac{1}{G} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(\eta) \frac{I_1(\eta r)}{\eta I_2(\eta r_0)} \cos \eta z d\eta, \quad (59)$$

где

$$\varphi(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(z) \cos \eta z dz, \quad f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(\eta) \cos \eta z d\eta, \quad (60)$$

G — модуль сдвига; $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя n -го порядка. Значения интересующих величин получаются после выполнения необходимых интегрирований.

Если сила $f(z)$ случайная, можно получить статистические характеристики процесса распространения электромагнитной

волны. Например, если $f(z)$ — однородное случайное поле с $\langle f(z) \rangle = 0$ и корреляционной функцией $K(\tau)$, для дисперсии χ_{nm} в сплошном цилиндре при исходной ТМ-волне с учетом (59) получаем

$$D(\chi_{nm}) = \frac{\beta^2}{2\pi G^2 \epsilon_0^2 r_0^4 \left[\frac{\partial J_n(\mu_m^{(n)})}{\partial \mu_m^{(n)}} \right]^4} \int_0^{r_0} dr \int_0^{r_0} dr' \int_0^\pi d\eta S[f, \eta] \times \\ \times J_n^2(kr) J_n^2(kr') \frac{I_1(\eta r) I_1(\eta r')}{I_2^2(\eta r_0)}, \quad (61)$$

где [6].

$$S[f, \eta] = 2 \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{i\eta\tau} d\tau. \quad (62)$$

Таким же образом можно рассматривать распространение электромагнитной волны в диэлектрических волноводах, подверженных действию детерминированных и случайных объемных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., ГИФМЛ, 1959. 415 с.
2. Adkins G., Rivlin R. Phil. Trans. Roy. Soc. 1963, Vol. 255, A. 1059. 389 p.
3. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965. 50 с.
4. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1971. 369 с.
5. Соляник-Краса К. В. Кручение валов переменного сечения. М., ГИТТЛ, 1949. 42 с.
6. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Сов. радио», 1961, 39 с.

УДК 621.391

И. Д. ЗАДЕРЕНКО, канд. техн. наук,
Н. П. СУВОРОВ, канд. техн. наук, И. Г. СУВОРОВА

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ ИЗБЫТОЧНЫХ КОДОВ И МНОГОПОЗИЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

В настоящее время большое внимание уделяется созданию систем связи, обеспечивающих высокую верность и скорость передачи информации при минимальных затратах частотных и энергетических ресурсов.

Информационные и энергетические показатели систем передачи информации в значительной мере зависят от выбранного способа кодирования, модуляции, методов приема и т. д. Повысить эффективность систем связи можно используя многопозиционные сигналы, корректирующие коды, оптимальную обработку сигналов.

В соответствии с этим представляет интерес оценить эффективность совместного применения в системах связи многопозиционных сигналов и кодов, корректирующих ошибки. Целесообразность постановки такой задачи непосредственно следует из обобщенной функциональной схемы системы связи.

Пусть все возможные сообщения источника информации образуют множество $\{A_i\}_{i=1}^N$, каждое сообщение может быть представлено в виде последовательности элементов a^h

$$A_i = (a^1, a^2, \dots, a^h, \dots, a^k),$$

где k — длина сообщения A .

Любой элемент a^h может иметь значения $a_1, a_2, \dots, a_p$; p — объем алфавита источника. В кодирующем устройстве множество $\{A_i\}_{i=1}^N$ преобразуется в множество $\{X_q\}_{q=1}^N$ с алфавитом $x_1, x_2, \dots, x_m$

$$X_q = (x^1, x^2, \dots, x^n),$$

где n — значность кода.

Правило преобразования множества $\{A_i\}_{i=1}^N$ в множество $\{X_q\}_{q=1}^N$ определяется выбранным способом кодирования.

Почти все современное оборудование накопления, хранения и переработки информации основано на использовании двоичной системы счисления. Кроме того, кодирующие и декодирующие устройства, наиболее полно разработанные в теоретическом и практическом плане, работают тоже в двоичной системе счисления. Учитывая все это, целесообразно исследовать случай, когда объем алфавита (основание) источника сообщения и кодирующего устройства равен двум ($p = m = 2$).

Передатчик преобразует полученную в результате кодирования последовательность двоичных символов X_q в последовательность сигналов $S_f(t)$ с основанием M . Предполагается, что $M = 2^{l_0}$, т. е. каждые l_0 цифр (n, k) кода передаются одним из M сигналов.

В тракте приема сформированный сигнал под действием помех трансформируется в случайный сигнал, после демодуляции которого получается сигнал $S_f^*(t)$ дальнейшие преобразования в приемном тракте будут обратными тем, которые осуществлялись на передающей стороне.

Необходимо оценить информационные и энергетические показатели такой системы связи.

Анализ проводится для каналов с постоянными параметрами, в которых действует белый гауссов шум; в качестве сигналов $S_i(t)$ используются многопозиционные сигналы, относящиеся к классу регулярных сигналов, например, многопозиционные ортогональные, биортогональные сигналы и т. д.

В качестве бинарных кодов будут использованы хорошо разработанные циклические коды Боуза—Чоудхури—Хоквингема. Следует отметить, что возможно непосредственное преобразование последовательности двоичных символов источника в M -позиционную последовательность сигналов, в которую вводится затем избыточность с помощью известных процедур кодирования.

Исследование данного метода представляет самостоятельный интерес, однако практическая реализация его в настоящее время наталкивается на ряд трудностей, связанных, в частности, с хранением, накоплением и обработкой сигналов с основанием больше двух.

Для решения поставленной задачи необходимо прежде всего рассмотреть поток ошибок в бинарном канале. Анализ этого вопроса показывает, что несмотря на то, что рассматриваются каналы с белым гауссовым шумом, применение многопозиционных сигналов с основанием $M > 2$ приводит к тому, что участок системы между выходом кодирующего устройства и входом декодирующего устройства в общем случае нельзя рассматривать как двоичный симметричный канал (ДСК), как это имело место в работах [1, 2].

Объясняется это тем, что каждый сигнал $S_i(t)$ содержит не одну двоичную единицу информации, а l_0 , где $l_0 = \log_2 M$. Поэтому даже при равномерном и независимом распределении ошибок сигналов $S_i(t)$ ошибки в двоичной последовательности будут локализоваться внутри группы длиной l_0 символов, причем локализация (группирование) ошибок будет наблюдаться всякий раз, как только исказится сигнал $S_i(t)$. Отсюда следует, что поток ошибок в бинарной последовательности на входе декодирующего устройства не является простейшим, описываемым биномиальным законом, а имеет более сложный вид, характеризующийся ярко выраженным группированием ошибок в пакеты (пачки). Модель потока группирующихся ошибок в бинарном канале может быть задана следующим образом: пакеты ошибок возникают независимо с вероятностью $p_{\text{ош}}$ ($p_{\text{ош}}$ — вероятность ошибки при приеме сигнала $S_i(t)$); пакеты имеют случайную длину l , закон распределения длин пакетов $p(l)$ зависит от величины используемого в системе связи основания M ; ошибки внутри пакета независимы и характеризуются вероятностью ошибки p_0 .

На основании предложенной модели потока ошибок двоичного канала определим вероятность ошибки при декодировании кодовой комбинации в зависимости от параметров использу-

емого (n, k) кода, основания M сигналов $S_j(t)$ и вероятности их искажения $p_{\text{ош}}$.

Для конкретности сначала будем предполагать, что используется класс кодов, корректирующих независимые ошибки, в частности, коды, исправляющие ошибки. При этом с целью простоты анализа считаем, что за время передачи последовательности X_q длины n может произойти ошибка в приеме только одного сигнала $S_j(t)$. Последнее в свою очередь может привести к искажению максимум $l_0 = \log_2 M$ д. ед. информации. Тогда вероятность появления на длине блока из n двоичных единиц одного пакета ошибок произвольной длины можно определить по формуле

$$p_n(l) = L p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1}, \quad (1)$$

где

$$\left[L = \frac{n}{\log_2 M} \right]. \quad (2)$$

Скобка $[]$ в выражении (2) означает, что необходимо брать ближайшее целое число. Далее, учитывая (1), определим вероятность того, что кодовая комбинация длиной n символов будет поражена пакетом ошибок длиной l символов и при этом в ней возникнут ошибки кратности i

$$p_n(i/l) = \begin{cases} L p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1} p(l) & \text{при } l = 1, 2, \\ L p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1} p(l) C_{l-2}^{i-2} p_0^i (1 - p_0)^{l-i} & \text{при } l > 2, \end{cases} \quad (3)$$

где $p(l)$ — вероятность появления пакета длиной l символов. Следовательно, вероятность ошибки кода, исправляющего r ошибок, определится выражением

$$p(i > r) = L p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1} \sum_{l=r+1}^{l_0} \sum_{i=r+1}^l p(l) C_{l-2}^{i-2} p_0^i (1 - p_0)^{l-i}. \quad (4)$$

При $r=1, l=2$ (в этом случае $p_0 \equiv 1$) будем считать, что

$$C_{l-2}^{i-2} p_0^i (1 - p_0)^{l-i} \equiv 1. \quad (5)$$

Выражение (4) справедливо в случае выполнения гипотетического условия относительно единственности пакета ошибок, возникающего на длине кодовой комбинации.

Если $n > l_0 = \log_2 M$ и вероятность $p_{\text{ош}}$ достаточно велика, необходимо учитывать возможность поражения блока в n символов двумя и более пакетами. Поскольку исследование ведется для кодов, корректирующих независимые ошибки, то важно знать количество ошибок на длине кодовой комбинации, а не расположение их относительно друг друга. Это позволяет совокупность j пакетов, расположенных произвольным образом на длине кодовой комбинации, представить одним «эквивалентным»

пакетом, максимальная длина которого $l_{j\max} = jl_0$, минимальная — $l_{j\min} = (j-2)l_0 + 2$.

Так как в канале связи действует белый гауссов шум, сигналы $S_j(t)$ искажаются независимым образом. Значит, вероятность появления j пакетов при передаче n двоичных сигналов может быть записана так:

$$p(j|L) = C_L^j p_{\text{ош}}^j (1 - p_{\text{ош}})^{L-j}. \quad (6)$$

Учитывая (4) и (6), можно определить вероятность того, что кодовая комбинация длиной n символов подвергнется воздействию произвольного числа пакетов ошибок (но не более $j=L$) и при этом возникнут ошибки кратности $i > r$

$$P(i > r) = L p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1} \sum_{l=r+1}^{l_0} \sum_{t=r+1}^l C_{l-2}^{t-2} p_0^t (1 - p_0)^{l-t} p_1(l) + \\ + \sum_{j=2}^L \sum_{l=l_1}^{jl_0} \sum_{i=r+1}^l C_L^j p_{\text{ош}}^j (1 - p_{\text{ош}})^{L-j} C_{l-2}^{t-2} p_0^t (1 - p_0)^{l-t} p_j(l), \quad (7)$$

где

$$l_1 = \begin{cases} r+1 & \text{при } r+1 \geq (j-2)l_0 + 2, \\ (j-2)l_0 + 2 & \text{при } r+1 < (j-2)l_0 + 2. \end{cases}$$

Очевидно, полученная ранее формула (5) вытекает из выражения (7), если положить $j=1$.

Как показывают расчеты и анализ рассматриваемых систем передачи дискретной информации, реальный закон распределения длин пакетов (как одиночных, так и «эквивалентных») с достаточной для практических расчетов точностью может быть аппроксимирован равномерным

$$p_j(l) = \begin{cases} \frac{1}{2(l_0-1)} & \text{при } j \geq 2, \\ \frac{1}{l_0} & \text{при } j = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), упрощаем ее так:

$$P(i > r) = \frac{L}{l_0} p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1} \sum_{l=r+1}^{l_0} \sum_{t=r+1}^l C_{l-2}^{t-2} p_0^t (1 - p_0)^{l-t} + \\ + \frac{1}{2(l_0-1)} \sum_{j=2}^L \sum_{l=l_1}^{jl_0} \sum_{i=r+1}^l C_L^j p_{\text{ош}}^j (1 - p_{\text{ош}})^{L-j} C_{l-2}^{t-2} p_0^t (1 - p_0)^{l-t}. \quad (9)$$

Для циклических кодов, обнаруживающих ошибки, вероятность необнаружения кодом ошибки будет иметь вид

$$P_{\text{но}} = \frac{1}{2^{n-k}} \left[\frac{L}{l_0} p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1} \sum_{l=2r+1}^{l_0} \sum_{i=2r+1}^l C_{l-2}^{i-2} p_0^i (1 - p_0)^{l-i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(l_0-1)} \sum_{i=2}^L \sum_{i'=1}^{l_0} \sum_{i=2r+1}^i C_L^i p_{\text{ош}}^i (1 - p_{\text{ош}})^{L-i} C_{i-2}^{i-2} p_0^i (1 - p_0)^{i-i} \right], \quad (10)$$

где

$$l_1 = \begin{cases} 2r+1 & \text{при } 2r+1 > (j-2)l_0+2, \\ (j-2)l_0+2 & \text{при } 2r+1 < (j-2)l_0+2. \end{cases}$$

Таким образом, с помощью выражений (9), (10) можно определить вероятность ошибки при декодировании кодовой комбинации в зависимости от параметров используемого (n, k) кода, корректирующего независимые ошибки, основания M сигналов $S_j(t)$ и вероятности их искажения $p_{\text{ош}}$.

Рассмотрим случай, когда в качестве двоичных кодов используются коды, исправляющие или обнаруживающие пакеты ошибок, в передатчике используются многопозиционные ортогональные или биортогональные сигналы.

В результате искажений многопозиционных сигналов на длине кодовой комбинации в n двоичных разрядов может появиться один или несколько пакетов ошибок.

Анализ начнем с простейшего случая, когда кодовая комбинация длины n поражается одним пакетом ошибок. Вероятность появления одного пакета ошибок на длине кодовой комбинации может быть определена в виде

$$p(1/n) = L p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1}. \quad (11)$$

Вероятность поражения (n, k) кода пакетом ошибок длиной l символов найдется из выражения

$$p_n(1/l) = L p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1} p_1(l). \quad (12)$$

Здесь $p_1(l)$ — закон распределения длин пакетов, максимальная длина которых может быть $l_0 = \log_2 M$.

Теперь можно установить вероятность того, что кодовая комбинация поразится пакетом ошибок и при этом длина пакета превысит исправляющую способность кода l_m

$$p(l > l_m) = L p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1} \sum_{l=l_m+1}^{l_0} p_1(l),$$

l_m можно определить, используя выражение для нижней границы оценки числа контрольных символов в (n, k) коде, исправляющем пакеты ошибок [3]:

$$n - k \geq l_m - 1 + \log_2(n - l_m + 2). \quad (13)$$

Если кодовая комбинация длиной в n двоичных символов может поражаться двумя или более пакетами ошибок, то расчет вероятности ошибки в этом случае можно осуществить следующим образом.

Вероятность ошибки при поражении блока длиной в n рядов одним либо двумя пакетами ошибок определится выражением

$$P_{\Pi} = L p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1} \sum_{l=l_m+1}^{l_0} p_1(l) + \\ + \sum_{j=2}^L \sum_{l=l_m+1}^{l_0} (L-j+1) p_{\text{ош}}^2 (1 - p_{\text{ош}})^{L-2} p_j(l), \quad (14)$$

здесь коэффициент $(L-j+1)$ учитывает различные варианты расположения двух пакетов на длине кодовой комбинации.

При $j=2$ считается, что одновременно искажаются два соседних сигнала $S_j(t)$, следовательно, одновременно будут существовать два рядом расположенных пакета. При $j=3$ считается, что одновременно поражаются два многопозиционных сигнала, однако расположены они так, что между ними находится один неискаженный сигнал. При $j=4$ между двумя искаженными сигналами находятся два неискаженных сигнала. В каждом из перечисленных случаев для простоты анализа можно считать, что действуют не два пакета, а один «эквивалентный» пакет, появляющийся с определенной вероятностью, закон распределения длин которого $p_j(l)$, максимальная длина jl_0 . Это оправдано с той точки зрения, что исследуются коды, корректирующие одиночные пакеты.

Нетрудно показать, что формула для определения вероятности ошибки в общем случае, когда блок длиной в n двоичных символов может поражаться произвольным числом пакетов $i \leq L$, примет вид

$$P_{\Pi} = L p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1} \sum_{l=l_m+1}^{l_0} p_1(l) + \\ + \sum_{i=2}^L \sum_{j=i}^L \sum_{l=l_2}^{l_0} (L-j+1) p_{\text{ош}}^i (1 - p_{\text{ош}})^{L-i} p_j(l), \quad (15)$$

где

$$l_2 = \begin{cases} l_m + 1 & \text{при } l_m + 1 \geq (j-2)l_0 + 2, \\ (j-2)l_0 + 2 & \text{при } l_m + 1 < (j-2)l_0 + 2. \end{cases}$$

Для равномерного закона распределения $p_j(l)$ вместо (15) получим следующее выражение:

$$P_{\Pi} = \frac{L}{l_0} (l_0 - l_m - 1) p_{\text{ош}} (1 - p_{\text{ош}})^{L-1} + \\ + \frac{1}{2(l_0 - 1)} \sum_{i=2}^L \sum_{j=i}^L (jl_0 - l_2) (L - j + 1) p_{\text{ош}}^i (1 - p_{\text{ош}})^{L-i}. \quad (16)$$

Полученная формула может быть перенесена для кодов, обнаруживающих пакеты ошибок.

Имея (9), (10) и (16), можно определить эффективность совместного использования циклических кодов, исправляющих либо обнаруживающих ошибки, и многопозиционных регулярных сигналов (например, ортогональных), а также сравнить информационные и энергетические показатели данного класса систем с аналогичными показателями систем, которые используют только многопозиционные ортогональные сигналы.

Произведем такой анализ с учетом того, что в качестве корректирующих кодов используются циклические коды, исправляющие либо обнаруживающие независимые ошибки.

Так как анализу подвергаются системы с различными основаниями и кодами, используем в качестве критерия качества систем вероятность ошибки при передаче одной двоичной единицы информации, называемой эквивалентной вероятностью ошибки [4]:

$$P(i > r)_{\text{эkv}} = \frac{P(i > r)}{k}. \quad (17)$$

Для оценки эффективности применения рассматриваемых систем величина $P(i > r)_{\text{эkv}}$ сравнивается с эквивалентной вероятностью ошибки

$$P_{\text{орт.эkv}} = \frac{P_{\text{орт}}}{\log_2 M}, \quad (18)$$

которая обеспечивается системой, использующей только многопозиционные ортогональные сигналы. При этом предполагается, что в обоих случаях скорость передачи информации одинакова. Чтобы обеспечить это условие, длительности ортогональных сигналов в системах без кодов и при использовании кодов определяются соответственно из выражений

$$\tau_{\text{орт}} = \tau_0 \log_2 M, \quad (19)$$

$$\tau_{\text{орт } k} = \tau_0 R_k \log_2 M. \quad (20)$$

Здесь τ_0 — длительность двоичного символа при передаче кодом без избыточности; $R_k = \frac{k}{n}$ — скорость кода. Энергетические показатели указанных систем $h_{\text{орт}}^2$, $h_{\text{орт } k}^2$ могут быть представлены в виде

$$h_{\text{орт}}^2 = \frac{P_c \tau_{\text{орт}}}{\nu_0^2} = h_0^2 \log_2 M, \quad (21)$$

$$h_{\text{орт } k}^2 = \frac{P_c \tau_{\text{орт } k}}{\nu_0^2} = h_0^2 R_k \log_2 M, \quad (22)$$

где

$$h_0^2 = \frac{P_c \tau_0}{\nu_0^2}. \quad (23)$$

Вероятность ошибки многопозиционных ортогональных сигналов с основанием M определяется в соответствии с выражением (4)

$$P_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{M-1}} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + \Phi(u)]^{M-1} \exp \left[-\frac{1}{2} (1 - h\sqrt{2})^2 \right] du. \quad (24)$$

Результаты вычислений энергетических параметров сравниваемых систем по формулам (17)—(24) приведены в виде графиков на рис. 1, 2 соответственно для $M=8, 32$. Пунктирные линии на рисунках характеризуют многопозиционные системы без кодирования, сплошные — многопозиционные системы с кодированием (параметры используемых кодов указаны на рисунках).

Анализ полученных результатов показывает, что при хорошем качестве канала связи ($p_{\text{ош}} < 10^{-2}$) совместное использование кодов и многопозиционных ортогональных сигналов в ряде случаев (с использованием кодов средней и большой длины) может дать существенный (до трех порядков) выигрыш в отношении помехоустойчивости или энерготехнических показателей (до 2—4 раз), однако этот выигрыш меньше приведенных в [1] при представлении потока ошибок в двоичном канале простейшим. Последнее объясняется тем, что при использовании ортогональных сигналов с высокими основаниями искажения их вызывают в двоичной последовательности пакеты ошибок большой длины. Следовательно, имеет место несогласование корректирующих способностей кода с потоком ошибок в канале связи, в силу чего эффект использования кодов указанного класса снижается.

При использовании в системе связи ортогональных сигналов с основанием меньше 32 пакетирование имеет менее выражен-

ный характер, в меньшей мере сказывается несогласование корректирующих способностей кода с потоком ошибок в канале связи, однако, даже в этом случае положительный эффект может быть получен только при использовании кодов средней и большой длины.

Проанализируем эффективность совместного использования циклических кодов, обнаруживающих независимые ошибки,

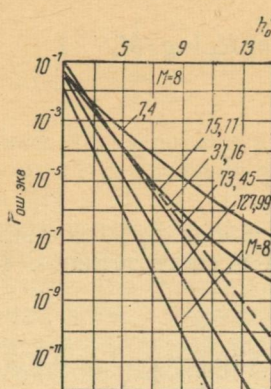


Рис. 1

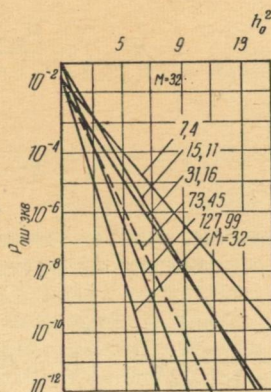


Рис. 2.

и многопозиционные ортогональные сигналы и сравним информационные и энергетические показатели этих систем с системами, построенными на базе использования только многопозиционных ортогональных сигналов. При этом будем предполагать, что коды, обнаруживающие ошибки, используются в сочетании с решающей обратной связью или с автоматическим запросом ошибочных комбинаций (АЗО). Сравнение проводится таким же путем, как и в случае использования кодов, исправляющих ошибки. Выражения (17) и (22) примут вид

$$P_{\text{но экв}} = \frac{P_{\text{но}}}{k}, \quad (25)$$

$$\tau_{\text{орт.к}} = \tau_0 R_{\text{АЗО}} \log_2 M. \quad (26)$$

Скорость передачи информации $R_{\text{АЗО}}$ можно определить по формуле, приведенной в [5]:

$$R_{\text{АЗО}} = R_k \frac{(1 - p_{\text{ош}})^L}{1 + t[1 - (1 - p_{\text{ош}})^L]}, \quad (27)$$

где

t — емкость повторителя (в расчетах принималось значение $t=4$).

Выражение (27) справедливо в предположении $P_{\text{но}} \ll 1$, что обычно выполняется в практически необходимых системах связи. Результаты вычислений энергетических параметров сравниваемых систем при использовании в них оснований $M = 8, 32$ и различных циклических кодов приведены в виде графиков на рис. 3, 4.

Анализ полученных результатов показывает, что системы передачи информации с обратным каналом, построенные на базе

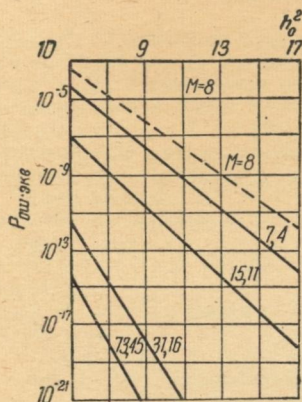


Рис. 3.

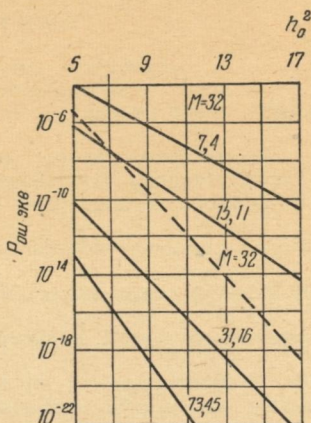


Рис. 4.

совместного использования циклических кодов и многопозиционных сигналов, могут иметь более высокие энергетические и информационные показатели, нежели системы, построенные на базе использования только многопозиционных сигналов. Например, использование циклических кодов средней и большой длины ($n \geq 31$) и многопозиционных ортогональных сигналов может дать выигрыш в мощности передатчика до 3—6 раз по сравнению с многопозиционными системами, в которых не применяется избыточное кодирование.

В то же время следует учесть, что при плохом качестве канала ($p_{\text{ош}} > 10^{-2}$) дополнительное усложнение системы связи, обусловленное усложнением обнаруживающих ошибки кодов, может оказаться нецелесообразным, так как использование только многопозиционных сигналов дает лучшие энергетические показатели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесник В. Д., МIRONЧИКОВ Е. Т. Декодирование циклических кодов. М., «Связь», 1968. 251 с.
2. Курский В. Н. О достоверности и эффективности передачи информации при избыточном кодировании по каналу с многобуквенным алфавитом. — «Радиотехника и электроника», 1969, вып. 4, с. 620—628.

3. Питерсон У. Коды, исправляющие ошибки. М., «Мир», 1964. 338 с.
4. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. М., «Сов. радио», 1970. 727 с.
5. Котов П. А. Повышение достоверности передачи цифровой информации. М., «Связь», 1966. 184 с.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Кучко Л. П. О линейных функциональных уравнениях	3
Руткас А. Г. Об одной функции операторного узла	14
Радбель Н. И. Расщепление спектра и нормальные точки линейного пучка операторов в B -пространствах	17
Вишневецкий А. Л. О разрешимых группах, обладающих точным неприводимым рациональным представлением простой степени	20
Крутинь В. И. Замечание о росте и распределении значений P -мерных целых кривых	31
Сохин А. С. Об операторах преобразования для уравнения с особенностью одного вида	36
Нгуен Тхыонг-Уен. Теорема о факторизации целых функций высших порядков	42
Гурарий В. И., Пашкова Т. В. Функции Лебега биортогональных систем	63
Канцельсон В. Э., Меньшиков В. В. и Элькин Б. С. Альтернирующий метод приближенного вычисления собственных значений и собственных функций дивергентных эллиптических операторов	68
Борзенков А. В., Сологуб В. Г. Об одном методе численного исследования задачи о дифракции на полосе	73
Домбровский Г. А. Некоторые замечания о простых волнах	84
Аль-Насан И. М. К гидродинамической теории смазки подшипника конечной длины со втулкой	87
Колодяжный Б. Г. Об упругооптических эффектах в деформированных диэлектрических волноводах	95
Задеренко И. Д., Суворов Н. П., Суворова И. Г. К вопросу о применении избыточных кодов и многопозиционных сигналов в системах передачи дискретной информации	107

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 113

Математика и механика

Выпуск 39

Редактор *А. П. Гужва*
Технический редактор *Л. Т. Момот*
Корректор *Л. К. Бердута*

Сдано в набор 11/IV 1974 г. Подписано в печать 22/VII 1974 г. Формат $60 \times 90^{1/16}$ Бумага типографская № 3.

Усл.-печ. л. 7,75. Уч.-изд. л. 7,9. Тираж 1000.

Заказ 663. БЦ 50208. Цена 79 коп.

Издательство издательского объединения «Вища школа»
при Харьковском государственном университете
310003, Харьков, 3, ул. Университетская, 16.

Харьковская городская типография № 16 Областного
управления по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли. Харьков-3, Университетская, 16.

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.948+512.13

О линейных функциональных уравнениях. Кучко Л. П. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 3—14.

В работе рассматривается вопрос о локальной разрешимости в классе бесконечно дифференцируемых отображений $\varphi = R^n \rightarrow R^p$ линейного функционального уравнения

$$\varphi(Fx) - Q(x)\varphi(x) = \gamma(x)$$

($F: R^n \rightarrow R^n$ — отображение класса C^∞ с неподвижной точкой $x=0$; $Q(x)$ — C^∞ -матрица-функция размера $p \times p$), а также вопрос о локальной нетривиальной разрешимости в том же классе отображений соответствующего однородного уравнения:

$$\varphi(Fx) - Q(x)\varphi(x) = 0$$

Библиогр. 4.

УДК 513.88

Об одной функции операторного узла. Руткас А. Г. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 14—17.

В гильбертовом пространстве рассматривается оператор-функция $S(\lambda) = I - i\Gamma^*(T - \lambda C) - \Gamma$, где I — самосопряженный унитарный оператор; T, C, Γ — ограниченные операторы, причем $T - T^* = i\Gamma\Gamma^*$. Функция $S(\lambda)$ возникает в несамосопряженных задачах, исходные уравнения которых содержат пучок $T - \lambda C$. Если $C = T$, то $S(\lambda)$ совпадает с известной характеристической функцией оператора.

Описаны области голоморфности $S(\lambda)$; указано достаточное условие разложимости $S(\lambda)$ на множители того же типа. Доказано, что при $C \geq 0$ оператор $S(\lambda)$ в метрике (Jf, f) унитарен на вещественной оси, несжимающий в верхней полуплоскости, нерастягивающий — в нижней. Для случая $C > 0$ установлены условия совпадения двух функций типа $S(\lambda)$.

Библиогр. 4.

УДК 513.88

Расщепление спектра и нормальные точки линейного пучка операторов в В-пространствах. Радбель Н. И. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 17—20.

Пусть X, Y — изоморфные банаховы пространства, $A - \lambda B$ — линейный пучок операторов $\in [X, Y]$, $\sigma(A, B)$ — спектр пучка $A - \lambda B$.

Доказывается теорема о расщеплении пучка соответственно двум изолированным частям спектра σ_1 и σ_2 , одна из которых ограничена (аналог теоремы Ф. Рисса).

Определяются нормальные собственные числа и нормальные точки линейного пучка операторов. Приводятся необходимые и достаточные условия того, что точка спектра является нормальным собственным числом, нормальной точкой.

Библиогр. 4.

УДК 519.44

О разрешимых группах, обладающих точным неприводимым рациональным представлением простой степени. Вишневецкий А. Л. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 20—31.

Исследуется строение конечной разрешимой группы G , обладающей указанным в заглавии представлением степени $p \neq 2$. Оказывается, что $G = Z \times (A \lambda (P \lambda W))$, где Z — центр группы $G/Z| \leq 2$; A — элементарная абелева 2-группа; P — циклическая группа порядка p и W — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. В случае $|w| = 1$ получено полное описание групп рассматриваемого типа.

Библиогр. 8.

УДК 511.6+517.56

Замечание о росте и распределении значений p -мерных целых кривых. Кнунин В. И. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 31—36.

В данной работе установлены некоторые соотношения для величин дефектов и положительных отклонений p -мерных целых кривых $\vec{G}(z)$, которые являются аналогами соответствующих оценок для мероморфных функций. Основным результатом является

Теорема 1. Если целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет конечный нижний порядок λ , то ее величины положительных отклонений относительно фиксированной допустимой системы векторов A удовлетворяют соотношению:

$$\sum_{a \in A} \beta^+(a, G) \leq \frac{kpFr}{(ra-1)^{1/2}} (1 + \lambda^2)$$

при

$$\alpha > \frac{1}{2}.$$

Библиогр. 17.

УДК 517.6

Об операторах преобразования для уравнений с особенностью одного вида. Сохин А. С. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 36—42.

В работе получено обобщение теоремы Б. Я. Левина о существовании операторов преобразования, переводящих ограниченные при $x \rightarrow \infty$ решения одного уравнения Штурма—Лиувилля в решения другого с той же асимптотикой при $x \rightarrow \infty$.

Библиогр. 3.

УДК 511.6

Теорема о факторизации целых функций высших порядков. Нгуен Тхыонг Уен. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 42—62.

В статье дается обобщение известной теоремы Фейера—Рисса на целые функции неотрицательные на вещественной оси и имеющие произвольный целый порядок.

Библиогр. 5.

УДК 513.8

Функции Лебега биортогональных систем. Гурарий В. И., Пашкова Т. В. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 63—68.

Вводятся и изучаются функции Лебега биортогональных систем в $L^2[0,1]$. Получено обобщение теоремы А. М. Олевского (о том, что в пространстве непрерывных на отрезке функций $C[0,1]$ не может существовать равномерно ограниченного ортонормированного базиса) на гильбертовы системы, равномерно ограниченные вместе с сопряженными.

Библиогр. 10.

УДК 518:517.944+513.88

Альтернирующий метод приближенного вычисления собственных значений и собственных функций дивергентных эллиптических операторов. Канцельсон В. Э., Меньшиков В. В., Элькин Б. С. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 68—73.

В работе изложен приближенный метод вычисления собственных значений и собственных функций краевой задачи

$$-\operatorname{div}(\lambda(x)\Delta u(x) + q(x)u(x)) = \mu u(x), \quad (x \in G),$$

$$\beta(x) \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u = 0, \quad (x \in \partial G)$$

Исследуется сходимость итерационного процесса и методы ее ускорения.

Табл. 3. Ил. 1. Библиогр. 2.

УДК 517.9:535.4

Об одном методе численного исследования задачи о дифракции на полосе. Борзенков А. В., Сологуб В. Г. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 73—84.

Рассмотрены некоторые аспекты, связанные с численным решением задачи о дифракции на полосе с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно преобразования Фурье плотности «поверхностного» тока.

Библиогр. 3.

УДК 517.944

Некоторые замечания о простых волнах. Домбровский Г. А. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 84—87.

Рассматриваются некоторые свойства простых волн следующей системы уравнений для функций $u(x, y)$, $v(x, y)$:

$$A_1 u_x + B_1 v_y = 0, \quad A_2 u_y + B_2 v_x = 0,$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — известные функции u и v .

Библиогр. 4.

УДК 583.4

К гидродинамической теории смазки подшипника конечной длины со втулкой. Аль-Насан И. М. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 87—94.

Рассмотрена гидродинамическая теория смазки цилиндрического подшипника конечной длины со свободно плавающей втулкой без учета инерциальных членов.

Получены формулы для определения подъемной силы, угловой скорости вращения втулки и момента трения. Исследованы основные характеристики подшипника конечной длины со втулкой.

Ил. 4. Библиогр. 5.

УДК 517.532/533

Об упругооптических эффектах в деформированных диэлектрических волноводах. Колодяжный Б. Г. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 95—107.

В работе стандартным методом теории возмущений рассматривается задача о распространении электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, подверженных деформациям.

Библиогр. 6.

УДК 621.391

К вопросу о применении избыточных кодов и многопозиционных сигналов в системах передачи дискретной информации. Задеренко И. Д., Суворов Н. П., Суворова И. Г. «Вестник Харьковского университета», серия механико-математическая, вып. 39, 1974, с. 107—118.

Рассматриваются информационные и энергетические показатели систем связи, построенных на базе совместного использования избыточных кодов и многопозиционных ортогональных сигналов.

Анализ проводится с учетом группирования ошибок в двоичном канале. Ил. 4. Библиогр. 5.

286914

