

ОБЪ АСТРОНОМИЧЕСКИХЪ ПРЕЛОМЛЕНІЯХЪ.

Т. Осиповскаго.

1. Астрономическимъ преломленіемъ называется измѣненіе направленія претерпѣваемаго лучемъ свѣта, приходящимъ отъ какого ни естъ свѣтила, при прохожденіи его чрезъ Атмосферу земную, повуда онъ достигнетъ нашего глаза.

2. Наблюденія показываютъ, что сіе преломленіе бываетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе направленіе луча отклоняется отъ вертикальнаго; вертикальной же лучъ не претерпѣваетъ никакого преломленія.

3. Какъ сіе преломленіе лучей безъ сомнѣнія происходитъ отъ безпресѣпанныхъ преломленій, кои они претерпѣваютъ проходя чрезъ слои воздуха отчасу измѣняющія свою плотность начиная отъ самой вышней части Атмосферы до самой поверхности земной; шо дабы вывести законъ цѣлаго преломленія луча, положимъ что кругъ радіуса CA представляетъ поверхность земли нашей, кругъ же радіуса CD предѣлъ Атмосферы, при которомъ начинается чувствительное преломленіе. Пусть круги радіусовъ CD , CE , CF и проч. представляютъ предѣлы слоевъ Атмосферы, имѣющихъ каждый единообразную плотность, но при переходѣ отъ слоя къ слою отчасу увеличивающихъ оную даже до самой поверхности земли.

4. Предположивъ, что въ верхней части Атмосферы, гдѣ начинается преломленіе, господствуетъ всегда единообразная теплота, должно будетъ заключить, что на сей высотѣ каждой слой той же плотности долженъ удерживать и ту же толщину. По сему разсужденію предѣла преломленія опъ поверхности земли, въ томъ же мѣстѣ, съ измѣненіемъ состоянія барометра и термометра должно измѣняться: при той же теплотѣ но при большей высотѣ барометра, долженъ сей предѣлъ, опъ прибавляющихся слоевъ съ низу, удаляясь опъ поверхности земли, при меньшей же высотѣ барометра опъ убывающихъ слоевъ съ низу, долженъ опускающъ. Подобныя измѣненія въ высотѣ онаго предѣла должна, при той же высотѣ барометра, производить теплота, расширяя или сжимая нижніе слои, а можетъ быть измѣняя и при той же плотности воздуха преломительную его силу.

5. Положимъ, что при какой либо теплотѣ и при какомъ либо состояніи барометра въ нѣкоторомъ мѣстѣ *A* на поверхности земли вошелъ въ Атмосферу лучъ *RSB*; и преломляясь при переходѣ изъ слоя въ слой въ точкахъ *S*, *H*, *I* и проч. описалъ до глаза *A* ломаную линію *SHIKA*; то онъ покажется глазу пришедшимъ по послѣднему своему направлению *AM*, и уголъ *BIA*, или, по проведеніи линіи *AN* параллельно *BR*, уголъ *NAM* будетъ цѣлое преломленіе онаго луча *RS*. Проведемъ къ точкамъ *S*, *H*, *I* и проч. изъ центра земли *C* радіусы векторы пуля описаннаго лу-

чемъ, кои будутъ къ слоямъ Атмосферы перпендикулярны, и положимъ чпо лучъ при входѣ въ первой слой при S , прежде преломленія въ немъ, составлялъ съ радіусомъ векторомъ уголъ θ , а по преломленіи уголъ θ' ; то онъ со впорымъ радіусомъ векторомъ составилъ прежде преломленія уголъ $\theta' + \delta\theta'$, гдѣ $\delta\theta'$ будетъ $= SCH$. Пустъ сей лучъ по преломленіи составилъ со впорымъ радіусомъ векторомъ уголъ θ'' , то онъ съ претымъ радіусомъ векторомъ до преломленія составилъ уголъ $\theta'' + \delta\theta''$, гдѣ будетъ $\delta\theta'' = HSI$. Пустъ сей лучъ по преломленіи составилъ съ четвертымъ радіусомъ векторомъ уголъ θ''' , и такъ далѣе. Пустъ въ какое либо время придетъ лучъ изъ S въ T , при чемъ радіусъ векторъ опишетъ уголъ SCT , которой назовемъ чрезъ ω . Положимъ чпо число всѣхъ слоевъ, чрезъ кои лучъ прошелъ въ сіе время, будетъ n , разумѣя n число неизмѣримо великое, и назовемъ уголъ $\theta^{(n)}$, которой будетъ при T , буквою ψ . Пустъ знаменатели преломительности, т. е. знаменатели содержанія между синусомъ паденія и синусомъ преломленія, по порядку слоевъ, будутъ $\lambda', \lambda'', \lambda''' \dots$, то будетъ

$$\sin. \theta' = \dots \dots \dots \lambda' \sin \theta,$$

$$\sin. \theta'' = \lambda'' \sin (\theta' + \delta\theta') = \lambda'' \sin. \theta' (1 + \delta\theta' \cot. \theta'),$$

$$\sin. \theta''' = \lambda''' \sin. (\theta'' + \delta\theta'') = \lambda''' \sin. \theta'' (1 + \delta\theta'' \cot. \theta''),$$

и такъ далѣе;

наконецъ при T

$$\sin. \theta^{(n)} = \lambda^{(n)} \sin. (\theta^{(n-1)} + \delta. \theta^{(n-1)}) = \lambda^{(n)} \times$$

$$\sin. \theta^{(n-1)} (1 + \delta\theta^{(n-1)} \cot. \theta^{(n-1)});$$

откуда, по перемноженіи между собою всѣхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ уравненій и по раздѣленіи съ обѣихъ споронъ на $\sin. \theta' \sin. \theta'' \sin. \theta''' \dots \sin. \theta^{(n-1)}$, а потомъ по назначеніи произведенія $\lambda' \lambda'' \lambda''' \dots \lambda^{(n)}$ чрезъ k , получимъ

$$\sin. \theta^{(n)} = \sin. \psi = k \sin. \theta (1 + \delta \theta' \cot. \theta') (1 + \delta \theta'' \cot. \theta'') \dots (1 + \delta \theta^{(n-1)} \cot. \theta^{(n-1)}).$$

Если возьмемъ съ обѣихъ споронъ гиперболическіе логарифмы, то получимъ

$$\log. \sin. \psi = l. k + l. \sin. \theta + l. (1 + \delta \theta' \cot. \theta') + l. (1 + \delta \theta'' \cot. \theta'') + \dots + l. (1 + \delta \theta^{(n-1)} \cot. \theta^{(n-1)})$$

Какъ $l(1+x) = x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$, и при величинѣ x чрезвычайно малой $l(1+x) = x$, то по малости величинъ $\delta \theta' \cot. \theta', \delta \theta'' \cot. \theta''$ и проч. будемъ

$$l. \sin. \psi = l. k + l. \sin. \theta + \delta \theta' \cot. \theta' + \delta \theta'' \cot. \theta'' + \dots + \delta \theta^{(n-1)} \cot. \theta^{(n-1)} \times$$

Уравненіе сіе иначе изобразится чрезъ

$$l. \sin. \psi = l. k + l. \sin. \theta + \Sigma \delta \psi \cot. \psi,$$

разумѣя подъ Σ знакъ суммованія членовъ

$\delta \psi \cot. \psi$ отъ $\psi = \theta'$ до $\psi = \theta^{(n-1)}$; или чрезъ

$$l. \sin. \psi = l. k + l. \sin. \theta + \int \delta \psi \cot. \psi \dots (a)$$

разумѣя интегрированіе совершеннымъ отъ

$\psi = \theta$ до $\psi = \theta^{(n)}$.

6. Для интегрированія величины $\delta \psi \cot. \psi$ надлежитъ прежде опредѣлить величину $\delta \psi$, которая не есть дифференціалъ $d\psi$ угла ψ . Ее опредѣлить можно двоякимъ образомъ; ихъ есмы, по назначеніи радіуса вектора CT

чрезъ r , опишемъ имъ внутрь угла $d\omega$ или $\delta\psi$ дугу круга, то сія дуга будетъ $= -dr \cdot \text{tang. } \psi$ (знакъ — взявъ здѣсь, поелику съ продолженіемъ движенія луча радіусъ векторъ уменьшается); по сему будетъ $\delta\psi = \frac{-dr \cdot \text{tang. } \psi}{r}$; въ

которомъ случаѣ будетъ $\delta\psi \cdot \text{Cot. } \psi = -\frac{dr}{r}$. 2^{хъ}

При переходѣ каждаго угла $\theta^{(\lambda)}$ въ $\theta^{(\lambda+1)}$

сперва сей уголь, прежде преломленія луча, получаетъ приращеніе $\delta\theta^{(\lambda)}$, а потомъ чрезъ преломленіе уменьшается нѣкоторымъ количествомъ $d\rho$, разумѣя подъ ρ преломлѣнное уже имъ преломленіе; по сему $d\theta^{(\lambda)} = \delta\theta^{(\lambda)} - d\rho$ или $\delta\theta^{(\lambda)} = d\theta^{(\lambda)} + d\rho$, т. е. $\delta\psi = d\psi + d\rho$.

7. Такимъ образомъ оное уравненіе (а) будетъ

$$l \cdot \text{Sin. } \psi = l \cdot k + l \cdot \text{Sin. } \theta - \int \frac{dr}{r} \dots (a)$$

или

$$l \cdot \text{Sin. } \psi = l \cdot k + l \cdot \text{Sin. } \theta + \int d\psi \cdot \text{Cot. } \psi + \int d\rho \cdot \text{Cot. } \psi \dots (a')$$

гдѣ въ интегралахъ начальной уголь ψ долженъ быть $= \theta$.

Изъ снесенія сихъ уравненій получимся

$$\int d\psi \cdot \text{Cot. } \psi + \int d\rho \cdot \text{Cot. } \psi + \int \frac{dr}{r} = 0,$$

и если при углѣ $\psi = \theta$ радіусъ векторъ $= R$, то будетъ

$$l \frac{\text{Sin. } \psi}{\text{Sin. } \theta} + l \frac{r}{R} + \int d\rho \cdot \text{Cot. } \psi = 0$$

или

$$l \frac{r \sin \psi}{R \sin \theta} + f d\rho \cot. \psi = 0. \dots\dots (b)$$

8. Уравненіе $\delta\psi = d\psi + d\rho$ или $d\omega = d\psi + d\rho$ доставляетъ $d\psi = d\omega - d\rho$, а по сему $\psi = \theta + \omega - \rho$, припомъ величины ω и ρ начинаются и возрастаютъ вмѣстѣ; по сему величина ω есть какая либо функція угла ρ и $\psi = \theta + f.\rho$; Тейлорова же теорема показываетъ, что сія функція $f.\rho$ должна быть вида $\lambda\rho + \frac{1}{2}\mu\rho^2 + \frac{1}{6}\nu\rho^3 + \dots$, гдѣ коэффициенты λ, μ, ν и проч. зависимы отъ θ и можетъ быть отъ Атмосферныхъ измѣненій.

9. Опредѣливъ теперь зависимость величины ψ отъ ρ приступимъ къ интегрированію формулы $d\rho \cot. \psi$. Поелику будетъ $d\psi = d\rho$

$$[\lambda + \mu\rho + \frac{1}{2}\nu\rho^2 + \dots], \text{ то будетъ } d\rho = \frac{d\psi}{\lambda + \mu\rho + \frac{1}{2}\nu\rho^2 + \dots}.$$

Какъ величина ρ всегда очень мала, и никогда не превышаетъ 33 минутъ или 0,0096, величина же λ состоитъ, какъ мы ниже увидимъ, изъ нѣсколькихъ единицъ, то члены $\mu\rho + \frac{1}{2}\nu\rho^2 + \dots$ во все продолженіе движенія луча въ Атмосферѣ весьма мало прибавляютъ къ члену λ , а по сему величина $\lambda + \mu\rho + \frac{1}{2}\nu\rho^2 + \dots$ можетъ во все продолженіе движенія луча, безъ чувствительной ошибки, быть разсматриваема постоянною; но какъ она начинается величиною λ , и въ продолженіе движенія луча возрастаетъ до $\lambda + \mu\rho + \frac{1}{2}\nu\rho^2 + \dots$, то ближе къ истиннѣ будетъ, когда при интегрированіи возьмется среднее между сими число $\lambda + \frac{1}{2}\mu\rho + \frac{1}{4}\nu\rho^2 + \dots$. Такимъ образомъ будетъ

$$\int d\rho \cot. \psi = \frac{\int d\psi \cot. \psi}{\lambda + \frac{1}{2}\mu\rho + \frac{1}{4}\nu\rho^2 + \dots} = \frac{l \frac{\sin \psi}{\sin \theta}}{\lambda + \frac{1}{2}\mu\rho + \frac{1}{4}\nu\rho^2 + \dots}$$

Назначимъ $\lambda + \frac{1}{2}\mu\rho + \frac{1}{4}\nu\rho^2 + \dots$ буквою η , по оное уравненіе (b) обратится въ

$$\eta \log. \frac{r \sin. \psi}{R \sin \theta} + l. \frac{\sin \psi}{\sin \theta} = 0$$

или

$$\left(\frac{r}{R}\right) \eta \left(\frac{\sin \psi}{\sin \theta}\right)^{\eta+1} = 1;$$

откуда найдётся

$$\frac{\sin. \theta}{\sin. \psi} = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}.$$

Когда лучъ достигнетъ глаза наблюдателя въ A, тогда уголъ ψ означать будетъ видимое разстояніе направленія его отъ зенита, r радиусъ земли, и ρ цѣлое преломленіе лучемъ претерпѣнное. Пусть тогда будетъ $\psi = \varphi$ и $r = a$, то получимъ уравненіе

$$\frac{\sin. \theta}{\sin. \varphi} = \left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}$$

или

$$\frac{\sin. (\varphi - \lambda\rho - \frac{1}{2}\mu\rho^2 - \frac{1}{6}\nu\rho^3 - \dots)}{\sin. \varphi} = \left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}} \quad (b')$$

10. Еслили мы члены $\frac{1}{2}\mu\rho + \frac{1}{4}\nu\rho^2 + \dots$ передъ λ презримъ, то уравненіе (b') обратится въ

$$\frac{\sin. (\varphi - \lambda\rho)}{\sin. \varphi} = \left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

или

$$\sin. (\varphi - \lambda\rho) = \sin. \varphi,$$

которое есть уравнение Симсоново.

11. Изъ Симсонова уравненія легко произвестъ можно уравненіе Брадлеево. И дѣйствительно изъ онаго уравненія получимся

$$\frac{1-\zeta}{1+\zeta} = \frac{\sin. \varphi - \sin. (\varphi - \lambda \rho)}{\sin. \varphi + \sin. (\varphi - \lambda \rho)} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} \lambda \rho}{\text{tang } (\varphi - \frac{1}{2} \lambda \rho)};$$

въ которомъ уравненіи когда степени величины ρ вышшія первой предъ сею будутъ презрѣны, и по сему вмѣсто $\text{tang. } \frac{1}{2} \lambda \rho$ подставимся $\frac{1}{2} \lambda \rho$, то получимся

$$\rho = \frac{1}{\frac{1}{2} \lambda} \left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right) \cdot \text{tang. } (\varphi - \frac{1}{2} \lambda \rho)$$

или

$$\rho = m. \text{tang. } (\varphi - \frac{1}{2} \lambda \rho),$$

которое и есть уравненіе Брадлеево.

12. Что принадлежитъ до величины $\frac{a}{R}$, то положимъ, что при какой либо определенной шеплотѣ въ мѣстѣ наблюденія, и при извѣстной высотѣ барометра; высота Атмосферы, при коей начинается преломленіе, составляетъ p ; тогда будетъ $\frac{a}{R} = \frac{a}{a+p} =$

$$\frac{1}{1+\frac{p}{a}}, \left(\frac{a}{R} \right)^{\frac{\eta}{\eta+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{p}{a} \right)^{\eta+1}} \frac{\eta}{\eta+1}. \text{ Какъ величина}$$

$\frac{p}{a}$ всегда очень мала, то весьма близко къ

$$\text{истиннѣ будетъ } \left(\frac{a}{R} \right)^{\frac{\eta}{\eta+1}} = \left(1+\frac{p}{a} \right)^{-\frac{\eta}{\eta+1}} =$$

— $\frac{\eta}{\eta+1} \cdot \frac{p}{a}$. Такимъ образомъ въ формулѣ

Симсоновой будетъ $z = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{p}{a}$ и въ Брад-

леевой $m = \frac{1}{\lambda+1} \cdot \frac{p}{a}$.

13. Опредѣлимъ теперь для оныхъ двухъ формулъ и величину λ . Для сего употребимъ формулу Симсонову, какъ ближайшую къ истинной. Положимъ, что двумъ угламъ ϕ и ϕ' соотвѣтствуютъ преломленія p и p' ; по сей формулѣ должно быть

$$\frac{\sin. \phi}{\sin. (\phi - \lambda p)} = \frac{\sin. \phi'}{\sin. (\phi - \lambda p')}.$$

Возьмемъ для опредѣленія величины λ углы $\phi = 70^\circ$ и $\phi' = 80^\circ$. По таблицѣ преломленія Брадлеевой приведенной къ высотѣ Барометра 0,76 Фран. мѣровъ, или 28 дюйм. 0,94 линѣи, при теплотѣ -8° Реомюра $p = 172'',5$; $p' = 349'',3$, коимъ соотвѣтствующая величина по оной формулѣ найдется $\lambda = 5,329$. При теплотѣ 0° Реомюра $p = 164'',4$; $p' = 332'',8$, коимъ соотвѣтствуетъ $\lambda = 5,670$. При теплотѣ $+8^\circ$ Реомюра $p = 157'',0$; $p' = 317'',8$, коимъ соотвѣтствуетъ $\lambda = 5,956$. Изъ сего измѣненія величины λ соотвѣтствующаго таблицѣ Брадлеевой, заключить должно, что λ съ возрастаніемъ теплоты возрастаетъ. Но еслили возьмемъ таблицу Піаніеву, о коей говорится, что она отъ $\phi = 70^\circ$ до $\phi = 90^\circ$ составлена единственно на основаніи наблюденій его, безъ всякаго участія теоріи, то онымъ же угламъ при тѣхъ же теплотахъ, какія взя-

ты выше сего изъ таблицы Брадлеевой, со-
отвѣтствующи $\lambda = 7,987$; $\lambda = 5,048$; $\lambda = 9,457$.
Таковой непорядочной ходъ величины λ заспа-
вляешь или сомнѣваешься въ точности наблюде-
ній, на коихъ основываясь Пиаши составилъ свою
таблицу; или сіе падаетъ должно на формулу
Симсонову, что можетъ быть только въ слу-
чаѣ томъ, когда уголъ ω описываемый радіу-
сомъ векторовъ и преломленіе ρ взаимно не-
зависимы, что невѣроятно. Еслили возьмемъ
новую таблицу Лапласову, то тѣмъ же уг-
ламъ, и при тѣхъ же теплотахъ соотвѣт-
ственные величины λ найдутся $\lambda = 6,932$; $\lambda =$
 $7,267$; $\lambda = 7,525$; кои также показываютъ, что
съ приращеніемъ теплоты величина λ спа-
новится больше. Въ прочемъ оное число λ
такого свойства, что еслили на прим. къ
Брадлеевскимъ преломленіямъ $164''{,}4$ и $332''{,}8$,
соотвѣтствующимъ угламъ ϕ въ 70° и 80° при
теплотѣ $= 0$, прибавится только по $0''{,}5$, то
соотвѣтствующая величина λ по оной фор-
мулѣ Симсоновой, вмѣсто $5,670$ найдется
 $6,074$.

Еслили возьмемъ изъ разныхъ таблицъ
преломленія соотвѣтствующія угламъ $\phi = 10^\circ$,
 20° , $30^\circ \dots 90^\circ$, и изъ ряда сихъ преломленій
произведемъ ряды разностей, то ходъ сихъ
рядовъ окажется правильнѣе всѣхъ въ табли-
цѣ Брадлеевой; что служишь доказатель-
ствомъ, что она должна подходить ближе
всѣхъ къ истиннѣ, чего и ожидать должно
отъ искуснѣйшаго изъ наблюдателей.

14. Предъидущія изслѣдованія заставля-
ють вѣрить, что коэффициентъ λ съ измѣ-

неніемъ теплоты измѣняется. Теперь спрашивается, отъ одного ли только измѣненія плотности воздуха, теплою причиной, производить оное измѣненіе въ величинѣ λ ; или можетъ быть не измѣняется ли отъ теплоты и преломительная сила воздуха при той же плотности? Какъ опыты надъ преломительностію различныхъ прозрачныхъ телъ дѣланные удостовѣряютъ, что преломительная сила ихъ зависитъ отъ качества и количества горючихъ веществъ въ нихъ заключающихся, теплота же изрѣжаетъ только части телъ, то и невѣроятно, чтобы она и въ воздухѣ причиняла измѣненіе въ преломительности не по одному измѣненію плотности его. Пусть при стояніи барометра h и теплотѣ δ по Реомюрову термометру плотность воздуха будетъ δ и въ то же время плотность ртути Δ ; то при высотѣ барометра y и теплотѣ t градусовъ Реом. будетъ плотность воздуха $= \frac{y}{h} \cdot \frac{\delta}{(1+mt)(1+nt)}$,

гдѣ n означаетъ разширеніе воздуха отъ прибавленія одного градуса теплоты, и m такое же разширеніе ртути; для коихъ величинъ новѣйшіе опыты доставляютъ $n =$

$\frac{3}{640}$ и $m = \frac{1}{4330}$ при высотѣ барометра $h = 0,76$

Фр. метровъ.

Поелику въ формулѣ Симсоновой $\omega = (\lambda + 1) \rho$, и при томъ же углѣ ω преломленіе ρ , при увеличивающейся и изрѣжающей воздухъ, и по сему уменьшающей преломительную его силу,

Часть I.

3

теплотѣ становится менѣе, но при семъ количествѣ $\lambda + 1$ становится болѣе. И такъ разсмотримъ, не пропорціонально ли увеличеніе количества $\lambda + 1$ изрѣженію воздуха. При семъ предположеніи, ежели величину $\lambda + 1$ соотношѣствующую теплотѣ 0° назначимъ чрезъ ε , то величина $\lambda + 1$ соотношѣствующая t° должна быть $(1 + nt)(1 + mt)\varepsilon$. Число $\lambda + 1$ соотношѣствующее преломленіямъ показаннымъ въ таблицѣ Брадлеевой при 0° температуры и при высотѣ барометра 28° есть 6,670; по чему для $t = 8^\circ$ оно должно быть $\left(1 + \frac{3}{80}\right)\left(1 + \frac{8}{4330}\right) \cdot 6,670 = 6,933$; и для $t = -8^\circ$ должно быть 6,408; но выше видѣли мы, что выкладка основанная на таблицѣ Брадлеевой для сихъ чиселъ доставляетъ 6,956 и 6,329. Числа 6,933 и 6,956 малымъ чѣмъ разнятся между собою; но разность чиселъ 6,408 и 6,329 довольно чувствительна, хотя, какъ мы выше въ § 13. видѣли, въ выраженіи количества преломленія не причиняетъ значительной разности.

15. Предъидущій параграфъ показываетъ, что величины λ , доставляемыя формулою Симсоною для Брадлеевой таблицы преломлений, выходятъ менѣе, нежели каковы бы онѣ должны были быть, дабы измѣненія въ нихъ были пропорціональны измѣненію плотности воздуха причиняемому теплотою. Не происходитъ ли сіе отъ несовершенной точности формулы Симсоновой? Для сего возьмемъ изъ § 9 точнѣйшую формулу $\frac{\sin. \theta}{\sin. \phi} =$

$\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}$. Она будучи приложена къ двумъ угламъ Φ и Φ' при той же теплотѣ доста-

вляетъ $\frac{\sin. \theta'}{\sin. \Phi'} = \frac{\sin. \theta}{\sin. \Phi} \times \left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2}}$, между тѣмъ

какъ Симсонова доставляетъ $\frac{\sin. \theta'}{\sin. \Phi'} = \frac{\sin. \theta}{\sin. \Phi}$. Какъ

величина $\frac{a}{R} = \frac{1}{1+\frac{P}{a}}$, то будетъ $\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2}} =$

$1 - \frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2} \cdot \frac{P}{a}$, ибо величина $\frac{P}{a}$ очень мала; по сему будетъ

$$\frac{\sin. \theta'}{\sin. \Phi'} = \frac{\sin. \theta}{\sin. \Phi} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2} \cdot \frac{P}{a} \right\};$$

которое уравненіе показываетъ, что буде величина μ есть величина отрицательная, то количество λ будетъ болѣе, нежели каково доставляетъ оное уравненіе выведенное изъ формулы Симсоновой, а припомъ сіе количество не есть постоянно; впрочемъ, по малости величины $(\rho'-\rho) \frac{P}{a}$, сіе измѣненіе величины λ очень мало.

16. Если въ формулѣ $\frac{\sin. \theta}{\sin. \Phi} = \left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}$

положимъ $\theta = \Phi - \lambda\rho - \frac{1}{2}\mu\rho\rho$, $\eta = \lambda + \frac{1}{2}\mu\rho$, то будетъ

$\frac{\eta}{\eta+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1} + \frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}$ и оная формула обратится въ

$$\frac{\text{Sin. } \Phi \text{ Cos. } (\lambda \rho + \frac{1}{2} \mu \rho^2) - \text{Cos. } \Phi \text{ Sin. } (\lambda \rho + \frac{1}{2} \mu \rho^2)}{\text{Sin. } \Phi} =$$

$$\left(1 + \frac{p}{a}\right) \frac{-\eta}{\eta + 1}$$

ИЛИ

$$1 - \lambda \rho \text{ Cot. } \Phi - \frac{1}{2} (\lambda \lambda + \mu \text{ Cot. } \Phi) \rho \rho = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{\mu \rho}{2(\lambda + 1)^2} \right) \cdot \frac{p}{a}$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{\mu \rho}{2(\lambda + 1)^2} \right\} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{\mu \rho}{2(\lambda + 1)^2} \right\} \cdot \frac{p^2}{a^2};$$

откуда чрезъ сравненіе сходственныхъ членовъ найдемся

$$\lambda \rho \text{ Cot. } \Phi = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{\mu \rho}{2(\lambda + 1)^2} \right) \cdot \frac{p}{a}$$

$$\rho^2 (\lambda \lambda + \mu \text{ Cot. } \Phi) = - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{\mu \rho}{2(\lambda + 1)^2} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda + 1} + \frac{\mu \rho}{2(\lambda + 1)^2} \right) \cdot \frac{p^2}{a^2}$$

по исключеніи же величины $\frac{p}{a}$,

$$\frac{\lambda \lambda \text{ tang. } \Phi^2 + \mu \text{ tang. } \Phi}{\lambda \lambda} = - \left\{ 1 + \frac{2(\lambda + 1)^2}{2\lambda(\lambda + 1) + \mu \rho} \right\}$$

ИЛИ

$$\frac{\lambda \lambda \text{ tang. } \Phi^2 + \mu \text{ tang. } \Phi}{\lambda^2} = - \left\{ \frac{2\lambda + 1}{\lambda} - \frac{\mu \rho}{2\lambda \lambda} \right\};$$

и получимся

$$\mu = - \frac{\lambda [2\lambda + \lambda \text{ tang. } \Phi^2 + 1]}{\text{tang. } \Phi - \frac{1}{2} \rho}.$$

Такимъ образомъ будемъ

$$\theta = \Phi - \lambda \rho + \frac{\frac{1}{2} \lambda (2\lambda + \lambda \text{ tang. } \Phi^2 + 1)}{\text{tang. } \Phi - \frac{1}{2} \rho} \cdot \rho \rho;$$

гдѣ въ знаменателѣ $\frac{1}{2}\rho$ передѣ $\text{tang. } \Phi$ безѣ чувствительной ошибки презрѣно бытъ можешь; въ которомъ случаѣ будешь

$$\mu = -\lambda [(2\lambda + 1) \text{Cot. } \Phi + \lambda \text{tang. } \Phi]$$

и

$$\theta = \Phi - \lambda \rho + \frac{1}{2} [(2\lambda + 1) \text{Cot. } \Phi + \lambda \text{tang. } \Phi] \rho \rho;$$

такъ что въ формулѣ Симсоновой величина λ , собственно говоря, есть

$$\lambda' = \lambda [1 - \frac{1}{2} ((2\lambda + 1) \text{Cot. } \Phi + \lambda \text{tang. } \Phi) \rho]$$

откуда получимся

$$\lambda = \lambda' [1 + \frac{1}{2} ((2\lambda + 1) \text{Cot. } \Phi + \lambda \text{tang. } \Phi) \rho]$$

и

$$\lambda = \lambda' [1 + ((\lambda' + \frac{1}{2}) \text{Cot. } \Phi + \lambda' \text{tang. } \Phi) \rho];$$

по сему безѣ чувствительной ошибки

$$\mu = -\lambda' ((2\lambda' + 1) \text{Cot. } \Phi + \lambda' \text{tang. } \Phi),$$

$$\frac{p}{a} = (\lambda' + 1) \rho \text{Cot. } \Phi;$$

кои когда подставлены будутъ въ уравненіи параграфа 15го, то получимъ для поправленія формулы Симсоновой и опредѣленія точнѣйшей величины λ уравненіе

$$\frac{\text{Sin. } (\Phi' - \lambda \rho')}{\text{Sin. } \Phi'} = \frac{\text{Sin. } (\Phi - \lambda \rho)}{\text{Sin. } \Phi} \left\{ 1 + \frac{\lambda ((2\lambda + 1) \text{Cot. } \Phi + \lambda \text{tang. } \Phi) \rho (\rho' - \rho) \text{Cot. } \Phi}{2(\lambda + 1)} \right\};$$

или

$$\frac{\text{Sin. } (\Phi' - \lambda \rho')}{\text{Sin. } \Phi'} = \frac{\text{Sin. } (\Phi - \lambda \rho)}{\text{Sin. } \Phi} \left\{ 1 + \frac{\lambda (\lambda + (2\lambda + 1) \text{Cot. } \Phi^2) \rho (\rho' - \rho)}{2(\lambda + 1)} \right\};$$

и такъ величины μ и $\frac{p}{a}$ для сего уравненія

выведены посредствомъ одного угла Φ , по сіе уравненіе будетъ точнѣе, когда изобразится чрезъ

$$\frac{\sin. (\Phi' - \lambda \rho')}{\sin. \Phi'} = \frac{\sin. (\Phi - \lambda \rho)}{\sin. \Phi} \left\{ 1 + \frac{\lambda(\lambda + \frac{1}{2}(2\lambda + 1)(\cot. \Phi^2 + \cot. \Phi'^2) \times \frac{1}{2}(\rho' + \rho) \cdot \frac{1}{2}(\rho' - \rho))}{\lambda + 1} \right\}.$$

Если по оей формулѣ поправимъ выше найденныя величины для таблицы Брадлеевой посредствомъ тѣхъ же угловъ $\Phi = 70^\circ$ и $\Phi' = 80^\circ$, то для теплоты $+8^\circ$ найдемся $\lambda = 5,816$, для теплоты 0° $\lambda = 6,121$, для теплоты -8° $\lambda = 6,425$.

Если теперь, посредствомъ величины $\lambda + 1 = 7,121$ соотвѣствующей теплотѣ 0° , выведемъ по предыдущему параграфу величины $\lambda + 1$ для $+8^\circ$ и -8° теплоты, то сіи величины выйдутъ 6,841 и 7,402, кои почти равно разнятся отъ величинъ 6,816 и 7,425, каковыя доставляютъ поправленныя величины λ и припомъ разность сія весьма невелика; да и та произойти можетъ отъ того, что мы въ оной формулѣ, которую для поправленія употребили, вмѣсто истинныхъ величинъ λ , μ и $\frac{P}{a}$, употребили только величины прибли-

женныя. Чрезъ сіе можемъ удостовѣриться, что величины λ вмѣстѣ съ теплою измѣняются сообразно тому, какъ въ предыдущемъ параграфѣ предполагемо было. И какъ изъ § 13 явствуетъ, что хотя бы измѣненіе въ величинѣ λ сдѣлалось довольно чувстви-

тельно, но оно не причинитъ чувствительнаго измѣненія въ находимомъ по формулѣ Симсоновой преломленіи, то мы и предположимъ, что теплотъ 0° соотвѣтствуетъ $\lambda = 6,12$; тогда соотвѣтствующая каждой другой теплотъ t' величина $\lambda + 1$ будетъ выражаться чрезъ $\left(1 + \frac{3t}{640}\right) \left(1 + \frac{t}{4330}\right) \times 7,12$; второе выраженіе по § 14 му должно будетъ еще помножить на содержаніе высоты барометра, бывшей при наблюденіи, въ высотѣ барометра составляющей 0,76 Фран. метровъ.

17. Опредѣлимъ теперь, посредствомъ Симсоновой формулы $\text{Sin.}(\varphi - \lambda\rho) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \frac{p}{a}\right) \times$

$\text{Sin.} \varphi$ величину $\frac{p}{a}$; и найдется $\frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \frac{p}{a} =$

$$\frac{\text{Sin.} \varphi - \text{Sin.}(\varphi - \lambda\rho)}{\text{Sin.} \varphi} \text{ и } \frac{p}{a} = \frac{\lambda + 1}{\lambda} \cdot \frac{2 \text{Sin.} \frac{1}{2}\lambda\rho \cdot \text{Cos.}(\varphi - \frac{1}{2}\lambda\rho)}{\text{Sin.} \varphi}.$$

Возьмемъ уголъ $\varphi = 70^\circ$ и величину λ соотвѣтствующую теплотъ 0° , то есть $\lambda = 6,12$,

то получимъ $\frac{p}{a} = 0,00207927$. Такую часть

радіуса земнаго при теплотъ 0° составляетъ высота Атмосферы, при коей преломленіе становится чувствительнымъ. Для теплоты $+8^\circ$, коей соотвѣтствуетъ $\lambda = 6,4$, найдется посредствомъ онаго же угла $\varphi = 70^\circ$ величина $\frac{p}{a} = 0,00206384$. Для теплоты -8° , коей соотвѣтствуетъ $\lambda = 5,84$ найдется посред-

ствомъ онаго же угла $\phi = 70^\circ$ величина $\frac{p}{a} = 0,00209592$. По сему при увеличивающейся теплотѣ величина $\frac{p}{a}$ уменьшается, и слѣдовательно чувствительное преломленіе начинается ближе къ поверхности земли. Напрощивъ величины $\frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{p}{a}$ остаются при всѣхъ теплотахъ почти совсемъ неизмѣнны, и ихъ назначить можно среднимъ числомъ 0,0017872, такъ что въ формулѣ Симсоновой будетъ

$$\text{Sin. } (\phi - \lambda\rho) = 0,9982128 \times \text{Sin. } \phi.$$

Примѣръ 1й. По наблюденію Мешеня учиненному 18 Генваря (нов. ст.) 1798 года при высотѣ Барометра 27 дюйм. 4,5 лин. и теплотѣ $+7^\circ$ Реомюра для угла $\phi = 86^\circ 14' 42''$ найдено преломленія $12' 4'', 2$.

По основаніямъ нами представленнымъ будетъ $\lambda+1=7,12 \left(1 + \frac{3.7}{640}\right) \left(1 + \frac{7}{4330}\right) \times$

$$\frac{336,94}{328,5} = 7,555 \text{ и } \lambda = 6555; \text{ попомъ}$$

$$\log. 0,9982128 = 9,9992231$$

$$\log. \text{Sin. } \phi = 9,9990667$$

$$\text{I. Sin. } (\phi - \lambda\rho) = 9,9982898$$

$$\phi - \lambda\rho = 84^\circ 55' 7''$$

$$\lambda\rho = 1^\circ 19' 35''$$

$$\rho = 12' 8'', 4;$$

слѣдовательно выкладка доставляетъ $4'', 2$ болѣе, нежели наблюденіе.

Примѣръ 2й. По наблюденію того же Ме-

шеня, учиненному 21 Генваря 1798 года при высотѣ барометра 28 дюйм. 3,3 лин. и теплотѣ 6°,5 Реомюра, для угла $\Phi = 86^\circ 15' 20''$ найдено преломленіе $12' 52'', 5$.

По основаніямъ нами представленнымъ будетъ $\lambda + 1 = 7,12 \left(1 + \frac{3,6,5}{640} \right) \left(1 + \frac{6,5}{4330} \right) \times$

$$\frac{336,94}{339,3} = 7,297 \text{ и } \underline{\lambda} = 6,297; \text{ попомъ}$$

$$\log. 0,9982128 = 9,9992231$$

$$l. \sin. \Phi = 9,9990719$$

$$l. \sin. (\Phi - \lambda_p) = 9,9982950$$

$$\Phi - \lambda_p = 84^\circ 55' 34'', 8$$

$$\lambda_p = 1^\circ 19' 45'', 2$$

$$\rho = 12' 39'', 9$$

по сему выкладка доспавляетъ 7",4 болѣе нежели наблюденіе.

Сии небольшія разности выкладки опть наблюденій нельзя приписать единственно не точности основаній выкладки, но могутъ зависѣть и опть несовершенной точности самыхъ наблюденій.

18. При выводженіи формулы для вычисленія преломленій мы предполагали землю нашу шарообразною; но поелику видъ ея опть шарообразности нѣсколько отступаетъ, по для большей точности, при разныхъ широтахъ мѣспъ, полагая высоту атмосферы p при той же теплотѣ одинакову во всѣхъ мѣстахъ, можно вмѣсто постояннаго радіуса a употреблять радіусы кривизны земли широтѣ мѣспъ соотвѣствующіе.