Список литературы: 1. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978. — 463 с. 2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с. 5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с. 4. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 407 с. 5. *Рахимов М. О.* О синтезе оптимального управления упругими колебаниями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Днепропетровск, 1978.— 130 с. 6. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977. — 479 с. 7. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.—296 с. 8. *Янушевский Р. Т.* Управление объектами с запаздыванием.— М.: Наука, 1978.—416 с.

Поступила в редколлегию 06.01.80.

УДК 519.3 : 531/534

Н. А. АВРАМЧУК

К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В вариационной задаче Майера о выведении точки переменной массы m на заданную траекторию в центральном поле силы тяжести рассмотрим в качестве управлений: θ—угол наклона силы тяги к горизонту (угол тангажа) и β-массовый расход, причем $0 \leqslant \beta \leqslant \bar{\beta}$.

Считая угловую скорость вращения Земли Ω малым параметром ($\Omega \approx 10^{-4}$) и раскладывая координаты гравитационного ускорения по степеням этого параметра, систему уравнений движения запишем в виде

$$\dot{x} = u, \ \dot{y} = \vartheta;$$

$$\dot{u} = \frac{c\beta}{m}\cos\theta + \Omega(2\vartheta - kg_0x) + 3\Omega^2k^2g_0xy + \ldots;$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{c\beta}{m}\sin\theta - g_0 - 2\Omega(u - kg_0y) - 3\Omega^2k^2g_0\left(y^2 - \frac{1}{2}x^2\right) + \ldots;$$

$$\dot{m} = -\beta, \ 0 \leqslant \beta \leqslant \bar{\beta}. \tag{1}$$

Здесь $c = \mathrm{const}$ — относительная скорость истечения; u, v — проекции вектора скорости на координатные оси; g_0 — ускорение силы тяжести на поверхности Земли; k — коэффициент пропорциональности величин Ω и $\frac{1}{r}$, где r — радиус Земли.

Граничными условиями являются [2, 4]: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $u(0) = u_0$, $\vartheta(0) = \vartheta_0$, $m(0) = m_0$, $m(T) = m_T$, $\varphi(x_T, y_T) = 0$,

$$\vartheta_T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_T + u_T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_T = 0. \tag{2}$$

Здесь время выведения T не фиксировано, $\varphi(x, y)=0$—уравнение заданной траектории (кеплеровской орбиты), последнее соотношение — условие того, что в конечный момент направление касательной к орбите совпадает с направлением вектора скорости.

Для максимизации скорости в момент выхода на заданную траекторию требуется [2] рассмотреть задачу о минимуме функционала

$$\Delta G = -\sqrt{u^2+\vartheta^2}\Big|_0^T. \tag{3}$$

Применяя принцип максимума Понтрягина [5], получим

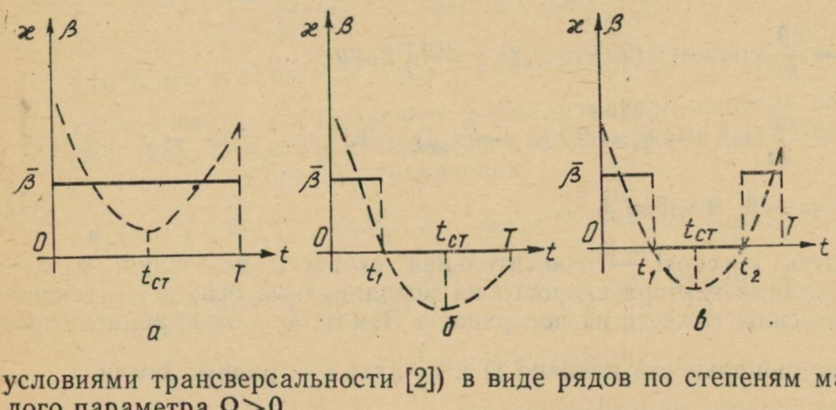
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\psi_4}{\psi_3}, \quad \sin\theta = \frac{\psi_4}{\sqrt{\psi_3^2+\psi_4^2}}, \quad \cos\theta = \frac{\psi_3}{\sqrt{\psi_3^2+\psi_4^2}}; \tag{4}$$

$$\beta = \begin{cases} \bar{\beta}, & \varkappa > 0 \\ 0, & \varkappa < 0 \quad 0 < \beta_{oc} < \bar{\beta}, \\ \beta_{oc}, & \varkappa \equiv 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\varkappa = \frac{c}{m}\sqrt{\psi_3^2+\psi_4^2} - \psi_5, \tag{6}$$

где $\varkappa$—функция переключения; $\psi_i\,(i=\overline{1,5})$ — присоединенные переменные.

Будем искать решение полученной граничной задачи (уравнения (1) с учетом (4), уравнения относительно присоединенных переменных $\psi_i\,(i=\overline{1,5})$, граничные условия (2), дополненные



условиями трансверсальности [2]) в виде рядов по степеням малого параметра $\Omega>0$.

В нулевом приближении ($\Omega=0$) имеем задачу о движении в однородном поле силы тяжести.

В этом приближении получаем $\psi_1^0(t) = \psi_1^0 = \text{const}$; $\psi_2^0(t) = + \psi_2^0 = \text{const}$; $\psi_3^0(t) = \psi_3^0 - \psi_1^0 t$; $\psi_4^0(t) = \psi_4^0 - \psi_2^0 t$.

Чтобы определить число моментов переключения управления, исследуем поведение функции переключения $\varkappa$, откуда получаем, что $\varkappa$ имеет только один экстремум (min) в стационарной точке

$$t_{\text{стац}} = \frac{\psi_1^0\psi_3^0 + \psi_2^0\psi_4^0}{(\psi_1^0)^2 + (\psi_2^0)^2}. \tag{7}$$

Следовательно, возможны лишь случаи типов, указанных на рисунке.

На отрезках времени, где $\beta=0$, решение очевидно — свободный полет.

При $\beta=\bar{\beta}$ решение имеет вид

$$x^0(t) = x_0 + u_0 t + \frac{c\psi_1^0}{A_1}[\sqrt{D} - f_1(t)] + \left(\frac{c\psi_1^0}{\sqrt{A_1}}t - 2a_{18}\right)f_2(t) -$$

$$- 6\bar{\beta}^2 a_{20}(m_0 - \bar{\beta}t) f_3(t);$$

$$y^0(t) = y_0 + \vartheta_0 t - g_0\frac{t^2}{2} + \frac{c\psi_2^0}{A_1}[\sqrt{D} - f_1(t)] + \left(\frac{c\psi_2^0}{\sqrt{A_1}}t + 2b_{18}\right)\times$$

$$\times f_2(t) + 6\bar{\beta}^2 b_{20}(m_0 - \bar{\beta}t) f_3(t); \tag{8}$$

$$u^0(t) = u_0 + \frac{c\psi_1^0}{\sqrt{A_1}}f_2(t) + 6\bar{\beta}^3 a_{20} f_3(t);\ \vartheta^0(t) = \vartheta_0 - g_0 t +$$

$$+ \frac{c\psi_2^0}{\sqrt{A_1}}f_2(t) - 6\bar{\beta}^3 b_{20} f_3(t);\quad m = m_0 - \bar{\beta}t,\ \psi_1^0(t) = \psi_1^0,\ \psi_2^0(t) = \psi_2^0,$$

$$\psi_3^0(t) = \psi_3^0 - \psi_1^0 t,\ \psi_4^0(t) = \psi_4^0 - \psi_2^0 t.$$

Здесь

$$f_1(t) = \sqrt{(\psi_3^0 - \psi_1^0 t)^2 + (\psi_4^0 - \psi_2^0 t)^2};$$

$$f_2(t) = \ln\frac{\sqrt{A_1[(\psi_3^0 - \psi_1^0 t)^2 + (\psi_4^0 - \psi_2^0 t)^2]} + A_1 t + B_1}{\sqrt{A_1 D} + B_1};$$

$$f_3(t) = \ln\frac{m_0\{\bar{\beta}\sqrt{A[(\psi_3^0 - \psi_1^0 t)^2 + (\psi_4^0 - \psi_2^0 t)^2]} + \beta(m_0 - \bar{\beta}t) + A\}}{(\bar{\beta}\sqrt{AD} + m_0 B + A)(m_0 - \bar{\beta}t)};$$

$$a_{18} = -\frac{c(\bar{\beta}A_1\psi_3^0 - \tilde{B}\psi_1^0)}{2\bar{\beta}A_1^{3/2}};\quad b_{18} = \frac{c(\bar{\beta}A_1\psi_4^0 - \tilde{B}\psi_2^0)}{2\bar{\beta}A_1^{3/2}};$$

$$a_{20} = -\frac{c(m_0\psi_1^0 - \bar{\beta}\psi_3^0)}{6\bar{\beta}^3\sqrt{A}};\quad b_{20} = \frac{c(m_0\psi_2^0 - \bar{\beta}\psi_4^0)}{6\bar{\beta}^3\sqrt{A}};\ A_1 = (\psi_1^0)^2 + (\psi_2^0)^2;$$

$$B_1 = -(\psi_1^0\psi_3^0 + \psi_2^0\psi_4^0);\ A = (m_0\psi_1^0 - \overline{\beta}\psi_3^0)^2 + (m_0\psi_2^0 - \overline{\beta}\psi_4^0)^2;$$

$$B = (\psi_1^0\psi_3^0 + \psi_2^0\psi_4^0)\overline{\beta} - [(\psi_1^0)^2 + (\psi_2^0)^2]\,m_0;\ \widetilde{B} = (\psi_1^0\psi_3^0 + \psi_2^0\psi_4^0)\overline{\beta} +$$

$$+ [(\psi_1^0)^2 + (\psi_2^0)^2]m_0;\ D = (\psi_3^0)^2 + (\psi_4^0)^2;\ \psi_i^0 = \psi_i(0),\quad (i = \overline{1,4}),$$

Если ψ_i^0 найти из алгебраических уравнений (2) (с условиями трансверсальности) и (8) при $t=T$, определяемом соотношением $m_0 - m_T = \overline{\beta}T$, то (8) дает окончательное решение задачи в случае а). В случае в) (8) описывает решение на интервале времени $]0, t_1[$.

Значения найденных переменных (8) при $t=t_1$ будут служить начальными значениями для продолжения интегрирования на интервале $]t_1, T[$ свободного полета. Момент переключения t_1 определяется из соотношения $m_0 - m_T = \overline{\beta}t_1$.

Чтобы определить ψ_i^0 и конечный момент времени, проделаем следующее. Запишем решение уравнения из присоединенной системы

$$\dot{\psi}_5^0(t) = \frac{\overline{\beta}c}{m^2}\sqrt{[\psi_3^0(t)]^2 + [\psi_4^0(t)]^2}$$

в момент t_1, получим $\psi_5(t_1)$.

С другой стороны, $\psi_5(t_1)$ определяется из (6) при $t=t_1$, так как $\varkappa(t_1)=0$. Приравнивая эти два выражения для $\psi_5(t_1)$, находим ψ_5^0.

Если теперь проинтегрировать уравнения свободного движения на интервале $]t_1 T[$ и подставить в полученные решения вместо $x(t_1)$, $y(t_1)$, $u(t_1)$, $v(t_1)$ их значения из (8) при $t=t_1$, то получим четыре уравнения относительно ψ_i^0 $(i=\overline{1,4})$. Эти уравнения совместно с последними двумя уравнениями граничных условий (2), условиями трансверсальности и условием $H(T) = 0$ дают девять алгебраических уравнений для определения ψ_i^0 $(i=\overline{1,4})$, T и четырех значений фазовых координат в конечный момент времени T.

В случае с) уравнение $\varkappa(t)=0$ имеет два корня $t=t_1$, $t=t_2$. На отрезках $[0, t_1[$, $]t_2, T]$ движение происходит с максимальным массовым расходом $\beta=\overline{\beta}$, а интервал $]t_1, t_2[$ соответствует дуге свободного полета $\beta=0$, на которой не происходит расхода массы, т. е. $m(t_1) = m_0 - \overline{\beta}t_1 = m_* = m(t_2)$.

Кроме того, $m_T = m_0 + \overline{\beta}(t_2 - t_1) - \overline{\beta}T$ **(9).** Так как на дуге $\beta = 0$, $\psi_5 = \mathrm{const}$, $m = m_*$, а ψ_3 и ψ_4 определяются из (8), то график функции $\varkappa$ на интервале $]t_1, t_2[$ симметричен и $t_1 + t_2 = 2\,t_{\text{cmax}}$ **(10).** Поэтому моменты переключения t_1 и t_2 находятся из соотношений (9) и (10), а конечный момент T и фазовые координаты определяются аналогично предыдущему.

Перейдем к рассмотрению первого приближения — движение в линеаризованном центральном поле. При этом учтем, что функция H линейно зависит от управления β, для которого заданы ограничения, а условия трансверсальности и условия максимальности функции H не содержат явно это управление. Тогда, согласно теореме В. С. Новоселова [3, теорема 3], при решении задачи с точностью до величины порядка малости Ω^2 в уравнениях присоединенной системы и в условиях трансверсальности можно опустить члены порядка Ω, а в уравнениях движения (1) и граничных условиях (2) опустить члены порядка Ω^2. Тогда ошибка оптимального значения функционала имеет порядок Ω^2.

Итак, решение задачи в первом приближении:

$$x(t) = x^0(t) + \frac{1}{r} x^1(t) + \Omega \hat{x}(t), \quad y(t) = y^0(t) + \frac{1}{r} y^1(t) +$$

$$+ \Omega \hat{y}(t), \quad u(t) = u^0(t) + \frac{1}{r} u^1(t) + \Omega \hat{u}(t), \quad \vartheta(t) = \vartheta^0(t) +$$

$$-\frac{1}{r} \vartheta^1(t) + \Omega \hat{\vartheta}(t),$$

где $x^\circ(t)$, $y^\circ(t)$, $u^\circ(t)$, $v^\circ(t)$ — решение задачи в нулевом приближении — движение в однородном поле силы тяжести без учета вращения Земли (8): $x^1(t)$, $y^1(t)$, $u^1(t)$, $v^1(t)$ — решение уравнений первого приближения в центральном поле без учета вращения Земли; последние же слагаемые $\Omega\hat{x}(t)$, $\Omega\hat{y}(t)$, $\Omega\hat{u}(t)$, $\Omega\hat{v}(t)$ появились в связи с учетом вращения Земли.

При этом

$$x^1(t) = g_0 \{a_9 + a_{10}t - x_0 \frac{t^2}{2} + a_{11} t^2 - u_0 \frac{t^3}{3} + a_{12} [f_1(t)]^3 +$$

$$+ a_{13} f_1(t) + a_{14} t f_1(t) + a_{15} t^2 f_1(t) + a_{16} f_2(t) + a_{17} t f_2(t) +$$

$$a_{18} t^2 f_2(t) + a_{19} t^3 f_2(t) + a_{20} (m_0 - \bar{\beta} t)^3 f_3(t)\};$$

$$y^1(t) = 2g_0 \{b_9 + b_{10}t + y_0 \frac{t^2}{2} + b_{11} t^2 + \vartheta_0 \frac{t^3}{6} - g_0 \frac{t^4}{24} + b_{12} [f_1(t)]^3 +$$

$$+ b_{13} f_1(t) + b_{14} t f_1(t) + b_{15} t^2 f_1(t) + b_{16} f_2(t) + b_{17} t f_2(t) + b_{18} t^2 f_2(t) +$$

$$+ b_{19} t^3 f_2(t) + b_{20} (m_0 - \bar{\beta} t)^3 f_3(t)\};$$

$$u^1(t) = g_0 \{a_{26} - x_0 t - u_0 \frac{t^2}{2} + a_{27} t + a_{28} f_1(t) + a_{29} t f_1(t) +$$

$$+ a_{30} f_2(t) + a_{31} t f_2(t) + a_{32} t^2 f_2(t) + a_{33} (m_0 - \bar{\beta} t)^2 f_3(t)\};$$

$$\vartheta^1(t) = 2g_0 \{b_{26} + y_0 t + \vartheta_0 \frac{t^2}{2} - g_0 \frac{t^3}{6} + b_{27} t + b_{28} f_1(t) +$$

$$+ b_{29} t f_1(t) + b_{30} f_2(t) + b_{31} t f_2(t) + b_{32} t^2 f_2(t) + b_{33} (m_0 - \bar{\beta} t)^2 f_3(t)\};$$

$$\hat{x}(t) = a_1 + a_2 t + \vartheta_0 t^2 - g_0 \frac{t^3}{3} + a_3 f_1(t) + a_4 t f_1(t) + a_5 f_2(t) +$$

$$+ a_6 t f_2(t) + a_7 t^2 f_2(t) + a_8 (m_0 - \bar{\beta} t)^2 f_3(t);$$

$$\hat{y}(t) = b_1 + b_2 t - u_0 t^2 + b_3 f_1(t) + b_4 t f_1(t) + b_5 f_2(t) + b_6 t f_2(t) +$$

$$+ b_7 t^2 f_2(t) + b_8 (m_0 - \bar{\beta} t)^2 f_3(t);$$

$$\hat{u}(t) = a_{21} + 2\vartheta_0 t - g_0 t^2 + a_{22} f_1(t) + a_{23} f_2(t) + a_{24} t f_2(t) +$$

$$+ a_{25} (m_0 - \bar{\beta} t) f_3(t);$$

$$\hat{\vartheta}(t) = b_{21} - 2u_0 t + b_{22} f_1(t) + b_{23} f_2(t) + b_{24} t f_2(t) + b_{25} (m_0 -$$

$$- \bar{\beta} t) f_3(t),$$

где

$$a_1 = \frac{c}{2\bar{\beta} A_1^2} [(2m_0 A_1 - \bar{\beta} B_1 - 4\tilde{B}) \psi_2^0 + 2\bar{\beta} A_1 \psi_4^0] \sqrt{D};$$

$$a_2 = \frac{2c\sqrt{D}\psi_2^0}{A_1}; \quad a_3 = -a_1; \quad a_4 = -\frac{3c\psi_2^0}{2A_1}; \quad a_5 = -\frac{c}{2\bar{\beta}^2 A_1^{5/2}} \times$$

$$\times [(\bar{\beta}^2 \varepsilon - 2m_0 \bar{\beta} A_1 B_1 - 2\tilde{B}^2) \psi_2^0 + 2\bar{\beta} A_1 \bar{B}_1 \psi_4^0];$$

$$a_6 = \frac{2c(\bar{\beta} A_1 \psi_4^0 - \tilde{B} \psi_2^0)}{\bar{\beta} A_1^{3/2}}; \quad a_7 = \frac{c\psi_2^0}{\sqrt{A_1}}, \quad a_8 = -\frac{c(m_0 \psi_2^0 - \bar{\beta} \psi_4^0)}{\bar{\beta}^2 \sqrt{A}};$$

$$a_9 = -\frac{2c\psi_1^0 D^{3/2}}{9A_1^2} + \frac{c\sqrt{D}}{12A_1^3 \bar{\beta}^2} \{[\bar{\beta}^2 (4\varepsilon - B_1^2) + m_0 A_1 (3\bar{\beta} B_1 - 2m_0 A_1)]$$

$$\psi_1^0 - \bar{\beta} A_1) 3\bar{\beta} B_1 - 2m_0 A_1) \psi_3^0\}; \quad a_{10} = -\frac{c\sqrt{D}}{4\bar{\beta} A_1^2} [(2m_0 A_1 - \bar{\beta} B_1 -$$

$$- 4\tilde{B}) \psi_1^0 + 2\bar{\beta} A_1 \psi_3^0];$$

$$a_{11} = -\frac{c\sqrt{D}\psi_1^0}{2A_1}; \quad a_{12} = \frac{2c\psi_1^0}{9A_1^2}; \quad a_{13} = -\frac{c}{12A_1^3 \bar{\beta}^2} \{[\bar{\beta}^2 (4\varepsilon - B_1^2) +$$

$$+ m_0 A_1 (3\bar{\beta} B_1 - 2m_0 A_1)] \psi_1^0 - \bar{\beta} A_1 (3\bar{\beta} B_1 - 2m_0 A_1) \psi_3^0\};$$

$$a_{14} = -\frac{c}{12\bar\beta A_1^2}[(5m_0A_1 - 2\bar\beta B_1)\psi_1^0 - 5\bar\beta A_1\psi_3^0]; \quad a_{15} = \frac{c\psi_1^0}{12A_1};$$

$$a_{16} = -\frac{c}{24\bar\beta^3 A_1^{7/2}}\{[2m_0\bar\beta A_1^2(2m_0B_1 - 3\bar\beta D) - 4m_0^3A_1^3 + 4\bar\beta^2\varepsilon \times$$

$$\times (2m_0A_1 - 3\bar\beta B_1) + 2\bar\beta^2 B_1^2\tilde B + 6\bar\beta^3 A_1B_1D]\psi_1^0 + \bar\beta A_1(4m_0A_1\tilde B -$$

$$- 2\bar\beta^2B_1^2 + 6\bar\beta^2A_1D - 8\bar\beta^2\varepsilon)\psi_3^0\}; \quad a_{17} = \frac{c}{4\bar\beta^2 A_1^{5/2}}[(\bar\beta^2\varepsilon - 2m_0\bar\beta A_1B_1 -$$

$$- 2\tilde B^2)\psi_1^0 + 2\bar\beta A_1\tilde B\psi_3^0]; \quad a_{18} = -\frac{c(\bar\beta A_1\psi_3^0 - \tilde B\psi_1^0)}{2\bar\beta A_1^{3/2}}; \quad a_{19} = -\frac{c\psi_1^0}{6\sqrt{A_1}};$$

$$a_{20} = -\frac{c(m_0\psi_1^0 - \bar\beta\psi_3^0)}{6\bar\beta^3\sqrt{A}}; \quad a_{21} = \frac{2c\psi_2^0\sqrt{D}}{A_1}; \quad a_{22} = -\frac{2c\psi_2^0}{A_1};$$

$$a_{23} = \frac{2c(\bar\beta A_1\psi_4^0 - \tilde B\psi_2^0)}{\bar\beta A_1^{3/2}}; \qquad a_{24} = \frac{2c\psi_2^0}{\sqrt{A_1}}; \quad a_{25} = \frac{2c(m_0\psi_2^0 - \bar\beta\psi_4^0)}{\bar\beta\sqrt{A}};$$

$$a_{26} = -\frac{c\sqrt{D}}{4\bar\beta A_1^2}[(2m_0A_1 - \bar\beta B_1 - 4\tilde B)\psi_1^0 + 2\bar\beta A_1\psi_3^0]; \quad a_{27} = -\frac{c\sqrt{D}\psi_1^0}{A_1};$$

$$a_{28} = -\frac{a_{26}}{\sqrt{D}}; \quad a_{29} = \frac{3c\psi_1^0}{4A_1}; \quad a_{30} = \frac{c}{4\bar\beta^2 A_1^{5/2}}[(\bar\beta^2\varepsilon - 2m_0\bar\beta A_1B_1 -$$

$$-2\tilde B^2)\psi_1^2 + 2\bar\beta A_1\tilde B\psi_3^0]; \quad a_{31} = -\frac{c(\bar\beta A_1\psi_3^0 - \tilde B\psi_1^0)}{\bar\beta A_1^{3/2}}; \quad a_{32} = -\frac{c\psi_1^0}{2\sqrt{A_1}};$$

$$a_{33} = \frac{c(m_0\psi_1^0 - \bar\beta\psi_3^0)}{2\bar\beta^2\sqrt{A}}; \quad b_i = -\tilde a_i,$$

где $\tilde a_i$ — коэффициент a_i, в которых вместо ψ_1^0 и ψ_3^0 записаны соответственно ψ_2^0 и ψ_4^0, и наоборот ($i = \overline{1,33}$). $\varepsilon = (\psi_1^0\psi_4^0 - \psi_2^0\psi_3^0)^2$.

Присоединенные переменные $\psi_i(t)$ в первом приближении остались теми же, что и в нулевом приближении. Поэтому как функция переключения (6), так и вся качественная картина вместе с процедурой определения начальных значений $\psi_i^0 (i = \overline{1,5})$, моментов переключения и конечного времени T остаются теми же. Тем самым в данной задаче оптимальный режим «устойчив» при переходе от однородного поля силы тяжести к линеаризованному центральному.

Задача сведена к решению алгебраических уравнений относительно начальных условий присоединенной системы, что дает решения с точностью до величин порядка Ω^2 в оптимальном значении функционала.

Список литературы: 1. *Клих Ю. А., Макаров Ю. Ф., Плотников В. А.* О включении особых участков в оптимальную траекторию. — Мат. физика, 1968, вып. 4, с. 14—19. 2. *Летов А. М.* Динамика полета и управления. — М.: Наука, 1969. — 205 с. 3. *Новоселов В. С.* Оптимальная траектория перехода первого порядка с орбиты ожидания на орбиту обращения вокруг массивного спутника. — Пробл. механики управляемого движения, 1972, вып. 1, с. 28—31. 4. *Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. — Усп. физ. наук, 1957, **63**, вып. 1, с. 38—41. 5. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. П., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. В.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961.—205 с.

Поступила в редколлегию 07.06.80.

УДК 517.944

МУЛЬТИ НАСЕР

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В КЛАССАХ УБЫВАЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Статья посвящена исследованию корректной разрешимости задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений

$$\overline{X}'(t) = A\overline{X}(t); \quad \overline{X}(t) = (X_i(t))_{i=1}^{\infty} \; A = (a_{ik})_{i,\,k=1}^{\infty}, \tag{1}$$
$$a_{ik} \in \boldsymbol{C}; \; t \in [0, T).$$

В ряде работ советских и зарубежных математиков (см. например [1—3] и др.) задача Коши для системы (1) изучалась либо в классе ограниченных последовательностей, либо в классе последовательностей, которые при каждом $t \in [0, T]$ входят в пространство l_p; $1 \leqslant p < \infty$. В работе [4] исследована задача Коши для (1) в случае, когда в каждой строке матрицы лишь конечное число элементов отлично от нуля в различных классах растущих последовательностей. Исследуем корректную разрешимость задачи Коши для (1) в широком наборе пространств убывающих последовательностей.

Пусть $f\{f(i)\}_{i=1}^{\infty}$; $f(i) > 0$ — неубывающая последовательность и $\alpha > 0$. Обозначим $E(\alpha, f) = \{\overline{X} = (X_i)_{i=1}^{\infty} : \|\overline{X}\|_{\alpha, f} = \sup\limits_i |X_i/e^{\alpha f(i)} < \infty\}$, очевидно, $E(\alpha, f)$ есть банахово пространство.

Пусть при любом $i \in N$ существует $S(i) \in N$ такое, что $a_{ij} = 0$ при $j < S(i)$. Пусть при каждой $i \in N$ существует $a(i) = \sum\limits_k |a_{ik}| < \infty$, обозначим $\tilde{a}(i) = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant i} a(j)$.

Поведение $S(i)$, $a(i)$ и $\tilde{a}(i)$ определяет классы корректной разрешимости задачи Коши для системы (1) при условии $\overline{X}(0) = \overline{X}_0$ (2). Задача Коши (1)—(2) называется равномерно корректно разрешимой (р. к. р) на [0, T из $E(\alpha, f)$ в $E(\beta, f)$, если для любого $\overline{X}_0 \in E(\alpha, f)$ существует единственное решение задачи Коши (1)—(2) $\overline{X}(t) \in E(\beta, f)$; $t \in [0, T]$, причем при некотором $C>0$ справедливо неравенство

$$\|\overline{X}\|_{\beta, f, T} = \sup_{[0,T]} \|\overline{X}(t)\|_{\beta f} \leqslant C\, \|\overline{X}_0\|_{\alpha, f},$$

при $\beta=\alpha$ будем говорить, что задача Коши р. к. р на $[0, T]$ в $E(\alpha, f)$.

I. Общие условия р. к. р. задачи (1)—(2)

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $\alpha>0$, $C>0$

$$\sup\,[\alpha(f(i)) - f(S(i)) + \ln a(i)] = C < \infty, \tag{3}$$

тогда задача (1)—(2) *на любом* $[0, T]$ *р. к. р в* $E(\alpha, f)$.

Доказательство. Задача (1)—(2) равносильна системе

$$\overline{X}(t) = \overline{X}_0 + \int_0^t A\overline{X}(\tau)\, d\tau$$

в пространстве

$$E(\alpha, f, T) = \{\overline{X}(t) : \|\overline{X}(t)\|_{\alpha, f, T} = \sup_{[0,T]} |\overline{X}(t)\|_{\alpha, f} < \infty\}. \tag{4}$$

Рассмотрим оператор

$$B\overline{X}(t) = X_0 + \int_0^t A\overline{X}(\tau)\, d\tau; \quad \|B\overline{X}(t)\|_{\alpha, f, T} \leqslant \|\overline{X}_0\|_{\alpha, f} + \sup_{[0,T]} \sup_{l} \times$$

$$\times \int_0^t \sum_k |a_{lk}|\, |X_k(\tau)|\, d\tau\, e^{\alpha f(l)} \leqslant \|\overline{X}_0\|_{\alpha, f} + \sup_{0,T} \sup_{l} \int_0^t \sum_k |a_{lk}|\, |X_k(\tau)|\, d\tau\, e^{\alpha f(k)} \times$$

$$\times\, e^{\alpha(f(l) - f(k))}\ \text{, но } k \geqslant S(i) \Rightarrow f(k) \geqslant f(S(i)),$$

откуда

$$\|B\overline{X}(t)\|_{\alpha, f, T} \leqslant \|\overline{X}_0\|_{\alpha, f} + T\|\overline{X}(t)\|_{\alpha, f, T} \sup_{l} \sum_k a_{lk}|\, e^{\alpha(f(l) - f(S(l)))} \leqslant$$

$\leqslant \|\overline{X}_0\|_{\alpha, f} + Te^{C}\|\overline{X}(t)\|_{\alpha, f, T}$ в силу (3), отсюда при любых $\overline{X}$, $\overline{Y} \in E(\alpha, f, T)$ имеем $\|B\overline{X}(t) - B\overline{Y}(t)\|_{\alpha, f, T} \leqslant T e^{C} \|\overline{X}(t) - \overline{Y}(t)\|_{\alpha, f, T}$ и при любом $N > 1$ $\|B^N\overline{X}(t) - B^N\overline{Y}(t)\|_{\alpha, f, T} \leqslant e^{NC} \dfrac{T^N}{N!} \|\overline{X}(t) - \overline{Y}(t)\|_{\alpha, f, T}$.

Тогда при достаточно большом N, B^N есть сжимающий оператор в $E(\alpha, f, T)$ и тогда существует единственное решение

$\overline{X}(t) \in \mathrm{E}(\alpha, f, T)$ такое, что $B\overline{X} \equiv \overline{X}$. Таким образом, уравнение (4), т. е. и задача (1)—(2), имеет в $\mathrm{E}(\alpha, f, T)$ единственное решение.

Непрерывная зависимость от $\overline{X}_0$ вытекает из оценок

$$\|\overline{X}(t)\|_{\alpha, f, T} = \left\| \left(1 + At + \ldots + A^{N-1} \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\right)\overline{X}_0 + \int_0^t \ldots \int_0^{t_{N-1}} A^N \times \right.$$

$$\left. \times \overline{X}(t_N)\, dt_N - dt_1 \right\|_{\alpha, f, T} \leqslant \|\overline{X}_0\|_{\alpha, f} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T^k}{k!} e^{CK} \cdot \frac{T^N}{N!} e^{CN} \|\overline{X}(t)\|_{\alpha, f, T},$$

откуда задача (1)—(2) р. к. р в $\mathrm{E}(\alpha, f)$ на любом $[0, T]$.

Замечание. Теорема 1 остается справедливой, если вместо $a(i)$ брать $\tilde{a}(i)$.

С л е д с т в и е. Если $\sup\limits_i \tilde{a}(i) < \infty$, то задача (1)—(2) — в классе ограниченных последовательностей. При этом условие $\sup\limits_i \tilde{a}(i) < \infty$ существенно, что видно из примера: система

$$x_i' t = \tilde{a}(i)\, X_i(t),\ X_i(0) = 1,\ i \geqslant 1$$

имеет решение $X_i(t) = \exp\{t\tilde{a}(i)\}$, которое не является ограниченным при любом $t > 0$, если $\sup\limits_i \tilde{a}(i) = \infty$.

Теорема 2. *Пусть при любых α и β, удовлетворяющих условиям $a < \beta < \alpha < b$, где $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$ — заданные числа, при некотором $C > 0$ и $\rho \in (0, 1)$ справедливо неравенство*

$$\sup_i \exp\{\beta f(i) - \alpha f(S(i)) + \ln a(i)\} \leqslant C(\alpha - \beta)^{-\rho}. \qquad (5)$$

Тогда при любом $\beta < \alpha$; $[\beta, \alpha] \subset (a, b)$ на любом $[0, T]$ задача (1)—(2) р. к. р из $\mathrm{E}(\alpha, f)$ в $\mathrm{E}(\beta, f)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma \in (a, b)$ и $\varepsilon > 0$ выбраны так, что $\gamma - \varepsilon > a$ и пусть $\overline{X}_0 \in \mathrm{E}(\gamma, f)$; покажем, что $A\overline{X}_0 \in \mathrm{E}(\gamma - \varepsilon, f)$.

Из (5) получаем, что

$$\|A\overline{X}\|_{\gamma-\varepsilon, f} \leqslant \sup_i \sum_k |a_{ik}| e^{\gamma f(i)} e^{(\gamma-\varepsilon) f(i) - \gamma f(k)} \leqslant \|\overline{X}_0\|_{\gamma, f} \sup_i \exp\{\ln a(i) +$$

$$+ (\gamma - \varepsilon) f(i) - \gamma f(S(i))\} \leqslant C\varepsilon^{-\rho} \|\overline{X}\|_{\gamma, f}.$$

Далее, при любом $N \geqslant 1$: $\|A^N \overline{X}_0\|_{\gamma - N\varepsilon, f} \leqslant C^N \varepsilon^{-N\rho} \|\overline{X}_0\|_{\gamma, f}$, положив теперь $\gamma = \alpha$; $\varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{N}$, получим

$$\|A^N \overline{X}_0\|_{\beta, f} \leqslant C^N \left(\frac{N}{\alpha - \beta}\right)^{N\rho} \|\overline{X}_0\|_{\alpha, f}. \qquad (6)$$

Тогда $\sum_k \frac{t^k}{k!} A^k \overline{X}_0$ сходится в $E(\beta, f)$ равномерно на $[0, T]$, так как

$$\sum_k \left\| \frac{t^k}{k!} A^k \overline{X}_0 \right\|_{\beta f} \leqslant \sum_k \frac{t^k}{k!} C^k \frac{k^{k\rho}}{(\alpha-\beta)^{k\rho}} \|\overline{X}_0\|_{\alpha, f}. \qquad (7)$$

При этом

$$\overline{X}(t) = \sum_k \frac{t^k}{k!} A^k \overline{X}_0$$

есть решение задачи (1)—(2). Оно непрерывно зависит от $\overline{X}_0$ в силу (7). Докажем теперь единственность решения. Пусть $\overline{Y}(t) \in \mathrm{E}(\beta, f, T)$ — другое решение задачи (1)—(2), тогда $\overline{X}(t) - \overline{Y}(t) = \int_0^t \ldots \int_0^{t_{N-1}} A^N(\overline{X}(t_N) - \overline{Y}(t_N))\, dt_N - dt_1$ и при любом $\gamma \in (\alpha, \beta)$

$$\|\overline{X}(t) - \overline{Y}(t)\|_{\gamma, f, T} \leqslant \left(\frac{N}{\beta-\gamma}\right)^{N\rho} \frac{C^N T^N}{N!} \|\overline{X}(t) - \overline{Y}(t)\|_{\beta, f, T},$$

откуда при $N \to \infty$ заключаем:

$$\overline{X}(t) = \overline{Y}(t); \ t \in [0, T].$$

Замечание. Теорема 2 остается справедливой, если вместо $a(i)$ брать $\tilde{a}(i)$. В требовании (5) условие $\rho \in (0, 1)$, вообще говоря, ослабить нельзя.

Пример. Рассмотрим задачу $x_i'(t) = iX_i(t)$; $X_i(0) = e^{-\alpha i}$, $i \geqslant 1$. Положим $f(i) = i$, тогда соотношение (5) имеет вид

$$\sup_i [\exp(\beta i - \alpha i + \ln i)] = \frac{1}{e(\alpha-\beta)}, \text{ здесь } \rho = 1.$$

Решение задачи имеет вид $X_i(t) = \exp(i(t-\alpha))$; $i \geqslant 1$, и при $T > \alpha - \beta$ это решение не принадлежит пространству $\mathrm{E}(\beta, f)$ на $[0, T]$. Найдем сначала условия корректной разрешимости задачи в наиболее узком из пространств убывающих последовательностей — в пространстве финитных последовательностей. Для этого введем некоторые определения.

Система (1) называется верхнетреугольной, если $S(i) \underset{i\to\infty}{\to} \infty$. Верхнетреугольная система называется сильно-верхнетреугольной, если при i достаточно большом $S(i) \geqslant i$. Пусть $\Phi = \{\overline{x} = (X_i)_{i=1}^{\infty};\ \exists K(\overline{X}): X_i \equiv 0 \text{ при } i > K(\overline{X})\}$.

Определение 1. Будем говорить, что $\overline{X}(t)\in\Phi$ на $[0, T]$, если существует $n_0=n_0(\overline{X})$ такое, что при любом $n>n_0$ и любом $t\in[0, T]: X_n(t) \equiv 0$.

Определение 2. Будем говорить, что $\overline{X}_{<n>}(t)\underset{n\to\infty}{\to}\overline{X}(t)$ в Φ на $[0, T]$, если *а*) существует m_0 такое, что $\forall n\geqslant 1$; $\forall m>m_0$ и $\forall t\in[0, T]$:

$$X_m(t)=X_{<n>m}(t);\ \text{б)}\ X_{<n>m}(t)\underset{n\uparrow\infty}{\to}X_m(t)$$

равномерно на $[0, T]$ при любом $m\leqslant m_0$.

Теорема 3. *Если система (1) сильно-верхнетреугольная, то задача (1)—(2) р. к. р в пространстве* Φ.

Доказательство. Пусть $\overline{X}_0\in\Phi$, так что $\exists j_0:\forall j>j_0$, $X_{0j}=0$. Обозначим $A_{<j_0>}=(a_{ij})$ $i, j=1, 2,\ldots, j_0$ и рассмотрим задачу $\overline{Z}'(t)=A_{<j_0>}\overline{Z}(t)$; $\overline{Z}(0)=(X_{01},\ldots, X_{0j_0})$. Пусть $\overline{Z}_{<j_0>}(t)=\exp(tA_{<j_0>}\overline{Z}(0)$ — решение этой системы, тогда $\overline{X}(t)=(\overline{Z}_{<j_0>}(t), 0, 0, —)$ есть решение задачи (1) — (2) и $\overline{X}(t)\in\Phi$. Единственность. Пусть $\overline{Y}(t)\in\Phi$ — другое решение. Тогда $\overline{Z}(t)=\overline{X}(t)-\overline{Y}(t)\in\Phi$ есть решение системы (1) и $\overline{Z}(0)\equiv\overline{0}$. Так как $\overline{Z}(t)\in\Phi$, то существует j_1 такое, что $\forall j>j_1$ и $\forall t$: $Z_j(t)\equiv 0$, берем $j_2=\max(j_0, j_1)$, тогда

$$Z_j'(t)=\sum_{k=1}^{j_2}a_{jk}Z_k(t),\ Z_j(0)=0.$$

Это конечная система, которая имеет единственное решение $\overline{Z}_{<j_2>}(t)=(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{j_2})=(0, 0, \ldots, 0)$, откуда $\overline{Z}(t)\equiv\overline{0}$, т. е. $\overline{X}(t)\equiv\overline{Y}(t)$. Непрерывная зависимость от $\overline{X_0}$ вытекает из того, что у нас конечная система.

Замечание. Условие о сильно-верхнетрехугольности существенно.

Пример. Задача $X_1'(t)=0$; $X_i'(t)=X_{i-1}(t)$, $i>1$; $X_1(0)=1$; $X_i(0)=0$, $i>1$ имеет решение $X_i(t)=\dfrac{t_{i-1}}{(i-1)!}$, очевидно, это решение не принадлежит Φ при $t>0$.

В следующей теореме в случае, когда $a(i)$ убывает, найдены классы р. к. р для (1)—(2) в зависимости от скорости этого убывания и от $S(i)$.

Обозначим

$$C_1 = \operatorname{Inf}_i \left(\frac{\max\limits_{0<j<S(i)} (-\ln a(j))}{\max\limits_{0<j<i} (-\ln a(j))} \right); \quad C_2 = \operatorname{Inf}_i \left(\frac{-\ln a(i)}{\max\limits_{0<j<i}(-\ln a(j))} \right).$$

Имеет место

Теорема 4. Пусть $\operatorname{Inf} a(i) = 0$ и $f(i) = \max\limits_{0<j<i} (-\ln a(j))$, *тогда задача* (1)—(2) *р. к. р в* Е (α, f)

1) *при любом* $\alpha \leqslant C_2$; 2) *при любом* $\alpha > 0$ *для сильно-верхнетреугольной системы;* 3) *при любом* $\alpha \leqslant \frac{C_2}{1-C_1}$, *если* $C_1 \neq 0$, *и при* $\alpha > 0$, *если* $C_1 = 0$ *для слабо-верхнетреугольной системы.* Доказательство основано на применении теоремы 1 и оценки (в случае $S(i) < i$)

$$\alpha [f(i) - f(S(i))] + \ln a(i) = \alpha [\max_{0<j<i} (-\ln a(j)) \max_{0<j<S(i)} (-\ln a(j))] + \\ + \ln a(i) \leqslant \max_{0<j<i} (-\ln a(j)) [\alpha - \alpha C_1 - C_2].$$

Замечание. Можно построить примеры, показывающие, что в более узких классах последовательностей задача (1)—(2) может оказаться неразрешимой.

II. Корректная разрешимость задачи Коши для сильно-верхнетреугольных систем

Теорема 5. *Пусть при достаточно больших* $i \in N$ *справедливы неравенства* $S(i) \geqslant Ai$; $A > 1$; $\tilde{a}(i) \leqslant B_1 i^h + B_2$; B_1, B_2, $h > 0$ *и пусть* $f(i) = \ln^2 i$; $F(i) = g(i) \ln^2 i$ $g(i) \to \infty$, *тогда задача* (1)—(2) *р. к. р. в* Е (α, f) *при* $\alpha \geqslant \frac{h}{2\ln A}$ *и в* Е (α, F) *при любом* $\alpha > 0$.

Доказательство. Установим справедливость соотношения (3). При больших i имеем $\alpha [f(i) - f(S(i))] + \ln \tilde{a}(i) \leqslant \leqslant \alpha [\ln^2 i - \ln^2 Ai] + \ln (B_1 i^h + B_2) \leqslant C_1 + \ln i [h - 2\alpha \ln A] \leqslant C_2$ при $\alpha \geqslant \frac{h}{2\ln A}$.

Далее, $\alpha [F(i) - F(S(i))] + \ln \tilde{a}(i) \leqslant -2\alpha g(i) \ln i \ln A + h \ln i + C_1 \leqslant C_2$ при любом $\alpha > 0$, так как $g(i) \to \infty$.

Замечание. В более широких классах последовательностей Е (α, f_0) $f_0(i) = 0(\ln^2 i) : \alpha > 0$ или даже Е (α, f) при $\alpha < \frac{h}{2\ln A}$ задача (1)—(2) может иметь более одного решения.

Пример. Рассмотрим задачу: $X'_i(t) = iX_{2i}(t)$; $X_i(0) = 0, i = 1, 2\ldots$, она имеет нетривиальное решение:

$X_{2i}(t) = \alpha^i(t)/2^{i(i+1)/2}$, $i = 1, 2\ldots$; $X_i(t) = 0$ при $i \neq 2^k$,

где $\alpha(t) \not\equiv 0$ — неквазианалитическая функция и это решение содержится в $E\ (\alpha, f)$; $f(i) = \ln^2 i$ при $\alpha < \frac{1}{2\ln 2}$.

Теорема 6. *Пусть при i достаточно больших справедливы неравенства:* $S(i) \geqslant i + H$, $H > 0$; $\tilde{a}(i) \leqslant B_1 i^h + B_2$; B_1, B_2, $h > 0$ *и пусть* $f(i) = i \ln i$; $F(i) = g(i) i \ln i$, $g(i) \uparrow \infty$, тогда задача (1)—(2) р. к. р в $E\ (\alpha, f)$ при $\alpha \geqslant \frac{n}{H}$ и в $E\ (\alpha, F)$ при любом $\alpha > 0$.

Доказательство. Установим справедливость соотношения (3) при i, больших $\alpha[f(i) - f(S(i))] + \ln \tilde{a}(i) \leqslant \alpha[i \ln i - (i + H)\ln(i + H) + \ln(B_1 i^h + B_2) \leqslant h \ln i - \alpha H \ln i + C_1 \leqslant C_2$ при $\alpha \geqslant h/H$;

$\alpha[F(i) - F(S(i))] + \ln \tilde{a}(i) \leqslant (h - \alpha H g(i)) \ln i + C_l \leqslant C_2$, так как $g(i) \uparrow +\infty$.

Замечание. Ослабив требование на $S(i)$, мы вынуждены брать $f(i)$ растущей быстрее при $i \to \infty$, чем это позволяла теорема 5. Можно построить пример, показывающий, что в более широких классах последовательностей задача (1)—(2) может иметь более одного решения.

Для произвольно сильно-верхнетреугольных систем справедлива.

Теорема 7. *Пусть система* (1) *сильно-верхнетреугольная и* $\sup_i \tilde{a}(i) = +\infty$. *Тогда при любых* α и β: $0 < \beta < \alpha$ *задача (1)—(2) р. к. р из* $E\ (\alpha, f)$ *в* $E\ (\beta, f)$, *если* $f(i) = \tilde{a}^{\gamma}(i)\ g(i)$, *где* $\gamma > 1$ *и* $g(i) > 0$ — *любая неубывающая последовательность.*

Доказательство. Установим справедливость теоремы 2: при некоторых C, $C_1 > 0$ и $\gamma' \in (1, \gamma)$ имеем $(\beta - \alpha) f(i) + \ln \tilde{a}(i) < \ln \tilde{a}(i)[1 - C(\alpha - \beta)\tilde{a}^{\gamma'}(i)] + C_1 \equiv \lambda(i, \alpha - \beta) + C_1$ при тех i, для которых $C(\alpha - \beta)\ \tilde{a}^{\gamma'}(i) > 1$, имеем $\lambda(i, \alpha - \beta \leqslant 0 < \frac{-1}{\gamma'} \ln[C(\alpha - \beta)]$, а для тех i, при которых $C(\alpha - \beta)\tilde{a}^{\gamma'}(i) \leqslant 1$, имеем $\lambda(i, \alpha - \beta) \leqslant \ln \tilde{a}(i) \leqslant \frac{-\ln C(\alpha - \beta)}{\gamma'}$,

так как $\gamma' > 1$, то приходим к справедливости соотношения (5).

Замечание. Существенное ослабление требования на рост $f(i)$, т. е. расширение совокупности классов корректности задачи (1)—(2), вообще невозможно. Решение задачи

$X_1'(t) = \tilde{a}\ X_i(t);\ X_i(0) = \exp\{-\alpha \tilde{a}^{\gamma}(i)\},\ i \geqslant 1$ есть $X_i(t) = \exp\{t\tilde{a}(i - \alpha\tilde{a}(i)^{\gamma}\}$ при $\gamma < 1$ и любом $\beta: 0 < \beta < \alpha$ это решение не принадлежит $E(\beta, f)$; $f(i) = \tilde{a}(i)^{\gamma}$.

Так, ослабление требований на $S(i)$ приводит к сужению совокупности классов корректности задачи Коши для систем сильно-верхнетреугольного вида, расширение этой совокупности возможно за счет ограничения на рост $\tilde{a}(i)$.

Теорема 8. *Пусть* $\tilde{a}(i) \leqslant C$; $f(i) > 0$ — *любая неубывающая последовательность. Тогда для сильно-верхнетреугольной системы задача (1), (2) р. к. р в* $E\ (\alpha, f)$ *при любом* $\alpha > 0$.
Доказательство вытекает из (3).

III. Корректная разрешимость задачи Коши для верхнетреугольных систем

Изучив задачу Коши для сильно-верхнетреугольных систем, мы пришли в случае $\sup\limits_i \tilde{a}(i) = +\infty$ к требованиям ограничения снизу роста последовательности $f(i)$, определяющей классы корректности задачи.

Во всех теоремах параграфа II не было никаких ограничений сверху на рост $f(i)$.

Отказываясь от требования о сильно-верхнетреугольном виде, мы уже не можем рассчитывать на корректную разрешимость задачи (1), (2) в классах быстро убывающих последовательностей, поскольку там может нарушиться существование решения.

Теорема 9. *Пусть* $a(i) \leqslant C$ *и при достаточно больших* i *справедливо неравенство:* $S(i) \geqslant iH$, $H > 0$, *тогда задача* (1), (2) *р. к. р из* $E\ (\alpha, f)$ *в* $E\ (\beta, f)$ *при* $f(i) = i \ln i$ *и любых* α *и* β *таких, что* $0 < \beta < \alpha < \frac{1}{H}$; *из* $E\ (\alpha, F)$ *в* $E\ (\beta, F)$ *при любых* $0 < \beta < \alpha$; $F(i) = g(i)\ i \ln i\ g(i) \downarrow 0\ f(i) \uparrow +\infty$ *эта задача также р. к. р в* $E\ (\alpha, G)$ *при* $G(i) = i$ *и любом* $\alpha > 0$, *в* $E\ (\alpha, L)$ *при* $L(i) = ig(i)$, $g(i) \downarrow 0$ *и любом* $\alpha > 0$.

Доказательство. При $f(i) = i \ln i$ воспользуемся теоремой 2: $\varphi(\alpha, \beta, i) \equiv \beta f(i) - \alpha f(i - H) = \beta i \ln i - \alpha(i - H) \ln(i - H) \leqslant \alpha H \ln i - (\alpha - \beta) i \ln i + C$; $c > 0$. Далее, при $i < \frac{1}{\alpha - \beta}$

имеем $\varphi(\alpha, \beta, i) < C + \alpha H \ln\left(\frac{1}{\alpha - \beta}\right)$, а при $i > \frac{1}{\alpha - \beta}: \varphi(\alpha \beta, i) \leqslant$ $\leqslant C \leqslant C + \alpha H \ln\left(\frac{1}{\alpha - \beta}\right)$, откуда следует справедливость соотношения (5). При $0 < \beta < \alpha < \frac{1}{H}$ имеем $p = \alpha H < 1$. При $F(i) = g(i)\, i \ln i$ рассмотрение аналогично.

Для Е (α, G) и Е (α, L) используем теорему 1.

Замечание. Таким образом, если $a(i) \leqslant C$, то в случае $S(i) \geqslant$ $\geqslant i - H$ ограничения на рост $f(i)$ имеются лишь сверху. Эти ограничения существенны.

Пример. Задача $X_1'(t) = 0$; $X_i'(t) = X_{i-1}^{(t)}$; $i > 1$, $X_1(0) = 1$; $X_i(0) = 0$; $i > 1$ имеет единственное решение: $X_i(t) = \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}$, $i \geqslant 1$, здесь $H = 1$, а при $\beta > 1$, $f(i) = i \ln i$ это решение не принадлежит Е(β, f).

Теорема 10. *Пусть $a(i) \leqslant C$ и при больших i справедливы оценки $S(i) \geqslant Ai$, $0 < A < 1$* (1.1) *или $S(i) \geqslant Ai^h$; $A > 0$, $0 < h < 1$* (1.2). *Тогда при любом $\alpha > 0$ задача* (1)—(2) *р. к. р в* Е (α, f), *где $f(i) = g(i) \ln i$ в случае (1.1) и $f(i) = g(i) \ln \ln i$ в случае (1.2), здесь $g(i) > 0$ — любая невозрастающая последовательность.*

Доказательство. Соотношение (3) в случае (1.1) принимает вид $\alpha[f(i) - f(S(i))] \leqslant \alpha[g(i) \ln i - g(Ai) \ln Ai] \leqslant$ $\leqslant -\alpha g(i) \ln A \leqslant C$ при любом $\alpha > 0$, так как $g(i) > 0$ — невозрастающая последовательность.
Случай (1.2) рассматривается аналогично.

Замечание. Теорема 10 гарантирует корректную разрешимость задачи (1), (2) в классах последовательностей, убывающих при $i \to +\infty$ не быстрее $\exp(-\alpha \ln i)$ (соответственно в случае (1.2) не быстрее $\exp(-\alpha \ln \ln i)$) и в более широких классах.

В более узких классах задача (1), (2) может оказаться неразрешимой.

Пример. Рассмотрим задачу: $X_i'(t) = \frac{1}{2} X_{i/2}^{(t)}$, $i = 2^k$; $X_i'(t) = 0$, $i \neq 2^k$; $X_1(0) = 1$, $X_i(0) = 0$; $i > 1$.

Для этой системы выполнено условие (1.1) при $A = \frac{1}{2}$. Решение имеет вид

$$X_{2^i}(t) = \frac{t^i}{2^i\, i!}; \; X_i(t) = 0 \text{ при } i \neq 2^k.$$

Это решение содержится в классах $E(\alpha_1, f_\gamma(i))$, где $f_\gamma(i) = (\ln i)^\gamma$ при $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$. Однако это решение не принадлежит $E(\alpha, f_\gamma(i))$ при $\gamma > 1$. Отказавшись от условия $\sup_i \tilde{a}(i) < \infty$, мы, как следует из результатов параграфа II, были вынуждены ограничить рост $f(i)$ снизу. Так, сравнивая результаты теорем 7 и 9, мы видим, что в случае $\tilde{a}(i) \leqslant B_1 i^h + B_2$; $S(i) \geqslant i - H$; $f(i)$ должна, с одной стороны, расти не медленнее, чем i^h, с другой, — не быстрее $i \ln i$.

При $h > 1$ приходим к противоречию.

Действительно, задача $X_1'(t) = 0$; $X_i'(t) = i^h X_{i-1}(t)$; $i > 1$, $X_1(0) = 1$; $X_i(0) = 0$ при $i > 1$ имеет решение $X_i(t) = (i!)^h \times \times \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}$; $i \geqslant 1$.

Очевидно, других решений задача не имеет. Это решение при $h > 1$ является возрастающей, а не убывающей последовательностью, в классах убывающих последовательностей задача неразрешима.

Итак, им нужно найти определенное согласование оценок возможного роста последовательностей $\tilde{a}(i)$ и $S(i)$.

Введем следующие обозначения: $l_0(i) = i$; $l_1(i) = \ln i$; $l_2(i) = \ln \ln i$; $l_3(i) = \ln \ln \ln i$.

Задачу (1)—(2) будем исследовать при выполнении одного из следующих условий: при достаточно больших i имеем

$$S(i) \geqslant i - H \qquad H > 0 \qquad (S_1)$$
$$S(i) \geqslant Ai \qquad 0 < A < 1 \qquad (S_2)$$
$$S(i) \geqslant Ai^h \qquad A > 0,\ 0 < h < 1 \qquad (S_3).$$

Относительно коэффициентов системы будем предполагать выполнение при больших i одного из условий:

$$\tilde{a}(i) \leqslant B\, i^\gamma \qquad 0 < \gamma < 1, \quad B > 0 \quad (a_1)$$
$$\tilde{a}(i) \leqslant B(\ln i)^\gamma \qquad 0 < \gamma < 1, \quad B > 0 \quad (a_2)$$
$$\tilde{a}(i) \leqslant B(\ln \ln i)^\gamma \qquad 0 < \gamma < 1, \quad B > 0 \quad (a_3).$$

Теорема 11. *Пусть система* (*1*) *удовлетворяет условиям* S_k и a_k, $k = 1, 2, 3$, *тогда — а) задача (1)–(2) р. к. р. из* $E(\alpha, f_k)$ в $E(\beta, f_k)$, *где* $f_k(i) = l_{k-1}(i)\, l_k(i)$, $k = 1, 2, 3$; α, β *такие, что* $0 < \beta < \alpha < b_k$, *где* $b_1 < \frac{1-\gamma}{H}$; $b_2 < \frac{1-\gamma}{|\ln A|}$; $b_3 < \frac{1-\gamma}{|\ln \ln A|}$;

б) *задача* (1)—(2) *р. к. р из* $E(\alpha, f_k)$ *в* $E(\beta, f_k)$, *где* α, β *такие, что* $0<\beta<\alpha$ и $f_k(i)=g_k(i)l_{k-1}(i)l_k(i)$, *где* $g_k(i)$ — *любая убывающая последовательность такова, что* $\lim\limits_{i\uparrow\infty} g_k(i)=0$; $g_k(i)\geqslant\geqslant C(1+l_{k-1}(i))^{-\delta}$, $\delta\in(0, 1-\gamma)$, $k=1, 2, 3$.

Доказательство. В случае $k=1$, а

$\exp\{\beta f(i)-\alpha f(S(i))+\ln\tilde{a}(i)\}\leqslant\exp\{\beta i\ln i-\alpha(i-H)\ln(i-H)+\ln(Bi^{\gamma})\}\leqslant\exp\{C+\ln i[\alpha H+\gamma-(\alpha-\beta)i]\}\equiv\lambda(i, \alpha-\beta)$ для тех i, при которых $(\alpha-\beta)i\leqslant\alpha H+\gamma$, имеем $\lambda(i, \alpha-\beta)\leqslant\leqslant C_1(\alpha-\beta)^{-(b_1H+\gamma)}$, где $b_1H+\gamma<1$, а для остальных i имеем $\lambda(\alpha-\beta, i)\leqslant C_2$.

Таким образом, теорема 2 применима.

Остальные случаи аналогичны.

Список литературы: 1. *Bellman R.* The boundness of solution of infinite system of linear differential equations.—Duke Math.. 1947, 14, p. 695—706. 2 *Luke J. M., Wong R.* On infinite systems of linear differential equations. — Canadian Journ. of Mathematics, 1975, 27, n. 3, p. 691—702. 3. *Персидский К. П.* Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений. 1. Основные свойства счетных систем линейных дифференциальных уравнений. — Изв. АН Каз ССР. Сер. мат., 1959, № 7, с. 52—71. 4. *Борок В. М.* Задача Коши для финитно-бесконечных систем линейных дифференциальных уравнений. — Изв. вузов. Математика, 1981, № 31, с. 28—35.

Поступила в редколлегию 11.01.82.

УДК 517.944

МУЛЬТИ НАСЕР

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ УБЫВАЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В предыдущей работе автора [1] была изучена задача Коши $\overline{X}'(t)=A\overline{X}(t)$ (1); $X(0)=\overline{X}_0$ (2), где $A=(a_{ik})$, $i, k==1, 2\ldots$, в пространствах убывающих последовательностей $E(\alpha, f)=\{\overline{X}(X_i)_{i=1}^{\infty}:\|\overline{X}\|_{\alpha,f}=\sup\limits_{i}|X_i|e^{\alpha f(i)}<\infty\}$, где $f(i)>0$ — неубывающая последовательность; $\alpha>0$. В настоящей работе аналогичные исследования проводятся в классах пространств $E(\alpha, f, p)=\{\overline{X}=(X_i)_{i=1}^{\infty}:\|\overline{X}\|_{\alpha,f,p}=\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|X_i|^p e^{\alpha p f(i)}\}^{1/p}<\infty\}$, $\alpha>0$ при $p\geqslant 1$. Исследование задачи (1)—(2) в пространстве l_p проведено в работе Беллмана [2]. Как и в [1], обозначим $S(i)\in N$ величину $a_{ik}=0$ при $k<S(i)$. Пусть $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $a_q(i)=\sum\limits_{k}|a_{ik}|^q$; $a(i)=\sup\limits_{k}|a_{ik}|$, $\tilde{a}_q(i)=\max\limits_{0<j<i}a_q(j)$; $\tilde{a}(i)=\max\limits_{0<j<i}\times\times a(j)$.

При изучении (1)—(2) в Е (α, f, p), $p>1$ будем предполагать конечными величины $a_q(i)$ при любом $i\in N$, а при $p=1$ — величину $a(i)$. Определение верхнетреугольной, сильно-верхнетреугольной системы (1) и равномерно корректной разрешимости (р. к. р) задачи (1)—(2) такие же, как в (1): в последнем определении следует иметь в виду норму в Е (α, f, p).

Общие условия р. к. р задачи (1)—(2)

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $\alpha>0$, $C>0$ *имеют место соотношения:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp\{\alpha p\,(f(i)-f(S(i)))+(p-1)\ln a_q(i)\}=C<\infty; \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp\{\alpha\,(f(i)-f(S(i)))+\ln a(i)\}=C<\infty. \qquad (4)$$

(в случае $p=1$)
Тогда задача Коши (1), (2) *р. к. р в* Е (α, f, p) *на любом* $[0, T]$ *(соответственно в* Е $(\alpha, f, 1)$).

Теорема 2. *Пусть при любых* α *и* β, *удовлетворяющих условиям* $a<\beta<\alpha<b$, *где* $0\leqslant a<b\leqslant\infty$ — *заданные числа, при некотором* $C>0$ *и* $\rho\in(0, p)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp\{\beta pf(i)-\alpha pf(S(i))+(p-1)\ln a_q(i)\}\leqslant C(\alpha-\beta)^{-\rho} \qquad (5)$$

(соответственно $\rho\in(0, 1)$ *и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp\{\beta f(i)-\alpha f(S(i))+\ln a(i)\}\leqslant C(\alpha-\beta)^{-\rho}. \qquad (5')$$

Мы ограничимся доказательством теоремы 2, поскольку доказательства обеих теорем, в основном, аналогичны полученным в [1] теоремам 1 и 2.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим лишь случай $p>1$ ($p=1$ аналогично). Пусть $\gamma\in(a, b)$ и $\varepsilon>0$ такие, что $\gamma-\varepsilon>a$. Пусть $\overline{X}_0\in$ Е (γ, f, p), покажем, что $A\overline{X}_0\in$ Е $(\gamma-\varepsilon, f, p)$:

$$\|A\overline{X}\|_{\gamma-\varepsilon,f,p}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}X_{0j}\right|^p e^{(\gamma-\varepsilon)pf(i)}\right)^{1/p}\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|a_{ij}|^q}{e^{\gamma qf(j)}}\right)^{p/q}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{j=1}^{\infty}|X_{0j}|\,e^{\gamma pf(j)}\right)e^{(\gamma-\varepsilon)pf(i)}\right\}^{1/p}\leqslant\Big[\|\overline{X}_0\|_{\gamma,f,p}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{p-1}\times$$

$$\times\exp\left((\gamma-\varepsilon)pf(i)-\gamma pf(S(i))\right)\Big]^{1/p}\leqslant C_1\varepsilon^{-\rho_1}\|\overline{X}_0\|_{\gamma,f,p}, \text{ где } C_1=$$

$$=C^{1/p};\ \rho_1=\frac{\rho}{p}\in(0, 1)$$

в силу неравенства Гельоера.

Отсюда получаем при любом $N \geqslant 1$ $\|A^N \bar{X}_0\|_{\gamma - N\varepsilon, f, p} \leqslant$ $\leqslant C_1^N \varepsilon^{-N\rho_1} \|\bar{X}_0\|_{\gamma, f, p}$, положив $\gamma = \alpha$, $\varepsilon = (\alpha - \beta)/N$, получаем

$$\|A^N \bar{X}_0\|_{\gamma - N\varepsilon, f, p} \leqslant C_1^N (N/(\alpha - \beta))^{N\rho_1} \|\bar{X}_0\|_{\gamma, f, p}, \tag{6}$$

тогда $\sum_k \frac{t^k}{k!} A^k \bar{X}_0 \equiv \bar{X}(t)$ сходится в $\mathrm{E}(\beta, f, p)$ равномерно на $[0, T]$, так как

$$\sum_k \left\| \frac{t^k}{k!} A^k \bar{X}_0 \right\|_{\beta, f, p} \leqslant \sum_k \frac{t^k}{k!} C_1^k \frac{k^{k\rho_1}}{(\alpha - \beta)^{k\rho_1}} \|\bar{X}_0\|_{\alpha, f, p}. \tag{7}$$

Откуда $\bar{X}(t) = \sum_k \frac{t^k}{k!} A^k \bar{X}_0 \in \mathrm{E}(\beta, f, p)$ есть решение задачи (1), (2). Оно непрерывно зависит от $\bar{X}_0$ в силу (7).
Докажем единственность решения.
Пусть $\bar{Y}(t) \in \mathrm{E}(\beta, f, p, T)$ — другое решение задачи (1), (2), где $\mathrm{E}(\beta, f, p, T) = \{\bar{X} : \|\bar{X}\|_{\beta, f, pT} = \sup_{[0, T]} \|\bar{X}(t)\|_{\beta, f, p} < \infty\}$, тогда $\bar{X}(t) -$ $- \bar{Y}(t) = \int_0^k \ldots \int_0^{tN-1} A^N(\bar{X}(t_N) - \bar{Y}(t_N))\, dt_N - dt_1$ и при любом $\gamma \in (\alpha, \beta)$ имеем

$$\|\bar{X}(t) - \bar{Y}(t)\|_{\gamma, f, p, T} \leqslant \left(\frac{N}{\beta - \gamma}\right)^{N\rho_1} C_1^N \frac{T^N}{N!} \|\bar{X}(t) - \bar{Y}(t)\|_{\beta, f, p, T}.$$

Отсюда при $N \to \infty$ получаем $\bar{X}(t) = \bar{Y}(t)$.

Замечание 1. Если $\sum_i a_q(i)^{p-1} < \infty$ (соответственно $\sum_i a(i) < \infty$), то задача (1)—(2) р. к. р в пространстве l_p (соответственно l_1). Можно построить пример, показывающий, что условие $\sum_i a_q(i)^{p-1} < \infty$ ($\sum_i a(i) < \infty$) существенно.

Замечание 2. Можно найти пример, показывающий, что в требовании (5), (5′) нельзя ослабить условие $\rho \in (0, p)$ ($\rho \in (0, 1)$).

Замечание 3. Теоремы 1, 2 остаются справедливыми, если вместо $a_q(i)$ $(a(i))$ брать $\tilde{a}_q(i)$ $(\tilde{a}(i))$.

Обозначим $C_{1,q} = \operatorname{Inf}_i \left(\dfrac{-\ln a_q(i)}{\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant i} (-\ln a_q(j))} \right)$;

$$C_{2,q} = \operatorname{Inf}_i \left(\frac{\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant S(i)} (-\ln a_q(j))}{\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant i} (-\ln a_q(j))} \right); \quad C_1 = \operatorname{Inf}_i \left(\frac{-\ln a(i)}{\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant i} (-\ln a(j))} \right);$$

$$C_2=\inf_i\left(\frac{\max\limits_{0<j<S(i)}(-\ln a(j))}{\max\limits_{0<j<i}(-\ln a(j))}\right);\quad \lambda_q=\overline{\lim}\left(\frac{\ln i}{\max\limits_{0<j<i}(-\ln a_q(j))}\right);$$

$$\lambda=\overline{\lim}\left(\frac{\ln i}{\max\limits_{0<j<i}(-\ln a(j))}\right).$$

Теорема 3. *Пусть* $\inf\limits_i a_q(i)=0$ $(\inf\limits_i a(i)=0)$ *и* $f(i)=\max\limits_{0\leqslant j<i}(-\ln\times$ $\times a_q(j))$, $(f(i)=\max\limits_{0\leqslant j<i}(-\ln a(j))$. *Пусть* $0\leqslant\lambda_q<(p-1)C_1$ $(0\leqslant\lambda<C_1)$, *тогда задача* (1), (2) *р. к. р* $E(\alpha, f, p)$ $(E(\alpha, f, 1))$

1) *при любом* $\alpha<\dfrac{-\lambda_q+(p-1)C_1}{p}$ $(\alpha<C_1-\lambda)$;

2) *при любом* $\alpha>0$, если $C_{2,q}=1$ $(C_2=1)$, *и при*

$$\alpha<\frac{-\lambda_q+(p-1)C_1}{p-pC_2}\left(\alpha<\frac{-\lambda+C_1}{1-C_2}\right)$$

в случае $C_{2,q}\neq 1$ $(C_2\neq 1)$ *для верхнетреугольной системы* $(S(i)<$ $<i)$;

3) *при любом* $\alpha>0$ *для сильно-верхнетреугольной системы.*
Доказательство основано на применении теоремы 1 и оценки (в случае $p>1$)

$$\sum_i \exp\{\alpha pf(i)-\alpha pf(S(i))+(p-1)\ln a_q(i)\}\leqslant\sum_i\exp\times$$
$$\times\left(\max_{0\leqslant j\leqslant i}(-\ln a_q(j))(\alpha p-\alpha pC_2-(p-1)C_1\right)$$

(случай $p=1$ аналогичен).

Замечание. Можно найти примеры, показывающие существенность оценками α и $\lambda_q(\lambda)$.
В случае роста $a_q(i)$ $(a(i))$ докажем теорему.

Теорема 4. *Пусть при* i *достаточно больших справедливы неравенства*

$$\tilde a_q(i)\leqslant B_1 i^h+B_2\,(\tilde a(i)\leqslant B_1 i^h+B_2);\ B_1,\ B_2,\ h>0$$

и относительно $S(i)$

$$S(i)\geqslant Ai\quad A>1 \tag{1.1}$$

или

$$S(i)\geqslant i+H\quad H>0. \tag{1.2}$$

Тогда 1) в случае (1.1): задача (1)—(2) р. к. р в $E(\alpha, f, p)$ $(E(\alpha, f, 1))$ при

$$\alpha>\frac{1+(p-1)h}{2p\ln A}\left(\alpha>\frac{1+h}{2\ln A}\right)$$

и в Е (α, Fp) (Е $(\alpha, F, 1))$ при любом $\alpha>0$.
Здесь $f(i)=\ln^2 i$; $F(i)=g(i)\ln^2 i$ $g(i)\uparrow\infty$ — любая возрастающая последовательность;

2) в случае (1.2) задача (1)—(2) р. к. р в $E(\alpha, f, p)\times$

$\times(E(\alpha, f, 1))$ при $\alpha>\dfrac{(p-1)h+1}{pH}$ $\left(\alpha>\dfrac{1+h}{H}\right)$ и в $E(\alpha, F, p)\times$ $\times(E(\alpha, f, 1))$ при любом $\alpha>0$, где $f(i)=i\ln i$; $F(i)=$ $=g(i)\, i\ln i$, $g(i)\uparrow\infty$ — любая возрастающая последовательность.

Доказательство. Остановимся на случае (1.2) и $p>1$. Остальные случаи доказываются аналогично.

При $f(i)=i\ln i$ и достаточно больших i имеем $\alpha p[f(i)-$

$$-f(S(i)]+(p-1)\ln\tilde{a}_q(i)\leqslant\alpha p\,[i\ln i-(i+H)\ln(i+H)]+$$
$$+(p-1)\ln(B_1 i^h+B_2)\leqslant C+\ln i\,[(p-1)h-\alpha pH],$$

откуда

$$\sum_i\exp\{\alpha p(f(i)-f(S(i))+(p-1)\ln\tilde{a}_q(i)\leqslant C\sum_i i^{(p-1)h-\alpha pH}<\infty,$$

лишь если $\alpha pH-(p-1)h>1$, т. е. $\alpha>\dfrac{(p-1)h+1}{pH}$.

Случай $E(\alpha, F, p)$ рассматривается аналогично.

Замечание. В более широких классах задача может иметь более одного решения.

Пример.

Задача $X'_i(t)=i^{2\left(\frac{p-1}{p}\right)}X_{i+1}(t)$; $X_i(0)=0$,

где $p>2$ имеет нетривиальное решение:

$$X_i(t)=\frac{\alpha^{(i)}(t)}{(i-1)!\,\frac{2(p-1)}{p}},$$ где $\alpha(t)\not\equiv 0$ — неквазианалитическая функция. Это решение содержится в $E(\alpha, f, p)$, $f(i)=i\ln i$ при $\alpha<\dfrac{p-2}{p}$ и любом $t>0$.

Для произвольно сильно-верхнетреугольных систем справедлива

Теорема 5. 1) *Пусть* $\sup\limits_i\tilde{a}_q(i)=+\infty$ $(\sup\limits_i\tilde{a}(i)=+\infty)$ *и*

$\lambda_q=\lim\left(\dfrac{\ln i}{\ln\tilde{a}_q(i)}\right)$: $\lambda=\lim\left(\dfrac{\ln i}{\ln\tilde{a}(i)}\right)$, *где* $0\leqslant\lambda_q<\infty$ $(0\leqslant$ $\leqslant\lambda<\infty)$.

Тогда задача (1)—(2) *р. к. р из* $E(\alpha, f, p)$ в $E(\beta, f, p)$ *(из* $E(\alpha, f, 1)$ *в* $E(\beta, f, 1)$ *при любых* $0<\beta<\alpha$, *где* $f(i) = \tilde{a}_q^{\gamma}(i)\, q(i)$ $(f(i) = a^{\gamma}(i) g(i))$ *и* $\gamma > \frac{p-1}{p}$ $(\gamma > 1)$: $g(i) > 0$ — *любая неубывающая последовательность.*

2) *Пусть* $\sum_i a_q^{p-1}(i) < \infty$ $(\sum_i a(i) < \infty$, *тогда задача* (1)—(2) *р. к. р в* $E(\alpha, f, p)$ $(E(\alpha, f, 1)$, *где* $f(i) > 0$ — *любая неубывающая последовательность при любом* $\alpha > 0$.

Доказательство. Случай 2 легко доказывается с помощью теоремы 1. Рассмотрим случай 1. При $p>1$ используем теорему (2):

$\beta p f(i) - \alpha p f(S(i)) + (p-1) \ln \tilde{a}_q(i) \leqslant \ln \tilde{a}_q(i) [(p-1) - C(\alpha - \beta) \times$ $\times \tilde{a}_q^{\gamma'}(i)] + C_1$ при некоторых C, $C_1 > 0$ и $\gamma' \in \left(\frac{p-1}{p}, \gamma\right)$. Для тех i, при которых $C(\alpha-\beta)\tilde{a}_q^{\gamma'}(i) - (p-1) \leqslant \lambda_q + 1$, имеем

$$\mu(\alpha, \beta) \leqslant K(\alpha-\beta)^{-\frac{p-1}{\gamma'}}, \text{ где } \rho = \frac{p-1}{\gamma'} < p, \text{ где } \mu(\alpha, \beta) =$$

$$= \sum_i \exp\{\beta p f(i) - \alpha p (S(i)) + (p-1) \ln \tilde{a}_q(i)\}.$$

Для остальных i имеем

$$\mu(\alpha, \beta) \leqslant C \sum_i \frac{1}{\tilde{a}_q(i)^{\lambda_1 - 1}} < \infty,$$

откуда справедливо соотношение (5); случай $p=1$ доказывается аналогично.

Замечание 1. Можно построить пример, показывающий существенность ограничения на λ_q (на λ).

Замечание 2. Существенное ослабление требований на рост $f(i)$, т. е. расширение совокупности классов корректности задачи (1), (2) вообще невозможно.

Задача. $X_i'(t) = i\frac{p-1}{p}$; $X_i(0) = \frac{e^{-\alpha i\gamma}}{i^2}$, $i \geqslant 1$ имеет решение

$$X_i(t) = \frac{\exp\left(ti\frac{p-1}{p} - \alpha i^{\gamma}\right)}{i^2}, \; i \geqslant 1.$$

Здесь $\tilde{a}_q(i) = i$ и $\lambda_q = 1$ при любом $\gamma < \frac{p-1}{p}$ и любом $\beta > 0$ имеем $\bar{X}(t) \overline{\subset} E(\beta, f_\gamma, p)$.

Итак, ослабление требований на рост $S(i)$ приводит к сужению совокупности классов корректности задачи Коши для систем сильно-верхнетреугольного вида.

Расширение этой совокупности возможно при ограничении на рост $a_q(i)$ $(a(i))$.

Теорема 6. *Пусть* $\sum\limits_i a_q^{p-1}(i) < \infty$ $(\sum\limits_i a(i) < \infty)$; $f(i)>0$ — *любая неубывающая последовательность, тогда для сильно-верхнетреугольной системы задача* (1) — (2) *р. к. р. в* $E(\alpha, f, p)$ $(E(\alpha, f, 1))$ *при любом* $\alpha>0$. Доказательство вытекает из теоремы 1.

Корректная разрешимость задачи Коши для верхнетреугольных систем

Отказавшись от условия $S(i)>i$, мы не можем рассматривать на р. к. р. задачи (1) — (2) в классах быстро убывающих последовательностей, так как может нарушиться разрешимость задачи. Поэтому в дальнейших теоремах фигурируют ограничения сверху на возможный рост последовательности $f(i)$.

Теорема 7. *Пусть* $\sum\limits_i a_q^{p-1}(i) < \infty$ $(\sum\limits_i a(i) < \infty)$ *и при достаточно больших* i *имеет место неравенство* $S(i) \geqslant i-H$; $H>0$, *тогда задача* (1)—(2) *р. к. р. из* $E(\alpha, f, p)$ *в* $E(\beta, f, p)$ *из* $(E(\alpha, f, 1)$ *в* $E(\beta, f, 1))$ *при* $f(i)=i\ln i$ *и* α, β, *таких что* $0<\beta<\alpha<\dfrac{1}{H}$ *из* $E(\alpha, F, p)$ *в* $E(\beta, F, p)$ *(из* $E(\alpha, F, 1)$ *в* $E(\beta, F, 1)$).

При любых $0<\beta<\alpha$ $F(i)=g(i)\,i\ln i$, $F(i)\uparrow\infty$, $g(i)\downarrow 0$, *эта задача также р. к. р. в* $E(\alpha, G, p)$ $(E(\alpha, G, 1))$ *при* $G(i)=i$ *и в* $E(\alpha, L, p)$ $(E(\alpha, L, 1))$ *при* $L(i)=ig(i)$; $g(i)\downarrow 0$; $L(i)\uparrow\infty$ *и любом* $\alpha>0$.

Доказательство. Остановимся на случае $p>1$ при $f(i)=i\ln i$ воспользуемся теоремой 2:

$$\sum_i \exp\{\beta pf(i)-\alpha p-f(S(i))+(p-1)\ln a_q(i)\} \leqslant C\sum_i a_q^{p-1}(i)\times$$
$$\times\exp\{\ln i\,(\alpha pH-p(\alpha-\beta)\,i)\}\equiv\varphi(\alpha,\beta).$$

Далее, при $(\alpha-\beta)i<1$ имеем $\varphi(\alpha,\beta)\leqslant C_1(\alpha-\beta)^{-\alpha pH}$, здесь $\rho=\alpha pH<\rho$; при $(\alpha-\beta)i\geqslant 1$ имеем $\varphi(\alpha,\beta)\leqslant C_2\leqslant C_2+C_1(\alpha-\beta)^{-\alpha pH}$, отсюда следует справедливость соотношения (5).

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Замечание. Из доказательства видно, что в случае р. к. р. из $E(\alpha, f, p)$ в $E(\beta, f, p)$; $p\geqslant 1$ условие

$$\sum_i a_q^{p-1}(i)<\infty \quad (\sum_i a(i)<\infty)$$

можно заменить требованием $\tilde{a}_q(i)\leqslant C$ $(\hat{a}(i)\leqslant C)$.

Замечание. Таким образом, при $\tilde{a}_q(i) \leqslant C$ (или $\sum_i a_q^{p-1}(i) < \infty$) в случае ограничения на рост $f(i)$ имеются лишь сверху. Эти ограничения существенны.

Теорема 8. *Пусть* $\sum_i a_q^{p-1}(i) \leqslant C$ $(\sum_i \tilde{a}(i) \leqslant C)$ *и при достаточно больших* i *справедливо неравенство* $S(i) \geqslant Ai$, $0<A<1$ **(1.1)** *или* $S(i) \geqslant Ai^h$, $A>0$, $0<h<1$ **(1.2)**, *тогда задача* (1)—(2) *р. к. р. в* $\mathrm{E}(\alpha, f, p)$ $(\mathrm{E}(\alpha, f, 1))$ *при* $f(i) = g(i) \ln i$ *и любом* $\alpha>0$ *в случае* (1.1), *при* $f(i) = g(i) \ln\ln i$ *и любом* $\alpha>0$ *в случае* (1.2). *Здесь* $g(i)>0$ — *любая убывающая последовательность.*

Доказательство. В случае $p>1$ $(p=1$ аналогично) используем теорему (1). При выполнении условия (1.1) мы имеем $\alpha p(f(i) - f(S(i))) + (p-1) \ln a_q(i) \leqslant \alpha p g(i) |\ln A| + (p-1) \ln a_q(i) \leqslant C + (p-1) \ln a_q(i)$; так как $g(i) \downarrow 0$, отсюда $\sum_i \exp\{\alpha p(f(i) - fS(i)) + (p-1) \ln a_q(i)\} \leqslant C \sum_i a_q^{p-1}(i) < \infty$.

Случай (1.2) аналогично доказывается.

Замечание. Отметим, что имеются примеры, показывающие неразрешимость задачи Коши в более узких, чем $\mathrm{E}(\alpha, f, p)$, классах функции.

Если последовательность $a_q(i)$ возрастает, то, как видно из теоремы 5, для р. к. р. задачи (1)—(2) в $\mathrm{E}(\alpha, f, p)$ $(E(\alpha, f, 1))$ возникали ограничения снизу на рост $f(i)$. При этом, если не выполнено условие $S(i) \geqslant i$, то имеются также и ограничения сверху на рост $f(i)$.

Приведем пример задачи, не разрешимой в классе убывающих последовательностей.

Задача. $X_i'(t) = i^{\frac{h(p-1)}{p}} X_{i-1}(t)$; $i>1$; $X_1'(t) = 0$; $X_1(0) = 1$; $X_i(0) = 0$; $i>1$ имеет решение: $X_i(t) = (i!)^{\frac{h(p-1)}{p}} \dfrac{t^{i-1}}{(i-1)!}$.

Очевидно, задача не имеет других решений. Это решение при $h > \dfrac{p-1}{p}$ является возрастающей, а не убывающей. В классе убывающих последовательностей задача неразрешима. Итак, нам надо найти определенное согласование между ростом $\tilde{a}_q(i)$ $(\tilde{a}(i))$ и $S(i)$. Такое согласование найдено в следующей теореме.

Теорема 9. *Пусть при достаточно больших* i *имеем* $S(i) \geqslant i - H$, $H>0$; $a_q(i) \leqslant B_1 i^h + B_2$; B_1, $B_2>0$; $0<h$ $\dfrac{p}{p-1}$ *(соответственно* $\tilde{a}(i) \leqslant B_1 i^h + B_2$; B_1, $B_2>0$; $0<h<1$).

Тогда задачи (1), (2) *р. к. р из* $\mathrm{E}(\alpha, f, p)$ *в* $\mathrm{E}(\beta, f, p)$ *(из* $\mathrm{E}(\alpha, f, 1)$ *в* $\mathrm{E}(\beta, f, 1)$ *при* $0<\beta<\alpha< \dfrac{p-(p-1)h}{pH}$ *(соответ-*

ственно $0<\beta<\alpha<\frac{1-h}{H}$); $f(i)=i\ln i$ *и из* $E(\alpha, F, p)$ *в* $E(\beta, F, p)$ (*из* $E(\alpha, F, 1)$ *в* $E(\beta, F, 1)$) *при любых* $0<\beta<\alpha$, *где* $F(i)=g(i)i\ln i$, $g(i)$ — *любая убывающая последовательность такова, что* $\lim g(i)=0$ *и* $g(i)\geqslant C(1+i)^{-\delta}$, *где* $\delta\in\left(0, \frac{p-(p-1)h}{p}\right)$ (*соответственно* $\delta\in(0, 1-h)$).

Доказательство теоремы основано на применении теоремы 2 и в случае $f(i)=i\ln i$ неравенства $\sum\limits_i \exp\{\beta pf(i)-\alpha pf(S(i))+ + (p-1)\ln a_q(i)\}\leqslant C\sum\limits_i \exp\{\ln i(\alpha p+(p-1)h-p(\alpha-\beta)i)\}$.

Остальные случаи аналогичны.

Список литературы: 1. *Мульти Насер.* Задача Коши для бесконечных линейных дифференциальных систем в классах убывающих последовательностей.— См. статью в настоящем сборнике. 2. *Bellman R.* The boundness of solution of infinite systems of linear differential equations.—Duke Math., 1947, 14, p. 695—706.

Поступила в редколлегию 11.01.82.

УДК 517.52

Т. А. АХИЕЗЕР

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОТОБРАЖЕНИЙ В НЕАРХИМЕДОВЫХ ПОЛЯХ

Пусть K — неархимедово поле, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ — матрица над полем K. Рассматривается отображение $F(x)=\Lambda x+ +f(x)$ (1), где $f(x)=(f_1(x), ..., f_n(x))$ — n-компонентный степенной ряд без свободных и линейных членов, сходящийся в некоторой окрестности нуля. Если сделать замену $x=H(y)=y+ +h(y)$, то отображение (1) перейдет в $G(y)=\Lambda y+g(y)=(H^{-1}\circ \circ F\circ H)(y)$ (2). Будем говорить, что $G(y)$ формально (аналитически) сопряжено с $F(x)$, если существует формальное (сходящееся) преобразование H такое, что имеет место равенство (2). Рассматривается вопрос о приведении (1) с помощью сходящегося преобразования к наиболее простому виду.

Для каждого целочисленного неотрицательного мультииндекса $I=(I_1, ..., I_n)$ обозначим $\lambda^I=\lambda_1^{I_1}\dots\lambda_n^{I_n}$, $(\lambda, I)=\lambda_1 I_1+...+\lambda_n I_n$, $|I|=\sum\limits_{l=1}^{n} I_l$. Хорошо известно (см., например, [1, с. 168]), что резонансные соотношения вида $\lambda^I=\lambda_j$ являются препятствиями даже к формальной линеаризации отображения F. Если набор $\lambda_1, ..., \lambda_n$ нерезонансный, т. е. $\lambda^I\neq\lambda_j$ при $j=1, ..., n$; $|I|\geqslant 2$, то существует формальное преобразование H, приводящее F к линейному виду. Достаточные условия сходимости такого преобразования в вещественном и комплексном случае дают теоремы

Пуанкаре и Зигеля (см. [1, с. 176]). Если имеются резонансы, то вопрос о существовании сходящегося линеаризующего преобразования можно ставить лишь при условии существования формального преобразования. В такой постановке для поля вещественных и комплексных чисел в применении к системам дифференциальных уравнений этот вопрос рассматривался в [2, 6]. Покажем, что и в неархимедовом случае при отсутствии «малых знаменателей» из формальной линеаризуемости вытекает наличие сходящегося линеаризующего преобразования.

Теорема 1. *Пусть набор чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ обладает следующим свойством: найдется константа $c>0$ такая, что $(\lambda^I=\lambda_j)\vee(|\lambda^I-\lambda_j|>c)$ $j=1, \ldots, n$; $|I|\geqslant 2$. Тогда, если (1) формально сопряжено со своей линейной частью, то оно сопряжено с ней аналитически.*

Следствие. Если набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нерезонансный и при некотором $c>0$ имеет место оценка $|\lambda^I-\lambda_j|>c\,(j=1, \ldots, n;\ |I|\geqslant 2)$, то (1) линеаризуется с помощью сходящегося преобразования.

Доказательство теоремы 1. Пусть $F\circ H=H\circ F$, где $H(y)$ — формальное отображение. Покажем сначала, что существует формальное отображение $\tilde{H}(y)$, которое линеаризует F и не содержит резонансных членов (т. е. если $\lambda^I=\lambda_j$, то коэффициент при y^I в j-й компоненте $\tilde{H}(y)$ равен нулю.

Заметим, что если $Q(y)$ — полиномиальное отображение, состоящее только из резонансных членов, то $Q(\Lambda y)=\Lambda Q(y)$, следовательно, $H\circ Q$ также линеаризует F. Введем обозначения: $H^{(k)}(y)$ — однородная часть $H(y)$ порядка k, $RH(y)$ — резонансная часть $H(y)$. Построим однородное полиномиальное отображение $q^{(2)}(y)$ степени 2, состоящее только из резонансных членов и такое, что $H_2(y)=H(y+q^{(2)}(y))$ не содержит резонансных членов порядка 2. Имеем $H(y+q^{(2)}(y))=y+q^{(2)}(y)+h(y+q^{(2)}(y))$. Отсюда $q^{(2)}(y)=-Rh^{(2)}(y)$. Предположим, что уже построено отображение $H_k(y)$, линеаризующее F и не содержащее резонансных членов порядка 2, 3, ..., k. Построим однородное полиномиальное отображение $q^{(k+1)}(y)$ степени $k+1$, состоящее только из резонансных членов и такое, что $H_{k+1}(y)=H_k(y+q^{(k+1)}(y))$ не содержит резонансных членов порядка $k+1$. Исходя из соотношения $H_k(y+q^{(k+1)}(y))=y+q^{(k+1)}(y)+h_k(y+q^{(k+1)}(y))$ положим $q^{(k+1)}(y)=-Rh_k^{(k+1)}(y)$. Итак, мы доказали, что найдется последовательность формальных отображений $\{H_k(y)\}_{z=2}^{\infty}$, линеаризующих F, причем $H_k(y)$ не содержит резонансных членов порядка k и $H_{k+1}(y)$ совпадает с $H_k(y)$ до членов порядка k включительно. Следовательно, последовательность $\{H_k(y)\}_{k=2}^{\infty}$ сходится в топологии формальных рядов к некоторому предельному ряду $\tilde{H}(y)=\ \{\sum_I h_I^j\, y^I\}_{j=1}^n$, который и будет искомым.

Докажем, что $\tilde{H}(y)$ сходится. Коэффициенты $\tilde{H}(y)$ удовлетворяют следующей системе:

$$\sum_I h_I^j(\lambda^I-\lambda_j)y^I=f_j(y+h(y))\quad(j=1,\dots,n).\tag{3}$$

Отсюда следует, что если $\lambda^I\neq\lambda_j$, то

$$h_I^j=\frac{1}{\lambda^I-\lambda_j}[f_j(y+h(y))]_I,\tag{4}$$

где $[f_j(y+h(y))]_I$ — коэффициент при y^I ряда $f_j(y+h(y))$. Не ограничивая общности можем считать, что все коэффициенты отображения f по норме не превосходят единицы (в противном случае можно предварительно сделать преобразование $\alpha^{-1}F(\alpha x)$, где α достаточно мало по норме).

$[f_j(y+h(y))]_I$ состоит из слагаемых вида

$$f_J^j h^1_{I^1_1}\dots h^1_{I^1_{J_1}}\dots h^n_{I^n_1}\dots h^n_{I^n_{J_n}}\quad (J=(J_1,\dots,J_n),$$

$$I^1_1+\dots+I^1_{J_1}+\dots+I^n_1+\dots+I^n_{J_n}=I).$$

Обозначим $h_k=\max\ \{|h_I^j|: j=1,\ \dots,\ n;\ |I|\leqslant k\}$, $a=\max\{1,\frac{1}{C}\}$. Из (4) нетрудно получить следующую оценку: $h_k\leqslant a\max\limits_{\Gamma(k)}h_{i_1}\dots h_{i_r}(k=2,3,\dots)$ (5), где через $\Gamma(k)$ обозначено множество всех нетривиальных разбиений числа $k=i_1+\dots+i_r$ $(r\geqslant 2)$.

Докажем, что $h_k\leqslant a^{k-1}$ при любом $k\geqslant 1$. При $k=1$ это верно. Предположим, что это верно при $k=1,\ \dots,\ n-1$.

Тогда $h_n\leqslant a\max\limits_{\Gamma(n)}h_{i_1}\dots h_{i_r}\leqslant a\max\limits_{\Gamma(n)}a^{i_1-1}\dots a^{i_r-1}=a\max\limits_{r\geqslant 2}a^{n-r}=a^{n-1}$.

Утверждение доказано. Из полученной оценки для h_k следует сходимость отображения $H(y)$ при $|y_i|<\frac{1}{a}(i=1,\ \dots,\ n)$. Теорема 1 доказана.

Известно, что при наличии резонансов отображение (1) может быть формально приведено к виду $\Lambda y+g(y)$, где $g(y)$ состоит только из резонансных членов ([1] с. 176).

Теорема 2. *Пусть* $|\lambda_i|\leqslant 1\ (i=1,\ \dots,\ n)$ *и на нерезонансных местах имеет место оценка* $|\lambda^I-\lambda_j|\geqslant c>0$. *Тогда (1) приводится к резонансной нормальной форме сходящимся преобразованием.*

Доказательство. Пусть $H(y)=y+h(y)=\{\sum\limits_I h_I^j y^I\}_{j=1}^n$ — формальное отображение, приводящее (1) к резонсной нормальной форме. Тогда $h(\Lambda y)-\Lambda h(y)=f(y+h(y))+h(\Lambda y)-$ $-h(\Lambda y+g(y))-g(y)$ или покомпонентно

$$''(\lambda^I-\lambda_j)y^I=f_j(y+h(y))+h_j(\Lambda y)-h_j(\Lambda y+g(y))-g_j(y)$$

$$(j=1,\dots,n).\tag{6}$$

$\cdot\cdot$ $a_I^j=0$, а при $\lambda^I=\lambda_j$ положим $h_I^j=0$.

Тогда остальные коэффициенты h и g определяются однозначно из рекуррентных формул:

$$h_I^j = \frac{1}{\lambda^I - \lambda_j} [f_j(y + h(y)) + h_j(\Lambda y) - h_j(\Lambda y + g(y))]_I \qquad (7)$$

при $\lambda^I \neq \lambda_j$

$$g_I^j = [f_j(y + h(y)) + h_j(\Lambda y) - h_j(\Lambda y + g(y))]_I \text{ при } \lambda^I = \lambda_j. \qquad (8)$$

Докажем, что $[h_j(\Lambda y) - h_j(\Lambda y + g(y))]_I = 0$ при $\lambda^I = \lambda_j$.

Левая часть состоит из слагаемых вида

$$h_J^j g_{I_1^1}^1 \dots g_{I_{J_1}^1}^1 \dots g_{I_1^n}^n \dots g_{I_{J_n}^n}^n \quad (J = (J_1, \dots, J_n),$$

$$I_1^1 + \dots + I_{J_1}^1 + \dots + I_1^n + \dots + I_{J_n}^n = 1).$$

Все ненулевые коэффициенты g соответствуют резонансам

$$\lambda^{I_1^1} = \dots = \lambda^{I_{J_1}^1} = \lambda_1, \dots, \lambda^{I_1^n} = \dots = \lambda^{I_{J_n}^n} = \lambda_n.$$

Перемножим эти равенства, получим

$$\lambda^{I_1^1} \dots \lambda^{I_{J_1}^1} \dots \lambda^{I_1^n} \dots \lambda^{I_{J_n}^n} = \lambda_1^{J_1} \dots \lambda_n^{J_n},$$

или, что то же самое, $\lambda^I = \lambda^J$. По предположению $\lambda^I = \lambda_j$, следовательно, $h_J^j = 0$. Таким образом, в левой части нет ненулевых слагаемых. Утверждение доказано. Итак, (8) примет вид

$$g_I^j = [f_j(y + h(y))]_I \text{ при } \lambda^I = \lambda_j. \qquad (9)$$

Обозначим $h_k = \max\{|h_I^j| : j = 1, \dots, n;\ |I| \leq k\}$, $g_k = \max\{|g_I^j| : j = 1, \dots, n;\ |I| \leqslant k\}$, $a = \max\{1, \frac{1}{c}\}$. Из (7) и (9) нетрудно получить следующие оценки:

$$h_k < a \max\{\max_{\Gamma(k)} h_{l_1} \dots h_{l_r}, \max_{\Gamma(k)} h_r g_{l_1} \dots g_{l_r}\},$$

$g_k < \max\limits_{\Gamma(k)} h_{l_1} \dots h_{l_r}$ при любом $k \geqslant 2$. Легко видеть, что $h_1 = 1$, $g_1 \leqslant 1$, $h_2 \leqslant a$, $g_2 \leqslant 1$. Докажем, что $h_k \leqslant a^{k-1}$, $g_k \leqslant a^{k-2}$ при $k \geqslant 2$. Предположим, что это верно при $k = 2, \dots, n-1$. Тогда $h_n \leqslant a \max\{\max\limits_{\Gamma(n)} a^{l_1-1} \dots a^{l_r-1}, \max\limits_{\Gamma(n)} a^{r-1} a^{l_1-2} \dots a^{l_r-2}\} = a \max \times$

$$\times \{\max_{r>2} a^{n-r}, \max_{r>2} a^{n-r-1}\} = a^{n-1};$$

$g_n \leqslant \max\limits_{\Gamma(n)} a^{l_1-1} \dots a^{l_r-1} = a^{n-2}$. Из полученных оценок для h_k и g_k

следует сходимость преобразования $H(y)$ и нормальной формы $G(y)$ при $|y_i| < \frac{1}{a}$ $(i=1, ..., n)$. Теорема 2 доказана.

Аналогичная задача рассматривается для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = F(x), \tag{10}$$

где $F(x)$ — отображение вида (1). В неархимедовом случае справедлива теорема, доказанная К. Л. Зигелем [4] для вещественного и комплексного случая.

Теорема 3. *Пусть числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ таковы, что имеет место оценка*

$$|(\lambda, I) - \lambda_j| \geqslant c|I|^{-\nu} \quad (c>0, \ \nu>0) \tag{11}$$

при всех $j=1, ..., n$; $|I| \geqslant 2$. Тогда система (10) приводится к линейной сходящимся преобразованием.

Доказательство полностью переносится. В частности, если коэффициенты системы (10) принадлежат полю p-адических чисел, то для любого рационального нерезонансного набора $\lambda_1, ..., \lambda_n$ выполняется оценка (11).

Докажем это. Приведем числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ к общему знаменателю $\lambda_i = \frac{l_i}{k}$ $(i=1, \ldots, n)$. Тогда $|(\lambda, I) - \lambda_j|_p = \frac{|(l, I) - l_j|_p}{|k|_p} \geqslant |(l, I) - l_j|_p \geqslant |(l, I) - l_j|^{-\nu}$, где $\nu = -\log_p(|p|_p)$; $|(l, I) - l_j| = |(l, I - e_j)| \leqslant (\sum_{i=1}^{n} |l_i|)(|I| + 1) \leqslant 2|I| \sum_{i=1}^{n} |l_i|$.

Окончательно получаем $|(\lambda, I) - \lambda_j|_p \geqslant c|I|^{-\nu}$, где $c = (2\sum_{i=1}^{n}|l_i|)^{-\nu}$.

Таким образом, если числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ рациональны и нерезонансны, то система (10) приводится к линейной сходящимся преобразованием. Это является усилением результата Р. Перко [5], который дополнительно требовал положительности собственных чисел.

Автор выражает благодарность Г. Р. Белицкому за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы: 1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978.—304 с. 2. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1971, 25, с. 119—262. 3. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике.—М.: ИЛ, 1959.—300 с. 4. *Зигель К. Л.* О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия. — Математика, 1961, 5, № 2, с. 119—128. 5. *Perko R.* Normalformen von Differential — gleichungssystemen bei p-adisch bewertetem Grundkörper. — Ber. d. Math. — stat. Sektion im Forschungszentrum Graz, Ber. Nr. 36, 1975,

S. 2—17. 6. *Плисс В. А.* О приведении аналитической системы дифференциальных уравнений к линейной форме. — Диф. уравнения, 1965, 1, № 2, с. 153—161.

Поступила в редколлегию 17.04.81.

УДК 512.62+517.52+519.1

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

ПОЛИНОМЫ СТИРЛИНГА И ОДНО РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Числа Стирлинга $s_1(n, k)$ ($s_2(n, k)$) первого (второго) рода определяются разложениями [1]:

$$\binom{X}{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{s_1(n, k)}{n!} X^k, \quad X^k = \sum_{i=0}^{k} s_2(k, i)\, i! \binom{X}{i}, \tag{1}$$

где $\binom{X}{n} = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$. Полиномом Стирлинга назовем полином

$$S_{i, n}(X) = \frac{i!}{n!} \sum_{k=1}^{n} s_1(n, k)\, s_2(k, i)\, X^k. \tag{2}$$

Из тождеств (1), (2) вытекает равенство

$$\binom{tX}{n} = \sum_{i=0}^{n} S_{i,n}(t) \binom{X}{i}. \tag{3}$$

Пусть K — расширение поля рациональных чисел. В пространстве полиномов $K[X]$ рассмотрим линейный оператор $(S_t P)(X) = P(tX)$ $(t \in K)$. Соотношение (3) означает, что $S_{i,n}(t)$ являются матричными элементами оператора S_t в базисе $\binom{X}{n}$ $(n \geqslant 0)$ пространства $K[X]$. Заметим, что отображение $t \to S_t$ является представлением мультипликативной группы K^* поля K. Равенство $S_{t_1 t_2} = S_{t_1} S_{t_2}$ приводит к соотношению

$$S_{m,n}(XY) = \sum_{k=m}^{n} S_{m,k}(X)\, S_{k,n}(Y).$$

Основной целью заметки является доказательство тождества

$$\frac{1}{(X^r-1)^m} \sum_{k=1}^{m} \frac{m}{k} S_{k,m}\left(\frac{1}{r}\right) \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\varepsilon^{ik}}{(X-\varepsilon^i)^k} \tag{4}$$

над полем K, содержащим некоторый первообразный корень ε степени r из единицы. Установим вначале одно вспомогательное соотношение. Из равенства (3) следует, что

$$\binom{-n}{m} = \sum_{k=1}^{m} S_{k,m}\left(\frac{1}{r}\right)\binom{-rn}{k}.$$

Пользуясь формулой $\binom{-X}{j} = (-1)^j \binom{X+j-1}{j-1}\frac{X}{j}$ и сокращая на n, получим

$$\frac{(-1)^m}{m}\binom{n+m-1}{m-1} = \sum_{k=1}^{m} S_{k,m}\left(\frac{1}{r}\right) r \frac{(-1)^k}{k}\binom{rn+k-1}{k-1}. \tag{5}$$

Нам понадобится также разложение

$$\frac{1}{(1-X)^m} \sum_{n\geqslant 0}\binom{n+m-1}{m-1} X^n$$

в алгебре формальных степенных рядов. В частности, имеем

$$\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\varepsilon^{ik}}{(X-\varepsilon^i)^k} = (-1)^k \sum_{i=0}^{r-1}\frac{1}{(1-\varepsilon^{-i}X)^k} =$$

$$= (-1)^k \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j\geqslant 0}\binom{j+k-1}{k-1}\varepsilon^{-ij}X^j = (-1)^k \sum_{j\geqslant 0}\binom{j+k-1}{k-1}\times$$

$$\times X^j \sum_{i=0}^{r-1}\varepsilon^{-ij} = (-1)^k \sum_{n\geqslant 0} r\binom{rn+k-1}{k-1}X^{rn}.$$

Поэтому в силу равенства (5) правая часть тождества (4) записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{m}{k} S_{k,m}\left(\frac{1}{r}\right)(-1)^k r \sum_{n\geqslant 0}\left(\binom{rn+k-1}{k-1}\right) X^{rn} =$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} m\left(\sum_{k=1}^{m} S_{k,m}\left(\frac{1}{r}\right) r \frac{(-1)^k}{k}\left(\binom{rn+k-1}{k-1}\right)\right) X^{rn} =$$

$$= (-1)^m \sum_{n\geqslant 0}\binom{n+m-1}{m-1}(X^r)^n = \frac{1}{(X^r-1)^n}.$$

Отметим, что частные случаи формулы (4) при $m=1$ и $m=2$ приведены в [2].

Список литературы: 1. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 288 с. 2. *Фадеев Д. К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1977. — 288 с.

Поступила в редколлегию 24.11.81.

УДК 517.9

А. А. МАКАРОВ

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ ДЛЯ СИСТЕМ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАБИЛИЗИРУЮЩИМИСЯ СИМВОЛАМИ

Рассматривается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A(D_x)\,u(x,t) + \lambda R(x,D_x)\,u(x,t) + f(x,t); \qquad (1)$$

$$\int\limits_0^T dM(t)\,B(t,D_x)\,u(x,t) = 0,\ x\in R^n,\ t\in[0;T], \qquad (2)$$

где $u(x,t)$ и $f(x,t)$ — вектор-функции с координатами из пространств $C^1([0;T],H^s)$ и $C^\circ([0;T],H^s)$ соответственно.

Здесь $C^r([0;T],H^s)\equiv\{u(x,t)\in H^s\ \forall t\in[0;T]$:

$\|\|u\|\| = \sup\limits_{\beta\leqslant r,t\in[0;T]} \|D_t^\beta u(x,t)\|^{(s)} < \infty\}$ (H^s—пространство Соболева).

Символы псевдодифференциальных операторов из класса $C_{-\infty}^{\infty}$, т. е. все производные имеют рост не выше степенного, а $R(x,\xi)$ финитна по ξ.

Важную роль при исследовании задачи (1) — (2) играет матрица Грина $G(t,\tau,\xi)$ следующей задачи: $\frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t} = A(\xi)\times$

$$\times v(\xi,t) + g(\xi,t),\quad \int\limits_0^T dM(t)\,B(t,\xi)\,v(\xi,t) = 0.$$

Справедлив следующий результат:

Теорема. *Пусть матрица* $G(t,\tau,\xi)\in C_{-\infty}^{\infty}\ \forall\ t,\tau\in[0;T]$ *удовлетворяет условиям*

$$\alpha)\quad \int\limits_0^T |G(t,\tau,\xi)|^2\,d\tau < c\,(1+|\xi|)^{-m};$$

$$\beta)\quad \int\limits_0^T |G(t_t,\tau,\xi) - G(t_2,\tau,\xi)|^2\,d\tau < \varepsilon\,(1+|\varepsilon|)^{-m}\,(H_1 - t_2| < \delta)$$

при любом $\varepsilon>0$ и некотором $\delta>0$, не зависящем от t_i и ξ.

Если $|R(x, \xi)| < c_1(1+|\xi|^{m_1}\ \forall x \in R^n$ и $m_1 = m$, то задача (1)—(2) корректно разрешима из пространства $C^0([0; T], H^s)$ в пространство $C^1([0; T], H^{s+m})$ при достаточно больших s и при малых λ, а при $m_1 < m$ эта задача корректно разрешима в указанных пространствах при всех λ, за исключением не более чем счетного множества $\{\lambda_i\}$, не имеющего конечных предельных точек.

Доказательство получается методами теории возмущений с использованием результатов автора для задачи (1) — (2) с $\lambda = 0$.

Используя теоремы вложения, можно получить корректную разрешимость задачи (1) — (2) в пространствах гладких функций.

В качестве примера задачи, удовлетворяющего условиям нашей теоремы, можно взять следующую задачу:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a\,\frac{\partial^{2k} u(x, t)}{\partial x^{2k}} + \lambda R(x, D_x)\, u(x, t) + f(x, t),$$

$$cu(x, 0) + b\,u(x, T) = 0 \quad (a \in R;\ c, b > 0).$$

Здесь

$$G(\xi, t, \tau) = \begin{cases} -b\exp a(T-\tau+t)(-\xi^2)^k\,[c + b\exp aT(-\xi^2)^k]^{-1} & t < \tau; \\ c\exp a(t-\tau)(-\xi^2)^k\,[c + b\exp aT(-\xi^2)^k]^{-1} & t > \tau \end{cases}$$

и легко проверяется, что эта матрица удовлетворяет условиям α)—β) с $m = 2k$.

Поэтому при $|R(x, \xi)| < C\,(1+|\xi|)^{2k}$ задача корректно разрешима из $C^0([0, T], H_s)$ в $c^1([0; T], H^{s+2k})$ при достаточно малых λ, а если $|R(x, \xi)| < c(1+|\xi|)^{2k-\xi}$, то задача будет корректно разрешима в указанных пространствах при почти всех λ.

Поступила в редколлегию 05.02.82.

УДК 517.919.583

М. Я. ЖИТОМИРСКИЙ

ОРБИТАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть K — поле $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Гладкие ростки F, G: $(K^n, 0) \to (K^n, 0)$ называются орбитально-эквивалентными, если существуют гладкие отображения $H: K^n \to K^1$, $H(0) = 1$, $\Phi: (K^n, 0) \to (K^n, 0)$, $\Phi'(0) = E$, такие, что $H(\Phi')^{-1}F(\Phi) = G$. Смысл орбитальной эквивалентности состоит в том, что фазовые кривые систем $\dot{x} = F(x)$ и $\dot{x} = G(x)$ совпадают с точностью до C^∞-диффеоморфизма, если ростки F и G орбитально-эквивалентны.

При классификации ростков относительно орбитальной эквивалентности необходимо в первую очередь провести формальную классификацию (вместо ростков рассматриваются соответствующие им ряды Тейлора; отображения H и Φ ищутся также среди степенных рядов). Этой классификации и посвящена настоящая работа.

Для получения инвариантов ряда относительно орбитальной эквивалентности используется метод Г. Р. Белицкого построения инвариантной нормальной формы ряда. Уравнения для коэффициентов инвариантной нормальной формы сами по себе не дают в явном виде инвариантов ряда, однако в ряде случаев они могут быть все же эффективно определены.

В работе получены следующие результаты.

1. Выписаны уравнения для инвариантной нормальной формы ряда.

2. Построена неполная нормальная форма ряда, которая не является инвариантной, но которую намного легче строить, поскольку она определяется только линейным приближением ряда. Указаны необходимые и достаточные условия совпадения любой неполной нормальной формы с инвариантной нормальной формой.

3. Сформулирован и доказан критерий 1-й определенности ряда, т. е. необходимое и достаточное условие того, что любой ряд вида $\Lambda x+\ldots$ будет эквивалентен ряду Λx.

4. Среди множества так называемых резонансных рядов можно выделить множество рядов, линейное приближение которых удовлетворяет условию одного резонанса (есть только одно независимое резонансное соотношение). Обозначим это множество через $K_r[n]$, группу резонансных преобразований — через $G_r[n]$. Показано, что инвариантная нормальная форма ряда $F\in K_r[n]$ относительно группы $G[n]$ и $G_r[n]$ совпадают.

5. Для рядов из $K_r[n]$ найден инвариант, определяющий показатель их конечной определенности (или бесконечную определенность), который определяется непосредственно по коэффициентам ряда.

6. В явной форме указан вид инвариантной нормальной формы ряда из $K_r[n]$.

7. Показано, как перенести полученные результаты на тот случай, когда переход от ряда $F\in K[n]$ к его резонансной нормальной форме требует выхода из вещественной области в комплексную.

8. Полученные результаты позволяют в явной форме провести полную классификацию K [2] (кроме случая неэлементарной особой точки), получить ряд следствий. Например, ряд из $K_r[n]$ при $n\leqslant 3$ либо эквивалентен своей линейной части, либо конечно определен (при $n>3$ этот факт уже не имеет места).

Поступила в редколлегию 09.02.82.

УДК 517.9

А. И. БОЛТОНОСОВ

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ВОЛН ИЗ МНОГОЭЛЕМЕНТНОГО ПЛОСКОГО ЛЕНТОЧНОГО РЕЗОНАТОРА

Задачи рассеяния волн ограниченными периодическими решетками, задачи излучения волн резонансными системами ограниченных размеров представляют большой практический интерес, так как перечисленные структуры являются важными функциональными элементами многих электронных приборов. Решение соответствующих электродинамических задач весьма сложно, поэтому используются различные их идеализации и приближенные методы решения. Наибольший интерес для приложений представляет случай, когда размеры рассеивающей системы соизмеримы с длиной волны, однако он является наиболее сложным для исследования.

В работе Борзенкова А. В., Сологуба В. Г.* к задаче о рассеянии волн на ограниченной периодической ленточной решетке применяется метод задачи Римана — Гильберта, который позволяет решить ее в строгой постановке. В данном сообщении методика этой работы распространяется на резонансную систему, которая состоит из двух параллельных ограниченных ленточных решеток и возбуждается модулированным потоком заряженных частиц, равномерно движущимся между решетками параллельно их плоскости. Решетки могут быть разной ширины и иметь разное количество элементов. Ленты решеток считаются идеально проводящими.

Показано, что решение данной задачи сводится к решению системы двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$D(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} D(\mu)\,E(\mu)\,U_{\lambda}^{\mu}\,d\mu+\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} C(\mu)\,e^{i\sqrt{\varkappa^2-\mu^2}\,\delta}K(\mu)\,U_{\lambda}^{\mu}\,d\mu+$$

$$+\frac{1}{\lambda}e^{i\varkappa\gamma\delta_1}U_{\lambda}^{\varkappa\alpha};$$

$$C(\lambda)=\frac{\sigma}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} C(\mu)\,E(\mu)\,\widetilde{U}_{\lambda\sigma}^{\mu\sigma}\,d\mu+\frac{\sigma}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} D(\mu)\,e^{i\sqrt{\varkappa^2-\mu^2}\,\delta}K(\mu)\,\widetilde{U}_{\lambda\sigma}^{\mu\sigma}\,d\mu-$$

$$-\frac{\sigma}{\lambda}e^{i\varkappa\gamma\delta_2}\,\widetilde{U}_{\lambda\sigma}^{\varkappa\alpha\sigma}. \qquad (1)$$

---

* Борзенков А. В., Сологуб В. Г. Рассеяние волн конечным числом лент, расположенных в одной плоскости. — Препринт ИРЭ АН УССР, Харьков, 1975, с. 42.

Здесь $\varkappa = kL$ ($k=\omega/c$, ω—частота, c — скорость света, $2L$ — ширина одной из решеток); $\delta_1 = h_1/L$, $\delta_2 = h_2/L$ (h_1 и h_2 — расстояния от решеток до траектории потока); $\delta = \delta_1 + \delta_2$; $\alpha = 1/\beta$, $\gamma = i\sqrt{1-\beta^2}/\beta$ ($\beta = V/c$, V—скорость потока); $\sigma = M/L$ ($2M$ — ширина второй решетки); $K(\lambda) = -i\sqrt{\varkappa^2 - \lambda^2}$, $\varepsilon(\lambda) = (\lambda) - K(\lambda)$. Функции U_λ^σ и U_λ^σ зависят от геометрической структуры решеток и определены в [1], а $D(\lambda)$ и $C(\lambda)$ — искомые функции, совпадающие с точностью до множителя с преобразованиями Фурье-плотности поверхностных токов на лентах резонатора.

Показано, что интегральный оператор, соответствующий системе (1), является вполне непрерывным в некотором функциональном пространстве, и доказано существование решения при любых параметрах задачи. В случае, когда размеры рассеивающей структуры сравнимы с длиной волны, система (1) решается численно на ЭВМ, при этом она заменяется «усеченной» системой, т. е. системой, в которой интегралы в бесконечных пределах заменяются интегралами по интервалу $(-P, P)$, где P — достаточно большое положительное число. Показано, что «усеченная» система всегда разрешима при $P > \varkappa$. Получена оценка погрешности, возникающей при замене бесконечного промежутка интегрирования конечным.

Исследуются основные энергетические характеристики рассеянного поля: полная излученная системой энергия и диаграмма направленности излучения. Проведен детальный анализ этих характеристик как для простейшей структуры, какой является обычный резонатор, так и для систем более сложных, включающих в себя решетки с числом лент не более 12.

Поступила в редколлегию 02.02.82.

УДК 518 : 512

П. А. БРОВКО, А. К. ШЕВЧЕНКО

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ БЕЗ ДЕЛЕНИЯ НА ВЕДУЩИЙ ЭЛЕМЕНТ

Задачи прикладного содержания, в частности, задачи регрессионного анализа сводятся к решению систем линейных уравнений вида: $AX = b$ (1), где A — исходная матрица коэффициентов; b — матрица-столбец свободных членов; X — неизвестный вектор.

Метод последовательного исключения неизвестных (метод Жордана—Гаусса), наиболее часто применяемый при решении таких задач, имеет существенный недостаток, так как приходится на каждой итерации делить на ведущий элемент, который может оказаться близким к нулю, а это вызывает ошибки округлений и приводит к неверным результатам [1—3].

В данной работе излагается разработанный нами метод решения системы уравнений (1) и получения обратной матрицы, который не требует деления строки на ведущий элемент и перестановки уравнений системы с целью выбора максимального ведущего элемента.

Изложим алгоритм решения системы с одновременным получением обратной матрицы и контрольным суммированием на каждой итерации.

Пусть требуется решить систему (1). Составим расширенную матрицу системы B, справа припишем единичную матрицу порядка n, равного порядку матрицы A, и один столбец оставим для контрольного суммирования, в этом столбце записываем суммы элементов строки.

$$B=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n} & b_1 & 1\,0\dots 0 & \Sigma_1 \\ a_{21}\ a_{22}\dots a_{2n} & b_2 & 0\,1\dots 0 & \Sigma_2 \\ \cdot\ \ \cdot\ \dots\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \dots\ \cdot & \cdot \\ \cdot\ \ \cdot\ \dots\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \dots\ \cdot & \cdot \\ a_{n1}\ a_{n2}\dots a_{nn} & b_n & 0\,0\dots 1 & \Sigma_n \end{array}\right),$$

где $$\Sigma_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ji}+b_j+1.$$

Выбираем матрицу M_1, у которой угловой элемент a_{11} заменим на 1, все диагональные элементы на a_{11}. Элементы первого столбца под угловым элементом выберем равными соответствующим элементам матрицы A только с противоположными знаками, все остальные элементы матрицы M_1 заменим нулями:

$$M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\dots 0 \\ -a_{21} & a_{11} & 0\dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \dots\ \cdot \\ -a_{n1} & 0 & 0\dots a_{11} \end{pmatrix}.$$

Вычислим $B_1=M_1B$, что соответствует умножению матричного уравнения (1) на M_1, т. е. $M_1AX=M_1b$. Получим

$$B_1=\left(\begin{array}{cccc|c|cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \Sigma_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 & c_{21} & a_{11} & \cdots & 0 & \Sigma'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a_{nn} & b'_n & c_{n1} & 0 & \cdots & a_{11} & \Sigma'_n \end{array}\right).$$

Проверим, что после умножения на матрицу M_1 все элементы первого столбца матрицы B_1 кроме a_{11} будут нулями. Элемент матрицы B_1 с индексами $j1$, обозначим его b_{j1}, будет равен

$$b_{j1}=\vec{q}\cdot\vec{r},\ \vec{q}\,(-a_{j1},\ 0, \dots,\ a_{11},\ \dots, 0),\quad \vec{r}(a_{11},\ a_{21}, \dots,\ a_{j1}, \dots,\ a_{n1}),$$

$$b_{j1}=-a_{j1}\cdot a_{11}+a_{11}\cdot a_{j1}=0.$$

Очевидно, что элемент $b_{11}=a_{11}$.

Если преобразованию подвергается i-столбец, то в матрице M_i на месте элемента $a_{ii}^{(i-1)}$ ставим 1, все другие элементы i-го столбца заполняем соответствующими элементами матрицы A_{i-1}, полученной после преобразования матрицы $A\,(i-1)$ раз, с противоположными знаками.

На месте всех остальных диагональных элементов ставим элемент $a_{ii}^{(i-1)}$. Все остальные элементы матрицы M_i заполняем нулями. Легко показать, что в результате умножения M_i на B_{i-1} получим матрицу B_i, у которой в i-м столбце все элементы кроме ii равны 0. Преобразованию подвергаются все столбцы матрицы B_i. На каждой итерации вычисляем сумму всех элементов строк и сверяем с соответствующим элементом Σ, т. е. таким образом на каждой итерации осуществляется контрольное суммирование.

Если все элементы строки матрицы B_i имеют общий множитель, на него можно сократить, это равносильно умножению системы на постоянное число.

Повторяя процедуру n раз, получим диагональную матрицу на месте A. Разделив элементы строк на диагональные, что равносильно умножению на матрицу M_{n+1}, у которой диагональные элементы обратны диагональным элементам полученной матрицы, в столбце b_i получим решение системы, а на месте единичной матрицы получим обратную. Действительно, так как $M_{n+1}M_n \dots M_1A=E$ и $A^{-1}A=E$, то $M_{n+1}M_n \dots M_1=A^{-1}$, $X=$ $=M_{n+1}M_n \dots M_1b$.

Таким образом, изложенный метод позволяет решить систему уравнений и найти обратную матрицу, не выполняя деления на ведущий элемент на каждой итерации, т. е. этот метод свободен от накопленных погрешностей округления и от переполнений в случае деления на близкие к нулю элементы матрицы. В катоде Жордана—Гаусса на каждой итерации приходится делить на ведущий элемент и затем оперировать приближенными числами, даже если исходные элементы матрицы числа точные. В данном методе на всех итерациях работать приходится с точными числами, в частности, если в исходной матрице целые числа, то на всех итерациях элементами матрицы будут целые числа и только на последнем шаге (после деления на диагональные элементы) возможно округление окончательных результатов. В этом существенное отличие и преимущество изложенного метода перед методом Жордана—Гаусса.

Машинная реализация этого метода достаточно проста. Программный модуль уже имеется для ЕС ЭВМ.

Список литературы: 1. *Березин И. С., Жидков Н. Г.* Методы вычислений. — М.: Физматгиз, 1962.— 464 с. 2. *Фаддеев Л. К.* и *Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. — М: Физматгиз, 1960. — 656 с. 3. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1978.—302 с.

Поступила в редколлегию 15.10.82.

УДК 621.391.2

А. Ф. КОТЮК, д-р техн. наук, А. М. РАЙЦИН

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННОЙ ЗАДЕРЖКИ МЕЖДУ СИГНАЛАМИ

Пусть два сдвинутых во времени сигнала заданы дискретной последовательностью равноотстоящих значений $Y_1(\frac{i}{F})$, $Y_2(\frac{i}{F})$, где F — частота дискретизации, принимаемых на фоне некоррелированных нормально распределенных помех. Определение временной задержки между сигналами $Y_1(\frac{i}{F})$, $Y_2(\frac{i}{F})$ часто производят по положению максимума их функции взаимной корреляции (ФВК), либо по положению нуля ее производной [1]. Положение максимума оценочной ФВК (или положение нуля ее производной) не совпадает с истинным значением задержки x_0. Причиной этого являются погрешности определения ФВК, обусловленные помехами, дискретность ФВК, приводящая к тому, что истинное положение максимума (или—нуля) даже при отсутствии помех находится между отсчетами. Для уточнения получаемой оценки временной задержки сигналов может быть использован алгоритм [2], суть которого состоит в параболической интерполяции оценочной ФВК полиномом степени n и определении положения его максимума, либо в интерполяции оценочной производной ФВК полиномом степени n—1 и определении положения его нуля.

В настоящей работе сравниваются статистические свойства получаемых уточненных оценок задержки по положению максимума ФВК в случае ее квадратичной интерполяции по $2\nu+1$ точкам ($n=2$) и по положению нуля производной ФВК при ее линейной интерполяции ($n=1$). Качество оценок характеризуется доверительным интервалом, определяющим с вероятностью α попадание оценки временной задержки $\hat{x}_0$ в интервале $x_0(1—$

$-\varepsilon) < \hat{x}_0 < x_0(1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Можно показать, что для гармонических сигналов с частотой ω отношение верхних границ доверительных интервалов двух методов определяется следующими выражениями: $\gamma \approx \sqrt{2}\omega(\omega_0^2+\omega^2)^{1/2}$ — при больших отношениях сигнал/помеха и $\gamma = \frac{2\sqrt{3}F}{\omega_0}(4\nu^2+4\nu+12)^{1/2}[(4\nu^2+4\nu-3)(4\nu^2+4\nu+3)]^{-1/2}$ при малых отношениях сигнал/помеха, где $\omega_0 = (2\pi)^2\Delta f^2/3$, Δf— полоса пропускания сигналов. Тогда $\gamma > 1$ свидетельствует о преимуществе способа оценки по положению нуля производной ФВК, а при $\gamma < 1$ — наоборот. Полученные формулы позволяют определить такие параметры, как F, ν, при которых целесообразно использование первого или второго метода.

Список литературы: 1. *Ланге Ф.* Корреляционная электроника. — Л.: Энергия, 1976. — 189 с. 2. *Райцин А. М.* Алгоритм определения точки экстремума неизвестной функции. — Метрология, 1978, № 2, с. 25—30.

Поступила в редколлегию 07.01.82.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 241

Механика и управление динамических систем

Редактор *З. Н. Щегельская*
Художественный редактор *В. Е. Петренко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Л. М. Забродина*

Сдано в набор 14.01.83. Подп. в печать 28.07.83. БЦ 09409. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 2. Лит. гарн. Выс. печать. 5,5 печ. л. 5,75 кр.-отт. 5,8 уч.-изд. л. Тираж 500 экз. Изд. № 1135. Зак. 473. Цена 80 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа»
310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Харьковская городская типография № 16
Харьков-3, ул. Университетская, 16

РЕФЕРАТЫ

УДК 538.3 : 532 : 538.4

Электрогидродинамика многокомпонентных диэлектрических жидкостей. Жакин А. И.— Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 3—23.

В работе рассматривается вывод системы уравнений электрогидродинамики многокомпонентной диэлектрической жидкости, компоненты которой могут реагировать друг с другом в объеме жидкости и на поверхностях электродов с участием электронных переходов (окислительно-восстановительные реакции). Дается вывод обобщенного закона ионной проводимости на основе рассмотрения микроскопического движения иона. Показывается, что закон ионной проводимости, вытекающий из линейных соотношений термодинамики необратимых процессов, выполняется в весьма ограниченных случаях. Формулируются граничные условия к полученной системе уравнений с учетом адсорбции примесных молекул и ионов на электродах. Вычисляются константы скорости рекомбинации и диссоциации ионных пар в электрическом поле. Приводятся экспериментальные данные по зависимости скорости адсорбции от материала электродов.

Табл. 1. Ил. 3. Библиогр.: 18 назв.

УДК 517.934.1

Автоколебания при отслеживании полосы. Подольский Е. Н., Вовна С. И. — Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 23—28.

Изучаются автоколебания в системе автоматического вождения самоходной машины при отслеживании полосы. На основе построенной математической модели движения системы находятся аналитические выражения для амплитудных значений основных характеристик автоколебаний.

Ил. 2. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.935.1

Геометрический критерий локальной ε-управляемости линейных автономных систем. Маринич А. П., Койна Родумта.—Вестн. Харьк. ун-та, **1983**, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 28—34.

Для автономной управляемой системы $\frac{dx}{dt} Ax + \varphi(u)$, $x \in R_n$, $u \in \Omega \subset R_m$, где на Ω наложено единственное требование $\exists u_0 \in \Omega$: $\varphi(u_0) = 0$ получены необходимые и достаточные условия локальной ε-управляемости в терминах конусов.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.977.5

Синтез оптимального управления колебательным процессом с запаздыванием. Капустян В. Е.— Вестн. Харьк. ун-та. 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 34—41.

Получены новые результаты по синтезу оптимального управления распределенным колебательным процессом с запаздыванием в фазовой координате. Необходимые и достаточные условия оптимальности для программного управления получены в виде интегрального уравнения Фредгольма. Предложен сходящийся алгоритм для приближенных программных и синтезированных управлений с одинаковым порядком сходимости. Причем каждое приближение реализуется по точным формулам.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 519.3 : 531/534

К одной задаче оптимального управления. Аврамчук Н. А. — Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 41—48.

Рассматривается вариационная задача Майера о движении точки переменной массы в однородном и линеаризованном центральном полях тяготения. Скорость истечения постоянна. Учитывается вращение Земли. Доказана невозможность сопряжения дуг особых и неособых по массовому расходу управлений. Установлена устойчивость оптимального режима при переходе от однородного поля тяготения к линеаризованному центральному. Решение задачи получено с точностью до величин второго порядка малости в оптимальном значении функционала.

Ил. 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.944

Задача Коши для бесконечных линейных дифференциальных систем в классах убывающих последовательностей. Мульти Насер. — Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 48—58.

Статья посвящена исследованию корректной разрешимости задачи Коши для системы вида $\overline{X'}(t)=A\overline{X}(t)$; $\overline{X}(t)=(X_i(t))_{i=1}^{\infty}$; $A=(a_{ik})_{ik=1}^{\infty}$ $t\in[0, T]$ в широком наборе пространств убывающих последовательностей. Характер убывания последовательностей, образующих класс корректности, определяется величинами $S(i)$ и $a(i)$, где $S(i)$ таково, что $a_{ik}=0$ при $k<S(i)$, $a(i)=\sum_k |a_{ik}|<\infty$. Приведены примеры, характеризующие точность полученных теорем.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.944

Задача Коши для бесконечных систем дифференциальных уравнений в классах убывающих последовательностей. Мульти Насер. — Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 58—66.

Исследуются классы корректной разрешимости задачи Коши для бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений, определяемые весовыми l_p-нормами. Рост весовой последовательности определяется структурой матрицы коэффициентов (наличием нулей в первых столбцах этой матрицы) и ростом коэффициентов в зависимости от увеличения номера строки. Приведены примеры, характеризующие точность полученных теорем.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.52

Нормальные формы аналитических дифференциальных уравнений и отображений в неархимедовых полях. Ахиезер Т. А. — Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 66—71.

Рассматриваются нормальные формы сходящегося локального отображения $F: K^n \to K^n$, где K — неархимедово поле, и системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = F(x)$ относительно преобразований координат с единичным линейным приближением. Получены достаточные условия сходимости нормализующих преобразований.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 512.62+517.52+519.1

Полиномы Стирлинга и одно разложение на простейшие дроби. Калюжный В. Н.— Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 71—73.

Пусть $s_1(nk)(s_2(k, i))$ — числа Єтирлинга первого (второго) рода,

$$S_{i,n}(X) = \frac{i!}{n!} \sum_{k=i}^{n} s_1(a, k)\, s_2(k, i)\, X^k$$

— «полином Стирлинга»; ε — первообразный корень степени из единицы. Доказано тождество

$$(X^r - 1)^{-m} - \sum_{k=1}^{m} \frac{m}{k} S_{k,m}\left(\frac{1}{r}\right) \sum_{i=0}^{r-1} \varepsilon^{ik} (X - \varepsilon^i)^{-k}.$$

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.9

Общая краевая задача в бесконечном слое для систем псевдодифференциальных уравнений со стабилизирующимися символами. Макаров А. А. — Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 73—74.

Рассматривается общая краевая задача в бесконечном слое для систем псевдодифференциальных уравнений со стабилизирующимися символами. Показано, что исследуемая задача корректно разрешима в пространствах при всех λ.

УДК 517.919.583

Орбитальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений. Житомирский М. Я. — Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 74—76.

Результаты, полученные в работе, позволяют в явной форме провести классификацию К [ч] (кроме случая неэлементарной особой точки).

УДК 517.9

Численный метод исследования задачи об излучении волн из многоэлементного плоского ленточного резонатора. Болтоносов А. И. — Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 76—77.

Исследуются основные энергетические характеристики рассеянного поля: полная излученная системой энергия и диаграмма направленности излучения. Приведен детальный анализ этих характеристик для простейшей структуры, какой является обычный резонатор, и для систем более сложных, включающих в себя решетки с числом лент не более 12.

УДК 621.391.2

Применение метода интерполяции для определения временной задержки между сигналами. — Котюк А. Ф., Райцин А. М. — Вестн. Харьк. ун-та, 1983, № 241. Механика и управление динамических систем, с. 80—81.

Сравниваются статистические свойства уточненных оценок задержки по положению максимума ФВК в случае ее квадратичной интерполяции по $2\nu+$ $+1$ точкам $(n=2)$ и по положению нуля производной ФВК при ее линейной интерполяции $(n=1)$. Качество оценок характеризуется доверительным интервалом, определяющим с вероятностью α попадание оценки временной задержки $\hat{x}_0$ интервале $x_0(1-\varepsilon)<\hat{x}_0<x_0(1+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

ТРЕБОВАНИЯ К АВТОРАМ СБОРНИКА

1. Рукописи статей, направляемые в редакцию сборника, дол ны сопровождаться разрешением на опубликование от учреждени в котором выполнена данная работа.

2. Объем статьи не должен превышать 12 страниц машинопи ного текста, включая список литературы, таблицы и реферат.

3. К статье прилагается реферат объемом не более 1/2 стран цы машинописного текста, зашифрованный по универсальной дес тичной классификации (УДК).

4. Рукопись подается в двух экземплярах, напечатанная н машинке через два интервала только на черной ленте, включа сноски, таблицы и примечания на одной стороне стандартного лис белой бумаги. На полях рукописи необходимо карандашом указа место расположения рисунков или таблиц. Сокращение слов в та лицах не допускается.

5. В тексте разрешаются только общепринятые сокращени (т. е., и т. д., и т. п., и др.). Иностранный текст, если нет маши ки с иностранным шрифтом, вписывается от руки.

6. Формулы должны быть разборчиво написаны от руки туш или черными чернилами (буквы вдвое больше печатных). Следу четко разграничивать индексы и показатели степени, прописны и строчные буквы. Буквы одинакового начертания — *c, k, v,* *s, z, x, y, p* подчеркивать: прописные (большие) — двумя черт ками снизу, строчные (малые) — двумя черточками сверху. Особ но аккуратно следует вписывать сходные по написанию буквы и *n*, *l* и *e*, *g* и *q*. Необходимо четко отличать штрихи от един Все греческие буквы обводить красным карандашом. Готическ шрифт не употреблять.

7. Иллюстративный материал (не более 5 рисунков на 1 печ. прилагается отдельно в двух экземплярах и выполняется на кал тушью. На обороте каждого рисунка указываются номер его, ф милия автора и название статьи. Подписи к рисункам следует п лагать на отдельном листе в конце статьи. На первых экземпляр рисунков буквенных и цифровых обозначений не давать.

8. Цифра в тексте, указывающая ссылку на литературу, ключается в квадратные скобки. В список литературы включаю только те работы, на которые ссылается автор статьи. Оформл список литературы по ГОСТ 7.1—76.

9. В конце рукописи должны быть указаны название учре дения, в котором выполнена работа, имя, отчество, фамилия ав ра, домашний адрес, дата, подпись.

10. В случае переработки статьи датой ее поступления счи ется дата получения редакцией исправленного варианта в (д экземплярах). После переработки статьи вновь рассматрива редколлегией. При отказе в публикации работы редколлегия ост ляет за собой право не возвращать автору экземпляр.

РЕДКОЛЛЕГ