ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1949 Том XXI

О МЕРЕ ГРУПП ЛИ

Г. И. Дринфельд

(Харьков)

§ 1. Н. Г. Чеботарёв [1], [2] показал возможность и целесообразность рассмотрения меры (объёма) группы Ли в виде интеграла

$$\int M(x^1, x^2, \dots x^n)\, dx^1\, dx^2 \dots dx^n, \tag{1}$$

подчинённого требованию инвариантности относительно преобразований группы, но ограничился рассмотрением просто-транзитивных групп, доказав, в частности, что такие группы обладают единственным (с точностью до постоянного множителя) интегральным инвариантом (1).

Таким образом осталась вне рассмотрения такая столь важная кратно-транзитивная группа, как группа эвклидовых движений, очевидно имеющая объём. С другой стороны, легко привести примеры кратно-транзитивных групп, не имеющих объёма в смысле Н. Г. Чеботарёва.

В связи с этим, мы намерены дополнить исследования Н. Г. Чеботарёва указанием тех дополнительных, необходимых и достаточных условий, при которых кратно-транзитивная группа обладаёт объёмом. Попутно мы полностью выясним вопрос о существовании интегральных инвариантов n-го порядка у интранзитивной группы.

Упомянутые выше условия представляются, на первый взгляд, весьма ограничительными, но, как показывают рассмотрения параграфа 4, наличие объёма у кратно-транзитивной группы не представляет слишком редкое явление. Впрочем, рассмотрения параграфа 4 имеют самостоятельное значение, о котором будет сказано в своём месте.

В параграфе 3 приводится известное утверждение, позволяющее свести решение вопроса о существовании объёма у любой группы данной структуры к решению этого вопроса для одной какой-либо группы этой структуры.

Так как это утверждение важно для рассмотрений параграфа 4, и, кроме того, оно в известной мере дополняет и само определение меры как интегрального инварианта, то мы сочли полезным проверить его правильность непосредственными вычислениями.

§ 2. Для того чтобы интеграл (1) был интегральным инвариантом группы G_r с инфинитезимальными операторами

$$X_k(f) = \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad k = 1, 2, \dots r, \tag{2}$$

необходимы и достаточны условия [3]:

$$X_k(M)+M\,\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x^i}=0, \qquad k=1,2,\dots r, \tag{3}$$

(при суммировании по индексу, встречающемуся вверху и внизу, знак суммы опускается).

Если

$$\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x^i}=0, \qquad k=1,2,\dots r, \tag{4}$$

то, очевидно, всегда существует решение

$$M=\text{const}$$

системы уравнений (3) — единственное в случае транзитивной группы и только в этом случае. В дальнейшем мы будем предполагать, что хотя бы одно из тождеств (4) не имеет места.

Введя обозначение $\ln M=N$, мы заменим систему уравнений (3) системой однородных уравнений:

$$U_k(z)=X_k(z)-\left(\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x^i}\right)\frac{\partial z}{\partial N}=0, \qquad k=1,2,\dots r, \tag{5}$$

для которой составим скобки Пуассона. Тогда получим:

$$(U_k,U_m)=(X_k,X_m)+\left(\xi_{mj}\frac{\partial^2 \xi_{ki}}{\partial x^i\,\partial x^j}-\xi_{kj}\frac{\partial^2 \xi_{mi}}{\partial x^i\,\partial x^j}\right)\frac{\partial z}{\partial N}, \quad k,m=1,2,\dots r \tag{6}$$

Так как операторы (2) являются операторами группы, то

$$(X_k,X_m)=C^s_{km}X_s(f), \qquad k,m,s=1,2,\dots r, \tag{7}$$

где C^s_{km} — структурные константы.

Из (7) следуют тождества

$$\xi_{kj}\frac{\partial \xi_{mi}}{\partial x^j}-\xi_{mj}\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x^j}=C^s_{km}\,\xi_{si},$$

диференцирование которых по x^i с дальнейшим суммированием по значку i приводит к тождествам:

$$\xi_{kj}\frac{\partial \xi_{mi}}{\partial x^j\,\partial x^i}-\xi_{mj}\frac{\partial^2 \xi_{ki}}{\partial x^j\,\partial x^i}=C^s_{km}\frac{\partial \xi_{si}}{\partial x^i}. \tag{8}$$

Из (6) и (8) следует

$$(U_k,U_m)=C^s_{km}U_s(f), \qquad k,m,s=1,2,\dots r \tag{9}$$

Если группа G_r просто-транзитивна, то $r=n$ и ранг матрицы

$$H=\|\xi_{ki}\| \tag{10}$$

равен n. Следовательно, в этом случае, уравнения системы (5), в силу (9), образуют полную систему линейно-несвязанных уравнений с числом переменных, равным $n+1$. Система имеет решение, отличное от тривиального, и притом (с точностью до постоянного множителя) единственное. Это решение содержит аргумент N, так как в противном случае система уравнений, полученных приравниванием нулю операторов (2), имела бы нетривиальное решение, что невозможно, если ранг матрицы (10) равен n.

Отсюда следует существование единственного (с точностью до постоянного множителя) решения у системы уравнений (3), то есть существование интегрального инварианта — меры просто-транзитивной группы G_n.

Обратимся к рассмотрению кратно-транзитивной группы. В этом случае $r > n$ и ранг матрицы (10) равен n.

Выделим из совокупности операторов (2) n линейно-несвязанных операторов и обозначим их (изменив, в случае надобности, нумерацию) через $X_i(f)$, $i = 1, 2, \ldots n$, остальные операторы обозначим через

$$Y_i(f) = \eta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \qquad i = 1, 2, \ldots r - n. \tag{11}$$

Тогда имеем

$$Y_j(f) = p_j^{\nu} X_{\nu}(f), \qquad j = 1, 2, \ldots r - n.$$

где для каждого j хоть одно p_j^{ν} не постоянная величина.

Система (5) состоит тогда из двух систем

$$X_k(z) - \left(\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x^i}\right) \frac{\partial z}{\partial N} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots n, \tag{5_1}$$

$$Y_s(z) - \left(\frac{\partial \eta_{si}}{\partial x^i}\right) \frac{\partial z}{\partial N} = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots r - n. \tag{5_2}$$

Систему уравнений (5_2), на основании (11) заменим системой

$$p_s^{\nu} X_{\nu}(f) - p_s^{\nu} \left(\frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x^i}\right) \frac{\partial z}{\partial N} - X_{\nu}\left(p_s^{\nu}\right) \frac{\partial z}{\partial N} = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots r - n.$$

Последняя, на основании уравнений (5_1), приводится к системе уравнений

$$X_{\nu}\left(p_s^{\nu}\right) \frac{\partial z}{\partial N} = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots r - n. \tag{5_3}$$

Если имеют место тождества

$$X_{\nu}\left(p_s^{\nu}\right) \equiv 0, \qquad s = 1, 2, \ldots r - n, \tag{12}$$

то мы имеем только систему (5_1) и, как в предыдущем случае просто-транзитивной группы, существует, с точностью до постоянного множителя, единственный интегральный инвариант (1) — мера группы. Если же хоть одно из тождеств (12) не имеет места, то из (5_3) следует

$$\frac{\partial z}{\partial N} = 0,$$

а тогда из (5_1)

$$X_k(z)=0, \qquad k=1, 2, \ldots n,$$

$$z=\text{const}$$

и, если не имеют места тождества (4), интегральный инвариант не существует.

Нам остаётся рассмотреть случай интранзитивной группы. Предварительно заметим, что если интеграл (1) — интегральный инвариант такой группы, то интеграл

$$\int \pi\left(\varphi_1, \ldots \varphi_s\right) M dx^1 dx^2 \ldots dx^n, \tag{13}$$

где $\varphi_1, \ldots \varphi_s$ — абсолютные инварианты группы и π — произвольная функция, тоже является интегральным инвариантом этой группы.

Наоборот, если интеграл (1) и интеграл

$$\int M_1 dx^1 dx^2 \ldots dx^n$$

являются интегральными инвариантами одной и той же группы G_r, то

$$M_1=\varphi \cdot M,$$

где φ — абсолютный инвариант группы. Наше замечание почти непосредственно вытекает из условий (3) и того факта, что функция φ является абсолютным инвариантом группы тогда и только тогда, когда имеют место тождества

$$X_k(\varphi)=0, \qquad k=1, 2, \ldots r.$$

Если $r<n$ и ранг матрицы (10) равен r, то, как легко следует из рассмотрения систем (3), (5) и только что сделанного замечания, группа G_r имеет бесконечное число интегральных инвариантов, которые можно записать в виде (12), если интеграл (1) является одним из интегральных инвариантов и $s=n-r$.

Если ранг матрицы (10) равен $q\,(q<r)$, то, полагая линейно-несвязанными операторы $X_i(f)$, $i=1, 2, \ldots q$ и обозначая остальные операторы через $Y_i(f)$, мы можем рассуждать, как и в случае кратно-транзитивной группы. Таким образом, и в случае интранзитивной группы, если не имеют места условия (4) и нарушается хоть одно из тождеств

$$X_\nu\left(p_s^\nu\right)=0, \qquad s=1, 2, \ldots r-q, \tag{12_1}$$

где p_s^ν определены из равенств

$$Y_s(f)=p_s^\nu X_\nu(f),$$

то интегральный инвариант не существует. Если же соблюдается хоть одна из совокупностей тождеств (4), (12_1), то интегральные инварианты существуют и могут быть записаны в виде (13).

Резюмируя, имеем следующие утверждения:

Теорема 1 (Н. Г. Чеботарёв). Просто-транзитивная группа имеет единственный (с точностью до постоянного множителя) интегральный инвариант (1). Как показал Н. Г. Чеботарёв [2], в некоторой области сохраняется знак плотности M и, следовательно, за счёт постоянного множителя, интеграл (1) будет положительным. Поэтому его можно принять в качестве меры (объёма) группы.

Теорема 2. Условия (4) необходимы и достаточны для того, чтобы группа имела интегральный инвариант

$$\int dx^1 dx^2 \dots dx^n \tag{14}$$

— единственный, если группа транзитивна и не единственный, в случае интранзитивной группы.

Теорема 3. Если ранг матрицы (10) меньше r и хоть одно из тождеств (4) не имеет места, то для существования интегрального инварианта (1) необходимы и достаточны условия (12) или (12_1). В случае транзитивной группы имеем единственный интегральный инвариант, в случае интранзитивной группы общий вид интегрального инварианта даётся формулой (13), где $s = n - q$, q — ранг матрицы (10).

По поводу последних двух теорем сделаем сразу же следующее замечание. Можно всегда найти неособую замену координат, при которой интеграл (1) ($M \neq 1$) переходит в интеграл (14) и наоборот. При такой замене координат группа G_r заменяется подобной группой G_r'. Как это следует из теоремы 4, доказываемой в следующем параграфе, если интеграл (1) является интегральным инвариантом группы G_r, то интеграл (14) является интегральным инвариантом группы G_r'.

Отсюда следует, что если не заданы конечные преобразования группы или её инфинитезимальные операторы, а заданы лишь структурные константы, то теоремы 2 и 3, в известном смысле, эквивалентны.

§ 3. Если положить

$$x^i = \varphi_i\left(u^1, u^2, \dots u^n\right), \qquad i = 1, 2, \dots n, \tag{15}$$

то операторы (2) заменятся операторами

$$Y_k(f) = \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial u^i}, \qquad k = 1, 2, \dots n, \tag{16}$$

где

$$\eta_{ki} = \left[X_k\left(u^i\right)\right].$$

Скобки [ ] означают, что в функции

$$X_k\left(u^i\right) = \xi_{kj} \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$$

выполнена замена (15); впредь мы их будем опускать.

Преобразование (15) предполагается неособым

$$J = \frac{D(x^1, \dots x^n)}{D(u^1, \dots u^n)} \neq 0.$$

Операторы (16) определяют группу G_r^1, подобную группе G_r, структурные константы этих групп одинаковы.

Легко проверить, что если интеграл (1) является интегральным инвариантом группы G_r, то интеграл

$$\int MJdu^1 \dots du^n \tag{17}$$

является интегральным инвариантом группы G_r^1.

Действительно, предположим справедливость тождеств (3). Так как имеют место формулы

$$J = \frac{\partial x^r}{\partial u^s} \Delta_r^s, \qquad s = 1, 2, \dots n,$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial x^r} = \frac{\Delta_r^s}{J} \qquad r, s = 1, 2, \dots n,$$

$$X_k(J) = \sum_{s=1}^{n} X_k\left(\frac{\partial x^r}{\partial u^s}\right)\Delta_r^s,$$

то

$$Y_m(MJ) + MJ\frac{\partial \eta_{mi}}{\partial x^i} = X_m(MJ) + JM\sum_j \frac{\partial \eta_{mi}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial u^i} =$$

$$= X_m(MJ) + JM\sum_{i,j}\frac{\partial x^j}{\partial u^i}\left\{\frac{\partial \xi_{mk}}{\partial x^j}\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \xi_{mk}\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \partial x^k}\right\} =$$

$$= JX_m(M) + MX_m(J) + JM\frac{\partial \xi_{mk}}{\partial x^k} + JM\sum_{j,i}\frac{\partial x^j}{\partial u^i}X_m\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right) =$$

$$= M\left\{X_m(J) + J\sum_i \frac{\partial x^j}{\partial u^i}X_m\left(\frac{\Delta_i^j}{J}\right)\right\} = M\left\{X_m(J) - \sum_i \Delta_j^i X_m\left(\frac{\partial x^j}{\partial u^i}\right)\right\} \equiv 0.$$

Таким образом доказано утверждение:

Теорема 4. Две подобные группы одновременно имеют или не имеют интегральные инварианты n-го порядка. Интегральные инварианты одной группы получаются из интегральных инвариантов второй группы с помощью соответствующей замены переменных.

Сделаем ещё следующее замечание. Как известно [4], совокупности операторов

$$X_k(f), \qquad k = 1, 2, \dots, r, \tag{2_1}$$

$$a_k^t X_t(f), \qquad k = 1, 2, \dots r, \tag{2_2}$$

где a_k^t — постоянные и определитель $|a_k^t| \neq 0$, определяют одну и ту же группу. Из условий инвариантности (3) немедленно следует

Теорема 5. Существование и значение интегрального инварианта группы не зависит от того, задана ли группа операторами (2) или операторами (2_2).

§ 4. Ещё Пуанкаре отметил, что определяя вероятность попадания точки в некоторую область S как интеграл

$$\int_{(s)} M\,dx\,dy \tag{18}$$

мы должны, прежде всего, потребовать, чтобы интеграл (18) был инвариантным по отношению к некоторой группе преобразований, связанной с механизмом, осуществляющим случайное событие. Однако большинство современных авторов и, в особенности, те, кто занимается интегральной геометрией, ограничиваются рассмотрением эвклидовой группы движений и, соответственно с этим, определяют вероятность (18) интегралом

$$\int_{(s)} dx\,dy,$$

являющимся единственным интегральным инвариантом второго порядка группы эвклидовых движений.

Нам кажется, что ни в теории вероятнойстей, ни тем более в интегральной геометрии нет оснований ограничиваться рассмотрением эвклидовой группы движений и пренебрегать, например, группой движений Минковского. Поэтому нам представляется совершенно естественной следующая общая задача: рассмотреть все возможные „движения" на плоскости, образующие группу, и установить, какие из них допускают интегральный инвариант второго порядка (положительный). Решение этой задачи означало бы указание тех „движений", для которых имеет смысл понятие о вероятности попадания точки в некоторую область.

Таблица 1

Тип	C^1_{12}	C^2_{12}	C^3_{12}	C^1_{13}	C^2_{13}	C^3_{13}	C^1_{23}	C^2_{23}	C^3_{23}	
I	1	0	0	0	2	0	0	0	1	—
II	0	0	0	1	0	0	0	C	0	$C \neq 1$
III	0	0	0	1	0	0	0	1	0	—
IV	0	0	0	1	0	0	1	1	0	—
V	0	0	0	0	0	0	1	0	0	—
VI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
VII	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	—
VIII	0	0	0	$-p$	1	0	-1	$-p$	0	$p \geqslant 0$

Мы дадим полное решение задачи для всех трёхчленных групп Ли на плоскости. Предположение относительно характера группы вызвано, прежде всего, самой природой задачи.

Еще С. Ли [5] перечислил все типы комплексных трёхчленных групп на плоскости, но, как показал недавно Х. Ли [6], классификацию С. Ли в случае вещественных групп надо дополнить ещё двумя типами. Именно, согласно с Х. Ли, все типы вещественных трёхчленных групп исчерпываются таблицей 1 структурных констант.

Для решения нашей задачи, в виду теоремы 4, нам достаточно рассмотреть для каждого типа какую-либо принадлежащую ему транзитивную группу и какую-либо интранзитивную. Легко проверить, что в качестве представителей групп Ли, указанных в таблице 1 типов, можно взять группы с инфинитезимальными операторами

$$X_k(f) = \xi_{k1}\frac{\partial f}{\partial x} + \xi_{k2}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

коэфициенты которых даны в таблице 2.

Таблица 2

Тип	ξ_{11}	ξ_{12}	ξ_{21}	ξ_{22}	ξ_{31}	ξ_{32}
IA	y	0	$\frac{1}{2}x$	$-\frac{1}{2}y$	0	$-x$
IB	1	-1	x	$-x$	x^2	$-x^2$
II	1	1	1	-1	$\frac{(c+1)x-(c-1)y}{2}$	$\frac{(c+1)y-(c-1)x}{2}$
IIIA	1	0	0	1	x	y
IIIB	0	1	0	x	0	y
IV	1	0	y	0	x	-1
V	1	0	0	1	y	0
VI	1	-1	$x+y$	$-(x+y)$	$(x+y)^2$	$-(x+y)^2$
VII	-1	0	$\operatorname{tg} y \cos x$	$\frac{\cos x}{\cos y} - \sin x$	$\operatorname{tg} y \sin x$	$\cos x + \frac{\sin x}{\cos y}$
VIII	1	0	0	1	$-px-y$	$x-py$

Для нахождения этой таблицы коэфициентов мы не прибегали к теоремам Ли; для некоторых типов групп мы воспользовались их линейными представлениями, указанными Х. Ли [6] и теоремой 5, в остальных случаях мы искали частное решение системы уравнений

$$(X_i, X_k) = c^j_{ik} X_j(f), \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

с неизвестными $X_i(f)$ и соответствующей совокупностью структурных констант из таблицы 1.

Нет необходимости приводить проделанные нами достаточно простые выкладки, проще проверить, что группам, определяемым таблицей 2, соответствуют структурные константы таблицы 1. Мы приведём только, в качестве примеров, краткие доказательства отсутствия интранзитивной группы типа II и транзитивной группы типа VI.

Если трёхчленная группа на плоскости интранзитивна, то

$$X_2(f) = mX_1(f), \qquad X_3(f) = nX_1(f),$$

причём m и n не нули и не постоянные.

Так как

$$(X_1, X_2) = X_1(m) \cdot X_1(f),$$
$$(X_1, X_3) = X_1(n) \cdot X_1(f),$$
$$(X_2, X_3) = [mX_1(n) - nX_1(m)]\, X_1(f),$$

то для типа II имеем

$$X_1(m) = 0, \quad X_1(n) = 1, \quad mX_1(n) - nX_1(m) = cm,$$

что невозможно при $m \neq 0$, $c \neq 1$.

Обращаясь к рассмотрению группы типа VI, заметим, что в случае надобности, можно воспользоваться всегда возможным неособым преобразованием координат и положить

$$X_1(f) = a\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Полагая

$$X_2(f) = A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$X_3(f) = C\frac{\partial f}{\partial x} + D\frac{\partial f}{\partial y},$$

мы должны иметь

$$(X_i, X_k) \equiv 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots 3. \tag{19}$$

Если $B = 0$, то $D \neq 0$ (иначе имеем интранзитивную группу), а тождества (19) приводят к уравнениям

$$a\frac{\partial A}{\partial x} - A\frac{\partial a}{\partial x} = 0,$$

$$a\frac{\partial C}{\partial x} - C\frac{\partial a}{\partial x} - D\frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

$$A\frac{\partial C}{\partial x} - C\frac{\partial A}{\partial x} - D\frac{\partial A}{\partial y} = 0,$$

$$a\frac{\partial D}{\partial x} = 0.$$

Первое из этих уравнений приводит к заключению

$$A = k(y)a,$$

тогда из следующих двух уравнений получим, если $D \neq 0$,

$$k(y) = \text{const},$$

что невозможно, если операторы определяют группу.

Если $B \neq 0$, то должно быть

$$\begin{aligned} C &= ma + nA, \\ D &= nB, \end{aligned} \tag{20}$$

причём хоть один из коэфициентов m, n не должен быть постоянной величиной. Тождества (19) приводят к уравнениям

$$a\frac{\partial B}{\partial x} = 0, \quad a\frac{\partial D}{\partial x} = 0, \quad B\frac{\partial D}{\partial y} - D\frac{\partial B}{\partial y} + A\frac{\partial D}{\partial x} - C\frac{\partial B}{\partial x} = 0,$$

$$a\frac{\partial A}{\partial x} - A\frac{\partial a}{\partial x} - B\frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

$$a\frac{\partial C}{\partial x} - C\frac{\partial a}{\partial x} - D\frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

$$A\frac{\partial C}{\partial x} + B\frac{\partial C}{\partial y} - C\frac{\partial A}{\partial x} - D\frac{\partial A}{\partial y} = 0. \tag{21}$$

Из первых трёх уравнений следует

$$D = nB, \quad n = \text{const}.$$

Поэтому из следующих двух уравнений легко вывести, что

$$m = \varphi(y).$$

Исключив из тех же двух уравнений $\frac{\partial a}{\partial x}$ и воспользовавшись (20), получим зависимость

$$C\frac{\partial A}{\partial x} - A\frac{\partial C}{\partial x} - mB\frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

на основании которой, из (21) следует

$$\frac{\partial C}{\partial y} - n\frac{\partial A}{\partial y} - m\frac{\partial a}{\partial y} = 0.$$

Отсюда, в виду (20), следует

$$\frac{\partial m}{\partial y} = 0, \quad m = \text{const}.$$

Мы пришли к противоречию, так как если m и n постоянны, то наши операторы не определяют группу.

Таким образом нет транзитивной группы типа VI, хотя такие группы гомоморфны с транзитивной группой параллельных переносов в пространстве трёх измерений.

Составив для каждой совокупности инфинитезимальных операторов, определяемых таблицей 2, уравнения (3), можно без труда установить результаты, сведённые в следующую таблицу:

Тип	Интегральн. инвариант	Замечания
IA	$\int dx\,dy$	
IB	нет	
II	нет при $c \neq -1$ $\int dx\,dy$ при $c = -1$	При $c = -1$ имеем группу движений Минковского.
IIIA	нет	
IIIB	нет	
IV	$\int e^y\,dx\,dy$	
V	$\int dx\,dy$	
VI	$\int \varphi(x + y)\,dx\,dy$	φ — произвольная функция
VII	$\int \cos y\;dx\,dy$	
VIII	нет при $p \neq 0$ $\int dx\,dy$ при $p = 0$	при $p = 0$ имеем эвклидову группу движений

Отметим, что, как показывают результаты, относящиеся к типу I, наличие или отсутствие интегрального инварианта не определяется лишь структурными константами группы. Это замечание не противоречит замечанию, сделанному в конце параграфа 2 по поводу теорем 2 и 3, так как там речь шла о подобных группах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Чеботарёв, Про визначення об'єму в групах Лі. Записки Харьковского Математич. общества, т. XIV (1937).
2. Н. Г. Чеботарёв, Про визначення міри груп Лі. Там же. Errata к этим статьям см. в т. XV тех же записок.
3. E. Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff, Paris (1922).
4. Л. П. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований.
5. Lie — Schaffers, Vorlesungen über continuierliche Gruppen (1893).
6. H. C. Lee, Sur les groupes de Lie réels à trois paramètres. Journal de mathém. pures et appliquées, t. 27. (1947).