

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет (навчально-науковий інститут) _____ фізичний _____

Кафедра _____ фізичної оптики _____

До захисту допущено

Кафедрою _____ фізичної оптики _____ протокол № _____ від _____

завідувач кафедри _____ Сергій Тарапов
(підпис) (ім'я, прізвище)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

здобувача _____ другого (магістерського) _____ рівня вищої освіти
(першого (бакалаврського) / другого (магістерського))

ДВІ МОДЕЛІ ПОРОГОВОЇ ПОВЕДІНКИ ПРИ ЛАЗЕРНО-
ІНДУКОВАНОМУ ЗБУДЖЕННІ ПРИПОВЕРХНЕВИХ
КОНВЕКТИВНИХ ПОТОКІВ В АВТОКОЛИВАННЯХ ТЕПЛОВОЇ
ЛІНЗИ

(тема роботи)

Спеціальність (спеціалізація) _____ 104 Фізика та астрономія _____
(код та найменування спеціальності; спеціалізації спеціальності)

Освітня програма _____ фізика (освітньо-наукова програма) _____
(назва освітньої програми)

Здобувач _____ Анна Бєлова
(підпис) (ім'я, прізвище)

Науковий керівник _____ Валентин Лимар
(підпис) (ім'я, прізвище)

Анотація

Белова А.О. Дві моделі порогової поведінки при лазерно-індукованому збудженні приповерхневих конвективних потоків в автоколиваннях теплової лінзи – Рукопис.

Дипломна робота на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія». – Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2026. – 51 с. – Табл. 1. – Іл. 19.

Основною метою даної роботи є розгляд моделей типу «акумуляція-скидання» для фотоіндукованих автоколивань у приповерхневому конвективному потоці рідини під дією лазерного випромінювання.

Завдання роботи: вивчити наявний масив джерел інформації стосовно даної теми; дослідити експериментально послідовність і взаємозв'язок фізичних процесів та подій, які спостерігаються при фотоіндукованих автоколиваннях у приповерхневому конвективному потоці рідини під дією лазерного випромінювання; запропонувати прості і наглядні моделі фізичного явища, яке вивчається, та його взаємозв'язок з явищем нестійкості поверхні рідини до збурення достатньо великого масштабу.

Проведені дослідження явища фотоіндукованих автоколивань у приповерхневому конвективному потоці рідини під дією лазерного випромінювання та виконані розрахунки дали можливість реалізувати вказані вище завдання та досягти поставленої мети.

Перспективність даної роботи вбачаю у подальшому дослідженні процесів самоорганізації в складних дисипативних системах під дією лазерного випромінювання.

Ключові слова: фотоіндуковані автоколивання, модель типу «акумуляція-скидання», приповерхневий конвективний потік рідини, самодефокусування, тепла лінза, релаксаційні автоколивання, гравітаційно-капілярний механізм, термокапілярний механізм.

Abstract

Bielova A.O. Two Models of Near-Surface Convective Flows Threshold at Thermal Lens Oscillations – Manuscript.

Thesis for obtaining the second (Master's) level of higher education in specialty 104 – “Physics and Astronomy”. – Kharkiv: V. N. Karazin Kharkiv National University, 2026. – 51 p. – Table 1. – Fig. 19.

The main purpose of this work is to consider “accumulation–discharge” type models for photoinduced self-oscillations in a near-surface convective liquid flow under laser irradiation.

The objectives of the study are: to analyze the available body of scientific literature related to the topic; to experimentally investigate the sequence and interrelation of physical processes and phenomena observed during photoinduced self-oscillations in a near-surface convective liquid flow under laser irradiation; to propose simple and illustrative models of the studied physical phenomenon and its relation to the instability of a liquid surface under sufficiently large-scale perturbations.

The conducted investigations of photoinduced self-oscillations in a near-surface convective liquid flow under laser irradiation, together with the performed calculations, made it possible to accomplish the stated objectives and achieve the aim of the work.

The prospects of this research are associated with further investigations of self-organization processes in complex dissipative systems under laser irradiation.

Keywords: photoinduced self-oscillations, accumulation–discharge type model, near-surface convective liquid flow, self-defocusing, thermal lens, relaxation self-oscillations, gravitational-capillary mechanism, thermocapillary mechanism.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1 ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД.....	7
1.1 Конвекція Релея-Бенара-Марангоні та умови її виникнення	7
1.2 Нестійкість Релея-Тейлора.....	15
1.3 Нелінійно-оптичне явище самодефокусування лазерного променя: якісний розгляд	19
РОЗДІЛ 2 ОРИГІНАЛЬНА ЧАСТИНА	24
2.1 Експериментальні умови та загальна фізична картина процесу автоколивань теплової лінзи.....	24
2.2 Конвективні потоки рідини при локальному нагріванні далеко від її поверхні: утворення бароклінічних вихорів	31
2.3 Гравітаційно-капілярний режим коливань теплової лінзи.....	34
2.4 Термокапілярний режим автоколивань теплової лінзи поблизу поверхні рідини	39
ВИСНОВКИ	45
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	47
ДОДАТОК	50

ВСТУП

Протягом останніх десятиліть, у міру подальшого розвитку наукових уявлень і повсюдного технічного прогресу, фізика поступово увійшла в епоху «синергетики» – науки, що вивчає процеси самоорганізації у складних системах в результаті узгодженої когерентної взаємодії їх утворюючих частин. При цьому істотною додатковою вимогою до таких фізичних систем є їх термодинамічна нерівноважність. Реалізувати такий нерівноважний стан найлегше при потужних енергетичних потоках через систему.

З цієї точки зору фізичні ефекти, досліджувані в нелінійній оптиці, є невід'ємним об'єктом вивчення і в синергетиці; як класичний приклад тут можна навести лазер. Поєднання унікальних властивостей лазерного випромінювання – його високих потужності і когерентності – сприяє реалізації в різних фізичних системах умов сильної термодинамічної нерівноважності, і, як наслідок, такі системи демонструють складну поведінку.

Необхідно також відзначити, що іншою областю фізики, де істотними виявляються нелінійні взаємодії, є гідродинаміка. В якості класичного «синергетичного» прикладу можна навести ефект самоорганізованого утворення конвективних осередків у шарі рідини з інверсним градієнтом температури, званих ще ячейками Бенара [1]. Характерним тут є той факт, що ячейки Бенара проявляють не тільки просту просторову структуру, а й складну часову поведінку у вигляді регулярних і хаотичних автоколивань потоку рідини.

Дана дипломна робота проведена на «перекритті» двох вищевказаних областей – нелінійної оптики та гідродинаміки. З одного боку, в розчині рідкого поглинаючого барвника спостерігається класичний нелінійно-оптичний ефект самовпливу – теплове самодефокусування лазерного променя. З іншого боку, нагрівання опромінюваної області призводить, за певних умов, до фотоіндукованої конвекції рідини і це спричиняє, у свою чергу, вплив на процес самодефокусування. При цьому в системі можливе виникнення

режиму автоколивань, багато в чому схожого з тим, що спостерігається в ячейках Бенара.

РОЗДІЛ 1

ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

1.1 Конвекція Релея-Бенара-Марангоні та умови її виникнення

За своїм фізичним змістом явище теплової конвекції полягає у збудженні потоків рідини при неоднорідному розподілі в ній температури під дією сили тяжіння. Збудження конвективних потоків у атмосфері чи світовому океані є фундаментальними метеорологічними процесами у глобальному масштабі, а функціонування опалювальної системи будинку або підігрівання води у чайнику є щоденно важливими для кожної людини. У зв'язку з цим, вирішення задач конвективного теплообміну вже призвело до визначних наукових та технічних досягнень, але розгляд цього питання вимагає постійної уваги і сьогодні.

Наявність неоднорідного розподілу температури рідини є необхідною умовою для збудження у ній конвективного потоку, але не завжди ця умова

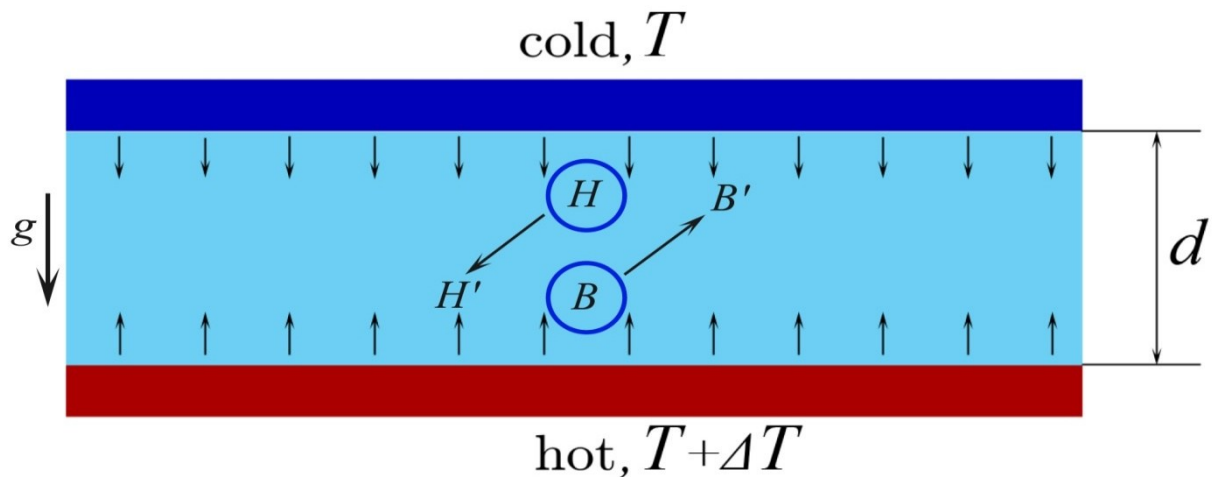


Рисунок 1.1 — Виникнення руху у рідині в режимі конвекції Релея-Бенара. Два елемента рідини H та B переміщуються у нові положення H' та B' . Таке переміщення стає незворотним, тобто положення H та B стають нестійкими, тільки при достатньо значній величині різниці температур ΔT між верхньою та нижньою пластинами. Маленькі вертикальні стрілки вказують напрям дії підйомної сили (вверх) та сили «плавучості» (вниз), які виникають внаслідок її нагрівання [1]

буває достатньою. Відомим класичним прикладом у цьому відношенні є явище так званої конвекції Релея-Бенара [1-4].

Розглянемо шар рідини товщиною d , який знаходиться між двома твердими пластинами з високою теплопровідністю. Верхня пластина підтримується при фіксованій температурі T , тоді як нижня – при температурі $T + \Delta T$, $\Delta T > 0$ (див. рис. 1.1).

В такій геометрії є відсутнім горизонтальний градієнт температури перед виникненням конвекції. Рідина, яка має достатньо великий коефіцієнт теплового розширення, є «схильною» до двох протилежних тенденцій. Холодна рідина із більшою густиною розташована у верхній частині шару і під дією сили тяжіння прагне опуститися, тоді як нижня частина шару, більш тепла та легка, прагне піднятися угору. Але, поки різниця температур ΔT залишається малою, конвективний потік не виникає через наявність стабілізуючого ефекту тертя – в'язкості рідини.

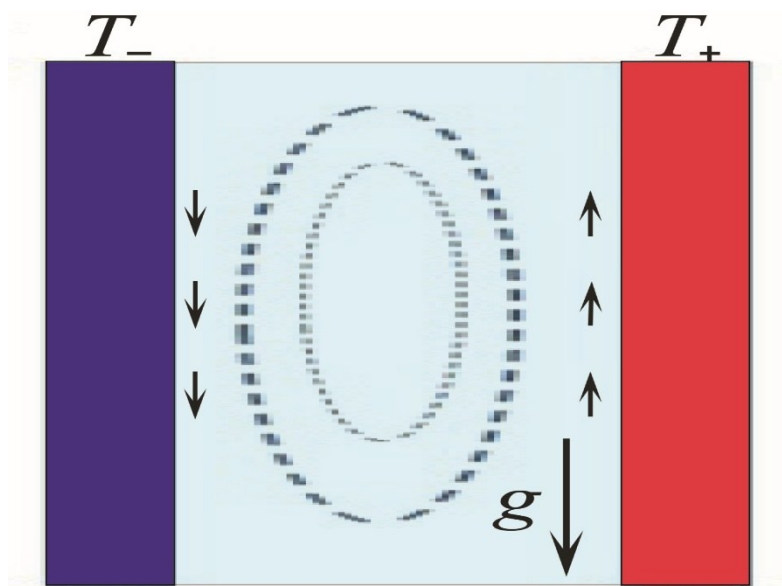


Рисунок 1.2 — Безпорогова конвекція у рідині між вертикальними стінками з різними температурами T_- та T_+ . Пунктирними лініями зображені лінії потоку (проти часової стрілки) рідини у конвективному вихорі, сформованому під дією обертового моменту сил внутрішнього тиску (підйомної та «плавучості»), які показані маленькими стрілками вздовж холодної та гарячої стінок [1]

Відзначимо, що маємо якісно іншу ситуацію, коли градієнт температури є горизонтальним, а не вертикальним (див. рис. 1.2). В цьому випадку під дією сили тяжіння рідина «прагне» підніматись вздовж теплішої стінки і опускатись уздовж холоднішої. Сили не врівноважують одна одну, а формують обертальний момент.

Незалежно від того, наскільки різниця температур $T_+ - T_-$ є малою (навіть якщо вона нескінченно мала), цей момент породжує рух рідини. У випадку, коли маємо неоднорідне поле температур у горизонтальній площині, поріг у збудженні конвективного потоку рідини є відсутнім.

Отже, наявність саме вертикального градієнта температури у схемі конвекції Релея-Бенара (див. рис. 1.1) є принциповою. В цьому випадку виникнення конвекції відбувається тільки після досягнення деякого порогового значення різниці температур ΔT . Розглянемо більш уважно природу такої порогової поведінки. Якщо відбувається флуктуаційне зміщення елементів $\mathbf{H}$ та $\mathbf{B}$ рідини у напрямках $\mathbf{HH'}$ та $\mathbf{BB'}$, то обертальний момент може підсилити це переміщення. Таке підсилення відбудеться, якщо різниця температур між цими елементами «не встигне» суттєво понизитися, тоді як тривалість τ_{warm} такого процесу вирівнювання температур за рахунок теплопровідності визначається величиною порядку

$$\tau_{warm} \approx \frac{d^2}{k},$$

тут k – коефіцієнт теплопровідності рідини (грає роль коефіцієнта дифузії тепла). Величина τ_{warm} має бути істотно більшою за характерний час $\tau_m \approx \frac{d}{v}$ переміщення елемента рідини (наприклад, $\mathbf{B}$) на відстань d під дією сили в'язкості $\eta \cdot \frac{v}{d} = \frac{\eta}{\tau_m}$ та виштовхувальної підйомної сили $\rho \cdot \beta \cdot d \cdot g \cdot \Delta T$ (у розрахунку на одиницю площі). Тут v – швидкість переміщення елемента рідини; η – коефіцієнт динамічної в'язкості рідини; ρ – її густина, а β – коефіцієнт її теплового об'ємного розширення; g – прискорення вільного падіння. Допускаючи, що рух елементів рідини відбувається в умовах

рівноваги сили в'язкості та підйомної сили, маємо:

$$\tau_m = \frac{\eta}{\rho \cdot \beta \cdot d \cdot g \cdot \Delta T}.$$

Можемо обчислити величину відношення τ_{warm}/τ_m , яке, відповідно до сказаного вище, по суті, показує, у скільки разів швидше відбувається процес передачі тепла від нижньої пластини до верхньої (див. рис. 1.1) за рахунок конвективного тепломасопереносу порівняно із процесом теплопровідності – дифузії тепла. Вказана величина називається числом Релея:

$$Ra = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot d^3}{k \cdot \nu}, \quad (1.1)$$

де $\nu = \eta/\rho$ – коефіцієнт кінематичної в'язкості рідини. Таким чином, збудження конвективного потоку має місце при виконанні умови

$$Ra \gg 1. \quad (1.2)$$

Більш ретельний теоретичний розгляд [3,4] показує, що порогове значення числа Релея має бути не меншим $Ra_c \cong 1780$.

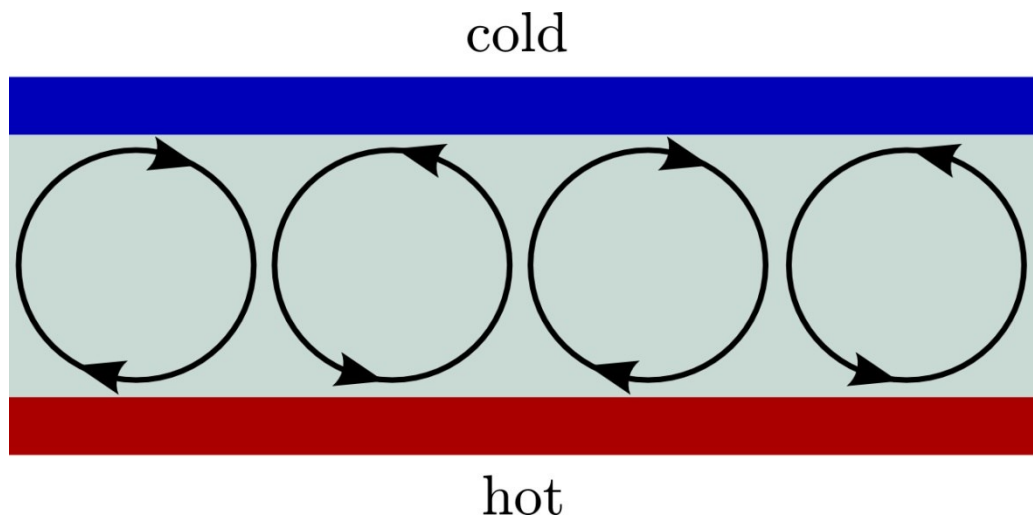


Рисунок 1.3 – Лінії конвективних потоків рідини в режимі конвекції Релея-Бенара або Бенара-Марангоні, які виникають при виконанні умови для числа Релея $Ra \geq Ra_c \approx 1780$ або для числа Марангоні $Ma \geq Ma_c \approx 80$

При виконанні цієї умови між пластинами формуються так звані конвективні вихори або конвективні вали Релея-Бенара із відповідною просторовою структурою потоків рідини, як схематично показано на рис. 1.3.

Отже, збудження конвективних потоків в режимі конвекції Релея-Бенара має пороговий характер на відміну від режимів із наявністю горизонтальної складової градієнта температури. Кількісним показником, який визначає таку порогову поведінку, є число Релея Ra (1.1), значення якого має перевищувати критичну величину $Ra_c \cong 1780$ при виникненні конвективного руху рідини.

Описаний вище механізм конвекції зумовлений наявністю сили тяжіння, що є справедливим для більшості природних процесів. Однак роль гравітації в режимі Релея-Бенара суттєво зменшується зі зменшенням відстані d між нижньою гарячою та верхньою холодною пластинами: кількісно маємо різке зменшення величини числа Релея Ra , яке є пропорційним d^3 . Тим не менше, при порівняно малих d збудження конвективних потоків може мати місце за рахунок якісно іншого механізму – залежності коефіцієнта σ поверхневого натягу рідини від температури або термокапілярного ефекту (як правило, величина цього коефіцієнта σ зменшується із ростом температури, $\partial\sigma/\partial T < 0$). У цьому випадку початкове флуктуаційне зміщення елементів ***H*** та ***B*** рідини (див. рис. 1.1) може підсилитися не за рахунок дії обертового моменту направлених вертикально сил внутрішнього тиску (підйомної сили та сили «плавучості»), а за рахунок дії обертового моменту сил поверхневого натягу, які мають протилежні горизонтальні напрями (наприклад, справа наліво над елементом ***H*** та зліва направо під елементом ***B***) у протилежних точках гарячої нижньої та холодної верхньої пластин. Таким чином можливе утворення конвективних вихорів чи валів так, як показано на рис. 1.3, але такий режим конвективного руху називається конвекцією Бенара-Марангоні [2]. Аналогічно до числа Релея Ra (1.1), конвекція Бенара-Марангоні має кількісний показник у вигляді числа Марангоні Ma :

$$Ma = \frac{\Delta T \cdot d \cdot (-\partial\sigma/\partial T)}{k \cdot \nu \cdot \rho}, \quad (1.3)$$

де $-\partial\sigma/\partial T$ – величина так званого термічного показника коефіцієнта поверхневого натягу. Конвекція Бенара-Марангоні, як і її аналог Релея-Бенара, демонструє порогову поведінку – рух рідини виникає за умови перевищення числом Марангоні критичної величини Ma_c [2]:

$$Ma \geq Ma_c \approx 80. \quad (1.4)$$

Розгляд явищ конвекції Релея-Бенара-Марангоні базується на моделі нестисливої рідини, густина якої залежить від температури T , але не залежить від величини внутрішнього тиску p . Така модель здебільшого «працює» у лабораторних умовах, коли товщина d шару рідини, як правило, є набагато меншою за розміри самої лабораторії. Але вказана гіпотеза не є реалістичною при розгляді конвективних явищ у атмосфері чи світовому океані, коли неможливо нехтувати залежністю густини середовища від глибини та тиску, особливо у планетарних масштабах. Нехай вісь Z обраної системи координат направлена вертикально вгору, горизонтальна площина XY співпадає з нульовим рівнем земної поверхні. Якщо температура T стисливого середовища залежить тільки від вертикальної координати z , то маємо, до деякої міри, варіант схеми рис. 1.1 з граничним переходом $d \rightarrow \infty$ та деяким заданим розподілом температури $T(z)$. При цьому «стійкий» нерухомий стан рідини чи газу зберігається за умови, якщо при випадковому *адіабатичному* (без теплообміну, при постійній питомій ентропії) зміщенні елемента ***B*** середовища вгору його густина ρ_{ad} змінюється (через адіабатичну зміну його власної температури T_{ad} на більшій висоті z), але не стає меншою, ніж густина $\rho(z)$ «старих» навколишніх мас з їх іншою температурою $T(z)$ на цій більшій висоті z . Тоді не виконується умова плавання, і вказаний елемент ***B*** «тоне», тобто повертається у попереднє «стійке» положення [3-4]. В описаній ситуації нерухомого стану швидкість зростання температури $\frac{dT}{dz}$ середовища має

перевищувати значення так званого *адіабатичного температурного градієнта* $\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}$ (він дає величину ΔT_{ad} зменшення температури елемента **B** при його підйомі на величину Δz за умови його адіабатичного розширення – відсутності теплообміну із навколишніми масами рідини-газу):

$$\frac{dT}{dz} > \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}.$$

Умова *адіабатичності* (незмінності ентропії як функції тиску p та температури T_{ad}) середовища при вертикальному зміщенні елемента **B** у гравітаційному полі g має вигляд [4]:

$$\frac{C_p}{T} \cdot \left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad} = -\beta \cdot g,$$

звідки отримується умова нерухомості повітря в атмосфері чи води у океані, коли температура T газу чи рідини залежить тільки від вертикальної координати z :

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{g \cdot \beta \cdot T}{C_p}, \quad (1.5)$$

тут C_p – теплоємність середовища при постійному тиску, а β і g , як і раніше, його коефіцієнт теплового об'ємного розширення та, відповідно, прискорення вільного падіння. Нерівність (1.5) показує, що в умовах горизонтально однорідного поля температури конвективний потік у стисливому газі чи рідині не виникає, поки температура T зростає із зростанням вертикальної координати z . Більше того, навіть якщо температура зменшується при зростанні висоти (див. рис. 1.1 та рис. 1.3), але модуль похідної $\frac{dT}{dz}$ не перевищує модуля адіабатичного температурного градієнта $\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}$ (1.5), то конвекція також не виникне. Тільки якщо модуль швидкості спаду температури T із зростанням висоти z перевищить $\left|\left(\frac{dT}{dz}\right)_{ad}\right|$, то відбудеться

збудження конвективного потоку. Отже, величина адіабатичного температурного градієнта (1.5) визначає поріг для виникнення конвекції у стисливих рідинах чи газах, які знаходяться під дією сили тяжіння у неоднорідному температурному полі $T(z)$ відносно вертикальної осі Z при умові однорідності цього поля у горизонтальних площинах, паралельних координатній площині XY .

Таким чином, в розглянутих у даному пункті варіантах реалізації явища конвекції має місце порогова поведінка при збудженні конвективних потоків рідини. Кількісно величини цих порогів визначаються критичним значенням числа Релея $Ra_c \cong 1780$ при конвекції Релея-Бенара, критичним значенням числа Марангоні $Ma_c \cong 80$ при конвекції Бенара-Марангоні, та значенням адіабатичного температурного градієнта $(\frac{dT}{dz})_{ad}$ при конвекції стисливої рідини чи газу під дією вертикально неоднорідного температурного поля та сили тяжіння. По суті, вказані критичні величини визначають вертикальні градієнти температури, при яких нерухомий стан рідини стає нестійким і конвективний режим, що виникає замість нерухомого, полягає в утворенні множини конвективних вихорів-валів із регулярною просторовою структурою.

1.2 Нестійкість Релея-Тейлора

Як бачимо із викладеного у попередньому пункті, основою більшості явищ конвективного руху є залежність густини середовищ, рідини чи газу, від температури та нестійкість їх нерухомого стану під дією сили тяжіння. Очевидно, що за своєю фізичною природою конвективна нестійкість є близькою до так званої нестійкості Релея-Тейлора [4,5]. Розглянемо шари двох різних рідин, які знаходяться один над іншим у полі сили тяжіння та розділені горизонтальною границею-інтерфейсом (див. рис. 1.4 зліва). В'язкістю та наявністю стінок посудини будемо нехтувати. Єдині величини, які приймаємо до уваги, є густини рідин ρ_1 і ρ_2 , коефіцієнт поверхневого натягу σ та прискорення вільного падіння g . Із вказаних величин можемо «сконструювати» тільки один безрозмірний параметр, який характеризує систему – відношення густин (у попередньому пункті такими параметрами були числа Релея Ra та Марангоні Ma), або ж так зване число Атвуда [5, 13]:

$$A = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (1.6)$$

Значення $A < 0$ відповідають, очевидно, умові, коли зверху маємо «легку» рідину, а при $A > 0$, навпаки, – «важку». Модуль числа Атвуда стає близьким до одиниці, якщо густини рідин значно розрізняються (як, наприклад, для середовищ вода-повітря), і $|A| \approx 0$ при умові майже однакової густини рідин.

Розглянемо збурення синусоїдальної форми $a \cdot \sin(k \cdot x)$ (на половину довжини хвилі $\lambda/2$) із вигином у вертикальній площині (див. рис. 1.4 справа) невеликої амплітуди $a \ll \lambda$ та з хвильовим вектором $k = 2 \cdot \pi / \lambda$.

Якщо зверху знаходиться «легка» рідина, тобто $A < 0$ (або $\rho_2 < \rho_1$), то при виникненні збурення, незалежно від напрямку вигину (чи вгору, чи вниз), напрями дії сил поверхневого натягу $\vec{\sigma}$ та сили «плавучості» $\Delta\rho \cdot V \cdot \vec{g}$, ($\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, завжди співпадають і направлені *проти* такого збурення. Отже, при умові $A < 0$ маємо систему у положенні стійкої механічної рівноваги.

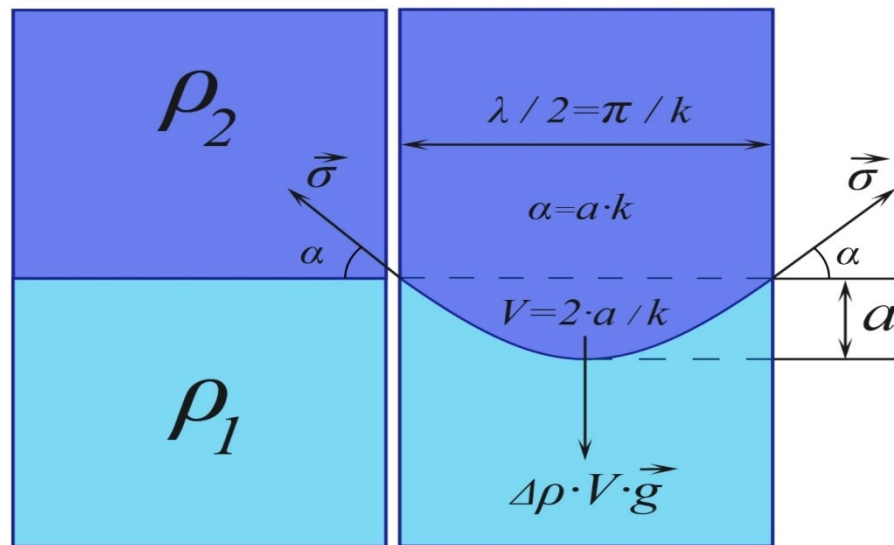


Рисунок 1.4 – Нестійкість Релея-Тейлора розвивається за умови, що число Атвуда $A > 0$ (або $\rho_2 > \rho_1$). Справа показана схема дії сил поверхневого натягу $\vec{\sigma}$ та сили «плавучості» $\Delta\rho \cdot V \cdot \vec{g}$ ($\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$) при напівхвильовому синусоїдальному вигині поверхні розділу між рідинами

Навпаки, якщо зверху знаходиться «важка» рідина, тобто $A > 0$ (або $\rho_2 > \rho_1$), то напрям дії сили «плавучості» є завжди протилежним напрямку дії сил поверхневого натягу. При вигині поверхні вгору сила «плавучості» стає підйомною силою і направлена вгору, а при вигині поверхні вниз так, як показано на рис. 1.4 справа, сила «плавучості» $\Delta\rho \cdot V \cdot \vec{g}$ направлена вниз, що і показано на рисунку. Отже, при $A > 0$ дія сили «плавучості» завжди спрямована на *підсилення* величини збурення, тоді як сили поверхневого натягу, як і при $A < 0$, завжди спрямовані на його *послаблення*. За допомогою диференціювання та інтегрування функції $a \cdot \sin(k \cdot x)$ легко довести, що маємо кут $\alpha = a \cdot k$ та об'єм збурення $V = 2 \cdot a/k$ в розрахунку на одиницю ширини поверхні у напрямі перпендикулярно до площини рис.1.4. Звідси отримуємо умову розвитку нестійкості Релея-Тейлора у наступному вигляді:

$$2 \cdot (\rho_2 - \rho_1) \cdot a \cdot g/k - 2 \cdot \sigma \cdot a \cdot k > 0.$$

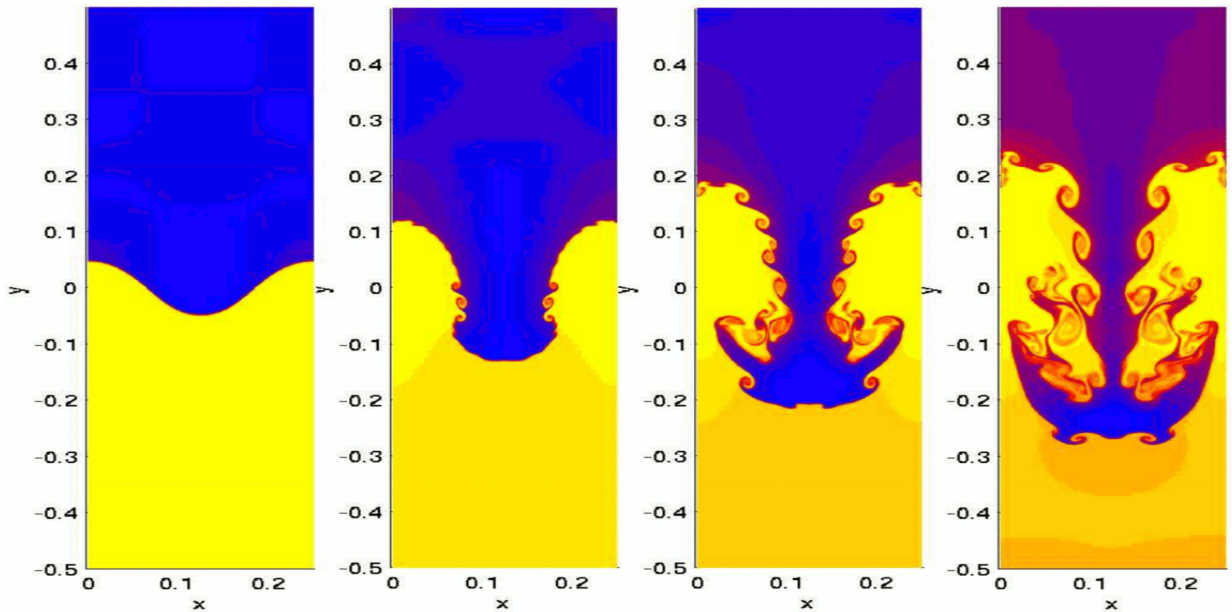


Рисунок 1.5 – Комп’ютерне моделювання еволюційного розвитку нестійкості Релея-Тейлора. Проникнення «важкої» рідини (синій колір, зверху) у «легку» (жовтий колір, знизу) відбувається через формування крупномасштабного грибовидного виступу. Мілкомасштабні завихреності є наслідком розвитку так званої нестійкості Кельвіна-Гельмгольца [6]

З даної умови робимо висновок, що границя розділу між рідинами є нестійкою відносно збурень з просторовими частотами (чи хвильовими векторами) k , які задовольняють нерівності:

$$k \leq \sqrt{\frac{g \cdot \Delta \rho}{\sigma}}, \quad (1.7)$$

звідки отримуємо, що за умов нестійкості Релея-Тейлора мають зростати збурення границі розподілу, що мають достатньо великий просторовий розмір λ , не менший критичного λ_c :

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\sigma}{g \cdot \Delta \rho}}, \quad (1.8)$$

при цьому величину λ_c називають *капілярною довжиною*. Для границі «вода-повітря» $\lambda_c \approx 2.7$ мм.

На рис. 1.5 наведено приклад комп'ютерного моделювання процесу взаємопроникнення «важкої» та «легкої» рідин в умовах нестійкості Релея-Тейлора [6]. Плавний, близький до синусоїдального, як на рис. 1.4 справа, вигин поверхні поступово перетворюється у грибовидний виступ за рахунок «підсилення» з обох боків від виступу узгоджених крупномасштабних (відповідно до нерівності (1.7)) рухів рідин із деяким обертальним моментом (завихреністю), подібно як і при утворенні конвективних валів-вихорів на рис. 1.3. Картина розвитку нестійкості Релея-Тейлора на рис. 1.5 дещо ускладнена виникненням мілкомасштабних вихорів Кельвіна-Гельмгольца. Нестійкість Кельвіна-Гельмгольца є «відповідальною» за виникнення вихорів-хвиль на границі розділу середовищ при їх відносному русі. Природно саме результат розвитку цієї нестійкості ми спостерігаємо у вигляді хвиль, що формуються на водних поверхнях морів та океанів під дією вітру.

1.3 Нелінійно-оптичне явище самодефокусування лазерного променя: якісний розгляд

Наш інтерес до процесу конвекції чи інших видів нестійкості у рідинах пов'язаний із дослідженням у моїй роботі так званого явища «оптичного серцебиття» або автоколивань теплової лінзи [8]. Такі автоколивання зумовлені впливом конвективного руху на процес теплового самодефокусування лазерного променя у поглинаючій рідині. Тому існує необхідність розгляду нелінійно-оптичного явища самодефокусування у нашій роботі.

Нелінійно-оптичні ефекти є, як правило, ефектами само- та взаємовпливу променів світла достатньо високої інтенсивності, коли під їх дією змінюються параметри середовища, у якому світло розповсюджується, і це призводить до іншого перебігу оптичних явищ порівняно із поведінкою світла низької інтенсивності (порушується принцип суперпозиції світлових полів). Достатньо висока інтенсивність світла реалізується саме в лазерних пучках через їх унікальні властивості часової та просторової когерентності, тобто їх високу монохроматичність та просторову направленість.

Самодефокусування лазерного пучка [7] має місце, коли показник заломлення середовища зменшується по мірі зростання інтенсивності світла I (в одиницях вимірювання $\text{Вт}/\text{см}^2$):

$$n(I) = n - n_{nl} \cdot I, \quad (1.9)$$

тут n – звичайний, «без світла», показник заломлення середовища (на периферії лазерного пучка, де $I = 0$); n_{nl} – так званий *керрівський* коефіцієнт нелінійності, так як залежність $n(I)$ типу (1.9) називається законом Керра.

Лазерний пучок зазвичай (а також і в наших експериментах, описаних у подальшому викладі) перед входом в нелінійне середовище має розподіл інтенсивності у своєму поперечному перерізі відповідно до закону Гаусса (див. рис. 1.6):

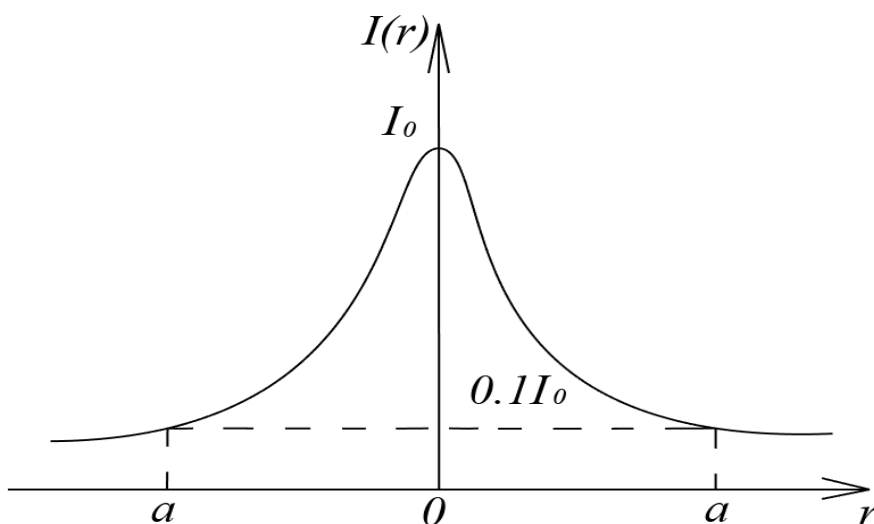


Рисунок 1.6 – Гауссівський розподіл (1.10) для інтенсивності $I(r)$ світла у поперечному перерізі лазерного пучка; r – відстань від центру пучка

$$I(r) = I_0 \cdot \exp(-2 \cdot r^2/a^2), \quad (1.10)$$

де r – відстань від центру лазерного пучка, a – його ефективний радіус, у нашому експерименті $a \approx 50$ мкм. У центрі пучка інтенсивність I та амплітуда A світлової хвилі є максимальними і спадають від його центру до периферії (інтенсивність хвилі завжди пропорційна квадрату її амплітуди: $I \sim A^2$).

Згідно до (1.9) та (1.10) у центрі пучка показник заломлення $n(I)$ є мінімальним, тоді як на периферії його величина дорівнює значенню n при $I = 0$. Світлові промені завжди відхиляються в бік більшого показника заломлення. Тому, якщо на «вході» у нелінійне середовище лазерний пучок розглядається як обмежений діаметром $2 \cdot a$ набір паралельних променів (див. рис. 1.7) із початковим гауссовим розподілом амплітуди $A(r)$ (1.10), то по мірі їх ходу в середовищі промені вигинаються від центру пучка до його периферії. При цьому має місце передача енергії від центру пучка на його периферію і відбувається розширення діаметра лазерного пучка так, як і від дії звичайної розсіювальної лінзи. У зв'язку з цим описаний ефект самодефокусування називають ще ефектом теплової лінзи, якщо залежність $n(I)$ (1.9) зумовлена тепловим розігрівом і, як наслідок, тепловим об'ємним

розширенням середовища під дією лазерного світла.

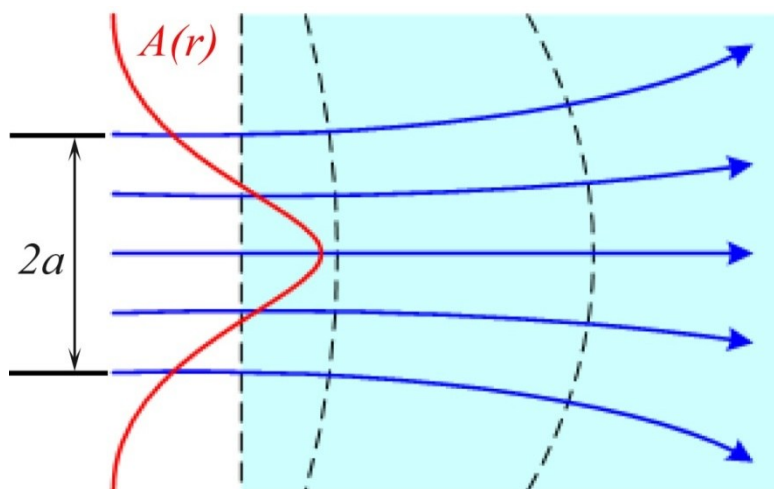


Рисунок 1.7 – Хід променів лазерного пучка із гауссовим розподілом амплітуди $A(r)$ та діаметром $2 \cdot a$ при «слабкому» самодефокусуванні. Пунктиром показана деформація форми поверхні постійної хвильової фази пучка по мірі його проходження у нелінійному середовищі

На рис. 1.7 показано хід променів лазерного пучка при порівняно «слабкому» ефекті теплової лінзи, коли при проходженні нелінійного середовища функція просторового розподілу інтенсивності $I(r)$ чи амплітуди $A(r)$ лазерного пучка залишається близькою до гауссової (1.10), тільки з поступовим збільшенням значення його діаметра $2 \cdot a$. Але у нашому експерименті здебільшого спостерігається ефект «сильної» теплової лінзи, коли траєкторії променів, які є близькими до центру пучка, відхиляються від центру значно сильніше, ніж промені на його периферії, і це призводить до взаємоперетину «викривлених» центральних та «більш прямих» периферійних променів. У випадку такого «сильного» самодефокусування перерозподіл енергії в поперечному перерізі лазерного пучка призводить до характерної «кільцевої» структури в розподілі його інтенсивності після проходження нелінійного середовища (див. рис. 1.8). Завдяки передачі енергії від центру до периферії маємо достатньо яскраве зовнішнє кільце самодефокусування із послабленою інтенсивністю у центрі пучка, на відміну від початкового

гауссівського розподілу інтенсивності $I(r)$ чи амплітуди $A(r)$ по формулі (1.10) та відповідного їм рис. 1.6. Додаткові «внутрішні» кільця є максимумами та мінімумами інтерференції. Коли різниця ходу Δ між периферійними та центральними променями, яка виникає через залежність $n(I)$ (див. формули (1.9) і (1.10), показник заломлення n стає суттєво різним для них), сягає декількох m довжин хвиль λ , $\Delta = m \cdot \lambda$, інтерференція між цими променями проявляється у вигляді додаткових «внутрішніх» кілець на картині самодефокусування (див. рис. 1.8, кількість кілець відповідає кількості m довжин хвиль). Картина самодефокусування «приплюснута» зверху, тому що через нагрів рідини лазерним світлом її більш легка тепла маса (з меншим показником заломлення) виштовхується нагору, постійно породжуючи конвективний потік рідини, а знизу «підходять» холодніші її маси (з більшим показником заломлення), і «верхні» промені лазерного пучка відхиляються донизу, в область, де показник заломлення рідини є, в цілому, більшим.



Рисунок 1.8 – Характерна «кільцева» структура поперечного розподілу інтенсивності лазерного пучка після проходження 1-мм шару поглинаючої рідини при «сильному» тепловому самодефокуванні. «Приплюснутість» картини у верхній частині картини зумовлена конвективним потоком рідини через її нагрівання лазерним світлом

Взаємозв'язок ефекту теплового самодефокусування у поглинаючій

лазерне світло рідині та процесу її конвекції уявляється достатньо природним, так як обидва явища мають спільну фізичну природу – теплове розширення рідини при підвищенні її температури. До аналізу картини теплового самодефокусування на рис. 1.8 та впливу на її вигляд конвективного потоку ми ще повернемося в оригінальній частині моєї роботи.

РОЗДІЛ 2

ОРИГІНАЛЬНА ЧАСТИНА

2.1 Експериментальні умови та загальна фізична картина процесу автоколивань теплової лінзи

Описаний у попередньому розділі процес формування теплової лінзи гауссовим лазерним пучком можемо спостерігати при його проходженні крізь розчини барвника у етиловому спирті чи ацетоні. Розглянемо більш детально принципову експериментальну схему для реалізації вказаного фізичного ефекту (рис. 2.1).

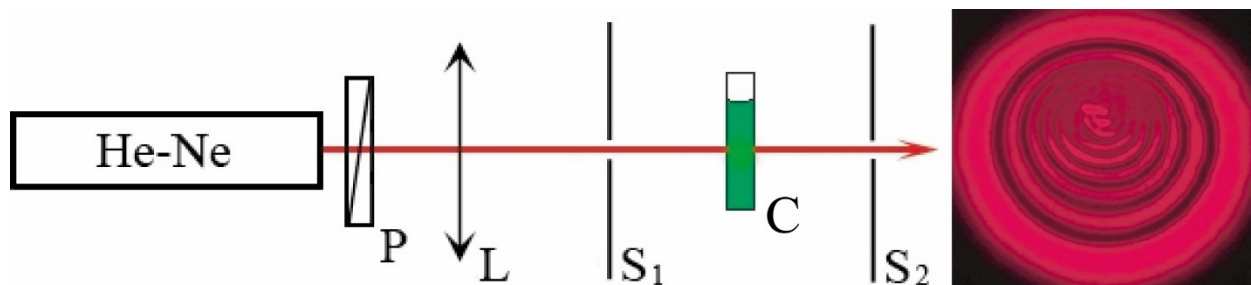


Рисунок 2.1 – Принципова експериментальна схема для спостереження явища теплового самодефокусування лазерного променя у поглинаючій рідині та фотоіндукованих релаксаційних автоколивань конвективного потоку: **He-Ne** – гелій-неоновий лазер; **P** – поляризатор; **L** – збиральна лінза; **C** – кювета з поглинаючою лазерне світло рідиною; **S₁**, **S₂** – екрани. На фотовставці наведено картину теплового самодефокусування, що спостерігається на екрані **S₂**

Пучок гелій-неонового лазера (довжина хвилі $\lambda = 632,8$ нм; потужність $P \approx 10$ мВт), пройшовши через поляризатор **P**, збиральну лінзу **L** (фокусна відстань $F \sim 11$ см) та отвір в екрані **S₁**, фокусується на входній грані кювети **C** (товщиною $l = 1,07$ мм) з поглинаючою світло рідиною. При цьому на екрані **S₂** спостерігається характерна стаціонарна картина теплового самодефокусування так, як показано на фотовставці та на рис. 1.8 розділу 1.3,

якщо сфокусований лазерний пучок проходить на достатній глибині (≥ 3 мм) від поверхні рідини.

Поглинаючою рідиною в нашому експерименті виступає розчин барвника діамантового зеленого в ацетоні чи етиловому спирті. Описані в роботі ефекти спостерігаються аналогічно для обох вказаних видів розчинників, але, як правило, в ацетоні вони мають більш виразний характер. Цю обставину ми пов'язуємо з його більш високим значенням термічного коефіцієнта теплового розширення β (див. таблицю 2.1)

Таблиця 2.1 – Значення коефіцієнтів поверхневого натягу σ , густини ρ , стисливості γ та термічного коефіцієнта об'ємного розширення β для ряду рідин.

Рідина	Ефір	Спирт	Ацетон	Бензол	Гас	Вода	Ртуть
σ , мН/м	17,1	22,8	23,3	28,9	29,0	72,7	46,5
ρ , кг/м ³	714	789	790	880	805	998	1355
γ , $\cdot 10^{-11}$ Па	164	113	112	77	87	52	3,96
β , $\cdot 10^{-4}$ °C ⁻¹	16,3	11,8	14,3	10,6	10,0	3,02	1,8

На рис. 2.2 наведено оптичні спектри пропускання $\tau(\lambda)$ розчину барвника діамантового зеленого при його порівняно високій (синій пунктир) та низькій концентраціях (червоний неперервний) в ацетоні, товщина шару розчину барвника при цьому дорівнює $l = 1,07$ мм.

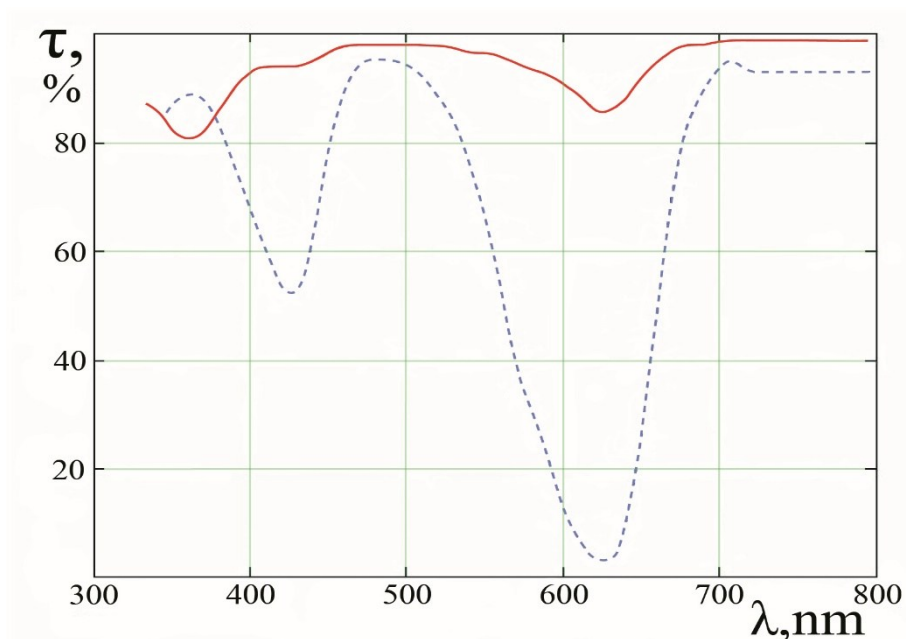
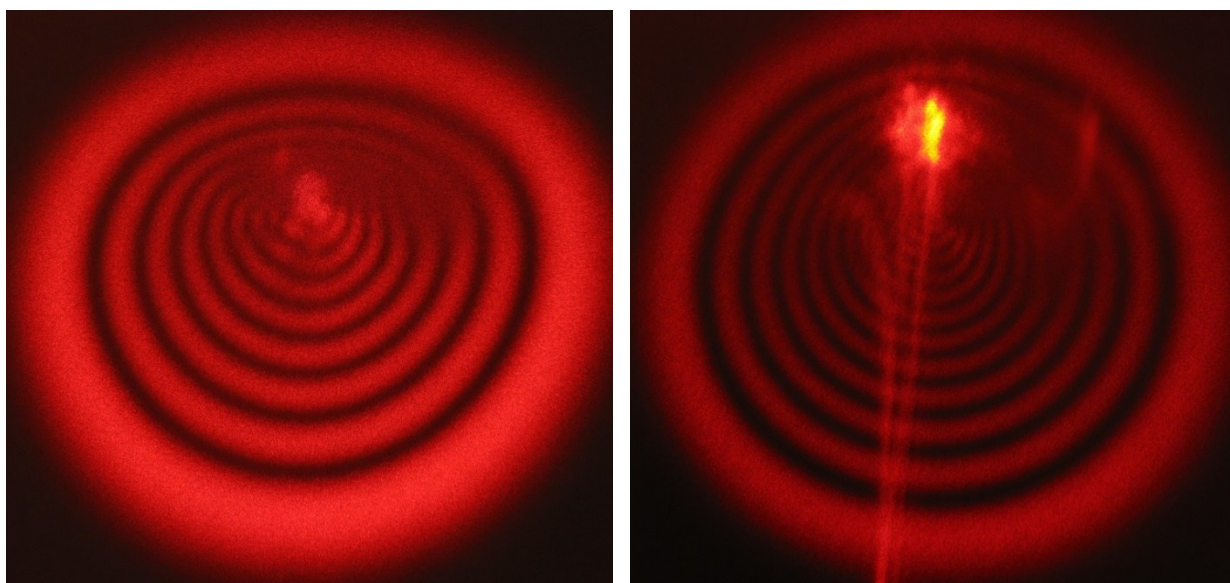


Рисунок 2.2 – Оптичний спектр пропускання розчину барвника діамантового зеленого при високій (синій пунктир) та низькій (червоний неперервний) концентраціях у ацетоні. Фотоіндуковані **He-Ne**-лазером ефекти самодефокусування та конвекції спостерігаються у широкому діапазоні концентрацій барвника у ацетоні чи етиловому спирті

Оптичні спектри пропускання показують, що незалежно від величини концентрації барвника у розчині лазерне світло з довжиною хвилі $\lambda = 632,8$ нм відповідає максимуму поглинання, а тому розчин ефективно розігрівається сфокусованим лазерним пучком He-Ne-лазера, що й породжує у нашому експерименті нелінійно-оптичний ефект теплового самодефокусування в сукупності із нелінійно-гідродинамічним ефектом теплової конвекції.

Картина теплового самодефокусування має характерний вигляд, наведений на рис. 2.3 (а) (так само, як і на рис. 1.8 або на вкладці рис. 2.1) при проходженні сфокусованого лазерного пучка крізь розчин у кюветі **С** на «достатньо великій» глибині $h \geq 3$ мм. Але, якщо глибина проходження стає меншою ($h \geq 2$ мм), картина набуває дещо іншого вигляду, який наведено на рис. 2.3 (б). Очевидно, «більш висока кругова симетрія» картини пов'язана із

уповільненням конвективного потоку рідини поблизу її поверхні. Умовно, такий



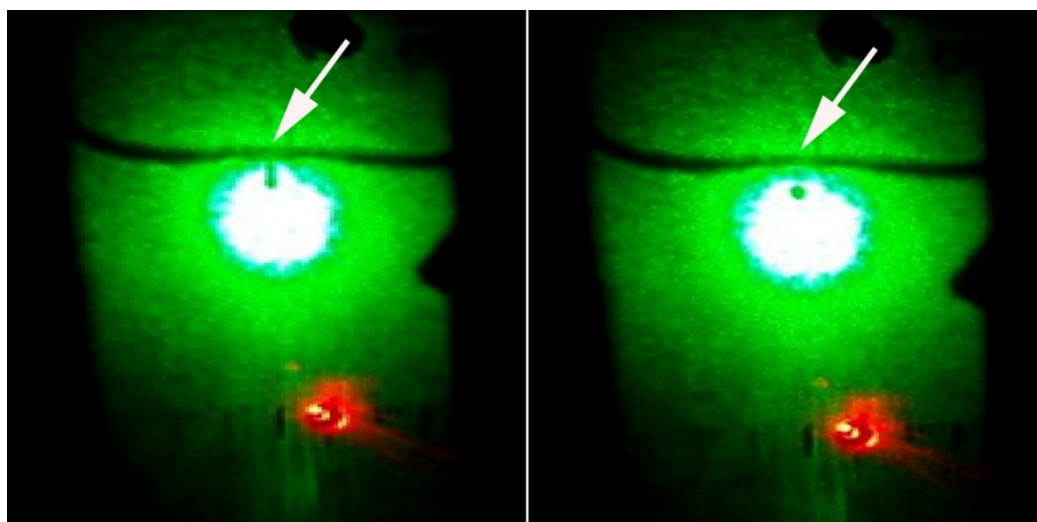
а) вигляд картин самодефокусування в «об'ємі рідини», коли відстань від пучка He-Ne-лазера до поверхні рідини значно більша, ніж радіус теплової лінзи (~ 0.5 мм); помітний значний вплив наявного конвективного потоку.

б) вигляд картин самодефокусування у приповерхневому «преконвективному» стані, відстань від пучка He-Ne-лазера до поверхні рідини близька до величини радіуса теплової лінзи (~ 0.5 мм); конвективний потік є практично відсутнім.

Рисунок 2.3 – Порівняння картин самодефокусування світла (на екрані S_2) при наявності конвективного потоку (а) та у «преконвективному» стані (б)

стан теплової лінзи можемо назвати «преконвективним». У цьому стані конвективний потік є уповільненим чи майже відсутнім, а тому має місце процес деякого накопичення чи акумуляції енергії з поступовим зростанням температури майже нерухомих мас рідини поблизу її поверхні. Але такий порівняно тривалий процес акумуляції раптово обривається, і починається короткотривала фаза «вільної» конвекції. В цей перехідний момент «більш високосиметрична» картина самодефокусування (рис. 2.3 (б)) різко змінюється на «низькосиметричну», подібну до тієї, яка показана на рис. 2.3 (а). Під час короткотривалої конвективної фази відбувається швидке «скидання» накопиченої внутрішньої енергії, температура рідини, яка знаходиться під дією лазерного пучка, різко падає («стара» маса теплої рідини

замінюється «новою», холодною рідиною), а конвективний потік зупиняється, що призводить до повернення теплової лінзи знову у «преконвективний» стан. Процес набуває періодичного автоколивального характеру в часі, і саме це явище називається в літературі *коливаннями теплової лінзи чи «оптичними серцебиттями»* [8-11].



(a)

(б)

Рисунок 2.4 – Тіньові зображення теплової лінзи (на екрані S_1) біля поверхні рідини (темна горизонтальна смуга) за наявності «вільного» конвективного потоку (а) та в «преконвективному» стані (б). Спрямлена ділянка поверхні рідини (а) та опуклість цієї поверхні (б) вказані білими стрілками

Експериментальну схему рис. 2.1 можна незначно модифікувати, прибравши екран S_2 , і «підсвітити» кювету C розширеним пучком напівпровідникового «зеленого» лазера з довжиною хвилі $\lambda = 532$ нм. Оптичний спектр пропускання (див. рис. 2.2) свідчить про те, що таке зелене світло проходить крізь розчин практично без поглинання, чим, до речі, пояснюється зелений колір і широко відома побутова назва розчину у етиловому спирті («зеленка»). Таке зелене світло практично не впливає на ті теплові процеси, що індукуються червоним світлом He-Ne-лазера, але, у свою чергу, дає можливість спостерігати на екрані S_1 , в його верхній частині, оптично-теплову неоднорідність розчину зі зменшеним показником

заломлення – теплову лінзу, «спровоковану» поглинанням червоного світла.

Теплова лінза при цьому виглядає на екрані S_1 як невелика темна пляма під поверхнею рідини (рис. 2.4).

Наведений вище опис фізичного процесу автоколивань теплової лінзи узгоджується зі спостереженням поведінки її тіньового зображення. Фото рис. 2.4 (б) відповідає «преконвективному» стану теплової лінзи із «більш високосиметричною» картиною самодефокусування на фото рис. 2.3 (б). Теплова лінза має збільшений діаметр, слабка опуклість поверхні рідини має місце над майже симетричною тіньовою плямою від теплової лінзи. Фото рис. 2.4 (а) відповідає короткотривалій конвективній фазі циклу автоколивань із «низькосиметричною» картиною самодефокусування на фото рис. 2.3 (а). Бачимо, що діаметр власне теплової лінзи є зменшеним, також помітною є вертикальна тіньова смужка конвективного потоку, яка з'єднує «тіло» теплової лінзи із спрямленою ділянкою поверхні рідини над нею.

Як правило, в описаному процесі автоколивань (у найбільш нелінійному режимі) тривалість «преконвективної» фази може досягати кількох секунд, тоді як короткотривала конвективна фаза займає кілька десятих секунди. Отже, наявність інтервалів швидкого та повільного рухів є властивістю даних автоколивань. Така ж властивість є характерною для так званих релаксаційних автоколивань у системах типу «акумуляція-скидання» (АС-системи) [12]. Загальна схема коливального циклу АС-системи полягає в наступному. Спочатку має місце довготривала фаза повільного руху, під час якого в системі відбувається акумуляція-накопичення потенціальної енергії. Коли рівень акумульованої енергії досягає критичного значення, то «вмикається» канал «скидання» енергії і настає короткотривала фаза швидкого руху. Накоплена енергія виділяється у формі деякого руху в системі, який одразу припиняється після вичерпання її запасу. АС-система повертається до вихідного стану, і починається новий коливальний цикл. Бачимо, що описана схема повністю подібна до еволюційного процесу у коливальному циклі теплової лінзи.

Необхідно відзначити, що в нашому розпорядженні наявні відеофільми, що демонструють описаний процес еволюції конвективних автоколивань, як по картині теплового самодефокусування (на екрані S_2), так і по картині тіньового зображення теплової лінзи на екрані S_1 . Складний нелінійний процес еволюції фотоіндукованих автоколивань конвективного потоку засвідчує значну степінь термодинамічної нерівноважності досліджуваної системи, а тому створення простої моделі явища, яка хоча б на якісному рівні описувала складну поведінку системи, є достатньо актуальним і має доволі високе наукове значення.

2.2 Конвективні потоки рідини при локальному нагріванні далеко від її поверхні: утворення бароклінічних вихорів

Перший пункт літературного огляду присвячений питанню про виникнення конвекції у схемі Релея-Бенара-Марангоні (КРБМ). В нашому експерименті також відбувається формування конвективних потоків, але, на відміну від КРБМ, сфокусований лазерний пучок забезпечує умову порівняно локального нагрівання рідини. Якщо пучок проходить достатньо далеко від поверхні рідини, то картина самодефокусування (див. рис. 1.8 чи рис. 2.3 (а)) є стаціонарною, тобто незмінною у часі, а тому і конвективні потоки рідини при цьому є стаціонарними також. В такому випадку їх структура має бути «відбитком» структури тих сил, які породжують та підтримують конвективний процес. Очевидно, що явища конвективної нестійкості рідини можна розглядати як граничний прояв нестійкості Релея-Тейлора при близьких до нуля значеннях числа Атвуда $A \sim 0$ та нескінченній розчинності [13]. Розвиток нестійкості відбувається тоді, коли градієнт тиску p рідини, викликаний прискоренням сили тяжіння $\vec{g}$, є пов'язаним із градієнтом густини ρ наступною нерівністю:

$$\nabla p \cdot \nabla \rho < 0. \quad (2.1)$$

Внаслідок свого теплового розширення в початковий момент лазерної експозиції, функція розподілу густини $\rho(\mathbf{r})$ поглинаючої рідини набуває мінімального значення поблизу центру пучка і зростає в напрямі від центру до периферії пучка. Саме тому, завдяки лазерному опроміненню, у об'ємі рідини виникає поле градієнта густини $\nabla \rho$, вектори якого є здебільшого непаралельними направленому вертикально вниз полю градієнта тиску ∇p . При цьому нерівність (2.1) виконується у верхній половині опроміненого лазером об'єму рідини (див. нижче рис. 2.5). Якщо ми нехтуємо в'язкістю рідини і допускаємо двовимірну структуру її конвективних потоків, у площинах рисунків 2.3 та 2.4, то має виконуватися *рівняння для поля вектора завихреності* ліній потоку рідини у наступному вигляді [4,13]:

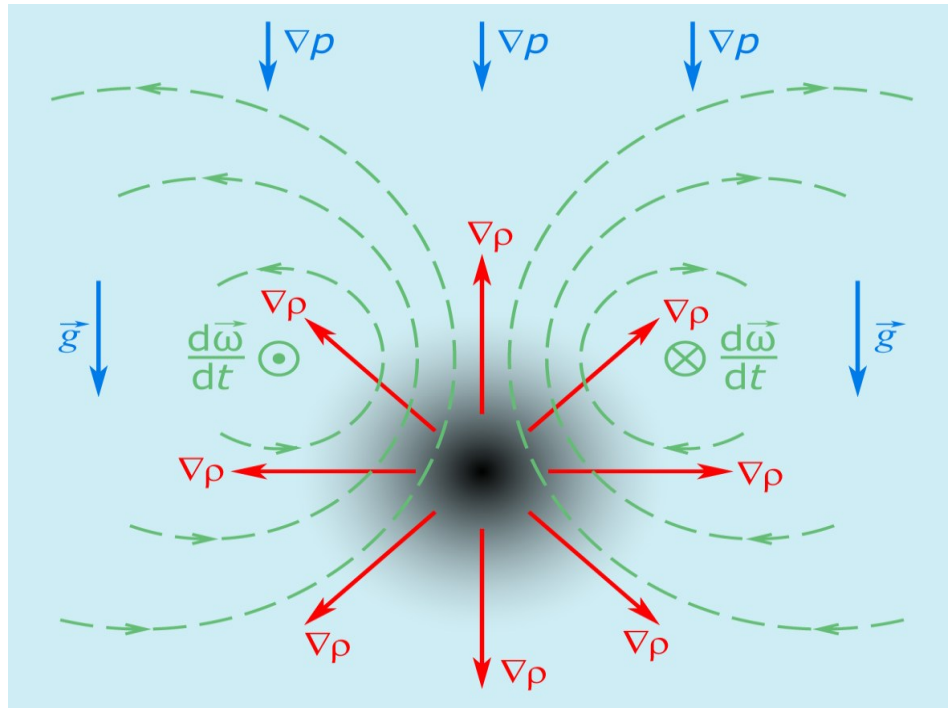


Рисунок 2.5 – Походження пари бароклінічних вихорів (зелені пунктирні лінії) «вільного» конвективного потоку, індукованого сфокусованим лазерним променем при достатньо великій глибині ($h \geq 3$ мм) теплової лінзи: ∇p – вектор градієнта тиску, пов'язаного із силою тяжіння; $\nabla \rho$ – вектори градієнта густини, пов'язаного з локальним нагріванням поглинаючої лазерне світло рідини; затемнена пляма – тіньове зображення області з нагрітою лазером рідиною, яка має меншу густину та, відповідно, менший показник заломлення [28]

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \nabla \rho \times \nabla p. \quad (2.2)$$

Тут $\vec{\omega}$ – так званий *вектор завихреності*. Поле вектора $\vec{v}$ швидкості потоку рідини, якому відповідають лінії потоку рідини, та поле $\vec{\omega}$ вектора завихреності, у свою чергу, пов'язані між собою також векторним співвідношенням

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}.$$

Напрямок вектора завихреності $\vec{\omega}$ визначає напрям обертання крихітної «частинки рідини», яка рухається зі швидкістю $\vec{v}$, а величина вектора $\vec{\omega}$ є подвоєною кутовою швидкістю обертання цієї частинки.

Рівняння (2.2) показує, що поблизу будь-якої точки в рідині, де градієнти

її внутрішнього тиску та густини дають ненульовий векторний добуток, діє гідродинамічний обертальний момент, який має спеціальну назву *бароклінічного вихора* [13]. Цей момент примушує частинки рідини до руху із кутовим прискоренням, що й призводить до виникнення такого вихора чи валу, подібного до конвективних вихорів-валів на рис. 1.3. Але, на відміну від конвекції Релея-Бенара-Марангоні, маємо *безпороговий* механізм виникнення потоку рідини аналогічно тому, як це показано на рис. 1.2 літературного огляду.

Таким чином, коли лазерний промінь проходить через рідину на досить великій глибині $h \geq 3$ мм, то немає перешкод для формування конвективних вихорів-валів згідно з рівнянням (2.2). Ця нестійкість нерухомого стану рідини є бароклінічною за своєю суттю, і принцип її виникнення схематично ілюструється на рис. 2.5. У верхній частині опроміненої лазерним пучком області, де саме виконується умова нестійкості (2.1), формуються *два бароклінічних конвективних вихори* із протилежними напрямками вектора завихреності $\vec{\omega}$. Поля швидкості $\vec{V}$ потоків рідини у цих вихорах (зелені пунктирні лінії на рис. 2.5) співпадають трохи вище центру лазерного променя, і тому ця пара вихорів, відповідно до закону Бернуллі, повинна бути достатньо стійкою конвективною структурою після перехідного *безпорогового* процесу збудження конвекції. У стаціонарному стані поле швидкостей потоку (і поле завихреності), очевидно, має таку структуру, яка мінімізує величину обертального гідродинамічного моменту та сприяє стабілізації потоків в системі. Самоузгодженим результатом впливу конвективного потоку на процес дифракції індукуючого цей потік лазерного променя є картина теплового самодефокусування на рис. 1.8 чи рис. 2.3 (а).

2.3 Гравітаційно-капілярний режим коливань теплової лінзи

Отже, описаний у попередньому розділі стаціонарний процес картини самодефокусування спостерігається, поки лазерний промінь проходить крізь рідину на достатній глибині від її поверхні. Цей процес може змінитися на релаксаційно-автоколивальний по принципу дії системи «акумуляція-скидання» (АС-системи), коли лазерний пучок проходить достатньо близько до поверхні рідини (на глибині не більше кількох міліметрів). Розгляд загальної фізичної картини процесу автоколивань теплової лінзи по принципу дії АС-системи можемо вважати загальноприйнятим [8,10,14], але з'ясування механізму порогової поведінки, з нашої точки зору, потребує деякого уточнення.

Головний результат попереднього пункту полягає в наступному: при локальному нагріванні сфокусованим лазерним променем в об'ємі рідини її «вільні» конвективні потоки мають просторову структуру *двовимірного вихорового дублета* [15]. Але таку ж структуру повинні мати і конвективні потоки під час короткотривалої конвективної фази циклу автоколивань теплової лінзи, так як має місце практична тотожність картин самодефокусування лазерного пучка у вигляді рис. 2.3 (а) при наявності конвекції в обох випадках. Таким чином, якщо в коливаннях теплової лінзи присутні ознаки поведінки АС-системи, то природно розглядати поверхню рідини як перешкоду для формування вихорового дублета, а, отже, як перешкоду для «увімкнення» конвективного потоку.

На фото рис. 2.4 (б) (та по наявних у нашому розпорядженні відеофайлах) бачимо, що має місце зростання опуклого вигину поверхні під час «преконвективної» фази циклу коливань теплової лінзи. Розглянемо величину потенціальної енергії E_{pot} , яка акумулюється-накоплюється при деформації поверхні **ХУ** рідини у вигляді опуклості радіусом R та кутом розхилу α так, як це показано на рис. 2.6. Через область **АВС** на глибині h під поверхнею

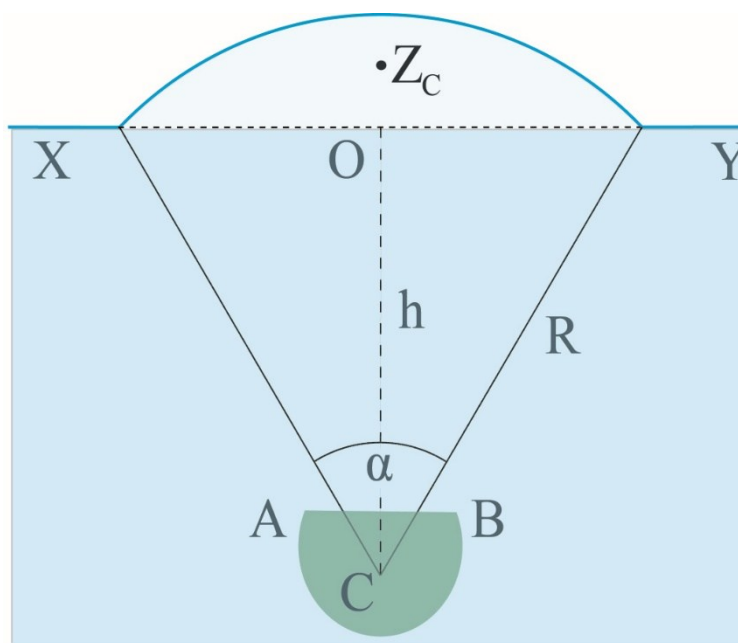


Рисунок 2.6 – Вигляд поверхні **XY** рідини зі збуренням у вигляді опуклості з кутом розхилу α та радіусом R . Область **ABC** на глибині h – це область теплової лінзи, де лазерний пучок проходить крізь рідину і розігріває її. Точка **C** є центром кривизни опуклості і одночасно центром лазерного пучка

проходить лазерний пучок і розігріває рідину. Її теплове розширення, в умовах відсутності конвективного потоку на етапі акумуляції, призводить до виникнення опуклості на поверхні за рахунок цього розширення і дії виштовхувальної сили Архімеда на розігріту лазером масу рідини з боку її навколишніх холодних мас. При цьому в системі відбувається накопичення потенціальної енергії за рахунок зростання площі поверхні рідини):

$$\text{приріст площі} \quad \Delta S = \alpha \cdot R \cdot l - 2 \cdot R \cdot l \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (2.3)$$

і відповідний приріст поверхневої енергії

$$\Delta W_{srf} = \sigma \cdot \Delta S = \frac{\sigma \cdot l \cdot h}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\alpha - 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (2.4)$$

Тут σ – як і раніше, коефіцієнт поверхневого натягу рідини; l – товщина системи перпендикулярно площині рис. 2.6 і $R = h / \cos \frac{\alpha}{2}$.

Разом з опуклістю поверхні рідини маємо підняття деякої маси M рідини

під нею над рівнем **XY** незбуреної поверхні (ця рідина на рис. 2.6 показана світлішим тоном над точкою **O**, положення її центру мас позначено як **Z_c**):

$$M = \frac{\rho \cdot l \cdot h^2}{2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot (\alpha - \sin \alpha), \quad (2.5)$$

тут, як і раніше, ρ – густина рідини. Підняття цієї маси відповідає зменшенню ΔW_{grv} гравітаційної потенціальної енергії, бо місце «більш легкої» розігрітої рідини, витісненої під опуклість, займає «більш важка» нерозігріта лазером рідина нижче рівня **XY**. Можемо показати, що:

$$\Delta W_{grv} = M \cdot g \cdot Z_c = \frac{\rho \cdot g \cdot l \cdot h^3}{2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \alpha + \sin \alpha \right). \quad (2.6)$$

Отже, в результаті отримуємо залежність потенціальної енергії $E_{pot}(\alpha)$ від величини опуклості α :

$$E_{pot}(\alpha) = \Delta W_{srf} - \Delta W_{grv} = \frac{l \cdot h}{2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \left[2 \cdot \sigma \cdot \left(\alpha - 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{\rho \cdot g \cdot h^2}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \alpha + \sin \alpha \right) \right]. \quad (2.7)$$

Можемо провести розрахунок залежності (2.7) $E_{pot}(\alpha)$ при відомих табличних значеннях коефіцієнта поверхневого натягу σ і густини ρ для спирту або ацетону [16].

На рис. 2.7 наведено набір таких залежностей при різних глибинах h проходження лазерного пучка 0.1; 0.5; 1; 2; 3 мм та значеннях $\sigma = 24$ мН/мм; $\rho = 790$ кг/м³; $g = 10$ м/с²; $l = 1.07$ мм. Бачимо, що функція потенціальної енергії $E_{pot}(\alpha)$ має вигляд кривої із максимумом-бар'єром, висота якого відповідає тому максимальному значенню енергії, яке може «акумулюватись-накопитись» при утворенні опуклості на поверхні рідини за даних експериментальних умов (з рис. 2.7 видно, наприклад, що висота бар'єру

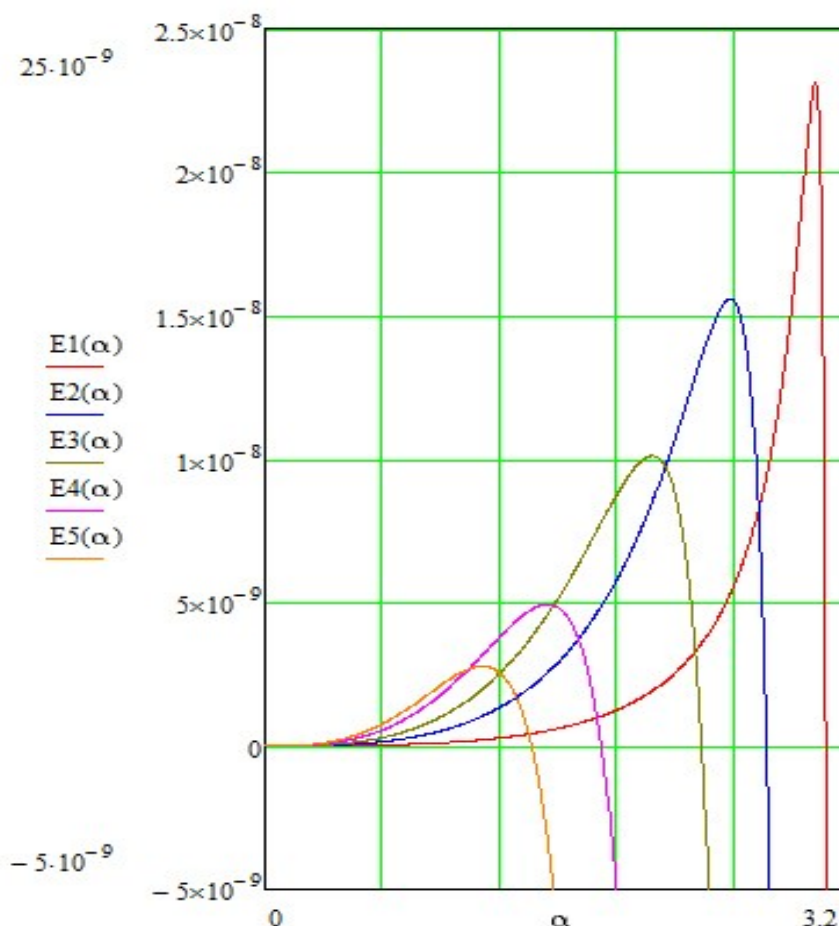


Рисунок 2.7 – Залежність функції потенціальної енергії $E_{pot}(\alpha)$ (у джоулях) від величини опуклості α (у радіанах) для різних глибин h проходження лазерного пучка ($h = 0.1; 0.5; 1; 2; 3$ мм відповідно для графіків від $E1(\alpha)$ до $E5(\alpha)$)

становить близько 10 нДж при глибині проходження лазерного пучка $h = 1$ мм). При подальшому зростанні величини опуклості α має місце різкий спад потенціальної енергії системи, що ми можемо віднести до того етапу релаксаційних коливань, який ми називаємо конвективною фазою, і у нашому випадку пов'язується зі збудженням потоку рідини, коли накоплена потенціальна енергія деформованої поверхні переходить у кінетичну енергію її потоку.

Висота енергетичного бар'єра ϵ , очевидно, тією роботою, яку має виконати лазерний промінь, для формування пари бароклінічних вихорів і запуску приповерхневого конвективного потоку. Зі зростанням глибини h проходження лазерного пучка висота бар'єру знижується, і при $h \rightarrow \infty$

отримуємо режим «вільної» конвекції із безпороговим утворенням вихрового дублета, як це описано в попередньому пункті 2.2. Порівняння внесків поверхневої ΔW_{srf} (2.4) та гравітаційної ΔW_{grv} (2.6) енергій у загальне значення потенціальної енергії $E_{pot}(\alpha)$ (2.7) системи показує, що порогової поведінки при виникненні конвекції слід очікувати, якщо глибина h проходження лазерного пучка задовольняє наступній нерівності:

$$h \leq h_{cap} = \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma}{\rho \cdot g}}, \quad (2.8)$$

де, аналогічно до формули (1.8) у пункті 1.2 літературного огляду, можемо назвати величину h_{cap} *капілярною константою* [3]. Для ацетону та етилового спирту $h_{cap} \approx 2.4$ мм. Як правило, умова (2.8) має виконуватися при спостереженні ефекту коливань теплової лінзи чи «оптичних серцебиттів» [8]. Конвективна фаза коливань починається тільки тоді, коли опуклість поверхні досягає деякого критичного значення у процесі накопичення енергії. Таке критичне значення зумовлене необхідністю формування пари конвективних вихорів-валів при здійсненні потоку поблизу поверхні рідини. Отже, поверхня рідини здатна стримувати виникнення конвективного потоку при локальному нагріванні рідини поблизу її поверхні, і цей стримуючий ефект є дуже подібним до того, який має місце на поверхні-інтерфейсі між легкою та важкою рідиною при розвитку нестійкості Релея-Тейлора (див. пункт 1.2 розділу 1). Очевидно, цей результат в достатній мірі узгоджується із розглядом явища конвективної нестійкості як специфічного граничного випадку нестійкості Релея-Тейлора при близькому до нуля значенні числа Атвуда та нескінченній розчинності (див. пункт 2.2 розділу 2).

2.4 Термокапілярний режим автоколивань теплової лінзи поблизу поверхні рідини

Як було встановлено у підрозділі 2.3, в рамках розгляду енергетичного балансу збурення поверхні рідини, при зменшенні глибини проходження лазерного пучка висота потенціального бар'єра для розвитку конвективного руху різко зростає. Формально це призводить до того, що при достатньо малих глибинах бар'єр прямує до нескінченності, і, відповідно, збудження конвективних потоків, а разом із ним і автоколивання теплової лінзи мають припинятися.

Однак експериментально такого припинення не спостерігається. Це свідчить про те, що в даній області реалізується інший механізм збудження конвективних потоків, який не зводиться до гравітаційно-капілярної моделі. У зв'язку з цим природно припустити, що при малих глибинах визначальну роль відіграє термокапілярний механізм, зумовлений залежністю коефіцієнта поверхневого натягу рідини від температури. Далі розглянемо детально фізичну модель цього режиму.

Для якісного та кількісного опису поведінки поверхні рідини скористаємося аналогією з класичним експериментом із мильною плівкою, натягнутою між двома кільцями.



Рисунок 2.8 – Демонстраційний експеримент із мильною плівкою, натягнутою між двома кільцями

У цьому випадку плівка набуває форми катеноїда – осесиметричної поверхні, яка у кожній своїй точці має повну нульову кривизну, оскільки з обох її сторін величина тиску є однаковою і, відповідно, надлишковий тиск Лапласа p_L , зумовлений поверхневим натягом плівки, має дорівнювати нулю [26]:

$$p_L = \sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0,$$

тут R_1^{-1} та R_2^{-1} є т. зв. головними радіусами кривизни даної поверхні.

Використовуючи вказане співвідношення, можна показати, що переріз $R(x)$ поверхні будь-якою площиною вздовж осі симетрії OX має задовольняти диференціальному рівнянню [5]:

$$\frac{R''}{1 + R'^2} - \frac{1}{R} = 0,$$

рішенням якого є рівняння катеноїда:

$$R(x) = R_0 \cdot \cosh\left(\frac{x}{R_0}\right), \quad (2.9)$$

де R_0 – радіус «шийки» катеноїда (див. рис. 2.9).

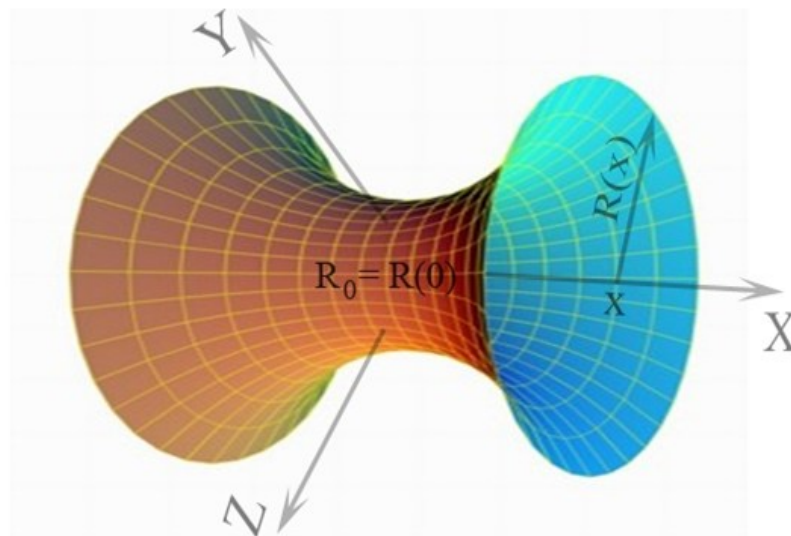


Рисунок 2.9 – Загальний вигляд катеноїдної поверхні

Тепер ми можемо врахувати граничні умови. Якщо a – радіус кільця, $2d$ – відстань між кільцями, тоді гранична умова має вигляд:

$$R(d) = a \Rightarrow \frac{a}{R_0} = \cosh\left(\frac{d}{R_0}\right), \quad (2.10)$$

або у безрозмірному вигляді:

$$\frac{a}{d} \cdot \xi = \cosh(\xi), \text{ де маємо безрозмірний параметр } \xi = \frac{d}{R_0}. \quad (2.11)$$

Нижче на рис. 2.10 наведено графічний аналіз даного рівняння, який показує, що при заданих експериментальних умовах (заданому співвідношенні між радіусом кілець a та напіввідстані d між ними) рівняння (2.11) має дві гілки розв’язків – стійку та нестійку [26], які відповідають точкам перетину прямої

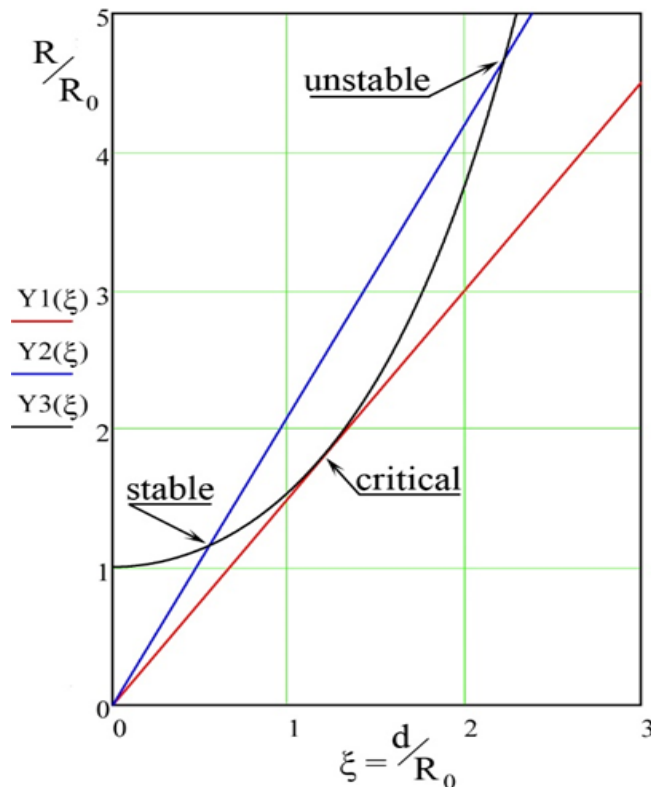


Рисунок 2.10 – Графічний розв’язок для форми катеноїда мильної плівки

$Y2(\xi) = \frac{a}{d} \cdot \xi$ із катеноарною кривою $Y3(\xi) = \cosh(\xi)$. Стійкий розв'язок завжди кореспондується з меншим з двох можливих значень параметра ξ , яке зумовлюється меншою відстанню $2d$ між кільцями та більшим радіусом R_0 шийки катеноїда. Згідно до [26], варіаційний аналіз показує, що саме це рішення співпадає із мінімумами величин площі поверхні і вільної енергії плівки у формі катеноїда при заданих граничних умовах, тоді як нестійкі рішення відповідають максимальним значенням вказаних величин.

Нахил прямої $Y2(\xi) = \frac{a}{d} \cdot \xi$ (див. рис. 2.10) зменшується при збільшенні відстані $2d$ між кільцями (і незмінному значенні радіусу a кілець), при цьому бачимо, що стійкий і нестійкий розв'язки «зливаються», якщо пряма $Y2(\xi)$ набуває критичного нахилу при $(\frac{a}{d})_{cr} \sim \frac{3}{2}$. На рис. 2.10 така пряма показана червоним кольором у вигляді «критичної» прямої $Y1(\xi) = \frac{3}{2} \cdot \xi$. Коли відстань $2d$ між кільцями досягає критичного значення, близького до двох третин від їх діаметра $2a$, то катеноїдна поверхня стає гранично нестійкою і розривається у разі подальшого «розведення» кілець.

Тепер повернемося до розгляду термокапілярного режиму автоколивань теплової лінзи. Ми вважаємо, що в умовах проходження сфокусованого лазерного променя при достатньо малих глибинах, суттєво менших h_{cap} , вказаного у попередньому розділі, поверхня-меніск рідини зазнає такого ж впливу, як і катеноїдна мильна плівка у вищерозглянутому експерименті. Початковий вигин меніска свідчить про наявність перепаду тиску вище і нижче його поверхні, який компенсується лапласівським тиском поверхневого натягу цієї поверхні. Нагрівання рідини лазерним променем призводить до підвищення тиску у рідині і, відповідно, вирівнювання величин тиску з обох сторін від поверхні меніска. В такому випадку ця поверхня має набувати форми із нульовою повною кривизною, тобто катеноїдної.

Рис. 2.11 (зліва) демонструє механізм виникнення термокапілярної сили $\vec{f}$, аналогічної до тієї сили тяги, яка «розводить» кільця в експерименті з

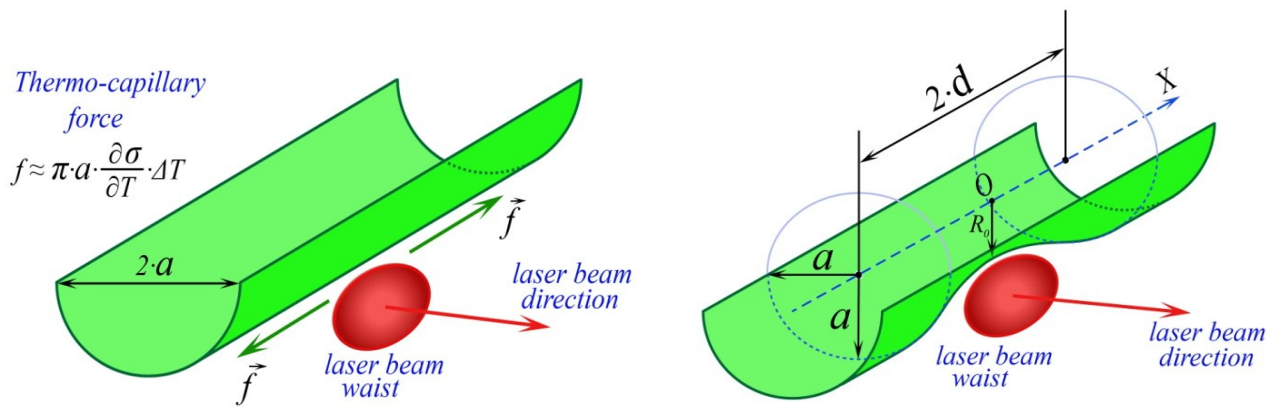


Рисунок 2.11 – Виникнення термокапілярної сили при локальному нагріванні під поверхнею рідини (зліва). Термокапілярна деформація поверхні меніска у вигляді напівкатоноїда (справа)

катоноїдною мильною плівкою. Її величина

$$f \cong \pi \cdot a \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot \Delta T, \quad (2.12)$$

зумовлена неоднорідністю локального нагрівання приповерхневих мас рідини ($\partial \sigma / \partial T$ – температурний коефіцієнт поверхневого натягу, ΔT – підвищення температури рідини в області перетяжки лазерного пучка за рахунок поглинання лазерного світла). У початковий момент (акумулятивна фаза) поверхня рідини поблизу лазерного пучка має форму, близьку до напівциліндричної (при повному змочуванні стінок кювети). Через нагрівання поверхневий натяг зменшується, і його градієнт породжує «розтягнення» поверхневого шару рідини. Внаслідок цих процесів і вирівнювання тисків з обох сторін від поверхні виникає її напівкатоноїдна деформація, що ілюструється вже справа на рис. 2.11. В акумулятивній фазі має місце розширення напівкатоноїдної області підвищеної температури, що є аналогічним до зростання деякої «ефективної» відстані $2d$ між уявними кільцями катоніида діаметром $2a$, який є незмінним і відповідає відстані між стінками кювети. При досягненні критичного значення $(\frac{a}{d})_{cr} \sim \frac{3}{2}$ відбувається розрив напівкатоноїдної поверхні рідини і розпочинається конвективна фаза скидання – збуджуються поверхневі конвективні потоки нагрітої лазерним

променем рідини. Цей процес призводить до вирівнювання температури приповерхневого шару, зменшення тиску у ньому із зупинкою конвекції і, відповідно, до відновлення початкової незбуреної напівциліндричної форми меніска. Знову настає початок акумулятивної фази наступного періоду автоколивань.

На основі запропонованої моделі легко зробити числову оцінку величини максимального вигину $(a - R_0)_{cr}$ поверхні-меніска (див. рис. 2.11 (справа)) перед збудженням поверхневого конвективного потоку. Легко показати, що критичне значення ξ_{cr} параметра $\xi = d/R_0$ визначається наступним рівнянням:

$$\xi = \coth \xi \Rightarrow \xi_{cr} = 1.200, \quad (2.13)$$

а тому, враховуючи, що $(d/a)_{cr} \approx 0.663$ при відомому значенні радіуса кривизни меніска $a = 0.5$ мм маємо:

$$R_0 \approx 0.28 \text{ мм} \Rightarrow (a - R_0)_{cr} \approx 0.22 \text{ мм}.$$

Отримана оцінка величини вигину меніска не суперечить експериментальним спостереженням, хоча її більш точне визначення є непростю задачею для майбутнього експериментального дослідження.

У Додатку до даної дипломної роботи (див. стор. 50-51) наведено приклад простої програми у середовищі Wolfram Mathematica 11.0 для розрахунку форми катеноїдної поверхні мильної плівки та залежності функції її вільної енергії для стійкого і нестійкого рішень від параметрів a та d , що, як правило, задаються експериментально (у відповідності до формул роботи [26]).

ВИСНОВКИ

У моїй дипломній роботі було розглянуто явище фотоіндукованих автоколивань у приповерхневому конвективному потоці рідини, що виникає під дією лазерного випромінювання при формуванні теплової лінзи.

Показано, що у випадку локального нагрівання рідини лазерним випромінюванням у її об'ємі можуть формуватися конвективні потоки, пов'язані з виникненням пари бароклінічних вихорів. Такий процес можна розглядати як граничний прояв нестійкості Релея–Тейлора, для якого формування вихрової структури в об'ємі рідини має безпороговий характер.

Водночас у приповерхневій області ситуація якісно змінюється. Вільна поверхня рідини виступає як додатковий фізичний чинник, що перешкоджає формуванню бароклінічних вихорів. На основі аналізу енергетичного балансу при деформації поверхні рідини показано, що для подолання цієї перешкоди необхідне досягнення певного порогового рівня збурення. Саме це зумовлює порогову поведінку при збудженні приповерхневого конвективного потоку.

Для пояснення цієї порогової поведінки було запропоновано два можливі механізми: гравітаційно-капілярний та термокапілярний. У першому випадку поріг пов'язаний із необхідністю деформації вільної поверхні рідини з урахуванням сил тяжіння та поверхневого натягу. У другому випадку визначальну роль відіграють термокапілярні ефекти, зумовлені температурною залежністю поверхневого натягу.

Встановлено, що природа цих порогових механізмів якісно відрізняється від класичних порогів, характерних для конвекції Релея–Бенара та нестійкості Марангоні. Запропоновані механізми не зводяться до в'язкого дисипативного порогу і можуть розглядатися навіть для ідеалізованої рідини з нульовою в'язкістю.

Таким чином, проведений розгляд дозволив побудувати послідовну фізичну картину фотоіндукованих автоколивань у приповерхневому конвективному потоці рідини. Запропоновані моделі типу «акумуляція–

скидання» дають змогу на якісному рівні пояснити наявний масив експериментальних даних та пов'язати спостережувані коливання теплової лінзи з пороговим збудженням приповерхневих конвективних потоків.

Перспективи подальших досліджень полягають у більш детальному теоретичному та експериментальному вивченні процесів самоорганізації у складних дисипативних системах під дією лазерного випромінювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Berger P., Pomeau Y., Vidal C. Order Within Chaos: Towards a Deterministic Approach to Turbulence. New York : John Wiley & Sons, 1987. 380 p.
2. Cross M. C., Hohenberg P. C. Pattern formation outside of equilibrium // Reviews of Modern Physics. 1993. Vol. 65, No. 3. P. 851–1112.
3. Landau L. D., Lifshitz E. M. Fluid Mechanics : Course of Theoretical Physics. Vol. 6. 2nd ed. Oxford : Butterworth-Heinemann, 1987. 539 p.
4. Kundu P. K., Cohen I. M., Dowling D. R. Fluid Mechanics. 6th ed. Amsterdam : Elsevier, 2016. 922 p.
5. Charru F. Hydrodynamic Instabilities. Cambridge : Cambridge University Press, 2011. 365 p.
6. Вікіпедія : вільна енциклопедія [Електронний ресурс]. URL: <http://uk.wikipedia.org>
7. Akhmanov S. A., Krindach D. P., Migulin A. V., Sukhorukov A. P., Khokhlov R. V. Thermal self-actions of laser beams // IEEE Journal of Quantum Electronics. 1968. Vol. QE-4, No. 10. P. 568–575.
8. Gouesbet G., Roze C., Mennier-Guttin-Cluzel S. Instabilities by local heating below an interface // Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. 2000. Vol. 25. P. 337–379.
9. Bazhenov V. Yu., Vasnetsov M. V., Soskin M. S., Taranenko V. B. Dynamics of laser-induced bubble and free-surface oscillations in an absorbing liquid // Applied Physics B. 1989. Vol. 49. P. 485–489.
10. Greenfield E., Rotschild C., Szameit A., Nemirovsky I., El-Ganainy R., Christodoulides D. N., Saraf M., Lifshitz E., Segev M. Light-induced self-synchronizing flow patterns // New Journal of Physics. 2011. Vol. 13. 053021.
11. Gouesbet G., Weill M. E., Lefort E. Convective and free surface instabilities provoked by heating below an interface // AIAA Journal. 1986. Vol. 24, No. 8. P. 1324–1330.

12. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge : Cambridge University Press, 2001. 432 p.
13. Roberts M. S., Jacobs J. W. The effects of forced small wavelength, finite bandwidth initial perturbations and miscibility on the turbulent Rayleigh–Taylor instability // Journal of Fluid Mechanics. 2016. Vol. 787. P. 50–83.
14. Bazhenov V. Yu., Vasnetsov M. V., Soskin M. S., Taranenko V. B. Self-oscillations of a liquid near a free surface under continuous local heating // JETP Letters. 1989. Vol. 49, No. 3. P. 330–333.
15. Milne-Thomson L. M. Theoretical Hydrodynamics. 4th ed. London ; New York : Macmillan, 1960. 655 p.
16. Vargaftik N. B. Handbook of Physical Properties of Liquids and Gases. New York : Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
17. Nonlinear Electromagnetic Waves / ed. by P. L. E. Uslenghi. New York : Academic Press, 1981. 312 p.
18. Akhmanov S. A., Sukhorukov A. P., Khokhlov R. V. Self-focusing and self-trapping of intense light beams in a nonlinear medium // Soviet Physics JETP. 1966. Vol. 23, No. 6. P. 1025–1033.
19. Demtröder W. Laser Spectroscopy. Berlin : Springer, 1981.
20. Klinger D. Ultrasensitive Laser Spectroscopy. New York : Academic Press, 1983.
21. Калапуша Л. Р., Муляр В. П. Основи методики і техніки навчального фізичного експерименту : навч. посіб. Луцьк : Вежа, 2009. 428 с.
22. Агєєв Л. А., Мілославський В. К., Блоха В. Б., Ельашхаб Х. І. Навчальні експерименти та демонстрації з фізики : навч. посіб. Харків : ХНУ, 2000. 262 с.
23. Enns R. H., McGuire G. C. Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers. — 1st ed. — Boston: Birkhauser, 2001. — 693 p.
24. Atkins P. Molecules. New York : Scientific American Library, 1987. 216 p.

25. Варламов А. А., Асламазов Л. Г. Несамовита фізика. Скрипка, піца, вино і надпровідність. Київ : Наш формат, 2020. 400 с.
26. Taylor G. I., Michael D. H. On making holes in a sheet of fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 1973. Vol. 58. P. 625–639.
27. Bielova A. O., Lymar V. I., Makovetskyi Ye. D., Malyi Yu. S. Manifestations of vortex behavior of fluids in various physical experiments // *Journal of V. N. Karazin Kharkiv National University. Series “Physics”*. 2025. Iss. 43. P. 73–74. DOI: 10.26565/2222-5617-2025-43-04.
28. A.O. Bielova, V.I. Lymar, Ye.D. Makovetskyi, M.L. Pogrebnyak, and A.S. Rudenko, “Threshold behavior of convective flows at thermal lens oscillations”, *Proc. of 2019 IEEE 8th Int. Conf. on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL) CAOL*2019*. –Sozopol, Bulgaria, 06-08 September 2019. – p. 498-503.
29. A.O. Bielova, V.I. Lymar, Ye.D. Makovetskyi, “Two Modes of Near-Surface Convective Flows Threshold at Thermal Lens Oscillations”, in *OSA Nonlinear Optics 2021*, R. Boyd, C. Conti, D. Christodoulides, and P. Rakich, eds., OSA Technical Digest (Optica Publishing Group, 2021), paper NW2B.7. <https://doi.org/10.1364/NLO.2021.NW2B.7>

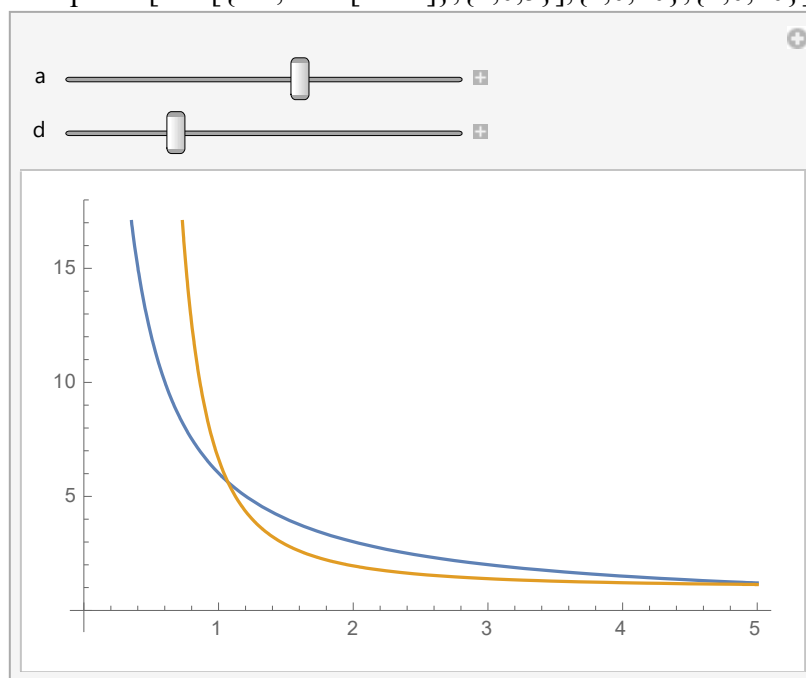
ДОДАТОК

**Приклад програми Wolfram Mathematica 11.0 для розрахунку
стійкої та нестійкої форм катеноїда та функції вільної енергії поверхні
(у відповідності до формул та результатів роботи [26])**

a:=1

d:=1

Manipulate[Plot[{a/x,Cosh[d*x⁻¹]},{x,0,5},{a,0,10},{d,0,10}]



5/3.38

1.47929

3.38/5

0.676

5*0.663

3.315

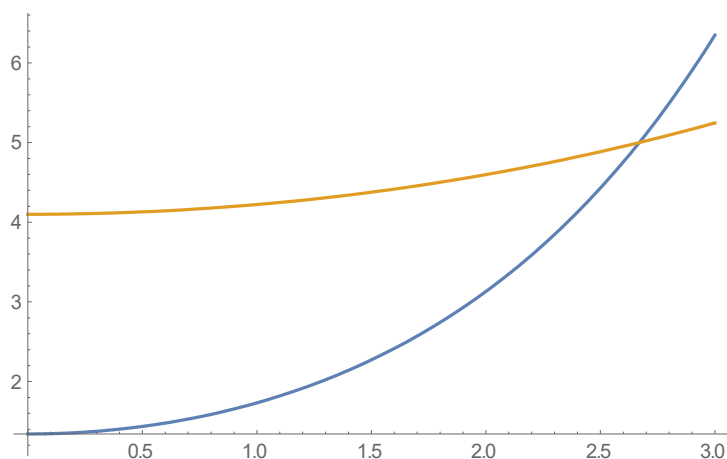
3.315*3/5

1.989

NSolve[(5/x)-Cosh[2.67/x]==0,{x},Reals]

{{x->1.34152},{x->4.09929}}

Plot[{1.34152*Cosh[x/1.34152],4.09929*Cosh[x/4.09929]},{x,0,3}]



```
NSolve[1.34152*Cosh[x/1.34152]-4.09929*Cosh[x/4.09929]==0,x,Reals]
```

```
{ {x->-2.67}, {x->2.67} }
```

```
1.34152*Cosh[2.67/1.34152]
```

```
4.09929*Cosh[2.67/4.09929]
```

```
5.
```

```
5.
```

```
NSolve[5/x-Cosh[3/x]==0,x,Reals]
```

```
{ {x->1.75944}, {x->3.72536} }
```

```
NSolve[3/x-Cosh[1.98823/x]==0,x,Reals]
```

```
{ {x->1.6566}, {x->1.65801} }
```

```
1.98823/1.6566
```

1.6566 - менше значення r_0

1.20019

$(\text{Tanh}[1.20019])^{-1}$

1.19945

$d/r_0 - \coth(d/r_0)$ додатно для меншого r_0

1.98823/1.65801

1.65801-більше значення r_0

1.19917

$(\text{Tanh}[1.19917])^{-1}$

1.1999

$d/r_0 - \coth(d/r_0)$ від'ємно для більшого r_0

$a:=2$

$d:=0.625*a$

```
Plot[2*π*d^2*(x^(-1)+(2a)/d 1/x*Sinh[x]-1/2*Sinh[2x]/x^2),{x,0,2.1}]
```

