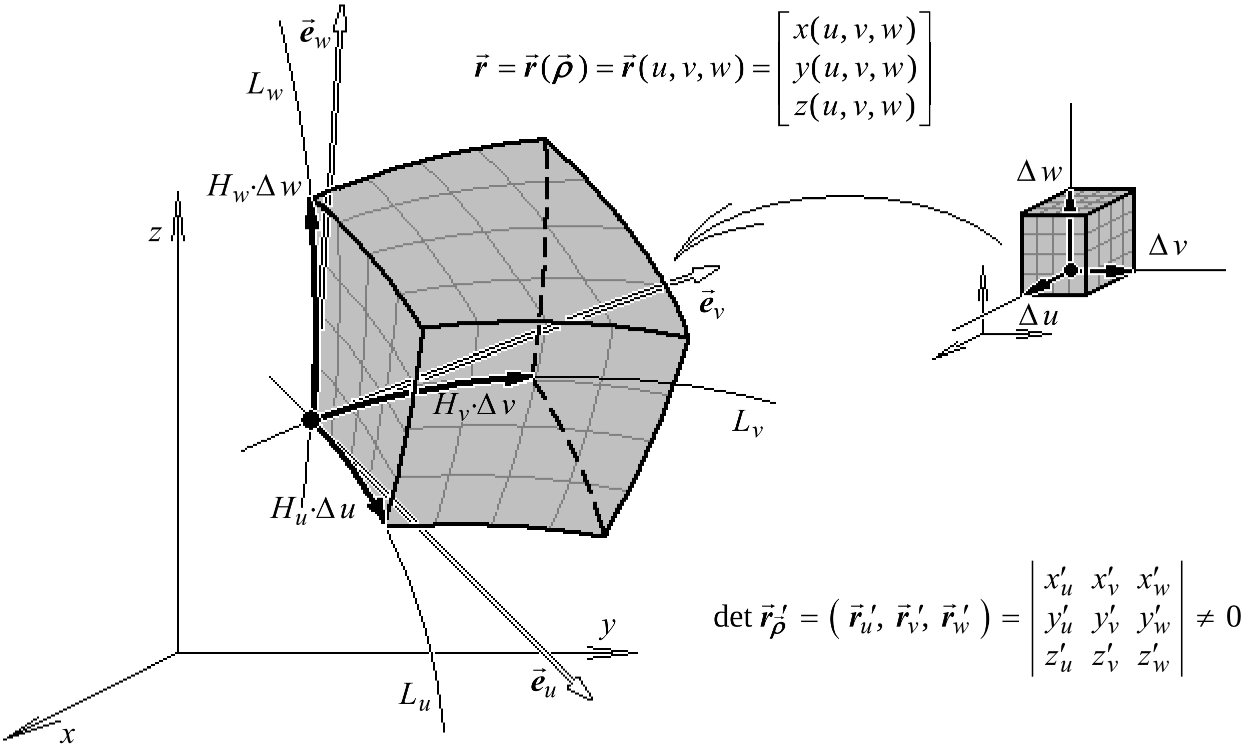
Векторные операции в криволинейных координатах

1° Криволинейные координаты

Пусть $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(\vec{\boldsymbol{\rho}})$ *осуществляет взаимно однозначное, непрерывно-дифференцируемое отображение некоторой области* Ω *на область* V *с ненулевым якобианом,*

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(\vec{\boldsymbol{\rho}}) = \vec{\boldsymbol{r}}(u, v, w) = \begin{bmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{bmatrix}$$



$$\det \vec{\boldsymbol{r}}'_{\vec{\rho}} = \left(\vec{\boldsymbol{r}}'_u,\ \vec{\boldsymbol{r}}'_v,\ \vec{\boldsymbol{r}}'_w \right) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0$$

так что положение точки с ***декартовыми*** *координатами* (x, y, z) *можно однозначно определять тройкой чисел* (u, v, w), *называемых* ***криволинейными*** *координатами*

Линии изменения одной из координат при фиксированных двух других

$$L_u = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u, v_0, w_0) \right\}, \qquad L_v = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u_0, v, w_0) \right\}, \qquad L_w = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u_0, v_0, w) \right\}$$

называются ***координатными линиями***. *Векторы*

$$\vec{\boldsymbol{r}}'_u, \quad \vec{\boldsymbol{r}}'_v, \quad \vec{\boldsymbol{r}}'_w$$

являются направляющими векторами касательных к координатным линиям.

Поверхности изменения каких-либо двух координат при фиксированной третьей

$$S_{uv} = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u, v, w_0) \right\} \equiv S_{w_0}, \quad S_{vw} = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u_0, v, w) \right\} \equiv S_{u_0}, \quad S_{wu} = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u, v_0, w) \right\} \equiv S_{v_0}$$

называются ***координатными поверхностями***. *Векторы*

$$\left[\vec{\boldsymbol{r}}'_u, \vec{\boldsymbol{r}}'_v \right], \qquad \left[\vec{\boldsymbol{r}}'_v, \vec{\boldsymbol{r}}'_w \right], \qquad \left[\vec{\boldsymbol{r}}'_w, \vec{\boldsymbol{r}}'_u \right]$$

являются нормальными векторами координатных поверхностей.

Требование ненулевого якобиана означает, что тройка векторов

$$\left\{ \vec{\boldsymbol{r}}'_u, \quad \vec{\boldsymbol{r}}'_v, \quad \vec{\boldsymbol{r}}'_w \right\}$$

некомпланарная и образует в каждой точке $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ *свой* ***локальный*** *базис. Криволинейные координаты* (u, v, w) *называются* ***ортогональными***, *если базис ортогональный*

$$\vec{\boldsymbol{r}}'_u \perp \vec{\boldsymbol{r}}'_v \perp \vec{\boldsymbol{r}}'_w$$

Замечание. *В случае декартовых ортогональных координат* (x, y, z) *- координатные линии и поверхности, очевидно, представляют собой ортогональные прямые и плоскости. Ортогональный базис* $\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$ *нормирован и один и тот же для всех точек. В общем случае криволинейных координат векторы базиса не нормированы. Их длины*

$$H_u = |\vec{r}_u'|, \quad H_v = |\vec{r}_v'|, \quad H_w = |\vec{r}_w'|$$

называются ***коэффициентами Ламэ****, геометрический смысл которых - коэффициенты растяжения (искажения) в данной точке длин декартовых координатных линий пространства* $Ouvw$ *при их преобразовании в координатные кривые пространства* $Oxyz$
В случае ортогональных криволинейных координат, произведения

$$\left| [\vec{r}_u', \vec{r}_v'] \right| = H_u \cdot H_v, \quad \left| [\vec{r}_v', \vec{r}_w'] \right| = H_v \cdot H_w, \quad \left| [\vec{r}_w', \vec{r}_u'] \right| = H_w \cdot H_u$$

- коэффициенты растяжения площадей координатных плоскостей, а произведение

$$\left| (\vec{r}_u', \vec{r}_v', \vec{r}_w') \right| = H_u \cdot H_v \cdot H_w$$

- коэффициент растяжения объема в данной точке пространства $Ouvw$ *при его отображении в пространство* $Oxyz$.
Очевидно, векторы

$$\vec{e}_u = \frac{1}{H_u}\vec{r}_u', \qquad \vec{e}_v = \frac{1}{H_v}\vec{r}_v', \qquad \vec{e}_w = \frac{1}{H_w}\vec{r}_w'$$

образуют в каждой точке ортонормированный базис. Будем считать, что тройка базисных векторов $\{ \vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w \}$ *ориентирована так же, как и ортонормированный базис пространства* $Oxyz$, *так что*

$$[\vec{e}_u, \vec{e}_v] = \vec{e}_w, \quad [\vec{e}_v, \vec{e}_w] = \vec{e}_u, \quad [\vec{e}_w, \vec{e}_u] = \vec{e}_v$$

2° Градиент

Для нахождения $\operatorname{grad} f(\vec{r})$ *в* ***ортонормированном*** *базисе* $\{ \vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w \}$ *надо найти координаты*

$$(\operatorname{grad} f(\vec{r}), \vec{e}_u), \quad (\operatorname{grad} f(\vec{r}), \vec{e}_v), \quad (\operatorname{grad} f(\vec{r}), \vec{e}_w)$$

Имеем

$$(\operatorname{grad} f(\vec{r}_0), \vec{e}_u) = f_{\vec{e}_u}'(\vec{r}_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\vec{r}_0 + \vec{e}_u \Delta t) - f(\vec{r}_0)}{\Delta t} =$$

$$\left[\vec{e}_u \cdot \Delta t = \frac{1}{H_u}\vec{r}_u' \cdot \Delta t = \vec{r}_u' \cdot \frac{1}{H_u}\Delta t = \vec{r}_u' \cdot \Delta u, \qquad \Delta u = \frac{1}{H_u}\Delta t \right]$$

$$= \frac{1}{H_u} \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(\vec{r}_0 + \vec{r}_u' \Delta u) - f(\vec{r}_0)}{\Delta u} =$$

$$\left[\vec{r}_0 + \vec{r}_u' \Delta u = \vec{r}(u_0, v_0, w_0) + \vec{r}_u'(u_0, v_0, w_0)\Delta u \approx \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0, w_0) \right]$$

$$= \frac{1}{H_u} \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0, w_0)) - f(\vec{r}(u_0, v_0, w_0))}{\Delta u} = \frac{1}{H_u}\frac{\partial}{\partial u} f(\vec{r}_0)$$

Итак,

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \vec{e}_u \cdot \frac{1}{H_u}\frac{\partial}{\partial u} f + \vec{e}_v \cdot \frac{1}{H_v}\frac{\partial}{\partial v} f + \vec{e}_w \cdot \frac{1}{H_w}\frac{\partial}{\partial w} f}$$

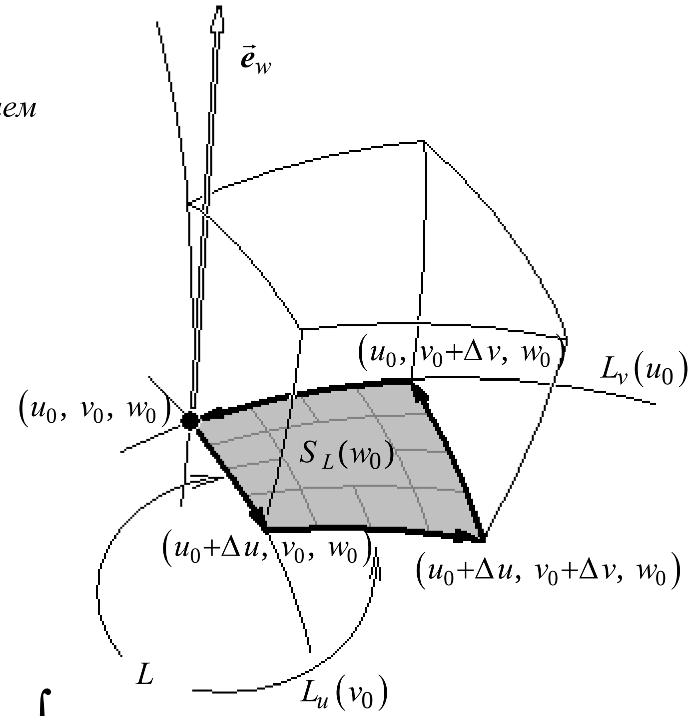
3° *Ротор*

Для нахождения $\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})$ *в* ***ортонормированном*** *базисе* $\{\vec{\boldsymbol e}_u,\ \vec{\boldsymbol e}_v,\ \vec{\boldsymbol e}_w\}$ *надо найти координаты*

$$\left(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol e}_u\right),\qquad \left(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol e}_v\right),\qquad \left(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol e}_w\right)$$

Воспользуемся инвариантным определением ротора

$$\left(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}_0),\ \vec{\boldsymbol e}_w\right)=\lim_{S_L\to\vec{\boldsymbol r}_0}\frac{\oint\limits_L\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol L}\right)}{|S_L|}$$



В числителе

$$\oint\limits_L\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ d\vec{\boldsymbol L}\right)=$$

$$=\int\limits_{L_u^+(v_0)}+\int\limits_{L_v^+(u_0+\Delta u)}+\int\limits_{L_u^-(v_0+\Delta v)}+\int\limits_{L_v^-(u_0)}=$$

$$=\int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u}\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_u'\right)\Big|_{\substack{u\\v_0\\w_0}}du+\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v}\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Big|_{\substack{u_0+\Delta u\\v\\w_0}}dv+\int\limits_{u_0+\Delta u}^{u_0}\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_u'\right)\Big|_{\substack{u\\v_0+\Delta v\\w_0}}du+\int\limits_{v_0+\Delta v}^{v_0}\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Big|_{\substack{u_0\\v\\w_0}}dv=$$

$$=\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v}\left(\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Big|_{\underbrace{\substack{u_0+\Delta u\\v}}_{w_0}}-\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Big|_{\underbrace{\substack{u_0\\v}}_{w_0}}\right)dv-\int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u}\left(\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_u'\right)\Big|_{\underbrace{\substack{u\\v_0+\Delta v}}_{w_0}}-\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_u'\right)\Big|_{\underbrace{\substack{u\\v_0}}_{w_0}}\right)du=$$

$$=\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Big|_{\underbrace{\substack{\xi_1\\v}}_{w_0}}\Delta u\,dv-\int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_u'\right)\Big|_{\underbrace{\substack{u\\\eta_1}}_{w_0}}\Delta v\,du=$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Big|_{\substack{\xi_1\\\eta_2\\w_0}}\Delta u\,\Delta v-\frac{\partial}{\partial v}\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_u'\right)\Big|_{\substack{\xi_2\\\eta_1\\w_0}}\Delta v\,\Delta u=\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Big|_{\substack{\xi_1\\\eta_2\\w_0}}-\frac{\partial}{\partial v}\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_u'\right)\Big|_{\substack{\xi_2\\\eta_1\\w_0}}\right)\Delta u\,\Delta v$$

В знаменателе

$$\left|S_L\right| = \iint\limits_{\Omega} \left|\left[\, \vec{\boldsymbol{r}}_u{}',\ \vec{\boldsymbol{r}}_v{}' \,\right]\right| du\,dv = \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u} \int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v} H_u H_v \; dv\,du \;=\; H_u H_v \Big|_{\substack{\xi_3\\ \eta_3\\ w_0}} \Delta u\, \Delta v$$

Поскольку при $S_L \to \vec{\boldsymbol{r}}_0$, *т.е.* $\Delta u\,, \Delta v \to 0$, *промежуточные точки*

$$\left(\xi_1,\ \eta_2,\ w_0\right),\quad \left(\xi_2,\ \eta_1,\ w_0\right),\quad \left(\xi_3,\ \eta_3,\ w_0\right) \quad\to\quad \left(u_0,\ v_0,\ w_0\right)$$

то

$$\left(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}_0),\, \vec{\boldsymbol{e}}_w\right) = \lim_{S_L \to \vec{\boldsymbol{r}}_0} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{r}}_v{}'\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{r}}_u{}'\right)\right)\cancel{\Delta u}\,\cancel{\Delta v}}{H_u H_v\ \cancel{\Delta u}\,\cancel{\Delta v}} = \frac{1}{H_u H_v}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{r}}_v{}'\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{r}}_u{}'\right)\right)$$

Обозначим координаты векторного поля $\vec{\boldsymbol{F}}$ *в базисе* $\left\{\vec{\boldsymbol{e}}_u\,, \vec{\boldsymbol{e}}_v\,, \vec{\boldsymbol{e}}_w\right\}$ *через* P_u, Q_v, R_w

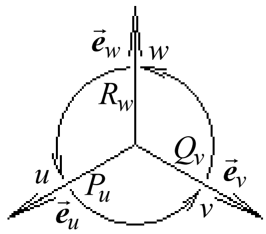
$$\vec{\boldsymbol{F}} = P_u \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_u + Q_v \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_v + R_w \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_w$$
$$\Downarrow$$
$$P_u = \left(\vec{\boldsymbol{F}},\ \vec{\boldsymbol{e}}_u\right) = \frac{1}{H_u}\left(\vec{\boldsymbol{F}},\ \vec{\boldsymbol{r}}_u{}'\right),\qquad Q_v = \left(\vec{\boldsymbol{F}},\ \vec{\boldsymbol{e}}_v\right) = \frac{1}{H_v}\left(\vec{\boldsymbol{F}},\ \vec{\boldsymbol{r}}_v{}'\right),\qquad R_w = \left(\vec{\boldsymbol{F}},\ \vec{\boldsymbol{e}}_w\right) = \frac{1}{H_w}\left(\vec{\boldsymbol{F}},\ \vec{\boldsymbol{r}}_w{}'\right)$$

Воспользовавшись круговой диаграммой, получим

$$\left(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}},\ \vec{\boldsymbol{e}}_u\right) = \frac{1}{H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(H_w R_w\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(H_v Q_v\right)\right)$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}},\ \vec{\boldsymbol{e}}_v\right) = \frac{1}{H_w H_u}\left(\frac{\partial}{\partial w}\left(H_u P_u\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(H_w R_w\right)\right)$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}},\ \vec{\boldsymbol{e}}_w\right) = \frac{1}{H_u H_v}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(H_v Q_v\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(H_u P_u\right)\right)$$



так что

$$\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\cdot\Bigg(H_u \vec{\boldsymbol{e}}_u \cdot\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(H_w R_w\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(H_v Q_v\right)\right) +$$
$$+ H_v \vec{\boldsymbol{e}}_v \cdot\left(\frac{\partial}{\partial w}\left(H_u P_u\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(H_w R_w\right)\right) +$$
$$+ H_w \vec{\boldsymbol{e}}_w \cdot\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(H_v Q_v\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(H_u P_u\right)\right)\Bigg)$$

или

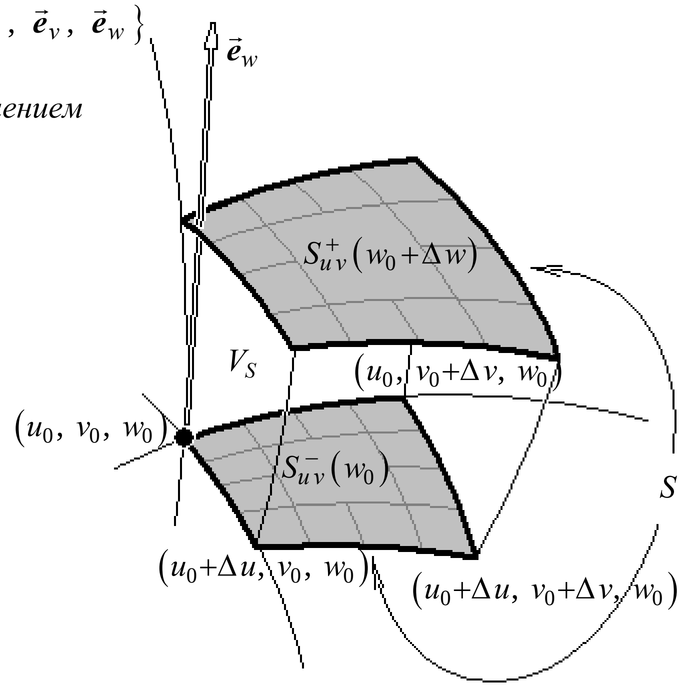
$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\cdot\begin{vmatrix} H_u \vec{\boldsymbol{e}}_u & H_v \vec{\boldsymbol{e}}_v & H_w \vec{\boldsymbol{e}}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ H_u P_u & H_v Q_v & H_w R_w \end{vmatrix}}$$

$4^{\mathbf{o}}$ ***Дивергенция***

Для нахождения $\operatorname{div}\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})$ *в базисе* $\{\vec{\boldsymbol e}_u,\ \vec{\boldsymbol e}_v,\ \vec{\boldsymbol e}_w\}$

Воспользуемся инвариантным определением дивергенции

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}_0)=\lim_{V_S\to\vec{\boldsymbol r}_0}\frac{\oint\!\!\oint_S\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\,d\vec{\boldsymbol S}\right)}{\left|V_S\right|}$$



В числителе

$$\oint\!\!\oint_S\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),d\vec{\boldsymbol S}\right)=$$

$$=\Bigg(\iint\limits_{S^-_{vw}(u_0)}+\iint\limits_{S^+_{vw}(u_0+\Delta u)}\Bigg)+$$

$$+\Bigg(\iint\limits_{S^-_{wu}(v_0)}+\iint\limits_{S^+_{wu}(v_0+\Delta v)}\Bigg)+$$

$$+\Bigg(\iint\limits_{S^-_{uv}(w_0)}+\iint\limits_{S^+_{uv}(w_0+\Delta w)}\Bigg)=$$

$$=(\dots)+(\dots)+\Bigg(-\int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u}\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v}\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Bigg|_{\substack{u\\v\\w_0}}du\,dv+\int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u}\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v}\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Bigg|_{\substack{u\\v\\w_0+\Delta w}}du\,dv\Bigg)=$$

$$=(\dots)+(\dots)\ +\int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u}\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v}\Bigg(\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Bigg|_{\substack{u\\v\\\underbrace{w_0+\Delta w}}}-\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Bigg|_{\substack{u\\v\\\underbrace{w_0}}}\Bigg)du\,dv=$$

$$=(\dots)+(\dots)\ +\int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u}\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v}\frac{\partial}{\partial w}\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Bigg|_{\substack{u\\v\\\underbrace{\zeta_3}}}\Delta w\,du\,dv\ =$$

$$=(\dots)+(\dots)\ +\ \frac{\partial}{\partial w}\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\Bigg|_{\substack{\xi_3\\\eta_3\\\zeta_3}}\Delta u\ \Delta v\ \Delta w$$

В знаменателе

$$\left|V_S\right| = \iiint\limits_{\Omega} \left|\left(\vec{\boldsymbol r}_u',\, \vec{\boldsymbol r}_v',\, \vec{\boldsymbol r}_w'\right)\right| du\,dv\,dw = \int\limits_{u_0}^{u_0+\Delta u}\int\limits_{v_0}^{v_0+\Delta v}\int\limits_{w_0}^{w_0+\Delta w} H_u H_v H_w\, dw\,dv\,du = H_u H_v H_w \Big|_{\substack{\xi_4\\ \eta_4\\ \zeta_4}} \Delta u\,\Delta v\,\Delta w$$

Поскольку при $V_S \to \vec{\boldsymbol r}_0$, *т.е.* $\Delta u,\, \Delta v,\, \Delta w \to 0$, *промежуточные точки*

$$(\xi_1,\, \eta_1,\, \zeta_1),\quad (\xi_2,\, \eta_2,\, \zeta_2),\quad (\xi_3,\, \eta_3,\, \zeta_3),\quad (\xi_4,\, \eta_4,\, \zeta_4) \quad \to \quad (u_0,\, v_0,\, w_0)$$

то

$$\operatorname{div}\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}_0) = \lim_{V_S \to \vec{\boldsymbol r}_0} \frac{\left(\ \ldots\ +\ \ldots\ +\ \frac{\partial}{\partial w}\left(\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r}),\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\right)\cancel{\Delta u}\,\cancel{\Delta v}\,\cancel{\Delta w}}{H_u H_v H_w\ \ \cancel{\Delta u}\ \cancel{\Delta v}\ \cancel{\Delta w}} =$$

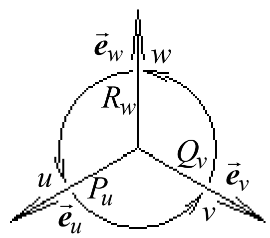
$$= \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\ \ldots\ +\ \ldots\ +\ \frac{\partial}{\partial w}\left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right)\right) =$$

$$= \left[\ \left(\vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right) = \left(\vec{\boldsymbol F},\ \left[\vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\right]\right) = H_u H_v \left(\vec{\boldsymbol F},\ \underbrace{\left[\ \vec{\boldsymbol e}_u,\ \vec{\boldsymbol e}_v\ \right]}_{\vec{\boldsymbol e}_w}\right) = \underbrace{H_u H_v \left(\vec{\boldsymbol F},\, \vec{\boldsymbol e}_w\right)}_{R_w}\ \right] =$$

$$= \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\ \ldots\ +\ \ldots\ +\ \frac{\partial}{\partial w}\left(H_u H_v R_w\right)\right)$$

Воспользовавшись круговой диаграммой, окончательно получаем

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{\boldsymbol F} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P_u H_v H_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(H_u Q_v H_w\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(H_u H_v R_w\right)\right)}$$



5° Лапласиан

Из вида дивергенции с учетом градиента, имеем

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_u}\frac{\partial}{\partial u} f \cdot H_v \cdot H_w\right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left(H_u \cdot \frac{1}{H_v}\frac{\partial}{\partial v} f \cdot H_w\right) +$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial w}\left(H_u \cdot H_v \cdot \frac{1}{H_w}\frac{\partial}{\partial w} f\right)\right)$$

так что

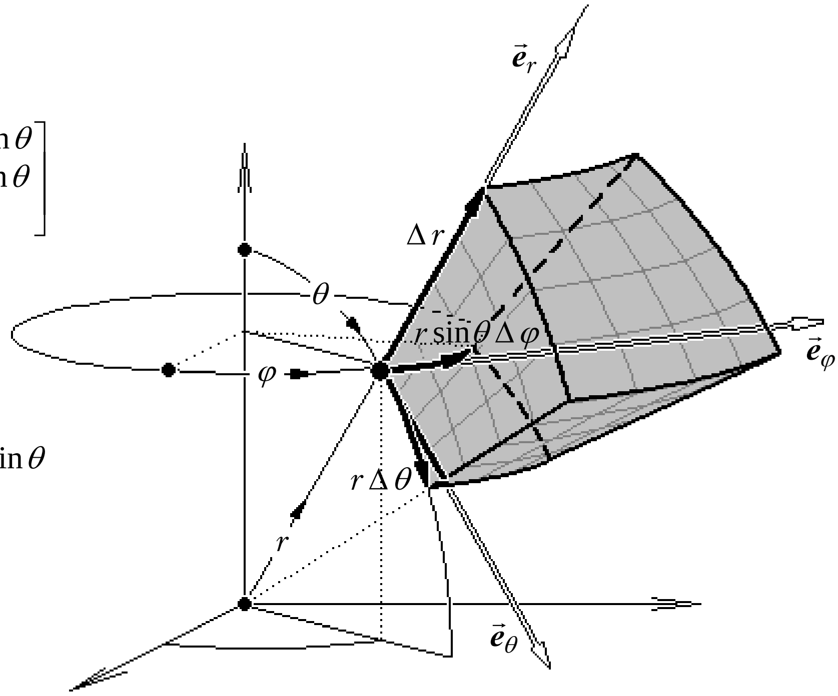
$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_v H_w}{H_u}\frac{\partial}{\partial u} f\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_w H_u}{H_v}\frac{\partial}{\partial v} f\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_u H_v}{H_w}\frac{\partial}{\partial w} f\right)\right)}$$

6° Сферические координаты

$$\vec{r} = \vec{r}(r,\ \theta,\ \varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\ \sin\theta \\ r\sin\varphi\ \sin\theta \\ r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$H_r = 1,\quad H_\theta = r,\quad H_\varphi = r\sin\theta$$



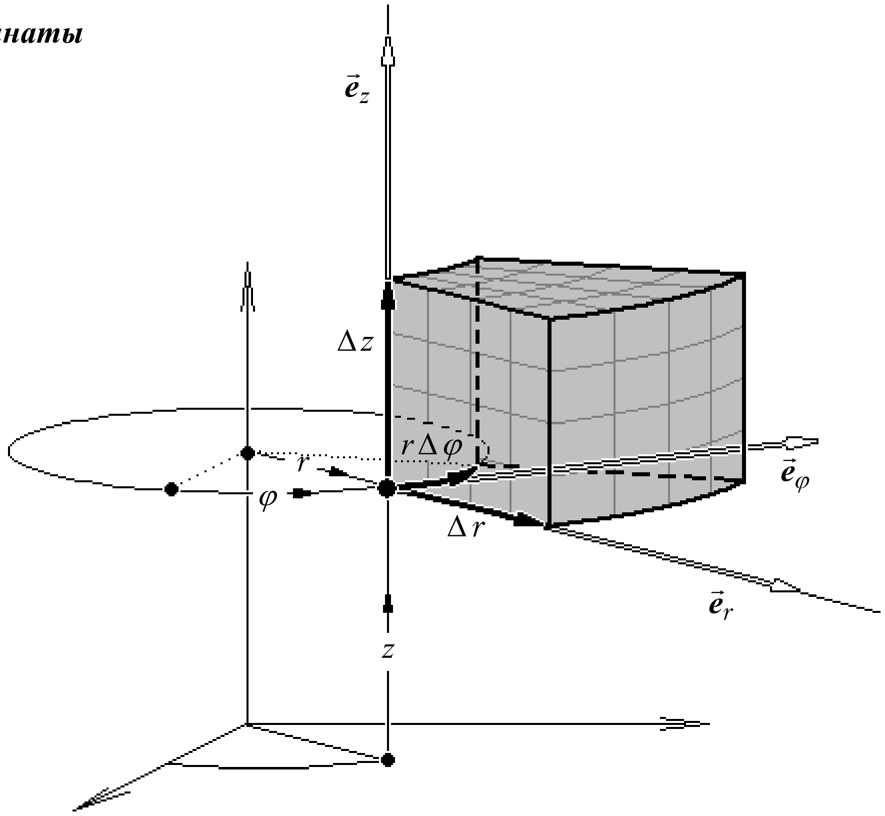
$$\operatorname{grad} f = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} f + \vec{e}_\theta \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} f + \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} f$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\,\vec{e}_\theta & r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ P_r & r\,Q_\theta & r\sin\theta\,R_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(P_r\ r^2\sin\theta \right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(Q_\theta\, r\sin\theta \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(R_\varphi\, r \right) \right)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} f \right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} f \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} f \right) \right)$$

7° *Цилиндрические координаты*



$$\vec{r} = \vec{r}(r,\ \varphi,\ z) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1$$

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} f + \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} f + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} f}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{1}{r} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\,\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_r & r\,Q_\varphi & R_z \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(P_r\, r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(Q_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,R_z) \right)}$$

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} f\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} f\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial}{\partial z} f\right) \right)}$$