

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет

імені В.Н. Каразіна

Факультет радіофізики, біомедичної електроніки і комп'ютерних систем

Кафедра прикладної електродинаміки

Кваліфікаційна робота магістра

на тему: АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ ПЕРЕТВОРЕННЯ
НЕСТАЦІОНАРНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА
ГРАНИЦІ РОЗДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

Виконав: студент 2 курсу магістратури,
групи РР-67
Спеціальності 105 – прикладна фізика
та наноматеріали
Д. І. Гавриленко

Керівник: старший викладач кафедри
прикладної електродинаміки
В. А. Плахтій

Науковий консультант: науковий
співробітник, доктор фізико-
математичних наук, доцент,
лауреат Державної премії в галузі
науки і техніки
О. М. Думін

Рецензент: завідувач кафедри космічної
радіофізики, доктор фіз. - мат. наук,
професор Л. Ф. Черногор

Харків – 2023 рік

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра містить 17 рис., 81 стор., 81 бібліографічних посилань.

Аналітично, у першому наближенні, за допомогою методу еволюційних рівнянь розв'язано задачу опромінення ідеального середовища нестационарною електромагнітною хвилею, що випромінюється апертурою з довільним розподілом електричного струму. В якості прикладу було розглянуто випромінювання плоского диску з рівномірним розподілом струму зі ступінчастою часовою залежністю. Розв'язані задачі для диференціальних рівнянь, що описують поведінку відбитої та заломленої хвиль. Застосування граничних умов дозволяє аналітично отримати коефіцієнти модового розкладу поля у формі, подібній до формул Френеля, у першому наближенні. Розв'язки досліджено для крайніх випадків параметрів середовищ: повне проходження та повне відбиття.

Побудовано та проаналізовано графіки залежностей електричних компонентів від часу та координат. Застосування інтеграла Дюамеля для опису полів, створених плоским джерелом з довільною часовою залежністю, дає аналітичні вирази для полів уздовж поздовжньої осі. Випадки різних часових форм імпульсу проілюстровано числовим моделюванням.

Досліджено перетворення енергії поблизу апертурного випромінювача для випадку нестационарного збудження. Для аналізу наведено випадок рівномірного розподілу струму зі ступінчастою залежністю від часу. Аналітичний розв'язок задачі у часовому просторі на основі еволюційного підходу використано для аналізу перетворення енергії хвилі. Залежність потужності випромінювання поперечної електромагнітної хвилі від відстані до джерела та часу спостереження розраховується числовими методами.

Вирази для повної енергії хвилі отримано аналітично. Проілюстровано перетворення повної енергії в статичну частину та хвильову.

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА У ЧАСОВОМУ ПРОСТОРИ,
ВИПРОМІНЮВАННЯ ПЛОСКОГО ДИСКУ, НЕСТАЦІОНАРНЕ
ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ, ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ, ФУНКЦІЯ
РІМАНА, МЕТОД РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ, ЕЛЕКТРОМАГНІТНИЙ
СНАРЯД, ІНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ, ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

ABSTRACT

Qualification work of the master contains 17 fig., 81 p., 81 bibliographic references.

The problem of irradiation of a perfect medium by transient electromagnetic wave radiated by the aperture with arbitrary distribution of electrical current is solved analytically in the first approximation by means of the method of evolutionary equations. As an example the radiation of the plane disk with uniform distribution of current with step-like time dependence is considered. Problems for differential equations that describe the behavior of reflected and refracted waves are solved. Application of boundary conditions permits to derive analytically coefficients of modal expansions of field in the form similar to the Fresnel formulas in the first approximation. Solutions for boundary cases of media parameters such as full propagation and full reflection are investigated.

Graphs of dependence of electric components on time and coordinates are plotted and analyzed. The application of Duhamel's integral to describe fields generated by a plane source with arbitrary time dependence gives the analytical expressions for field along longitudinal axis. The cases of different impulse time shapes are illustrated by numerical simulations.

The energy conversion near an aperture radiator is investigated for the case of the transient excitation. The case of uniform distribution of current with step-like time dependence is presented for analysis. The analytical solution of the problem in time domain based on the evolutionary approach is used for analysis of wave energy transformation. The dependence of radiation power of transverse electromagnetic wave from distances to source and time of observation is calculated numerically. The expressions for total energy of the wave are obtained analytically. It is illustrated the transforming of the total energy into static part and wave.

TIME DOMAIN ELECTROMAGNETICS, RADIATION OF THE PLANE DISK, TRANSIENT ELECTROMAGNETIC FIELD, EVOLUTIONARY

EQUATIONS, RIEMANN FUNCTION, SEPARATION OF VARIABLES
METHOD, ELECTROMAGNETIC MISSILE, DUHAMEL'S INTEGRAL,
POYNTING VECTOR

ЗМІСТ

ЗМІСТ	6
ВСТУП	8
РОЗДІЛ 1. Огляд літератури за темою дипломної роботи.....	9
1.1. Нестационарні сигнали	9
1.2. Методи електродинаміки у часовому просторі.....	11
1.2.1. Методи частотного простору.....	11
1.2.2. Метод інтегральних рівнянь	13
1.2.3. Метод FDTD	13
1.2.4. Метод моментів.....	14
1.3. Метод еволюційних рівнянь.....	14
1.3.1. Метод неповного розділення змінних	14
1.3.2. Метод модового базису	15
1.4. Підповерхнева радіолокація.....	17
1.4.1. Завдання георадарних досліджень	18
1.4.2. Огляд методів георадарних досліджень	18
2.1. Постановка задачі.....	22
2.2. Поля на осі випромінювання.....	25
2.3. Зшивання полів	29
3.1. Постановка задачі.....	37
3.2. Числове моделювання для різних форм збуджуючих імпульсів.....	38
3.2.1. Прямокутний імпульс	38
3.2.2. Сигмоїда	40
3.2.3. Гаусіан.....	42
3.2.4. Кардинальний синус	43
4.1. Постановка задачі.....	47
4.2. Виведення аналітичних виразів для енергії.....	48
4.3. Аналітичні розрахунки та числове моделювання	50
4.3.1. Наближення дальньої зони.....	51
4.3.2. Точний розв'язок.....	52
4.3.3. Врахування доданків із ряду.....	53
5.1. Постановка задачі	57

5.2. Розв'язання задачі	60
5.2.1. Випадок повного проходження	63
5.2.1.1. Поперечна магнітна компонента	64
5.2.1.2. Поперечна електрична компонента	65
5.2.2. Випадок повного відбиття.....	66
5.2.2.1. Поперечна магнітна компонента	67
5.2.2.2. Поперечна електрична компонента	67
5.2.3. Загальний випадок поширення	68
ВИСНОВОК.....	70
ЛІТЕРАТУРА	71
ДОДАТОК. ОРТОГОНАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ	80

ВСТУП

У дипломній роботі розглядається аналітичний підхід до розв'язання задачі поширення нестационарної електромагнітної хвилі на границі розділу середовищ. На сьогоднішній день поширення гармонічних полів добре вивчено і розв'язки подібних задач вже можна знайти у класичних підручниках з електродинаміки. Проте передача більшої кількості інформації зумовлює людство до розгляду інших типів полів та сигналів: вузькосмугових, широкосмугових, надширокосмугових тощо. У цьому сенсі, цікаво розглянути, які розв'язки та співвідношення можна отримати для нестационарних полів і як їх можна застосувати на практиці.

Задачі поширення нестационарних полів розв'язуються, в основному, числовими методами через складність аналітичних розрахунків. Проте числовий метод не гарантує істинності фізичної трактовки отриманих розв'язків, у той час як аналітичний метод дозволяє отримати точний або наближений математичний вираз, яким можна більш точно описати досліджуваний процес. У дипломній роботі використовується відносно новий метод модового базису, але з удосконаленнями для вільного простору, оскільки нас цікавлять задачі випромінювання.

Розв'язки таких задач можна застосувати для розробки та удосконалення пристроїв підповерхневого зондування, які дозволять знаходити об'єкти (міни, кабелі) під поверхнею землі. Також метод еволюційних рівнянь дає можливість робити фундаментальні дослідження в області теорії нестационарних та надширокосмугових сигналів, які вже мають чималий спектр застосувань.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИПЛОМНОЇ РОБОТИ

У даному розділі висвітлено ключові аспекти нестационарної електродинаміки, метою чого є обґрунтування практичності запропонованого методу розв'язання задачі. У якості цих аспектів виступають надширокосмугові або нестационарні електромагнітні сигнали. Детально описані методи розв'язання задач електродинаміки у часовому просторі, зокрема метод еволюційних рівнянь, що використовується в роботі. Особлива увага приділена підповерхневій радіолокації, оскільки результати розв'язання задачі можуть бути використані в цій області.

1.1. Нестационарні сигнали

Протягом тривалого часу генерація, передача та прийом сигналів з надшироким спектром частот були пов'язані з великими складнощами, тому, в основному, застосовувалися вузькосмугові сигнали. Але, починаючи з 60-х рр. минулого століття, спостерігається різкий сплеск інтересу до надширокосмугових сигналів, що в першу чергу пов'язано з винайденням простих імпульсних генераторів, стробоскопічного осцилографа, які дозволяють візуально спостерігати відеоімпульсні сигнали. Також важливо відзначити появу широкосмугових пристроїв НВЧ і вдосконалення електронно-обчислювальних машин, необхідних для цифрової обробки даних [1].

Вперше, відеоімпульсні сигнали були застосовані для миттєвого визначення електричної та магнітної проникностей і часу релаксації речовини, поміщеної в коаксіальний хвилевід [1, 2, 3, 41]. Досліджувану речовину можна не тільки поміщати у хвилеводний тракт, аналізуючи сигнал, що пройшов через нього, але й розташовувати на деякій відстані від опромінювача, вивчаючи відбитий імпульс. Це особливо важливо для дистанційного зондування середовищ.

На відміну від монохроматичного сигналу, відеоімпульс є локалізованим у часі, що дозволяє проводити часову селекцію імпульсів, відбитих від об'єктів, розташованих на різних відстанях [1]. Важливою властивістю сигналів без несучої, якими є надширокосмугові сигнали, є висока здатність проникати в середовища з дисперсією та втратами, якими можуть бути біологічні середовища [4], ґрунти та гірські породи [5]. Нестационарні сигнали також застосовуються в таких напрямках як археологія, виявлення об'єктів з протирадарним покриттям [6], зондування космічних об'єктів та організація іоносферно-магнітосферного радіозв'язку [7].

Цікавим фактором для розширення сфери застосування надширокосмугових сигналів та покращення функціонування вже існуючих радіопристроїв є можливість поєднання властивостей електромагнітного випромінювання на різних частотних діапазонах [8]. З теоретичної точки зору, для дослідження довгих хвиль використовується апарат телеграфних рівнянь. Властивості вузькосмугових, широкосмугових та надширокосмугових сигналів досліджуються через систему рівнянь електродинаміки Максвелла. Якщо казати про атто-, фемтосекундні або імпульси з меншою тривалістю, то тут необхідно враховувати квантові ефекти, що математично описуються нестационарним рівнянням Шредінгера, рівняннями Клейна–Гордона та Дірака тощо. На практиці, в 2019 році в телефонній пристрій було вбудовано надширокосмугову однокристальну систему [8]. Відзначимо, що у деяких випадках використання імпульсних сигналів дозволяє розв'язати ті технічні задачі, які неможливі для вузькодіапазонних приладів. Це може бути автомобільний радар з малою дальністю дії [9] або пристрій підводного радіозв'язку [10, 11].

У сучасний період спостерігається постійне розширення сфери застосувань коротких електромагнітних імпульсів, що призводить до підвищення інтересу до постановки та розв'язання задач поширення та випромінювання нестационарних полів [12]. Перехідні процеси в природі та техніці відіграють важливу роль в процесі передачі інформації. Поширення

потужних перетворювачів на основі ширинно-імпульсної модуляції та випрямлячів на сонячних електростанціях і сучасних електромобілях вимагає вивчення завад, що можуть впливати на інші пристрої [13]. Перехідні процеси можуть спричиняти помилки в лініях передачі цифрових сигналів та переривати роботу пристроїв радіочастотної ідентифікації (RFID) через їх надширокосмуговий характер [14]. Ймовірно, найпотужнішою завадою для сучасних електронних пристроїв, таких як бортові системи, є блискавка [15]. Різке ввімкнення величезного струму може вплинути на екрановані кабелі літаків і пошкодити бортові системи [14], а також захищені кабелі, що закопані в землю [16 – 18]. Коло практичних застосувань нестационарних електромагнітних сигналів на цьому не обмежується і в майбутньому продовжуватиме розширюватися, що пов'язано з розвитком обчислювальної техніки та, зокрема, штучних нейронних мереж, що дає можливість розв'язувати нові задачі як експериментальної, так і теоретичної радіофізики.

1.2. Методи електродинаміки у часовому просторі

Існуючі теоретичні методи аналізу нестационарних електромагнітних полів можна умовно розділити на частотні, коли використовується представлення сигналів у вигляді їх спектральних густин, і часові, коли присутня явна залежність сигналу від часу [1]. Огляд різних методів нестационарної електродинаміки можна знайти у роботах Ю. Сіренко [19] і С. Рао [20]. Тут ми опишемо лише декілька із них, які, на погляд автора, найбільш часто застосовуються для розв'язання задач антенної тематики та випромінювання електромагнітних хвиль у вільний простір.

1.2.1. Методи частотного простору

Сутність сімейства таких підходів, що спрощує розв'язання системи рівнянь Максвелла відносно напруженості електричного та магнітного полів,

є припущення, що часова залежність джерела електромагнітної енергії має гармонічний характер $e^{i\omega t}$. Такі методи інколи застосовують для розв'язання нестационарних задач [21], представляючи джерело у вигляді розкладу в ряд Фур'є. Серед таких методів можна виділити метод векторного потенціалу та метод функції Гріна [8].

Найбільш простим частотним методом розв'язку системи рівнянь Максвелла є зменшення кількості шуканих змінних переходом до рівняння векторного потенціалу [8]. Спочатку, через вектор, що характеризує магнітне поле, вводиться векторний потенціал. Далі, здійснюючи перетворення між рівняннями Максвелла, вводиться скалярний потенціал, що виражається через напруженість електричного поля та похідну за часом від векторного потенціалу. В результаті виходить векторно-диференціальне рівняння другого порядку, де шуканою функцією є векторний потенціал, що залежить від просторових координат і часу. В електродинаміці його також називають рівнянням Д'Аламбера. Для математичних спрощень його ще доповнюють калібрувальними умовами. Так, застосовуючи калібровку Лоренца, що містить як скалярний так і векторний потенціали, цей підхід стає досить зручним для розв'язання нестационарних задач [22].

Сутність функції Гріна полягає у тому, що для розв'язання задачі випромінювання з довільним розподілом струму або заряду необхідно знати внесок елементарної ділянки з рівномірним розподілом відповідного джерела. Користуючись принципом суперпозиції, можна обчислити значення поля від заданого джерела. Цей метод є фізично наглядним, однак він дозволяє отримувати аналітичні розв'язки для обмеженого кола задач і при застосуванні різних спрощуючих припущень [8, 23]. Зазначимо також, що цей метод непридатний до розв'язування нелінійних задач, оскільки принцип суперпозиції не виконується у нелінійній фізиці [81].

1.2.2. Метод інтегральних рівнянь

Активно розвивається метод інтегральних рівнянь у часовому просторі, що застосовується для розв'язку задач поширення електромагнітних імпульсів через нестационарне середовище з втратами [24]. У деяких випадках, користуючись методом резольвенти, вдається отримати аналітичні розв'язки [36]. В інших випадках інтегральні рівняння розв'язуються числовими методами.

1.2.3. Метод FDTD

Метод скінченних різниць у часовій області – числовий метод, що дозволяє отримати значення компонент електромагнітного поля з заданою точністю в кожен момент часу для дискретного набору точок, що визначається наперед заданою сіткою значень [25]. Цей метод може бути адаптований для одно-, двох- і тривимірних вільних середовищ та резонаторів [26]. Адаптація алгоритму для графічних обчислювальних систем (GPU) [27] робить метод обчислювально-оптимальним і досить перспективним для розв'язання широкого кола задач випромінювання нестационарного струму [8].

Метод належить до сімейства динамічних алгоритмів, тобто визначає розв'язок у деякій точці за значеннями напруженості електромагнітного поля в точках навколо, що призводить до збільшення розрахункової складності для точок спостереження на великих відстаннях від джерела. Також метод можна застосувати лише до задач випромінювання з реальним джерелом, для модельних він не пристосований [8]. Зазначимо, що для FDTD існує псевдоспектральна модифікація PSTD [28], що дозволяє зменшити обсяги використовуваної оперативної пам'яті для розв'язку деяких типів електродинамічних задач [33].

1.2.4. Метод моментів

Це сімейство числових та аналітичних методів, які дозволяють розв'язувати задачі дифракції надширокосмугових хвиль на провідних поверхнях [29]. Урахування ефектів ближньої зони закладено в математичний апарат методу, але обмежене його складністю. Наприклад, розв'язання задачі випромінювання рефлекторної антени в ближній зоні досить складне, через труднощі врахування ефектів взаємодії опромінювача та рефлектора. Тобто опромінювач розглядається в спрощеному вигляді, як джерело сферичної хвилі [8].

1.3. Метод еволюційних рівнянь

Це відносно новий метод електродинаміки у часовому просторі, що дозволяє розв'язувати складні задачі випромінювання резонаторами, хвилеводами (внутрішня задача електродинаміки) та антенними пристроями (зовнішня задача електродинаміки). Належить до класу напіваналітичних методів. Оскільки він застосовуватиметься у кваліфікаційній роботі, докладно опишемо його історію та сутність.

1.3.1. Метод неповного розділення змінних

Такий метод заснований на зменшенні розмірності вихідної задачі за рахунок позбавлення залежності від декількох координатних змінних. Це призводить до істотного спрощення пошуку аналітичних розв'язків [1]. Так, для розв'язку задач випромінювання можна застосувати перетворення Фур'є–Бесселя до неоднорідного тривимірного хвильового рівняння в циліндричній системі координат, в результаті чого задача зводиться до розв'язання одновимірного неоднорідного рівняння Клейна–Гордона [30]. У випадку

періодичних структур розмірність задачі можна зменшити за допомогою теореми Флоке [31].

У випадку хвилеводної задачі залежності полів від поперечних координат можна представити у вигляді розкладу по повній системі функцій, і в спрощену задачу, замість двох змінних, увійдуть коефіцієнти розкладання полів по побудованому базису [12]. Такий підхід особливо доречний у разі нестационарних задач, оскільки в спрощену задачу увійде часова залежність полів на границях і параметри шарувато неоднорідного середовища в явному вигляді. Спрощена задача може бути розв'язана в окремих випадках аналітично або, для більш загальних випадків, числовими методами.

1.3.2. Метод модового базису

Метод модового базису або власне метод еволюційних рівнянь був винайдений О. Третьяковим у другій половині 80-х рр. минулого століття [32]. З усіх різновидів методів неповного розділення змінних він виділяється своєю строгістю та загальністю.

Спочатку, метод еволюційних рівнянь призначався для аналізу негармонічних коливань у замкнутих резонаторах, заповнених нестационарним нелінійним середовищем [32]. Він заснований на модовому розкладі полів у резонаторі. При цьому, замість того, щоб спочатку застосувати перетворення Фур'є, використовується розкладання по просторовим модам резонатора, а потім розв'язується задача для залежних від часу модових амплітуд. Часова залежність полів та джерел не припускається гармонічною. Використання подібного підходу дозволяє уникнути ряду обмежень, що накладаються на параметри середовищ. Для резонаторів ММБ будується на основі виділення з рівнянь Максвелла оператора диференціювання за координатами, вводиться простір шестикомпонентних векторів, доводиться самоспряженість введеного оператора у цьому просторі, ортогональність його власних векторів. Окремо доводиться, що система

векторів цього оператора утворює базис у просторі розв'язків. Шукані поля розкладаються за цим базисом, і далі, шляхом проєктування вихідних рівнянь на цей базис, виходить задача із звичайних диференціальних рівнянь для коефіцієнтів розкладу (модових амплітуд) [33].

Метод модового базису було застосовано для аналізу резонатора з нестационарним середовищем [34], була також розроблена його модифікація для аналізу неоднорідних хвилеводів [35]. Тут параметри середовища, що заповнює резонатор, були включені в оператор диференціювання за координатами. В результаті, власні моди такого оператора в явному вигляді враховували стрибок поля на границі розділу середовищ. Більш докладний огляд застосувань методу модового базису до резонаторних задач можна знайти у кандидатській дисертації М. Антюфєєвої [36].

ММБ був застосований також для аналізу хвилеводів [37]. При цьому з рівнянь Максвелла виділяються два оператори диференціювання за поперечними координатами, вводиться простір чотиривимірних векторів із поперечних компонент електромагнітного поля, доводиться самоспряженість операторів у цьому просторі. На основі їх власних векторів вводиться базис, за яким розкладаються поля у хвилеводі. Коефіцієнти такого розкладу є вже функціями поздовжньої координати і часу і задовольняють диференціальному рівнянню у частинних похідних типу Клейна–Гордона [33]. Необхідно відзначити альтернативну реалізацію цього методу А. Адоніною [38], якій розглядалися також і анізотропні середовища.

У якості подальшого розвитку цього підходу у роботі [39] проведено узагальнення методу еволюційних рівнянь для задач у вільному просторі. Вільний простір розглядається як граничний випадок круглого хвилеводу нескінченного діаметру. Спектр оператора диференціювання за поперечними координатами стає неперервним. Це проявляється у представленні компонент електромагнітного поля: окрім нескінченної суми по модам береться невластний інтеграл першого роду по спектральним параметрам. В силу того, що тематика дипломної роботи пов'язана з розв'язуванням задач

випромінювання, саме цю модифікацію й буде застосовано для дослідження поведінки нестационарної електромагнітної хвилі на границі розділу середовищ. Задача випромінювання плоским диском, подібно до роботи [39] розв'язується у циліндричній системі координат, хоча у випадку радіально-неоднорідного середовища природно використовувати сферичну [40].

1.4. Підповерхнева радіолокація

Метод еволюційних рівнянь добре пристосований для опису надширокосмугових сигналів, які, як було зазначено вище, мають низку застосувань у науці, техніці, житті людини. Відмітимо, що імпульсні сигнали успішно застосовуються для інтроскопії недр землі (зондування ґрунту, визначення товщини льоду) [3]. Зокрема, надширокосмугові сигнали використовуються в георадарах для локації таких підповерхневих об'єктів як труби, кабелі, протипіхотні міни тощо [42]. На цьому застосуванні зупинимося докладніше.

Георадари, що використовують імпульсні сигнали, дозволяють не тільки виявляти об'єкти під поверхнею з великою здатністю по глибині, але й визначати тип спостережуваного об'єкта по його характерним резонансам. Крім зондування ґрунту, подібні системи також застосовуються для пошуку різних об'єктів (в тому числі й людей) під завалами, за стінами [43, 44].

Можливості визначення параметрів речовини за допомогою несинусоїдальних сигналів висвітлені в роботах С. Масалова [45]. Теоретичні питання, пов'язані з можливостями пошуку різних підповерхневих об'єктів (тобто таких, що розташовані у середовищах із втратами) за допомогою надширокосмугових сигналів розглянуті у роботі [46], у дисертації [47]. Деякі практичні конструкції георадару запропоновані наприклад, в роботі [48]. Зазначимо, що дана область потребує розробки спеціальних типів радарів [49].

1.4.1. Завдання георадарних досліджень

Георадари або радари підповерхневого зондування призначені для виявлення, позиціювання та ідентифікації підповерхневих неоднорідностей. Вони також дозволяють здійснювати діагностику підземних комунікацій, ґрунтів під будівельні майданчики, дорожніх покриттів і злітно-посадочних смуг аеродромів, локальних неоднорідностей в ґрунті, витоків з підземних сховищ палива, рівня ґрунтових вод. Крім того, георадари використовуються при проведенні геофізичних, археологічних та інших досліджень [50].

Незважаючи на те, що георадар був добре вивчений і застосований багатьма дослідниками протягом останніх кількох десятиліть, задачі фокусування зображень, отриманих георадарами, все ще є складними і актуальними. Єдиного методу їх отримання та аналізу не існує. Наведемо приклади та опишемо сутність декількох з них, базуючись на оглядовій роботі [51].

1.4.2. Огляд методів георадарних досліджень

Гіперболічне (дифракційне) підсумовування. У типовому застосуванні георадару, його антена збирає дані про розсіяну або відбиту електромагнітну хвилю від границі розділу середовищ повітря-ґрунт та підземні об'єкти разом з багатьма впливами на фоні, наявність яких пояснюється неоднорідністю поверхні середовища. В ідеальному випадку, якщо середовище однорідне, фаза розсіяного сигналу прямо пропорційна часу поширення електромагнітної хвилі. Моностаціональний відбитий сигнал від одного точкового розсіювача проходить різні відстані в той час, як антена рухається по поверхні сканування.

Для кожного статичного вимірювання вздовж осі сканування отримується одновимірний діапазонний профіль (профіль глибини) зображення підземних об'єктів, шляхом застосування оберненого перетворення Фур'є частотно-різноманітного відбитого сигналу. Після того, як усі профілі глибини зібрані,

отримується двовимірне просторово-часове (або просторово-глибинне) відскановане зображення. Оскільки антена георадару має кінцеву ширину променя, будь-який підземний об'єкт підсвічується на кінцевому відрізку вздовж осі сканування. Отже, цей об'єкт відображається як параболічна гіпербола на просторово-часовому зображенні через різні відстані поширення хвилі між радаром і підсвічуваним об'єктом. Справжнє розташування об'єкта, фактично, знаходиться на вершині цієї гіперболи. Припускаючи, що результуюче відскановане зображення може бути розглянуте як сума скінченної кількості гіпербол, які відповідають різним точкам на об'єктах під поверхнею, такий підхід може бути застосований для міграції розфокусованих структур зображення, тобто гіпербол до їх фокусованих версій [52].

Міграція Кірхгофа. Цей метод, також відомий як міграція обернено-часового хвильового рівняння, математично еквівалентний методу гіперболічного підсумовування з поправками, що включені до розв'язку [52]. Мета полягає у знаходженні розв'язку скалярного хвильового рівняння, де шукана функція залежить від просторових координат і часу. У наближенні дальньої зони його розв'язок записується за допомогою інтегральної теореми Кірхгофа [53]. На відміну від попереднього методу, тут враховується множник, що відповідає за спрямованість. Також можливі поправки для фази й амплітуди сферичної хвилі.

Міграція фазового зсуву. Уперше, цей метод був запропонований Газдагом ще у 1978 році [54]. Алгоритм ітеративно вводить значення фазового зсуву, щоб перенести поле хвилі до початкового моменту часу таким чином, що всі розсіяні хвилі повертаються до місця об'єкта для отримання фокусованого зображення. Головна мета методу є розрахунок поля хвилі у початковий момент часу шляхом екстраполяції електромагнітної хвилі з фазовим множником вздовж осі поширення.

Міграція Столта (частотно-хвильова). Міграція $\omega - k$ використовує ідею скалярного хвильового рівняння із застосуванням перетворення Фур'є [55]. Алгоритм цього методу працює швидше, ніж розглянуті попередні, і було

доведено, що він застосовний до середовищ з постійною швидкістю поширення електромагнітної хвилі. Розв'язок рівняння можна записати так само, як і для міграції Кірхгофа [56].

Міграція на основі зворотної проєкції. Остання категорія алгоритмів, що здатна фокусувати зображення, заснована на томографічних принципах, які використовуються в медицині. З моменту першого формулювання алгоритму для двовимірних моностатичних процесів [57], ним зацікавлюється все більша кількість дослідників в області радарної техніки. Алгоритм не вимагає прямої і рівномірної вибірки даних скануючої апертури через його послідовну їх обробку. Більш того, профіль хвилі в одновимірному діапазоні розповсюджується та проєктується на двовимірне зображення самостійно. Ця послідовна обробка означає можливість роботи «в реальному часі» і, отже, процес формування зображення можна розпочати з отримання всіх даних з апертури. Крім того, конкретні фрагменти зображення можна легко обрати та дослідити окремо. У застосуваннях, де приблизне місцезнаходження цілі з детальним зображенням області навколо неї є апріорі відомим, алгоритм можна легко сформулювати.

Декілька інших методів. Окрім зазначених поширених методів у георадарних дослідженнях, існує багато інших, які були введені різними дослідниками в цій та суміжних областях. Так, наукова школа Фішера [58] застосувала процедуру зворотно-часової міграції профілів георадара. Колектив, очолюваний Капінері [59], застосував техніку, засновану на перетворенні Хафа, для сканування даних з георадара, щоб отримати кращі зображення структур труб. Лойчен і Плам [60], Морро і ван Гандерен [61] реалізували процедури зворотного поширення, які покладаються на метод скінченних різниць у часовій області.

Метою даної роботи є отримання аналітичних розв'язків задачі випромінювання нестационарного електромагнітного поля плоским диском на границі розділу середовищ а також виведення та аналіз виразів, що дозволяють

оцінювати його енергетичні характеристики. Користуючись методом інтегралу Дюамеля, проаналізувати компоненти полів з довільною часовою залежністю.

Результати кваліфікаційної роботи опубліковані в двох статтях [62, 63] та чотирьох працях міжнародних конференцій [64 – 67].

РОЗДІЛ 2. АНАЛІЗ ІМПУЛЬСНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ У ЧАСОВОМУ ПРОСТОРИ НА ГРАНИЦІ РОЗДІЛУ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

Розділ присвячено розв'язанню задачі випромінювання нестационарної електромагнітної хвилі на границю розділу середовищ повітря–грунт. Методом еволюційних рівнянь було знайдено компоненти електромагнітного поля Н-хвилі. Основні результати розділу викладені в статті [62] і доповідалися на науковій конференції [64].

2.1. Постановка задачі

Розглянемо електромагнітну ТЕ-хвилю, утворену лінійним джерелом плоского струму \vec{j}_0 . Джерело нестационарного струму, яке має вигляд круглого диску $H(R - \rho)$ та нескінченно малу товщину $\delta(z)$, розташуємо на початку циліндричної системи координат. Літерою « H » ми позначили функцію Хевісайда, а « δ » – дельта-функцію Дірака; R – заданий радіус диску, ρ, φ, z – компоненти циліндричної системи координат. Часова залежність струму має вигляд стрибка $H(t)$ з амплітудою A_0 , а його напрям зробимо колінеарним декартовому орту \vec{x}_0 , який може бути виражений через циліндричні координати

$$\vec{x}_0 = \vec{\rho}_0 \cos \varphi - \vec{\varphi}_0 \sin \varphi.$$

Випромінювання здійснюється у вільний простір ($\varepsilon = 1, \mu = 1$), який безпосередньо контактує з нижнім середовищем без втрат ($\varepsilon > 1, \mu = 1$) при $z = 0$. Тоді джерело струму аналітично задаватиметься таким виразом:

$$\vec{j}_0(\rho, \varphi, z, t) = \vec{x}_0 A_0 H(R - \rho) \delta(z) H(t). \quad (2.1)$$

Математично, Н-хвиля у вільному просторі описується диференціальним рівнянням у частинних похідних відносно еволюційного коефіцієнту, згідно еволюційного підходу [39, 68]

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi_i^2 \right) h_{m_i}^{inc}(z, t, \chi_i) = \sqrt{\mu_0} j_{m_i}(z, t, \chi_i); \\ V_{m_i}^{inc}(z, t, \chi_i) = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_{m_i}^{inc}(z, t, \chi_i)}{\partial t}, \end{cases} \quad (2.2)$$

де верхній індекс «*inc*» та нижній «*i*» позначає процес падіння електромагнітної хвилі; $c = 3 \cdot 10^8$ (м/с) – швидкість електромагнітної хвилі у вільному просторі; χ_i – спектральний параметр; $h_{m_i}^{inc}$ – еволюційний коефіцієнт поздовжньої магнітної компоненти поля, що знаходиться шляхом розв’язку першого еволюційного рівняння з (2.2); $V_{m_i}^{inc}$ – еволюційний коефіцієнт поперечної електричної компоненти поля; j_{m_i} – функція-джерело, що є модовим розкладом стороннього струму \vec{j}_0 ,

$$j_{m_i}(z, t, \chi_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \vec{j}_0(\rho, \varphi, z, t) [\nabla \psi_{m_i}^*(\rho, \varphi, \chi_i) \times \vec{z}_0]. \quad (2.3)$$

ψ_{m_i} – базисна (мембанна) функція, що залежить тільки від поперечних координат та задовольняє рівнянню Гельмгольца,

$$\psi_{m_i}(\rho, \varphi, \chi_i) = \frac{J_{m_i}(\chi_i \rho)}{\sqrt{\chi_i}} e^{im_i \varphi},$$

де $J_{m_i}(\chi_i \rho)$ – функція Бесселя першого роду порядку m_i .

Розв’язавши рівняння (2.2) відносно усіх мод, поперечна компонента електричного поля знаходиться через дискретну суму по кутовим модам та неперервну суму по спектральним параметрам:

$$\vec{E}^{inc}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m_i=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty d\chi_i V_{m_i}^{inc}(z, t, \chi_i) [\nabla \psi_{m_i}(\rho, \varphi, \chi_i) \times \vec{z}_0]. \quad (2.4)$$

$\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала, $\mu_0 \approx 1,26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м – магнітна стала. Підставляючи сторонні струми (2.1) до формули (2.3) та здійснюючи інтегрування за кутовою та радіальними координатами, отримаємо функцію-джерело, тобто праву частину диференціального рівняння (2.2)

$$j_{m_i}(z, t, \chi_i) = -A_0 \frac{i\delta(z)H(t)R}{2} (\delta_{m_i,1} + \delta_{m_i,-1}) \frac{J_1(\chi_i R)}{\sqrt{\chi_i}}, \quad (2.5)$$

$\delta_{m,n}$ – символ Кронекера.

Рівняння (2.2) відносно коефіцієнта $h_{m_i}^{inc}$ має назву неоднорідного диференціального рівняння Клейна–Гордона. Його розв’язок знаходиться за допомогою методу функції Рімана рівняння Клейна–Гордона [39, 68], яка має такий вигляд:

$$h_{m_i}^{inc}(z, t, \chi_i) = \sqrt{\mu_0} \frac{c}{2} \int_0^\infty dz' \int_0^\infty dt' J_0 \left(\chi_i \sqrt{c^2(t-t')^2 - (z-z')^2} \right) j_{m_i}(z', t', \chi_i).$$

Інтегруючи функцію Бесселя нульового порядку з функцією-джерелом за поздовжньою координатою та часовою змінною, прийдемо до такого виразу:

$$h_{m_i}^{inc}(z, t, \chi_i) = -A_0 \frac{\sqrt{\mu_0} R}{2} (\delta_{m_i,1} + \delta_{m_i,-1}) \frac{1}{\chi_i \sqrt{\chi_i}} J_1(\chi_i R) \cdot U_1 \left(i\chi_i(ct - z), \chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right), \quad (2.6)$$

де $U_n(W, Z)$ – функція Ломмеля двох змінних n -го порядку, яка являє собою нескінченну суму з функцій Бесселя [69]:

$$U_n(W, Z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{W}{Z} \right)^{n+2k} J_{n+2k}(Z).$$

Користуючись визначенням похідної від функції Ломмеля за кожною зі змінних [70]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z} U_m(W, Z) &= -\frac{Z}{W} U_{m-1}(W, Z); \\ \frac{\partial}{\partial W} U_m(W, Z) &= \frac{1}{2} U_{m+1}(W, Z) + \frac{1}{2} \left(\frac{Z}{W} \right)^2 U_{m-1}(W, Z), \end{aligned}$$

еволюційний коефіцієнт поперечної електричної компоненти поля знайдемо шляхом диференціювання складеної функції:

$$V_{m_i}^{inc}(z, t, \chi_i) = A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0} R}{4} (\delta_{m_i,1} + \delta_{m_i,-1}) \frac{J_1(\chi_i R)}{\sqrt{\chi_i}} J_0 \left(\chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right). \quad (2.7)$$

2.2. Поля на осі випромінювання

Щоб знайти поперечне електричне поле на осі випромінювання ($\rho = 0$), потрібно до формули (2.4) підставити в явному вигляді еволюційний коефіцієнт (2.7). Завдяки символам Кронекера від нескінченної суми залишаться два доданки, і розклад (2.4) спроститься до інтегралу

$$\vec{E}^{inc}(z, t)|_{\rho=0} = -\vec{x} \frac{\sqrt{\mu_0} A_0 R}{\varepsilon_0} \int_0^\infty d\chi_i J_1(\chi_i R) J_0(\chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2}),$$

який розраховується за допомогою формули [71]

$$\vec{E}^{inc}(z, t)|_{\rho=0} = -\vec{x} A_0 \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} \begin{cases} \frac{1}{R}, & 0 < \sqrt{c^2 t^2 - z^2} < R; \\ \frac{1}{2\sqrt{c^2 t^2 - z^2}}, & 0 < \sqrt{c^2 t^2 - z^2} = R; \\ 0, & 0 < R < \sqrt{c^2 t^2 - z^2}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Проілюструємо часову залежність поперечної електричної компоненти поля на границі розділу середовищ ($z = 0$). На рис. 2.1 видно, що електричне поле на осі випромінювання має форму прямокутного імпульсу. Поява його викликана приходом сигналу від найближчої точки джерела, а зникнення – приходом сигналу від зовнішнього радіусу диску. З рисунку видно, що радіус диску дорівнює 0.5.

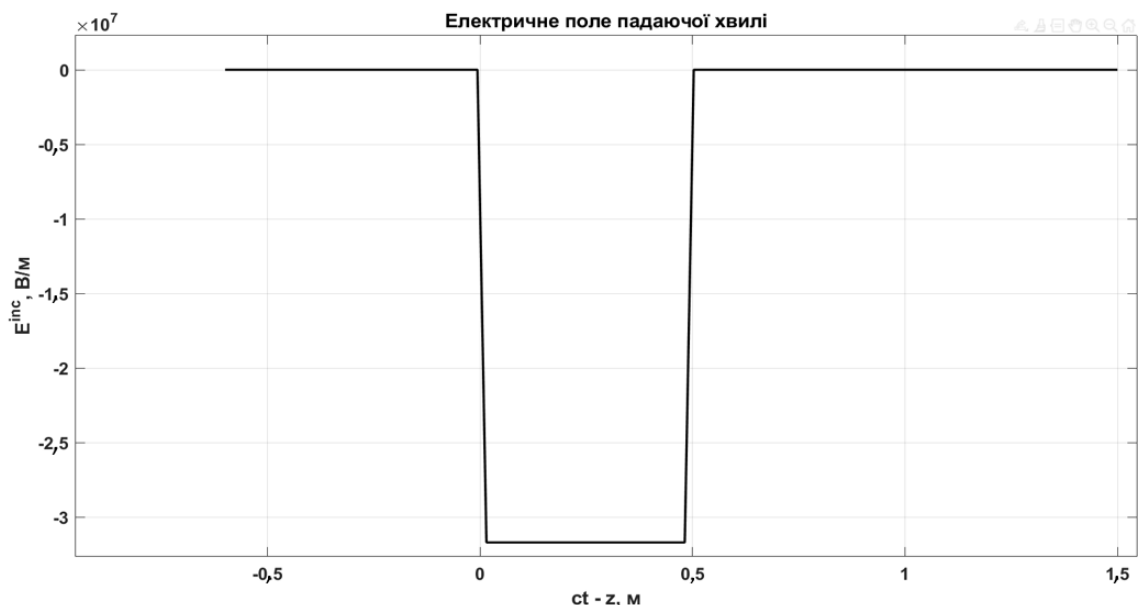


Рис. 2.1. Поперечна електрична компонента падаючої хвилі ($z = 0, \rho = 0$)

Коли електричне поле потрапляє на границю розділу середовищ, одна його частина відіб'ється від неї, а решта – пройде у середовище з діелектричною проникністю ε . Знайдемо ту частину поля, що відбилася, розв'язавши відповідне еволюційне рівняння у вільному просторі та записавши визначення еволюційного коефіцієнта поперечної електричної компоненти поля у такому випадку:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi_r^2 \right) h_{m_r}^{ref}(z, t, \chi_r) = 0; \\ V_{m_r}^{ref}(z, t, \chi_r) = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_{m_r}^{ref}(z, t, \chi_r)}{\partial t}, \end{cases} \quad (2.9)$$

Де верхній індекс «*ref*» та нижній «*r*» позначає відбиту хвилю. У правій частині рівняння стоїть нуль, тому що дана частина поля не має джерела у вигляді струму, воно задається у граничних умовах для еволюційних коефіцієнтів. Розв'язується дане рівняння за допомогою методу розділення змінних. Але якщо здійснити розділення класичним чином, тобто представити шукану функцію $h_{m_r}^{ref}$ у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежатиме окремо від z і t , то вийде розв'язок, що еквівалентний застосуванню перетворення Фур'є. А це перехід до частотної області, який нас не цікавить. Щоб це усунути, здійснимо іншу заміну змінних [72]:

$$\begin{cases} ct = u \operatorname{ch} v; \\ z = u \operatorname{sh} v; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{2} \ln \frac{ct + z}{ct - z}; \\ u = \sqrt{c^2 t^2 - z^2}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Підставляючи (2.10) до (2.9) та здійснюючи перетворення з похідними другого порядку, прийдемо до диференціального рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + \chi_r^2 - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) h_{m_r}^{ref}(u, v) = 0, \quad (2.11)$$

яке також розв'язується розділенням змінних

$$h_{m_r}^{ref}(u, v) = \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} V_{k_r}^{ref}(v) U_{k_r}^{ref}(u). \quad (2.12)$$

Після елементарних математичних перетворень приходимо до двох звичайних диференціальних рівнянь, де коефіцієнт розділення прийmemo рівним k_r^2 ,

$$\frac{u^2}{U_{k_r}^{ref}} \frac{d^2 U_{k_r}^{ref}}{du^2} + \frac{u}{U_{k_r}^{ref}} \frac{dU_{k_r}^{ref}}{du} + \chi_r^2 u^2 = k_r^2;$$

$$\frac{1}{V_{k_r}^{ref}} \frac{d^2 V_{k_r}^{ref}}{dv^2} = k_r^2,$$

і розв'язання яких приводить нас до шуканого еволюційного коефіцієнта за умови відкидання функції Неймана як такої, що приймає нескінченне значення в точках, у яких, з точки зору фізики поширення хвилі, повинні бути обмежені значення електромагнітного поля:

$$h_{m_r}^{ref}(u, v) = \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} A_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) J_{k_r}(\chi_r u) (\tilde{B}_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) e^{k_r v} + \tilde{C}_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) e^{-k_r v}).$$

Здійснюючи обернену заміну (2.10) та вважаючи, що

$$A_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) \tilde{B}_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) = B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r),$$

а $\tilde{C}_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) = 0$ через властивості відбитої хвилі, остаточно отримаємо

$$h_{m_r}^{ref}(z, t, \chi_r) = \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) J_{k_r}(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \left(\frac{ct + z}{ct - z} \right)^{\frac{k_r}{2}}. \quad (2.13)$$

Знаючи диференціальні та рекурентні співвідношення між функціями Бесселя [73]

$$\begin{cases} J_m(\chi\rho) = \frac{\chi\rho}{2m} (J_{m-1}(\chi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho)); \\ \frac{\partial}{\partial\rho} J_m(\chi\rho) = \frac{\chi}{2} (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)), \end{cases} \quad (2.14)$$

еволюційний коефіцієнт поперечної електричної компоненти поля легко обчислити за формулою (2.9)

$$V_{m_r}^{ref}(z, t, \chi_r) = \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} \frac{\chi_r}{2} B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r) \left\{ \left(\frac{ct+z}{ct-z} \right)^{\frac{k_r+1}{2}} \cdot J_{k_r+1} \left(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) - \left(\frac{ct+z}{ct-z} \right)^{\frac{k_r-1}{2}} J_{k_r-1} \left(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \right\}. \quad (2.15)$$

Коефіцієнт $B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r)$, який буде знайдено за допомогою граничних умов на границі середовищ, є невідомою функцією тільки від спектрального параметра.

Еволюційне рівняння та еволюційний коефіцієнт для хвилі, що пройшла у середовище з діелектричною проникністю ε мають вигляд:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi_p^2 \right) h_{m_p}^{prop}(z, t, \chi_p) = 0; \\ V_{m_p}^{prop}(z, t, \chi_p) = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_{m_p}^{prop}(z, t, \chi_p)}{\partial t}, \end{cases} \quad (2.16)$$

де верхній індекс «*prop*» та нижній «*p*» позначає хвилю, що пройшла у середовище, а v – швидкість електромагнітної хвилі у середовищі, причому

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Диференціальне рівняння відносно $h_{m_p}^{prop}$ розв'язується так само, як і рівняння відносно $h_{m_r}^{ref}$, тому відразу перепишемо розв'язок із заміною змінних (2.10) та врахуванням фізично обґрунтованої поведінки поля на нескінченності:

$$h_{m_p}^{prop}(z, t, \chi_p) = \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m_p, prop}(\chi_p) J_{k_p} \left(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2} \right) \left(\frac{vt-z}{vt+z} \right)^{\frac{k_p}{2}}. \quad (2.17)$$

Еволюційний коефіцієнт поперечної електричної компоненти поля у такому випадку представлятиметься як

$$V_{m_p}^{prop}(z, t, \chi_p) = \frac{v}{c} \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} \frac{\chi_p}{2} B_{k_p}^{m_p, prop}(\chi_p) \left\{ \left(\frac{vt - z}{vt + z} \right)^{\frac{k_p+1}{2}} \cdot J_{k_p+1} \left(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2} \right) - \left(\frac{vt - z}{vt + z} \right)^{\frac{k_p-1}{2}} J_{k_p-1} \left(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2} \right) \right\}. \quad (2.18)$$

Коефіцієнт $B_{k_p}^{m_p, prop}(\chi_p)$ залежить тільки від спектрального параметра і знаходиться через застосування граничних умов на границі розділу середовищ. Після обчислення коефіцієнтів $B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r)$, $B_{k_p}^{m_p, prop}(\chi_p)$, знайдемо явний вигляд еволюційних коефіцієнтів поперечного електричного поля для відбитої та заломленої хвиль, після чого, за допомогою (2.4) розрахуємо відповідні компоненти полів.

2.3. Зшивання полів

Невідомі коефіцієнти $B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r)$ і $B_{k_p}^{m_p, prop}(\chi_p)$ з'явилися внаслідок розв'язання диференціальних рівнянь (2.9), (2.16) у загальному випадку із врахуванням напрямків поширення хвиль. Щоб їх знайти, треба доповнити нашу задачу граничними умовами. У нашому випадку це буде співвідношення між компонентами полів на границі розділу середовищ ($z = 0$). Суперпозиція хвиль, одна з яких падає, а інша – відбивається, має дати компоненту, що дорівнюватиме електричній компоненті поля, яке поширюється у середовищі:

$$\vec{E}^{inc}(\rho, \varphi, t)|_{z=0} + \vec{E}^{ref}(\rho, \varphi, t)|_{z=0} = \vec{E}^{prop}(\rho, \varphi, t)|_{z=0}. \quad (2.19)$$

Рівність (2.19) відбиває умову непервності тангенційних складових електричного поля. Підставимо до (2.19) розклади електричних компонент згідно (2.4):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m_i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_i [\nabla\psi_{m_i}(\rho, \varphi, \chi_i) \times \vec{z}_0] V_{m_i}^{inc}(t, \chi_i)|_{z=0} + \\
& + \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m_r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_r [\nabla\psi_{m_r}(\rho, \varphi, \chi_r) \times \vec{z}_0] V_{m_r}^{ref}(t, \chi_r)|_{z=0} = \\
& = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_p [\nabla\psi_{m_p}(\rho, \varphi, \chi_p) \times \vec{z}_0] V_{m_p}^{prop}(t, \chi_p)|_{z=0}.
\end{aligned}$$

Домножимо цю рівність на векторний добуток $[\nabla\psi_m^*(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0]$, що містить градієнт від комплексно спряженої базисної функції та подіємо операторами інтегрування за кутовою та радіальною змінними:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho [\nabla\psi_{m_i}(\rho, \varphi, \chi_i) \times \vec{z}_0] \cdot [\nabla\psi_m^*(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0] \cdot \\
& \cdot V_{m_i}^{inc}(t, \chi_i)|_{z=0} + \sum_{m_r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_r \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho [\nabla\psi_{m_r}(\rho, \varphi, \chi_r) \times \vec{z}_0] \cdot \\
& \cdot [\nabla\psi_m^*(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0] V_{m_r}^{ref}(t, \chi_r)|_{z=0} = \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_p \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \cdot \\
& \cdot [\nabla\psi_{m_p}(\rho, \varphi, \chi_p) \times \vec{z}_0] \cdot [\nabla\psi_m^*(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0] V_{m_p}^{prop}(t, \chi_p)|_{z=0}.
\end{aligned}$$

Це дає змогу використати умову ортогональності базисних функцій (див. додаток або [39, 68],

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \nabla\psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla\psi_n^*(\rho, \varphi, \xi) = \delta_{mn} \delta(\xi - \chi), \quad (2.20)$$

через що гранична умова значно спроститься:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_i \delta_{m_i m} \delta(\chi - \chi_i) V_{m_i}^{inc}(t, \chi_i)|_{z=0} + \sum_{m_r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_r \delta_{m_r m} \delta(\chi - \chi_r) \cdot \\
& \cdot V_{m_r}^{ref}(t, \chi_r)|_{z=0} = \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi_p \delta_{m_p m} \delta(\chi - \chi_p) V_{m_p}^{prop}(t, \chi_p)|_{z=0}.
\end{aligned}$$

Під інтегралом міститься дельта-функція, яка має корисну властивість:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \chi) f(\chi) d\chi = f(\xi).$$

Під оператором сумування міститься символ Кронекера, що також спрощує зшивання полів:

$$\sum_{m_i=-\infty}^{\infty} \delta_{mn} f_m(\xi) = f_n(\xi).$$

Скориставшись цими математичними властивостями, прийдемо до співвідношення між еволюційними коефіцієнтами поперечних електричних компонент на границі розділу середовищ:

$$V_m^{inc}(t, \chi)|_{z=0} + V_m^{ref}(t, \chi)|_{z=0} = V_m^{prop}(t, \chi)|_{z=0}. \quad (2.21)$$

Перепишемо еволюційні коефіцієнти поперечного електричного поля у явному вигляді на границі $z = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_m^{inc}(t, \chi)|_{z=0} = \frac{\chi}{2} \sum_{k_i=0}^{\infty} \tilde{B}_{2k_i}^{m,inc}(\chi) \left(J_{2k_i}(\chi ct) - J_{2+2k_i}(\chi ct) \right); \\ V_m^{ref}(t, \chi)|_{z=0} = \frac{\chi}{2} \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m,ref}(\chi) \left(J_{k_r+1}(\chi ct) - J_{k_r-1}(\chi ct) \right); \\ V_m^{prop}(t, \chi)|_{z=0} = \frac{\chi v}{2c} \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m,prop}(\chi) \left(J_{k_p+1}(\chi vt) - J_{k_p-1}(\chi vt) \right), \end{array} \right. \quad (2.22)$$

де було позначено

$$\tilde{B}_{2k_i}^{m,inc}(\chi) = A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0}R J_1(\chi R)}{2 \chi\sqrt{\chi}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}). \quad (2.23)$$

Звернімо увагу, що еволюційний коефіцієнт поперечного електричного поля падаючої хвилі ми взяли у вигляді нескінченного ряду, оскільки саме така форма нам буде зручна для подальшого аналізу. Розрахунок цього ряду в точності дає функцію Бесселя нульового порядку. Щоб зробити коефіцієнт більш ідентичним до двох інших коефіцієнтів, здійснимо тотожні перетворення з оператором сумування. Зробимо заміну $2k_i \rightarrow k_i$ та перейдемо до суми в межах від $-\infty$ до $+\infty$:

$$V_m^{inc}(t, \chi) = \frac{\chi}{2} \sum_{k_i=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{k_i}^{m,inc}(\chi) (J_{k_i}(\chi ct) - J_{k_i+2}(\chi ct)).$$

Щоб наведена рівність була тотожною до тієї, що наведена у (2.22), коефіцієнт $\tilde{B}_{k_i}^{m,inc}(\chi)$ у нових доданках повинен дорівнювати нулю для непарних додатних $k_i = 2k_1 + 1$ і усіх від'ємних індексів:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{2k_1+1}^{m,inc}(\chi) &= 0 \quad \forall k_1 \in \mathbb{N}_0; \\ \tilde{B}_{k_i}^{m,inc}(\chi) &= 0 \quad \forall k_i < 0. \end{aligned}$$

Якщо змістити доданки на одиницю $k_i \rightarrow k_i - 1$, то

$$V_m^{inc}(t, \chi) = \frac{\chi}{2} \sum_{k_i=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{k_i-1}^{m,inc}(\chi) (J_{k_i-1}(\chi ct) - J_{k_i+1}(\chi ct)),$$

а коефіцієнт $\tilde{B}_{k_i-1}^{m,inc}(\chi)$ дорівнюватиме нулю за таких умов:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{2k_1-1}^{n,inc}(\chi) &= 0 \quad \forall k_1 \in \mathbb{N}_0; \\ \tilde{B}_{k_i-1}^{n,inc}(\chi) &= 0 \quad \forall k_i < 0. \end{aligned}$$

Для того, щоб було зручно зшивати поля, перепишемо цей вираз у більш зручній формі для нового коефіцієнту

$$\begin{aligned} &\sum_{k_i=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_{k_i-1}^{m,inc}(\chi) (J_{k_i-1}(\chi ct) - J_{k_i+1}(\chi ct)) = \\ &= \sum_{k_i=-\infty}^{\infty} B_{k_i}^{m,inc}(\chi) (J_{k_i+1}(\chi ct) - J_{k_i-1}(\chi ct)). \end{aligned}$$

Щоб перейти до нового коефіцієнту $B_{k_i}^{m,inc}(\chi)$ запишемо відповідні умови, за яких він дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} B_{2k_1}^{m,inc}(\chi) &= 0 \quad \forall k_1 \in \mathbb{N}_0; \\ B_{k_i}^{m,inc}(\chi) &= 0 \quad \forall k_i < 0, \end{aligned}$$

оскільки усі індекси на одиницю більші, ніж у коефіцієнта $\tilde{B}_{k_i-1}^{m,inc}(\chi)$. Якщо подивитися на рівність, записану вище, яка їх пов'язує, то виходить, що вони будуть рівними, коли один з них буде узятий з протилежним знаком:

$$B_{2k_1+1}^{m,inc}(\chi) = -\tilde{B}_{2k_1}^{m,inc}(\chi) = -A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0}R J_1(\chi R)}{2 \chi\sqrt{\chi}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) \quad \forall k \geq 0. \quad (2.24)$$

Також слід звернути увагу на те, що у рівності порядки функцій Бесселя не змінювались. Тобто, коли для $\tilde{B}_{2k_1}^{m,inc}(\chi)$ циліндричні функції приймали парні порядки, то для $B_{2k_1+1}^{m,inc}(\chi)$ вони також мають бути парними.

Перепишемо рівність (2.21) з урахуванням попередніх перетворень:

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{2} \sum_{k_1=0}^{\infty} B_{2k_1+1}^{m,inc}(\chi) (J_{2k_1+2}(\chi ct) - J_{2k_1}(\chi ct)) + \frac{\chi}{2} \sum_{k_2=0}^{\infty} B_{2k_2+1}^{m,ref}(\chi) (J_{2k_2+2}(\chi ct) - \\ - J_{2k_2}(\chi ct)) = \frac{\chi v}{2c} \sum_{k_3=0}^{\infty} B_{2k_3+1}^{m,prop}(\chi) (J_{2k_3+2}(\chi vt) - J_{2k_3}(\chi vt)). \end{aligned}$$

Межі сумування було змінено через тривіальність коефіцієнтів $B_{k_1}^{m,inc}(\chi)$ для відповідних значень k_1 . Тоді, для відбитої і заломленої хвиль усі від'ємні та парні коефіцієнти мають занулитися, звідки й впливає заміна індексів k_r, k_p на k_2, k_3 . Запишемо усі умови, які було накладено на коефіцієнти:

$$B_{2k_1}^{m,inc}(\chi) = 0, \quad B_{2k_2}^{m,ref}(\chi) = 0, \quad B_{2k_3}^{m,prop}(\chi) = 0 \quad \forall k_1, k_2, k_3 \geq 0. \quad (2.25)$$

Врахувавши масштабувальне перетворення для третьої суми

$$\frac{v}{c} \chi = \chi',$$

отримаємо таку рівність:

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{2} \sum_{k_1=0}^{\infty} B_{2k_1+1}^{m,inc}(\chi) (J_{2k_1+2}(\chi ct) - J_{2k_1}(\chi ct)) + \frac{\chi}{2} \sum_{k_2=0}^{\infty} B_{2k_2+1}^{m,ref}(\chi) (J_{2k_2+2}(\chi ct) - \\ - J_{2k_2}(\chi ct)) = \frac{\chi'}{2} \sum_{k_3=0}^{\infty} B_{2k_3+1}^{m,prop} \left(\frac{c}{v} \chi' \right) (J_{2k_3+2}(\chi' ct) - J_{2k_3}(\chi' ct)). \end{aligned}$$

Згідно (2.23) коефіцієнти, залежні від спектрального параметру, для усіх додатних непарних індексів, можуть бути винесені з-під оператора сумування:

$$\begin{aligned} B_{2k_1+1}^{m,inc}(\chi) \equiv B^{m,inc}(\chi); \quad B_{2k_2+1}^{m,ref}(\chi) \equiv B^{m,ref}(\chi); \\ B_{2k_3+1}^{m,prop} \left(\frac{c}{v} \chi' \right) \equiv B^{m,prop} \left(\frac{c}{v} \chi' \right). \end{aligned}$$

Розрахунок сум дасть функції Бесселя нульового порядку, узятих з протилежним знаком. У рівності, записаній вище, вони скоротяться, і виходить просте співвідношення між коефіцієнтами-функціями спектральних параметрів

$$B^{m,inc}(\chi) + B^{m,ref}(\chi) = B^{m,prop}(\chi), \quad (2.26)$$

де для заломленої хвилі було здійснено обернену масштабувальну заміну.

Коефіцієнти для відбитої та заломленої хвиль у рівності (2.26) можуть бути пов'язані з коефіцієнтом для падаючої таким чином [64]:

$$B^{m,ref}(\chi) = \frac{1 - \frac{c}{v}}{1 + \frac{c}{v}} B^{m,inc}(\chi) = A_0 \frac{\frac{c}{v} - 1}{\frac{c}{v} + 1} \frac{i\sqrt{\mu_0}R J_1(\chi R)}{2 \chi\sqrt{\chi}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}); \quad (2.27)$$

$$B^{m,prop}(\chi) = \frac{2}{1 + \frac{c}{v}} B^{m,inc}(\chi) = -A_0 \frac{2}{1 + \frac{c}{v}} \frac{i\sqrt{\mu_0}R J_1(\chi R)}{2 \chi\sqrt{\chi}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}),$$

звідки легко записати остаточні вирази для поперечних електричних еволюційних коефіцієнтів:

$$V_{m_r}^{ref}(z, t, \chi_r) = -A_0 \frac{\frac{c}{v} - 1}{\frac{c}{v} + 1} \frac{i\sqrt{\mu_0}R}{2} (\delta_{m_r,1} + \delta_{m_r,-1}) \frac{J_1(\chi_r R)}{\chi_r \sqrt{\chi_r}} \cdot J_0(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2}); \quad (2.28)$$

$$V_{m_p}^{prop}(z, t, \chi_p) = A_0 \frac{\frac{v}{c}}{\frac{c}{v} + 1} \frac{i\sqrt{\mu_0}R}{2} (\delta_{m_p,1} + \delta_{m_p,-1}) \frac{J_1(\chi_p R)}{\chi_p \sqrt{\chi_p}} \cdot J_0(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2}).$$

Порівнюючи еволюційні коефіцієнти відбитої та заломленої хвиль (2.28) з падаючою (2.7), видно, що, відносно спектральних параметрів, функціональна залежність не змінилася, а тому й обчислення електричних полів нічим не відрізнятиметься від розрахунку падаючої хвилі. Запишемо результуючі вирази для поперечних електричних полів. Відбита хвиля

$$\vec{E}^{ref}(z, t)|_{\rho=0} = \vec{x} \frac{\frac{c}{v} - 1}{\frac{c}{v} + 1} \frac{\sqrt{\mu_0}}{\varepsilon_0} \frac{A_0 R}{4} \begin{cases} \frac{1}{R}, & 0 < \sqrt{c^2 t^2 - z^2} < R; \\ \frac{1}{2\sqrt{c^2 t^2 - z^2}}, & 0 < \sqrt{c^2 t^2 - z^2} = R; \\ 0, & 0 < R < \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \end{cases} \quad (2.29)$$

зображена на рис. 2.2. Як і падаюча хвиля, відбита відображає прямокутний імпульс. Можна помітити, що зі збільшенням відстані спостереження, тривалість імпульсу падає, а швидкість спадання зменшується. Енергія хвилі спадає пропорційно $1/z$, що підтверджує результати роботи [74], в якій вперше було описане явище електромагнітного снаряду – аномально повільного спадання електромагнітного поля у просторі.

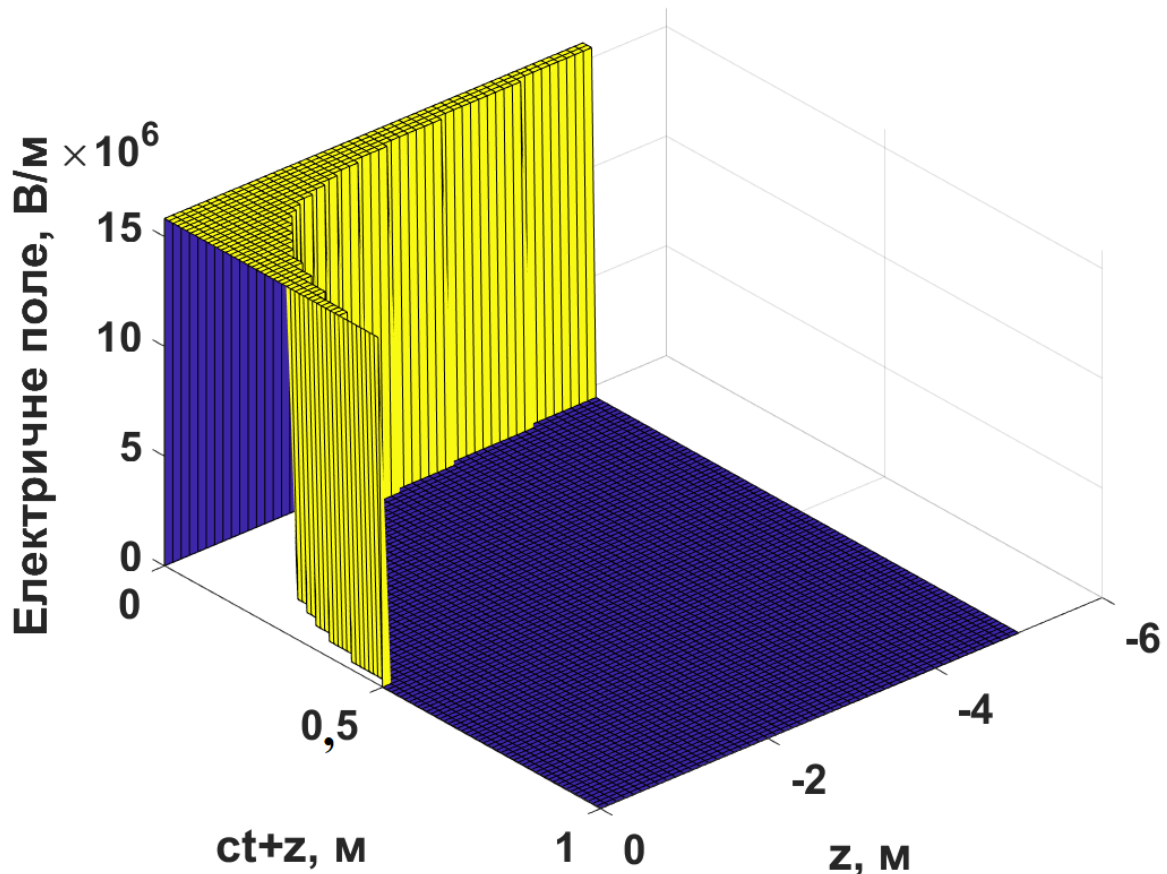


Рис. 2.2. Поперечна електрична компонента відбитої хвилі ($z < 0, \rho = 0$)

Хвиля, що пройшла

$$\vec{E}^{prop}(z, t)|_{\rho=0} = -\vec{x} \frac{v}{c} \frac{\sqrt{\mu_0} A_0 R}{1 + \frac{c}{v} \varepsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{R}, & 0 < \sqrt{v^2 t^2 - z^2} < R; \\ 1, & 0 < \sqrt{v^2 t^2 - z^2} = R; \\ \frac{1}{2\sqrt{v^2 t^2 - z^2}}, & 0 < R < \sqrt{v^2 t^2 - z^2}, \end{cases} \quad (2.30)$$

показана на рис. 2.3. Вона поводить себе як прямокутний імпульс. Це підтверджує однакову функціональну поведінку хвиль (2.8), (2.29), (2.30). Різниця між ними проявляється у параметрах і коефіцієнтах. Аналогічно до рис. 2.2, тривалість імпульсу падає зі збільшенням відстані спостереження. Його енергія також зменшується, але зі своєю асимптотикою, і швидкість спадання зменшується. Таким чином, ми вперше спостерігаємо явище електромагнітного снаряду [74] і в підстиляючому середовищі, опромінену імпульсною хвилею.

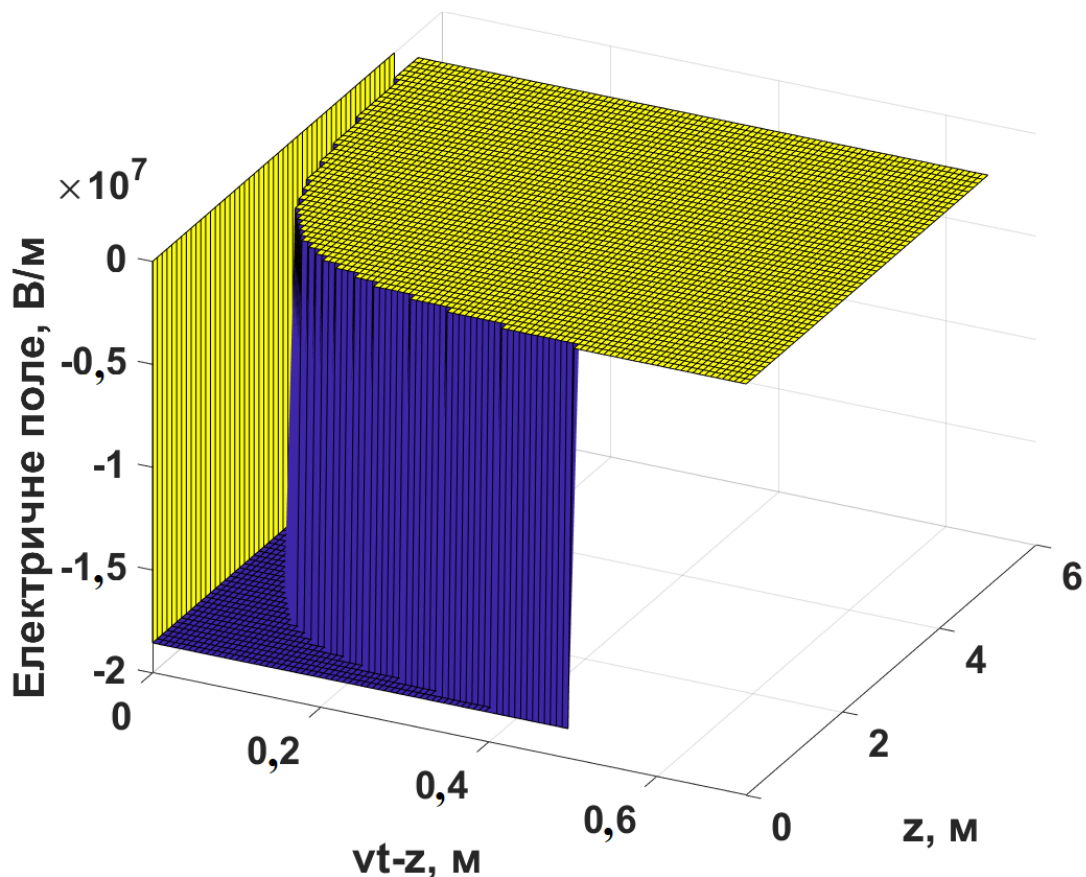


Рис. 2.3. Поперечна електрична компонента хвилі, що пройшла у середовище ($z > 0, \rho = 0, \varepsilon = 9$)

РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ІМПУЛЬСІВ З ДОВІЛЬНОЮ ЧАСОВОЮ ЗАЛЕЖНІСТЮ

У цьому розділі ми, знаючи розв'язки задачі випромінювання нестационарною електромагнітною хвилею у вигляді стрибка, отримали методом інтеграла Дюамеля компоненти полів для сигналів з довільною часовою залежністю. Для розуміння фізики процесу було розглянуто такі модельні сигнали як прямокутний імпульс, сигмоїда, гаусіан та кардинальний синус. Результати розділу доповідалися на науковій конференції [65].

3.1. Постановка задачі

У попередньому розділі ми отримали поперечне електричне поле для падаючої хвилі (2.8). Оскільки воно має форму прямокутного імпульсу, його можна переписати у вигляді різниці двох функцій Хевісайда

$$\vec{E}^{inc}(z, t)|_{\rho=0} = -\vec{x}A_0 \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} \left(H(ct - z) - H\left(ct - \sqrt{z^2 + R^2}\right) \right). \quad (3.1)$$

Користуючись інтегралом Дюамеля, розв'язок задачі випромінювання струму зі стрибкоподібною часовою залежністю (3.1) можна узагальнити на випадок довільної часової форми імпульсу $f(ct)$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(c\tau) \vec{E}'_0(\vec{r}, ct - c\tau) d c\tau, \quad (3.2)$$

Підставимо (3.1) до (3.2) та отримаємо електричну компоненту поля на поздовжній осі для довільної часової залежності джерела $f(ct)$:

$$\vec{E}^{inc}(z, t)|_{\rho=0} = -\vec{x}A_0 \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(c\tau) \left(\delta(\{ct - z\} - c\tau) - \delta\left(\{ct - \sqrt{z^2 + R^2}\} - c\tau\right) \right) d c\tau,$$

Застосувавши інтегральну властивість дельта-функції, поперечні поля падаючої та відбитої хвиль дорівнюватимуть

$$\begin{cases} \vec{E}^{inc}(z, t)|_{\rho=0} = -\vec{x}A_0 \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} \left(f(ct - z) - f\left(ct - \sqrt{z^2 + R^2}\right) \right); \\ \vec{E}^{ref}(z, t)|_{\rho=0} = \vec{x}A_0 \frac{\frac{c}{v} - 1}{\frac{c}{v} + 1} \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} \left(f(ct + z) - f\left(ct - \sqrt{z^2 + R^2}\right) \right). \end{cases} \quad (3.3)$$

Тепер до цих виразів можна підставити будь-які функції, які вважаються моделями сигналів.

3.2. Числове моделювання для різних форм збуджуючих імпульсів

Застосуємо отримані формули (3.3) для конкретних часових залежностей і побудуємо тривимірні графіки електромагнітних полів. У якості моделей візьмемо прямокутний імпульс, сигмоїду, гаусіан та кардинальний синус.

3.2.1. Прямокутний імпульс

У цьому випадку передавальна функція має вигляд

$$f(ct) = H(ct) - H(ct - ct_0).$$

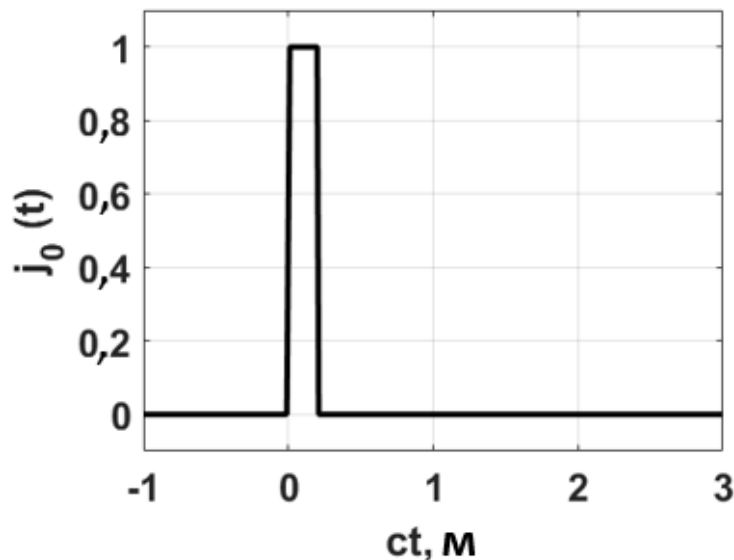


Рис. 3.1. Часова залежність збуджуючого струму у формі короткого прямокутного імпульсу з параметрами $R = 1$ м, $A_0 = 1$ А/м, $ct_0 = 0,2R$

Підставляючи її до (3.3) отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}^{inc}(z, t)|_{\rho=0} = -\vec{x}A_0 \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} (\{H(ct - z) - H(ct - ct_0 - z)\} - \\ \quad - \{H(ct - \sqrt{z^2 + R^2}) - H(ct - ct_0 - \sqrt{z^2 + R^2})\}); \\ \vec{E}^{ref}(z, t)|_{\rho=0} = \vec{x}A_0 \frac{\frac{c}{v} - 1}{\frac{c}{v} + 1} \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} (\{H(ct + z) - H(ct - ct_0 + z)\} - \\ \quad - \{H(ct - \sqrt{z^2 + R^2}) - H(ct - ct_0 - \sqrt{z^2 + R^2})\}) \end{array} \right.$$

Проілюструємо часову форму відбитої хвилі для збудження падаючою хвилею у формі короткого прямокутного імпульсу, що представлено на рис. 3.1 у випадку $\varepsilon = 9$. Тривалість імпульсу підібрана таким чином, щоб отримати ефект електромагнітного снаряду [74 – 76], що характеризується повільним затуханням енергії хвилі у вільному просторі.

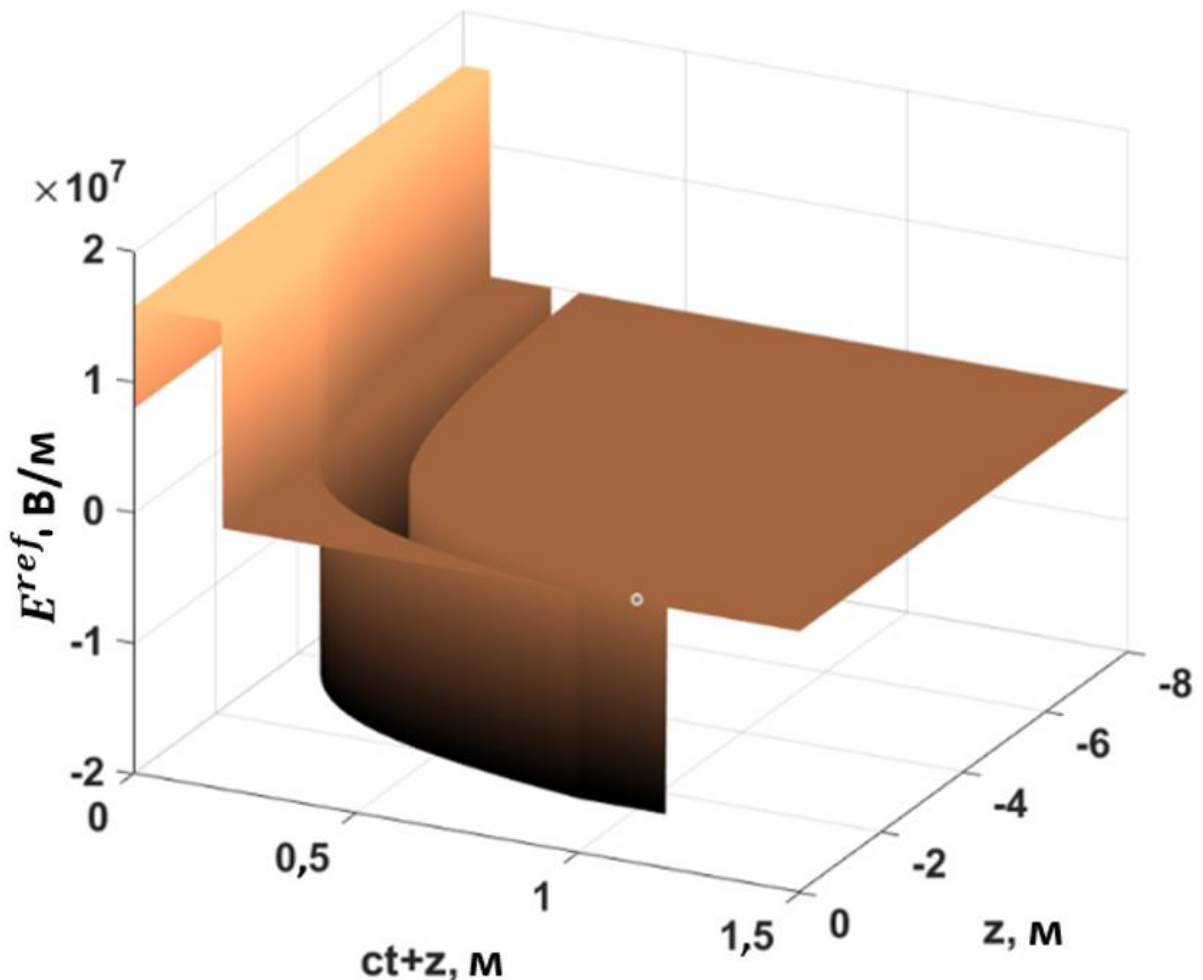


Рис. 3.2. Відбита хвиля, збуджена коротким прямокутним імпульсом, з параметрами $R = 1$ м, $A_0 = 1$ А/м, $ct_0 = 0,2R$

Цей ефект показано на рис 3.2, де енергія електричного поля відбитої хвилі не зменшується до точки $z = -2$ м.

3.2.2. Сигмоїда

Тут часова форма у явному вигляді задається формулою

$$f(ct) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{ct}{ct_0}}}.$$

Сигмоїду, яка представлена на рис 3.3, можна розглядати як гладкий варіант стрибкоподібної функції. Вивчення такого типу збудження є гарним наближенням до реальних умов генерації імпульсної хвилі, особливо для покращення процесу перетворення квазістатичної компоненти поля у випромінювану хвилю [77].

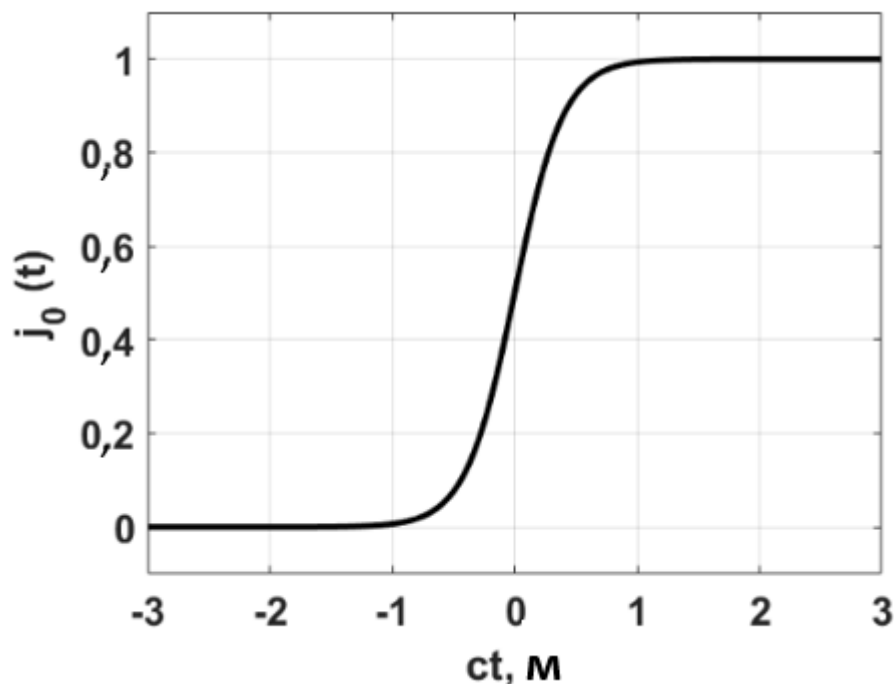


Рис. 3.3. Часова залежність збуджуючого струму у формі сигмоїди з параметрами $R = 1$ м, $A_0 = 1$ А/м, $ct_0 = 0,2R$

Аналітична форма розв'язку, відповідно до (3.3), задаватиметься такими виразами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}^{inc}(z, t)|_{\rho=0} = -\vec{x}A_0 \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 + e^{-\frac{ct-z}{ct_0}}} - \frac{1}{1 + e^{-\frac{ct-\sqrt{z^2+R^2}}{ct_0}}} \right); \\ \vec{E}^{ref}(z, t)|_{\rho=0} = \vec{x}A_0 \frac{\frac{c}{v} - 1}{\frac{c}{v} + 1} \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 + e^{-\frac{ct+z}{ct_0}}} - \frac{1}{1 + e^{-\frac{ct-\sqrt{z^2+R^2}}{ct_0}}} \right). \end{array} \right.$$

Очевидно, що відбита хвиля утворена двома однаковими імпульсами, зміщеними в часі, де величина запізнювання залежить від координати точки спостереження. Чим далі знаходиться точка джерела, тим меншим буде запізнювання. Отже, ці два імпульси, що накладаються, дають результуючу часову форму відбитої хвилі зі спадною амплітудою. Це явище спостерігається на рис. 3.4, де показано залежність електричної компоненти відбитої хвилі від поздовжньої координати та часу.

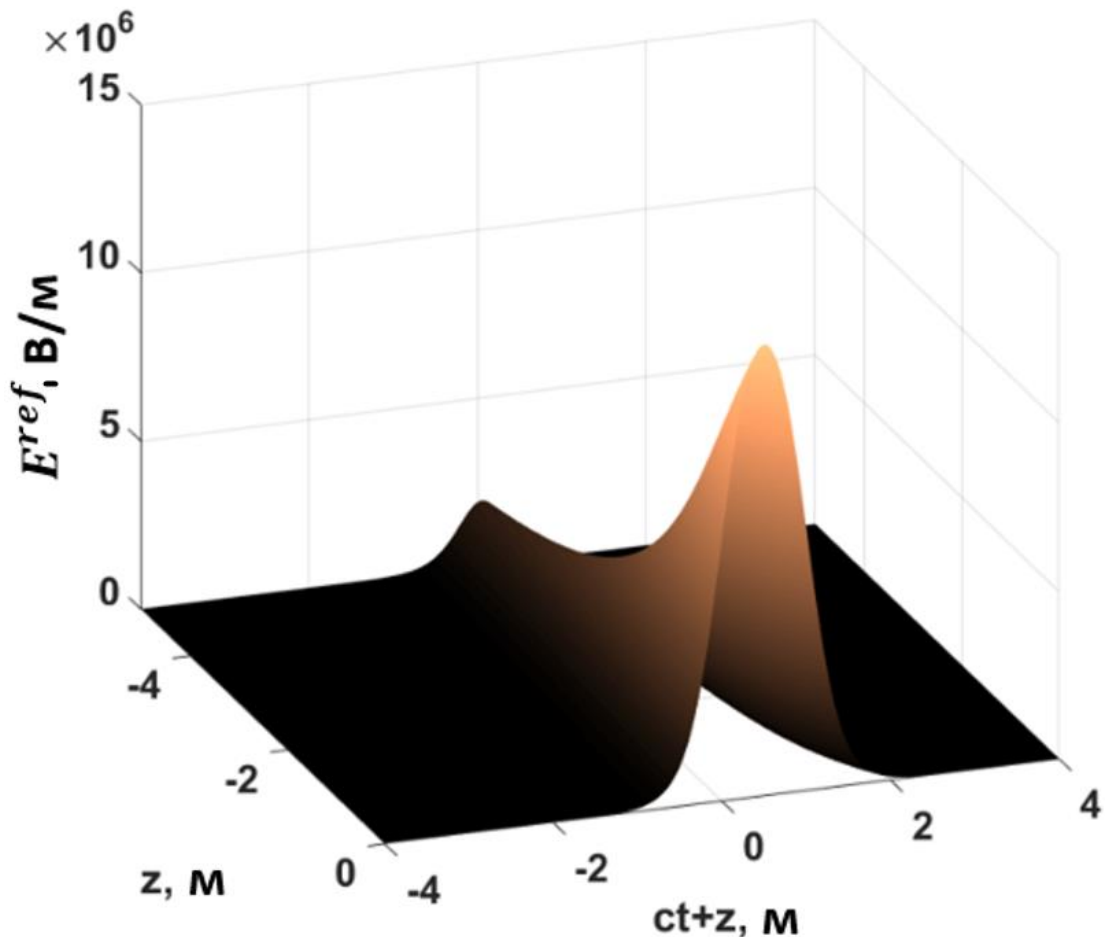


Рис. 3.4. Відбита хвиля, збуджена сигмоїдою, з параметрами $R = 1$ м,

$$A_0 = 1 \text{ A/м}, ct_0 = 0,2R$$

3.2.3. Гаусіан

Функція Гауса

$$f(ct) = e^{-\frac{(ct)^2}{(ct_0)^2}}$$

є гарним наближенням збудження реального короткого імпульсу нестационарним струмом (рис. 3.5). Падаюча та відбита хвилі представляються

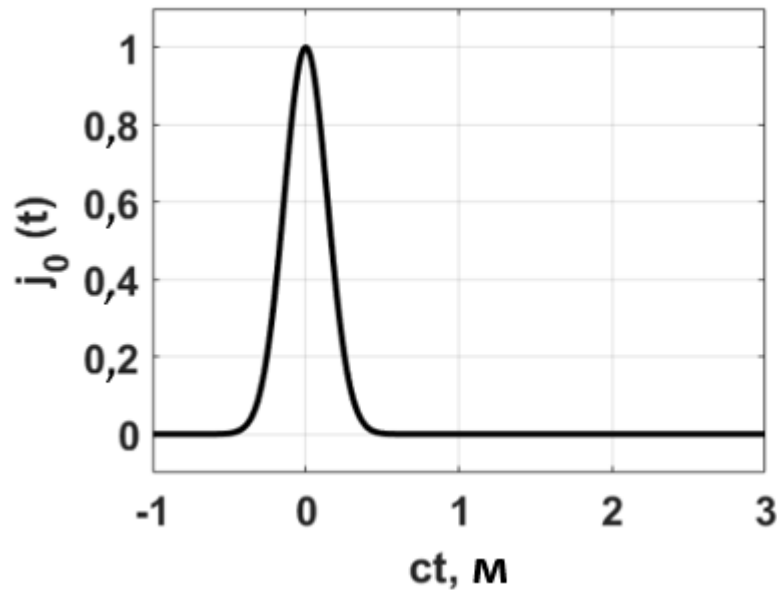


Рис. 3.5. Часова залежність збуджуючого струму у формі гаусіана з параметрами $R = 1$ м, $A_0 = 1$ А/м, $ct_0 = 0,2R$

простими виразами:

$$\begin{cases} \vec{E}^{inc}(z, t)|_{\rho=0} = -\vec{x}A_0 \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} \left(e^{-\frac{(ct-z)^2}{(ct_0)^2}} - e^{-\frac{(ct-\sqrt{z^2+R^2})^2}{(ct_0)^2}} \right); \\ \vec{E}^{ref}(z, t)|_{\rho=0} = \vec{x}A_0 \frac{\frac{c}{v} - 1}{\frac{c}{v} + 1} \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} \left(e^{-\frac{(ct+z)^2}{(ct_0)^2}} - e^{-\frac{(ct-\sqrt{z^2+R^2})^2}{(ct_0)^2}} \right). \end{cases}$$

Для розглянутого випадку збудження коротким імпульсом, відбита хвиля повинна складатися з двох однакових частин, що випромінюються з центру випромінювача та його краю. Форма гаусових імпульсів забезпечує перекриття імпульсів з мінімальним згасанням сумарної амплітуди. Це проілюстровано на рис. 3.6, де показана амплітуда електричної компоненти

відбитої хвилі. Отже, ми можемо спостерігати, що для даного розміру джерела часова форма веденого імпульсу впливає на амплітуду хвилі, яка зменшується вздовж поздовжньої осі.

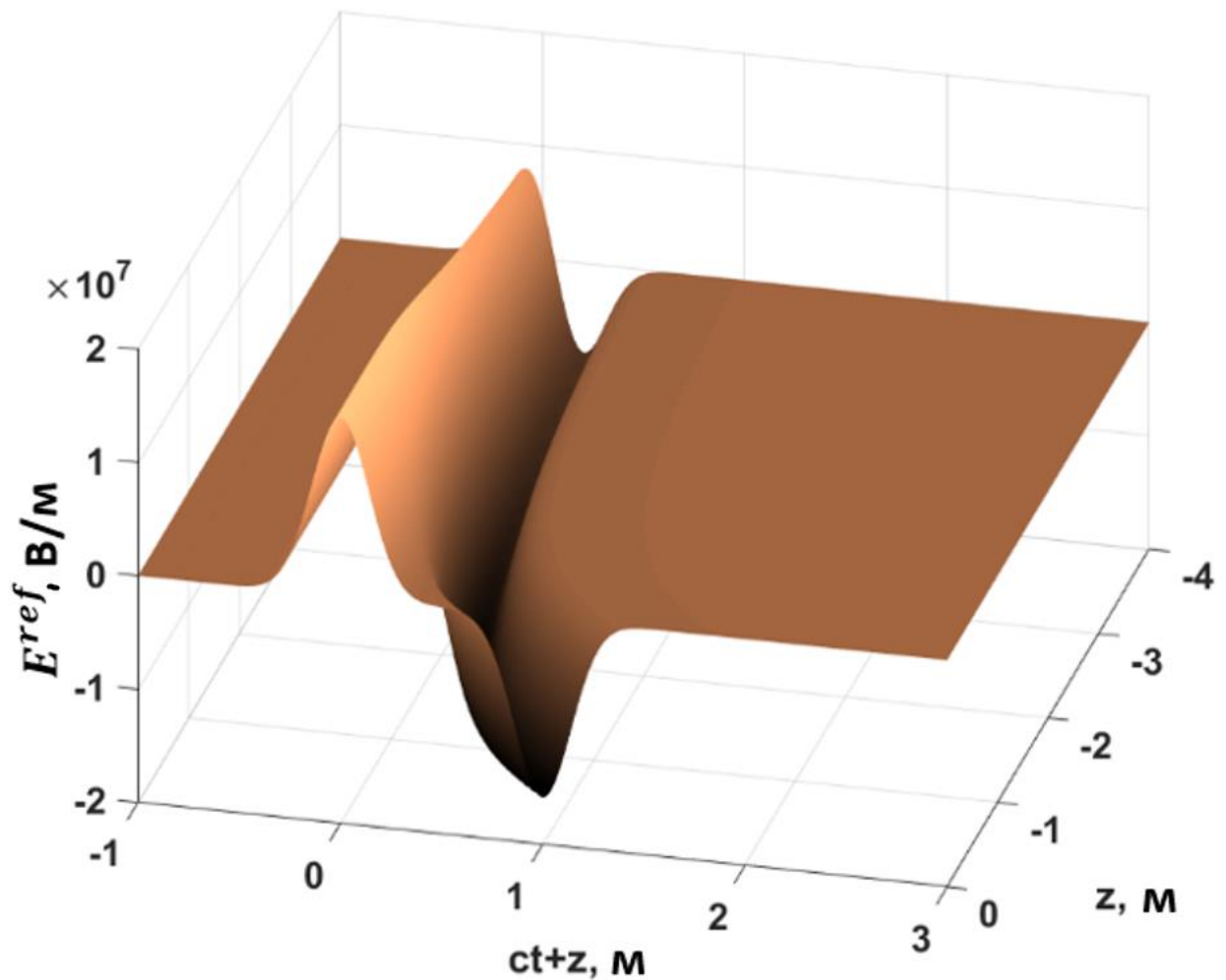


Рис. 3.6. Відбита хвиля, збуджена гаусіаном, з параметрами $R = 1$ м,

$$A_0 = 1 \text{ А/м}, ct_0 = 0,2R$$

3.2.4. Кардинальний синус

Така вхідна функція задається формулою

$$f(ct) = \frac{\sin \frac{ct}{ct_0}}{\frac{ct}{ct_0}}.$$

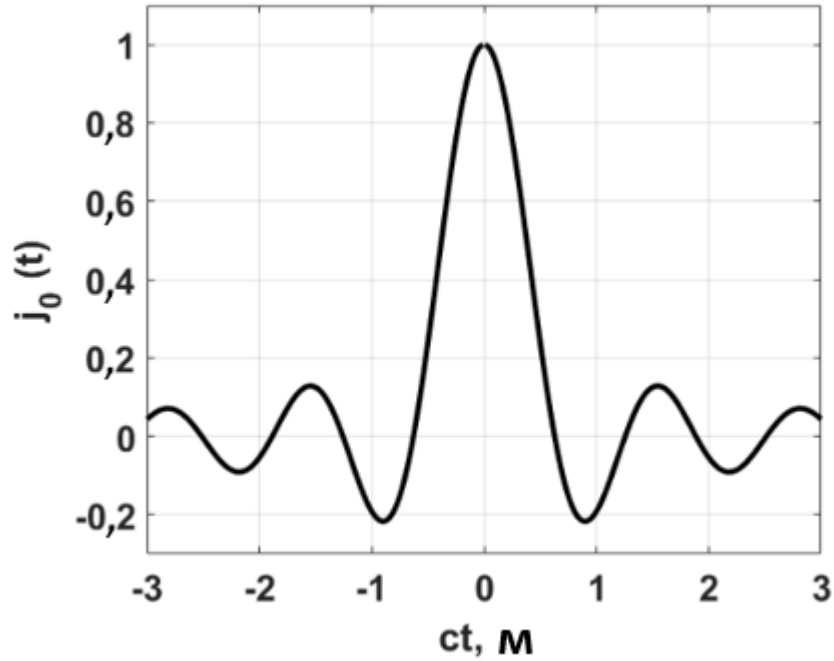


Рис. 3.7. Часова залежність збуджуючого струму у формі кардинального синуса з параметрами $R = 1$ м, $A_0 = 1$ А/м, $ct_0 = 0,2R$

Часова форма збуджуючого сигналу відповідає випадку частотного діапазону, обмеженого як низькими, так і високими частотами. Відмінною рисою функції, представленої на рис. 3.7, є її слабе затухання та осцилюючий характер. Нестационарні електричні поля для кардинального синуса задаватимуться такими виразами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}^{inc}(z, t)|_{\rho=0} = -\vec{x}A_0 \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} \left(\frac{\sin \frac{ct-z}{ct_0}}{\frac{ct-z}{ct_0}} - \frac{\sin \frac{ct-\sqrt{z^2+R^2}}{ct_0}}{\frac{ct-\sqrt{z^2+R^2}}{ct_0}} \right); \\ \vec{E}^{ref}(z, t)|_{\rho=0} = \vec{x}A_0 \frac{\frac{c}{v}-1}{\frac{c}{v}+1} \frac{\sqrt{\mu_0} R}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} \left(\frac{\sin \frac{ct+z}{ct_0}}{\frac{ct+z}{ct_0}} - \frac{\sin \frac{ct-\sqrt{z^2+R^2}}{ct_0}}{\frac{ct-\sqrt{z^2+R^2}}{ct_0}} \right). \end{array} \right.$$

Нескладно витягти положення максимуму амплітуди з аналітичних виразів у загальному випадку. Таким чином, різне співвідношення між тривалістю імпульсу та розміром випромінювача може дати різну поведінку хвильового пакета вздовж осі, включаючи часове збільшення амплітуди. Наприклад,

зменшення амплітуди може бути плавним як показано на рис. 3.8. У той же час, збудження такого ж, але коротшого імпульсу (рис. 3.9), може призвести до локального посилення амплітуди відбитої хвилі, як показано на рис. 3.10.

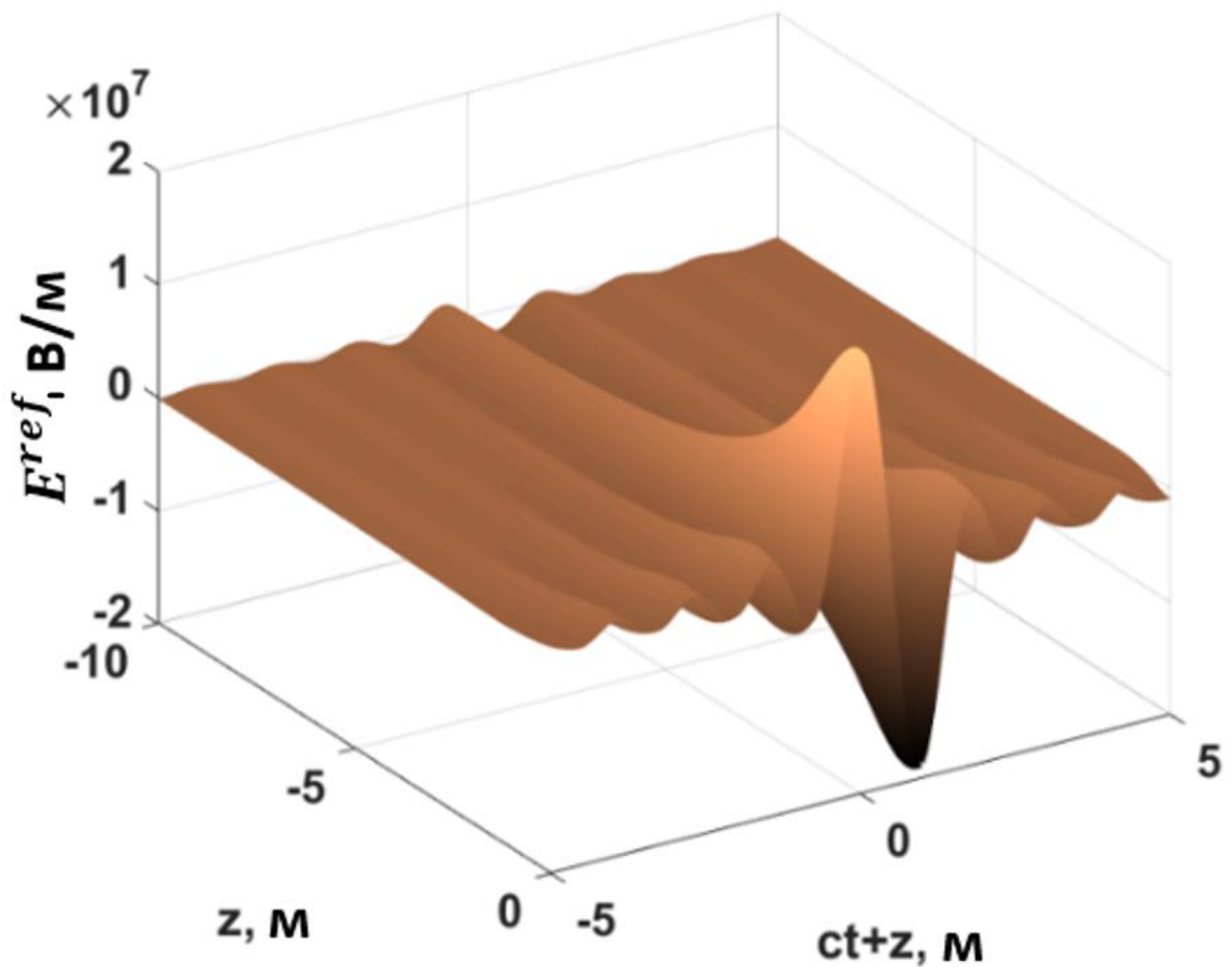


Рис. 3.8. Відбита хвиля, збуджена кардинальним синусом, з параметрами $R = 1 \text{ м}$, $A_0 = 1 \text{ А/м}$, $ct_0 = 0,2R$

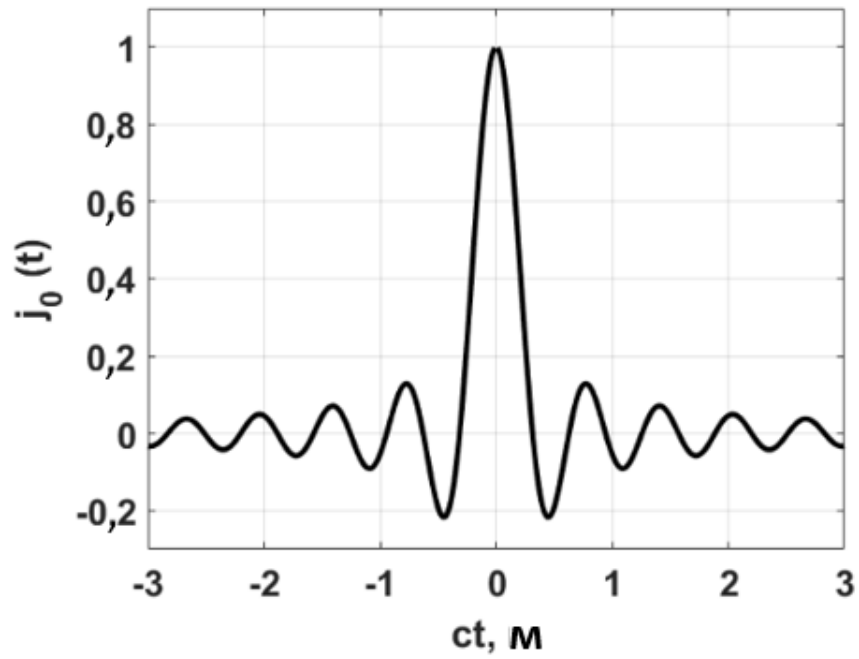


Рис. 3.9. Часова залежність збуджуючого струму у формі кардинального синуса з параметрами $R = 1$ м, $A_0 = 1$ А/м, $ct_0 = 0,1R$

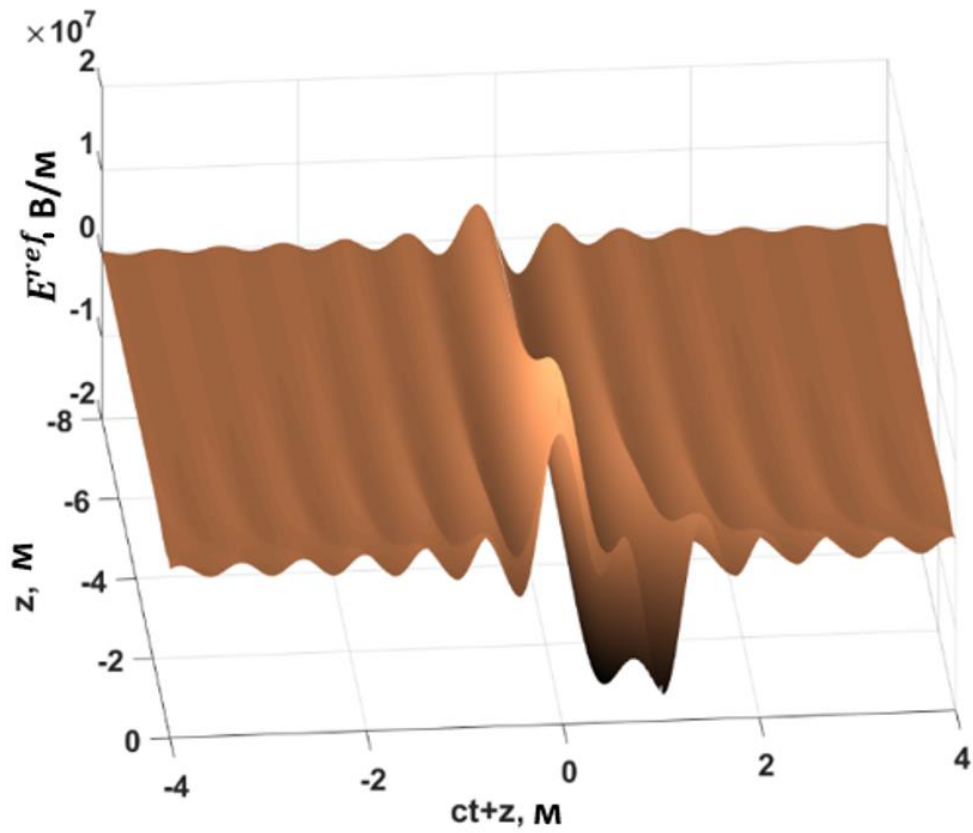


Рис. 3.10. Відбита хвиля, збуджена кардинальним синусом, з параметрами $R = 1$ м, $A_0 = 1$ А/м, $ct_0 = 0,1R$

РОЗДІЛ 4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ НЕСТАЦІОНАРНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ПЛАСКОГО ДЖЕРЕЛА ЗІ ЗБУДЖЕННЯМ У ВИГЛЯДІ СТИБКА

У даному розділі, з використанням відомого розв'язку задачі випромінювання нестационарної електромагнітної хвилі у вигляді стрибка [62, 68], досліджуються енергетичні характеристики даного модельного сигналу. Результати цієї роботи доповідалися на міжнародній конференції [67].

4.1. Постановка задачі

Конфігурація джерела струму у вигляді плаского диску, коли струм однонаправлений і рівномірний, утворює Н-хвилю [39, 68]. Його основні енергетичні характеристики описуються вектором Умова–Пойнтінга:

$$\vec{S}(\rho, \varphi, z, t) = [\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) \times \vec{H}^*(\rho, \varphi, z, t)]. \quad (4.1)$$

Верхній індекс (*) у поперечній компоненті магнітного поля позначає комплексну спряженість. Згідно методу модового базису [32, 78] у модифікації для вільного простору [39, 68] поперечні компоненти електромагнітного поля описуються виразами

$$\begin{cases} \vec{E}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi V_m^h(z, t, \chi) [\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0]; \\ \vec{H}^*(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' I_{m'}^{h*}(z, t, \chi') \nabla \psi_{m'}^*(\rho, \varphi, \chi'). \end{cases} \quad (4.2)$$

Тут, $\psi_m(\rho, \varphi, \chi)$ – це базисні функції [64], чий градієнти у циліндричній системі координат приймають вид

$$\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) = \frac{e^{im\varphi} \sqrt{\chi}}{2} \left((J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\rho}_0 + i(J_{m-1}(\chi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\varphi}_0 \right).$$

Можна помітити, що нам потрібне комплексне спряження в (4.1) через комплексність базисних функцій та еволюційного коефіцієнта поперечної

магнітної компоненти I_m^h поля. Зауважимо, що з математичної точки зору, незалежно від того ведеться у виразах (4.2) сумування за кутовими модами m або m' , а інтегрування – за спектральними параметрами χ або χ' , результат обчислень та фізика, що описує процес поширення електромагнітного поля, від зміни позначень не зміниться.

Еволюційні коефіцієнти поперечних електричної V_m^h та магнітної I_m^{h*} компонент поля, які мають вид

$$\begin{cases} V_m^h(z, t, \chi) = iA_0R \frac{\sqrt{\mu_0} J_1(\chi R)}{4 \sqrt{\chi}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}) J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}); \\ \begin{cases} I_{m'}^{h*}(z, t, \chi') = -iA_0R \frac{\sqrt{\mu_0} J_1(\chi R)}{4 \sqrt{\chi}} (\delta_{m',1} + \delta_{m',-1}) \cdot \\ \cdot \left(J_0(\chi' \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^k J_{2k}(\chi' \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right). \end{cases} \end{cases} \quad (4.3)$$

виражаються через розв'язок неоднорідного рівняння Клейна–Гордона [39, 68]. Співвідношення (4.1) – (4.3) дозволяють дослідити рух енергії, визваний випроміненою хвилею.

4.2. Виведення аналітичних виразів для енергії

Підставимо модові розклади (4.2) до визначення вектору густини потоку енергії (4.1). Знаючи, що електрична та магнітна сталі пов'язані зі швидкістю світла у вакуумі

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c,$$

формулу (4.1) можна переписати у вигляді

$$\vec{S}(\rho, \varphi, z, t) = c^2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi V_m^h(z, t, \chi) \right) \left(\sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' I_{m'}^{h*}(z, t, \chi') \right) \cdot \left[[\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0] \times \nabla \psi_{m'}^*(\rho, \varphi, \chi') \right].$$

Векторний добуток поперечних компонент електромагнітного поля перейшов до подвійного векторного добутку градієнтів базисних функцій та одиничного вектору поздовжньої осі в циліндричній системі координат

$$\vec{S}(\rho, \varphi, z, t) = c^2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi V_m^h(z, t, \chi) \right) \left(\sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' I_{m'}^{h*}(z, t, \chi') \right) \cdot \vec{z}_0 \left(\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_{m'}^*(\rho, \varphi, \chi') \right).$$

Помножимо обидві частини виразу на вектор поздовжньої осі та проінтегруємо їх по усьому радіальному напівпростору та кутам випромінювання. Тоді, у лівій частині, ми отримаємо вираз, що визначає потужність поперечної електромагнітної хвилі, що проходить через нескінченну поперечну площину:

$$P_{EH}(z, t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \vec{S}(\rho, \varphi, z, t) \cdot \vec{z}_0. \quad (4.4)$$

У правій частині, враховуючи властивість лінійності обох інтегралів, отримаємо

$$P_{EH}(z, t) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi V_m^h(z, t, \chi) \right) \left(\sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' I_{m'}^{h*}(z, t, \chi') \right) \cdot c^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \left(\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_{m'}^*(\rho, \varphi, \chi') \right).$$

Через нормування у Гільбертовому просторі L_4^2 [39, 68], подвійний інтеграл від скалярного добутку градієнтів базисної функції з такою ж, але комплексно спряженою, дає символ Кронекера та дельта-функцію (див. додаток) [64]:

$$P_{EH}(z, t) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi V_m^h(z, t, \chi) \right) \left(\sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi' I_{m'}^{h*}(z, t, \chi') \right) \cdot \delta_{mm'} \delta(\chi' - \chi).$$

Це дає нам можливість застосувати інтегральну властивість дельта-функції та визначення символу Кронекера, що залишає тільки один доданок $m' = m$.

Остаточно, ми маємо таку формулу для потужності поперечної електромагнітної хвилі у вільному просторі:

$$P_{EH}(z, t) = 2\pi c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi V_m^h(z, t, \chi) I_m^{h*}(z, t, \chi). \quad (4.5)$$

Підставимо до формули (4.5) еволюційні коефіцієнти (4.3) у явному вигляді:

$$P_{EH}(z, t) = -2\pi c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \left(iA_0 R \frac{\sqrt{\mu_0} J_1(\chi R)}{4 \sqrt{\chi}} \right)^2 (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1})^2 \cdot J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \left(J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^k J_{2k}(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right)$$

і спростимо вираз, скориставшись піднесенням до квадрату суми символів Кронекера

$$(\delta_{m,1} + \delta_{m,-1})^2 = \delta_{m,1}^2 + 2\delta_{m,1}\delta_{m,-1} + \delta_{m,-1}^2.$$

Коли $m = 1$, другий та третій доданки дорівнюватимуть нулю. У випадку $m = -1$ залишиться тільки третій доданок. Добуток двох символів Кронекера з різними індексами завжди дорівнює нулю. Тоді вираз для потужності поперечної електромагнітної хвилі як функції часу та поздовжньої координати матиме вигляд:

$$P_{EH}(z, t) = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^{\infty} d\chi \frac{1}{\chi} J_1^2(\chi R) J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \cdot \left(J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^k J_{2k}(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right). \quad (4.6)$$

4.3. Аналітичні розрахунки та числове моделювання

Дослідимо фізику процесів, що може витікати з формули (4.6). Для цього, розглянемо спрощені випадки поведінки випромінювання в дальній зоні та

отримаємо вирази на поздовжній осі $z = 0$. Зробивши відповідні висновки, перейдемо до побудови загальної часової залежності.

4.3.1. Наближення дальньої зони

На великих відстанях від джерела ми можемо припустити, що

$$J_0\left(\chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right) \gg 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{ct - z}{ct + z}\right)^k J_{2k}\left(\chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right) \quad (4.7)$$

і потужність (4.6) розраховуватиметься за допомогою виразу

$$P_{EH}^{(0)}(z, t) = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^{\infty} d\chi \frac{1}{\chi} J_0^2\left(\chi\sqrt{c^2t^2 - z^2}\right) J_1^2(\chi R). \quad (4.8)$$

Цей інтеграл розраховується чисельно для різних відстаней від джерела. Амплітуду густини струму та радіус диску покладемо рівними одиниці. З рис. 4.1 видно, що потужність має максимальне значення у початковий момент часу. Тривале затухання потужності можна пояснити нескінченним часом, який необхідний для досягнення віддалених точок на площині $z = \text{const}$ для віддалених радіальних координат у циліндричній системі.

Інтегрування проводилося методом Сімпсона з циклічним уточненням верхньої межі інтегрування за правилом Рунге, щоб отримати результати з заданою точністю. Враховуючи збіжність, обраховуваність та математичну простоту виразу (4.8), було б цікаво проінтегрувати його аналітично або хоча б дослідити інтеграл асимптотичними методами математичної фізики.

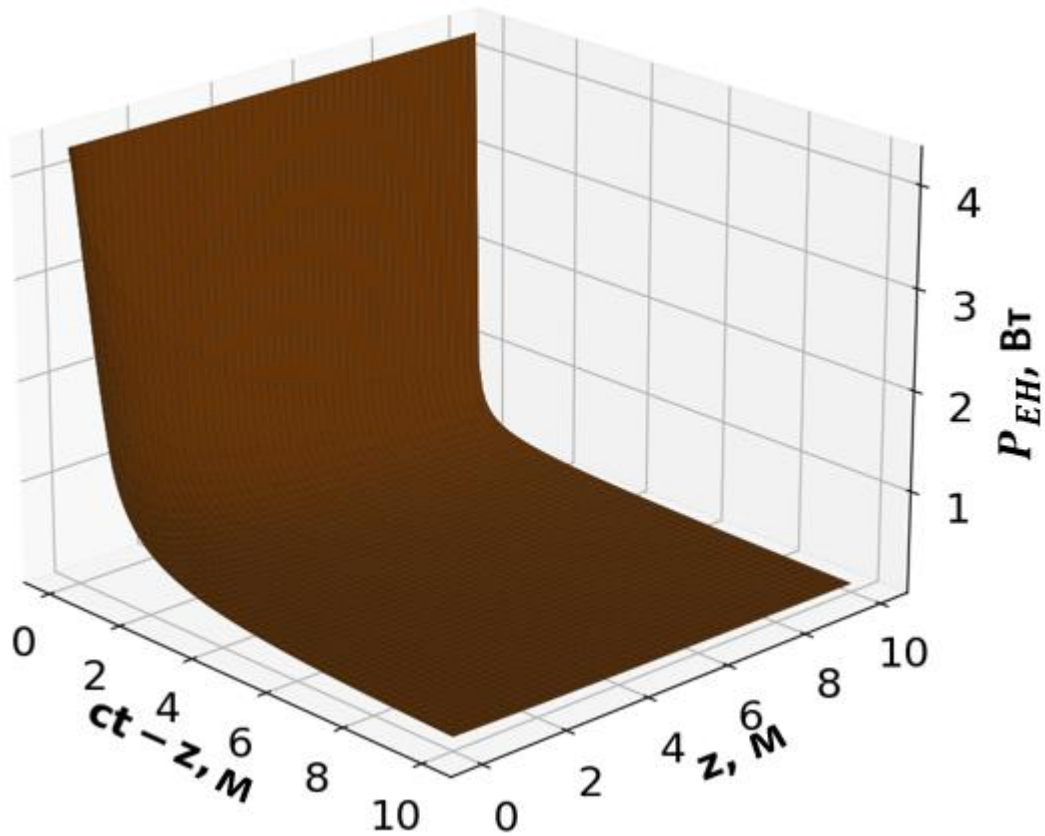


Рис. 4.1. Потік енергії поля поперечної електромагнітної хвилі у наближенні дальньої зони

4.3.2. Точний розв'язок

Розрахунок (4.6) дає випромінену потужність для довільних відстаней z . Розглянемо формулу (4.6) для $z = 0$. У цьому випадку вираз у дужках дорівнює одиниці, згідно властивості функцій Бесселя [69], тоді

$$P_{EH}(t)|_{z=0} = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \int_0^{\infty} d\chi \frac{1}{\chi} J_1^2(\chi R) J_0(\chi ct).$$

Застосовуючи формулу 2.12.42.31 [71] після виправлення в ній пропущених дужок

$$\int_0^{\infty} d\chi \frac{1}{\chi} J_1^2(\chi R) J_0(\chi ct) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), & 0 < ct < 2R; \\ 0, & 0 < 2R < ct, \end{cases}$$

можна отримати точний вираз для потужності поперечної електромагнітної хвилі від випромінювача ($z = 0$):

$$P_{EH}(t)|_{z=0} = \pi c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{ct}{2R} - \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} \right), & 0 < ct < 2R; \\ 0, & 0 < 2R < ct. \end{cases}$$

Цікаво помітити, що через час, коли хвиля повинна досягнути краю випромінювача, потужність дорівнюватиме нулю. Це важливе явище ми не можемо спостерігати на рис. 4.1.

Повна енергія поперечної електромагнітної хвилі обчислюється за формулою

$$W_{EH}(z) = \int_0^{\infty} P_{EH}(z, t) dt. \quad (4.9)$$

Ми можемо аналітично розрахувати енергію поблизу джерела, врахувавши, що

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2R}{c}} \arccos \frac{ct}{2R} dt = \frac{t}{\pi} \arccos \frac{ct}{2R} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{t}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{ct}{2R}\right)^2}} \right) d\left(\frac{ct}{2R}\right) = \frac{2R}{\pi c}.$$

і

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2R}{c}} \frac{ct}{4R^2} \sqrt{4R^2 - c^2 t^2} dt = \frac{1}{\pi} \frac{2R}{3c}.$$

Тоді

$$W_{EH}|_{z=0} = c^2 A_0^2 R^2 \frac{\mu_0}{4} \left(\frac{2R}{c} - \frac{2R}{3c} \right) = c A_0^2 R^3 \frac{\mu_0}{3}. \quad (4.10)$$

4.3.3. Врахування доданків із ряду

Цікаво провести порівняння кількості враховуваних функцій Бесселя у виразі (4.6) на точність числових розрахунків. На рис. 4.2 представлено графік

потужності для перших п'яти членів ряду. Видно, що за малих значень позовжньої координати має місце нестійкість у потужності хвилі. Порівняємо

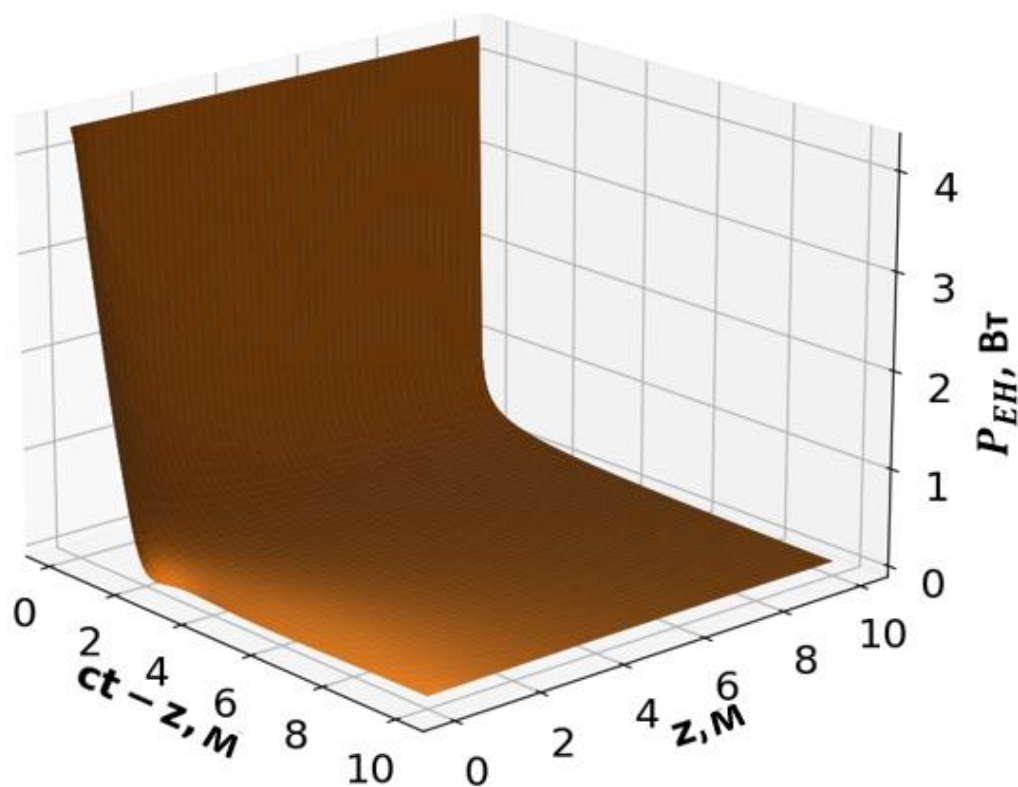


Рис. 4.2. Потік енергії поля поперечної електромагнітної хвилі з урахуванням перших п'яти доданків у (4.6)

цей рисунок з рис. 4.3, де враховуються вже перші десять членів ряду. Легко бачити, що цей рисунок добре узгоджується з аналітичним розв'язком, а саме,

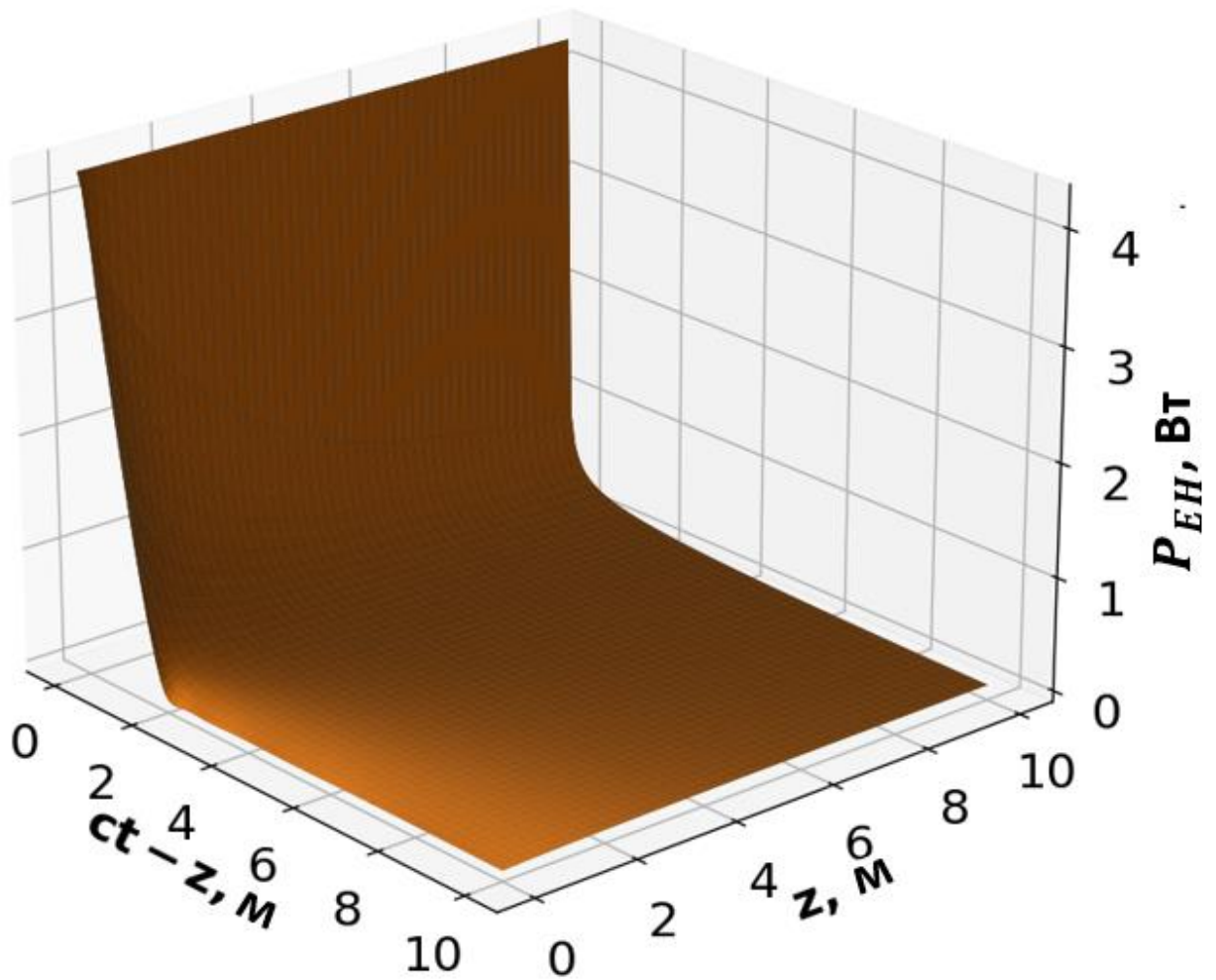


Рис. 4.3. Потік енергії поля поперечної електромагнітної хвилі з урахуванням перших десяти доданків у (4.6)

після моменту часу, що відповідає поширенню хвилі від одного краю апертури до іншого, потужність відсутня. Що стосується малих відхилень на рис. 4.2 при малих значеннях z , то це явище нагадує ефект Гіббса.

Використовуючи формулу (4.9), можна розрахувати повну енергію хвилі у різних поперечних перерізах z . Рис. 4.4 показує зменшення повної енергії. Її частина являє собою статичну енергію поперечного електромагнітного поля, яка залишається поблизу випромінювача.

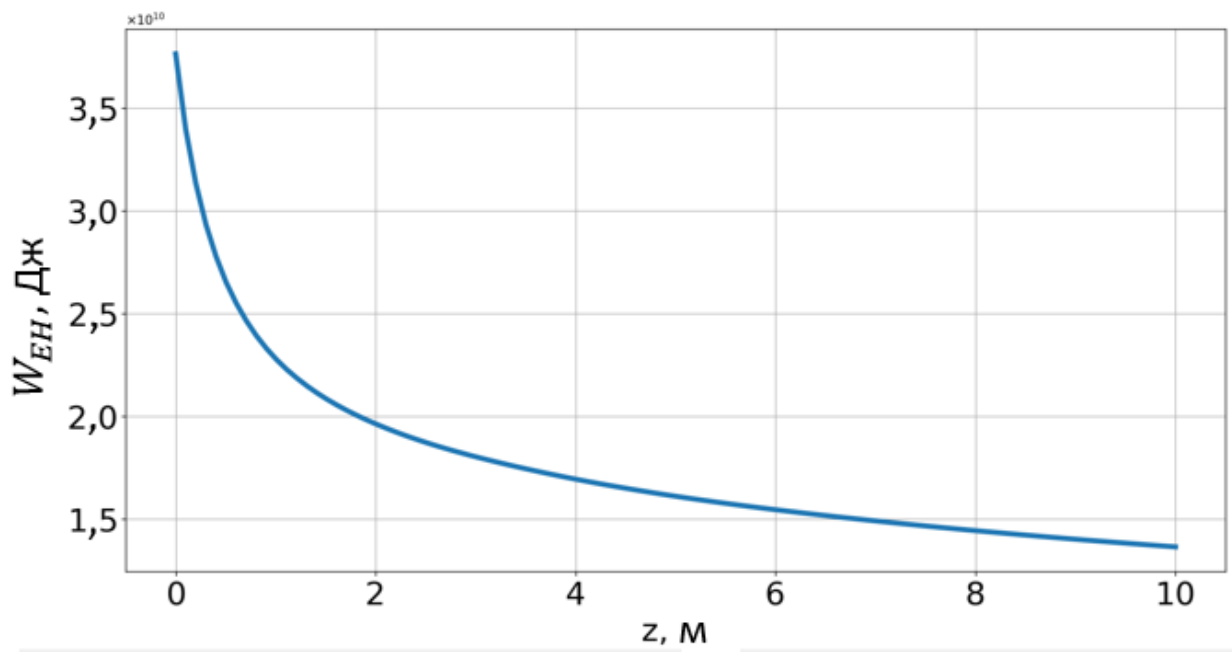


Рис. 4.4. Повна енергія поля випроміненої поперечної електромагнітної хвилі в залежності від z

РОЗДІЛ 5. АНАЛІТИЧНА ФОРМА РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ НА ГРАНИЦІ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ У ПЕРШОМУ НАБЛИЖЕННІ

У даному розділі аналітично розв'язується задача випромінювання нестационарного електромагнітного поля на границі двох середовищ. Якщо у першому розділі при зшиванні полів ми порівнювали спектральні параметри, то тут відбувається розклад падаючої хвилі на дві частини. Це робиться для того, щоб підтвердити або спростувати отриманий в роботах [62, 64] розв'язок. Результати дослідження викладено у статті [63] та презентовано на науковій конференції [65].

5.1. Постановка задачі

Нехай у вільному просторі поширюється електромагнітна Н-хвиля, створена джерелом нестационарного струму, який задається у циліндричній системі координат. Компоненти цього поля можна описати за допомогою методу еволюційних рівнянь, удосконаленого для вільного простору [79]. Випишемо модові розклади поперечних компонент цього поля:

$$\begin{cases} \vec{E}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi V_m^h(z, t, \chi) [\nabla\psi_m(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0]; \\ \vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi I_m^h(z, t, \chi) \nabla\psi_m(\rho, \varphi, \chi). \end{cases} \quad (5.1)$$

Тут $\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{Ф/м}$, $\mu_0 \approx 1,25 \cdot 10^{-12} \text{А/м}$ – константи вільного простору; V_m^h , I_m^h – еволюційні коефіцієнти поперечних електричної та магнітної компонент поля відповідно. Для їх знаходження необхідно розв'язати рівняння Клейна–Гордона [72]

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi^2 \right) h_m^h(z, t, \chi) = \sqrt{\mu_0} j_m(z, t, \chi) \quad (5.2)$$

із заданими початковими та граничними умовами. Еволюційний коефіцієнт h_m^h пов'язаний з відповідними функціями у виразах для електричного та магнітного полів такими співвідношеннями:

$$I_m^h(z, t, \chi) = \frac{\partial h_m^h(z, t, \chi)}{\partial z}; \quad V_m^h(z, t, \chi) = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_m^h(z, t, \chi)}{\partial t}. \quad (5.3)$$

Функція ψ_m , що складається з функції Бесселя m -го порядку та комплексної експоненти, історично називається мембранною:

$$\psi_m(\rho, \varphi, \chi) = \frac{J_m(\chi\rho)}{\sqrt{\chi}} e^{im\varphi}.$$

Електромагнітне поле, що випромінюється антеною на поверхню середовища, ми позначатимемо верхнім індексом «*inc*» (з англ. *incident* – той, що падає). Частина поля, що пройшла через границю розділу двох середовищ позначатимемо як «*prop*» (з англ. *propagated* – той, що пройшов), а залишкову частину, що відбилася від границі, позначимо за «*ref*» (з англ. *reflected* – той, що відбився). Щоб знайти ці компоненти поля, нам необхідно розв'язати одне неоднорідне (для падаючої хвилі) та два однорідних (для заломленої та відбитої хвиль) еволюційних рівняння з неоднорідними граничними умовами [64]. Неоднорідне рівняння Клейна–Гордона розв'язується методом функції Рімана. Його розв'язки мають вигляд [79]:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{m_i}^{inc}(z, t, \chi_i) = -A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0}R}{2} (\delta_{m_i,1} + \delta_{m_i,-1}) \frac{J_1(\chi_i R)}{\chi_i \sqrt{\chi_i}} \cdot \\ \cdot \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(\frac{ct-z}{ct+z} \right)^{\frac{2k_i+1}{2}} J_{1+2k_i}(\chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2}); \\ I_{m_i}^{inc}(z, t, \chi_i) = A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0}R}{4} (\delta_{m_i,1} + \delta_{m_i,-1}) \frac{J_1(\chi_i R)}{\sqrt{\chi_i}} \cdot \\ \cdot \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(\left(\frac{ct-z}{ct+z} \right)^{k_i} J_{2k_i}(\chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) + \left(\frac{ct-z}{ct+z} \right)^{k_i+1} J_{2+2k_i}(\chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right); \\ V_{m_i}^{inc}(z, t, \chi_i) = A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0}R}{4} (\delta_{m_i,1} + \delta_{m_i,-1}) \frac{J_1(\chi_i R)}{\sqrt{\chi_i}} J_0(\chi_i \sqrt{c^2 t^2 - z^2}). \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Відбита хвиля описується загальним розв'язком, отриманим методом розділення змінних у спеціальній системі координат (різновид заміни змінних) для рівняння Клейна–Гордона, дослідженого математичними методами теорії груп [72]:

$$\left\{ \begin{aligned} h_{m_r}^{ref}(z, t, \chi_r, \varepsilon) &= \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r, \varepsilon) \left(\frac{ct+z}{ct-z} \right)^{\frac{k_r}{2}} J_{k_r}(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2}); \\ I_{m_r}^{ref}(z, t, \chi_r, \varepsilon) &= \frac{\chi_r}{2} \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r, \varepsilon) \cdot \\ &\cdot \left(\left(\frac{ct+z}{ct-z} \right)^{\frac{k_r+1}{2}} J_{k_r+1}(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) + \left(\frac{ct+z}{ct-z} \right)^{\frac{k_r-1}{2}} J_{k_r-1}(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right); \\ V_{m_r}^{ref}(z, t, \chi_r, \varepsilon) &= \frac{\chi_r}{2} \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r, \varepsilon) \cdot \\ &\cdot \left(\left(\frac{ct+z}{ct-z} \right)^{\frac{k_r+1}{2}} J_{k_r+1}(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) - \left(\frac{ct+z}{ct-z} \right)^{\frac{k_r-1}{2}} J_{k_r-1}(\chi_r \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \right). \end{aligned} \right. \quad (5.5)$$

Загальний вигляд компонент заломленої хвилі отримано, користуючись таким самим методом. Різниця полягає тільки у наявності середовища, що зумовлює зменшення швидкості поширення хвилі, та зміні знаку, у порівнянні з попередніми виразами (5.5), що показує зміну напрямку вектору Умова–Пойнтінга:

$$\left\{ \begin{aligned}
h_{m_p}^{prop}(z, t, \chi_p, \varepsilon) &= \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m_p, prop}(\chi_p, \varepsilon) \left(\frac{vt-z}{vt+z} \right)^{\frac{k_p}{2}} J_{k_p} \left(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2} \right); \\
I_{m_p}^{prop}(z, t, \chi_p, \varepsilon) &= -\frac{\chi_p}{2} \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m_p, prop}(\chi_p, \varepsilon) \cdot \\
\cdot \left(\left(\frac{vt-z}{vt+z} \right)^{\frac{k_p+1}{2}} J_{k_p+1} \left(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2} \right) + \left(\frac{vt-z}{vt+z} \right)^{\frac{k_p-1}{2}} J_{k_p-1} \left(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2} \right) \right); \\
V_{m_p}^{prop}(z, t, \chi_p, \varepsilon) &= \frac{\chi_p}{2} \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B_{k_p}^{m_p, prop}(\chi_p, \varepsilon) \cdot \\
\left(\left(\frac{vt-z}{vt+z} \right)^{\frac{k_p+1}{2}} J_{k_p+1} \left(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2} \right) - \left(\frac{vt-z}{vt+z} \right)^{\frac{k_p-1}{2}} J_{k_p-1} \left(\chi_p \sqrt{v^2 t^2 - z^2} \right) \right).
\end{aligned} \right. \quad (5.6)$$

У розв'язках (5.5), (5.6) функції $B_{k_r}^{m_r, ref}(\chi_r, \varepsilon)$, $B_{k_p}^{m_p, prop}(\chi_p, \varepsilon)$ – невідомі коефіцієнти, які можна знайти, застосувавши граничні умови класичної електродинаміки. Нашою метою буде аналітичне знаходження вигляду цих функцій, їх перевірка на фізичний сенс у граничних випадках та перевірка у шуканому загальному розв'язку.

5.2. Розв'язання задачі

У якості граничних умов візьмемо рівність між собою тангенціальних компонент електричного і магнітного полів на границі розділу середовищ:

$$\begin{aligned}
\vec{E}^{inc}(\rho, \varphi, t)|_{z=0} + \vec{E}^{ref}(\rho, \varphi, t, \varepsilon)|_{z=0} &= \vec{E}^{prop}(\rho, \varphi, t, \varepsilon)|_{z=0}; \\
\vec{H}^{inc}(\rho, \varphi, t)|_{z=0} + \vec{H}^{ref}(\rho, \varphi, t, \varepsilon)|_{z=0} &= \vec{H}^{prop}(\rho, \varphi, t, \varepsilon)|_{z=0}.
\end{aligned} \quad (5.7)$$

Користуючись ортогональними перетвореннями [62, 64], отримуємо співвідношення між еволюційними коефіцієнтами поперечних електричної та магнітної компонент на поверхні середовища:

$$\begin{aligned}
V_m^{inc}(t, \chi)|_{z=0} + V_m^{ref}(t, \chi, \varepsilon)|_{z=0} &= V_m^{prop}(t, \chi, \varepsilon)|_{z=0}; \\
I_m^{inc}(t, \chi)|_{z=0} + I_m^{ref}(t, \chi, \varepsilon)|_{z=0} &= I_n^{prop}(t, \chi, \varepsilon)|_{z=0}.
\end{aligned} \quad (5.8)$$

Еволюційні коефіцієнти для поперечної електричної компоненти поля на границі двох середовищ

$$\begin{aligned}
 V_m^{inc}(t, \chi)|_{z=0} &= \frac{\chi}{2} B^{m,inc}(\chi) J_0(\chi ct); \\
 V_m^{ref}(t, \chi, \varepsilon)|_{z=0} &= \frac{\chi}{2} \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m,ref}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_r+1}(\chi ct) - J_{k_r-1}(\chi ct) \right); \\
 V_m^{prop}(t, \chi, \varepsilon)|_{z=0} &= \frac{\chi}{2} \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B_{k_p}^{m,prop}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_p+1}(\chi vt) - J_{k_p-1}(\chi vt) \right).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Для поперечної магнітної компоненти ми можемо записати, що

$$\begin{aligned}
 I_m^{inc}(t, \chi)|_{z=0} &= \frac{\chi}{2} A^{m,inc}(\chi) \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(J_{2k_i}(\chi ct) + J_{2+2k_i}(\chi ct) \right); \\
 I_m^{ref}(t, \chi, \varepsilon)|_{z=0} &= \frac{\chi}{2} \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m,ref}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_r+1}(\chi ct) + J_{k_r-1}(\chi ct) \right); \\
 I_m^{prop}(t, \chi, \varepsilon)|_{z=0} &= -\frac{\chi}{2} \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m,prop}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_p+1}(\chi vt) + J_{k_p-1}(\chi vt) \right).
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Тут ми позначили

$$\begin{aligned}
 B^{m,inc}(\chi) &= A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0}R J_1(\chi R)}{2 \chi\sqrt{\chi}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}); \\
 A^{m,inc}(\chi) &= A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0}R J_1(\chi R)}{2 \chi\sqrt{\chi}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}).
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Хоча коефіцієнти $B^{m,inc}$, $A^{m,inc}$ і рівні між собою, вони мають різну роль у цій задачі. Значення $B^{m,inc}$ є амплітудами еволюційного коефіцієнта поперечної електричної компоненти при різних m та пов'язують невідомі коефіцієнти з диференціальних рівнянь Клейна–Гордона для відбитої та заломленої хвиль. Множники $A^{m,inc}$ є амплітудними значеннями еволюційного коефіцієнта поперечної магнітної компоненти та показують, що в іншому випадку, вони можуть відрізнятися від амплітуд $B^{m,inc}$.

Підставимо функції (5.9) до першого співвідношення з (5.8)

$$\begin{aligned}
B^{m,inc}(\chi)J_0(\chi ct) + \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m,ref}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_r+1}(\chi ct) - J_{k_r-1}(\chi ct) \right) = \\
= \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B_{k_p}^{m,prop}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_p+1}(\chi vt) - J_{k_p-1}(\chi vt) \right).
\end{aligned}$$

Через те, що в лівій частині присутні функції Бесселя з аргументом χct , а в правій – ті ж самі циліндричні функції, але з χvt у дужках, то звідси знайти зв'язок між невідомими коефіцієнтами виявляється неможливим. Якщо підставити вирази (5.10) до другого співвідношення з (5.8), то отримаємо, що

$$\begin{aligned}
A^{m,inc}(\chi) \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(J_{2k_i}(\chi ct) + J_{2+2k_i}(\chi ct) \right) + \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m,ref}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_r+1}(\chi ct) + \right. \\
\left. + J_{k_r-1}(\chi ct) \right) = - \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m,prop}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_p+1}(\chi vt) + J_{k_p-1}(\chi vt) \right).
\end{aligned}$$

У першому наближенні, записаний вираз так само складний як і попередній: ліва частина містить функції Бесселя з аргументом χct , а ліва – відповідно χvt , які не вдається пов'язати між собою. З іншого боку, для суми функцій Бесселя існує формула з довідника [69], яка дозволяє нам продовжити аналіз написаного співвідношення на поверхні середовища:

$$\sum_{k_i=0}^{\infty} \left(J_{2k_i}(\tau) + J_{2+2k_i}(\tau) \right) = J_0(\tau) + 2 \sum_{k_i=0}^{\infty} J_{2+2k_i}(\tau) = 1. \quad (5.12)$$

Це означає, що немає різниці, який аргумент буде у функції Бесселя: χct чи χvt . В обох випадках сума дорівнюватиме одиниці.

Фізично, можна представити коефіцієнт-амплітуду $A^{m,inc}$ у вигляді суми двох частин, одна з яких іде на відбиття хвилі, а інша – на проходження у середовище із заданою діелектричною проникністю ε :

$$A^{m,inc}(\chi) = A^{m,inc(r)}(\chi, \varepsilon) + A^{m,inc(p)}(\chi, \varepsilon). \quad (5.13)$$

Тоді, враховуючи, що амплітуда $A^{m,inc}$ множилася на суму, що дорівнює одиниці, то частину, що піде на відбиття можна помножити на суму функцій

Бесселя з аргументом χct , а залишок, пов'язаний з проходженням – на ту ж саму суму, тільки з аргументом χvt . Остаточо, виходить:

$$\begin{aligned} A^{m,inc(r)}(\chi, \varepsilon) \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(J_{2k_i}(\chi ct) + J_{2+2k_i}(\chi ct) \right) + A^{m,inc(p)}(\chi, \varepsilon) \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(J_{2k_i}(\chi vt) + \right. \\ \left. + J_{2+2k_i}(\chi vt) \right) + \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m,ref}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_r+1}(\chi ct) + J_{k_r-1}(\chi ct) \right) = \\ = - \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m,prop}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_p+1}(\chi vt) + J_{k_p-1}(\chi vt) \right). \end{aligned}$$

На цьому місці ми можемо побачити зв'язок між парою коефіцієнтів $A^{m,inc(r)}$, $B_{k_r}^{m,ref}$, тому що множники поруч з ними містять функції Бесселя одного аргументу. Такий же підхід справедливий для пари амплітуд $A^{m,inc(p)}$, $B_{k_p}^{m,prop}$. Давайте представимо коефіцієнти $A^{m,inc(r)}$, $A^{m,inc(p)}$ у такій формі:

$$A^{m,inc(r)}(\chi, \varepsilon) = \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi); \quad A^{m,inc(p)}(\chi, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi). \quad (5.14)$$

Цей вибір задовольняє формулу (5.13). Проаналізуємо два граничних випадки для виразів (5.14).

5.2.1. Випадок повного проходження

Згідно до сутності фізичних процесів, якщо електромагнітне поле повністю проникає в інше середовище з діелектричною проникністю ε , коефіцієнти, що відповідають за відбиття, мають дорівнювати нулю, а саме

$$A^{m,inc(r)}(\chi, 1) = 0; \quad B_{k_r}^{m,ref}(\chi, 1) = 0, \quad (5.15)$$

де було покладено $\varepsilon = 1$. Рівність нулю коефіцієнта $A^{m,inc(r)}$ впливає безпосередньо з представлення (5.14). Це означає, що

$$\begin{aligned} V_m^{ref}(\chi, t, \varepsilon)|_{\varepsilon=1} = 0; \quad I_m^{ref}(\chi, t, \varepsilon)|_{\varepsilon=1} = 0; \\ V_m^{inc}(\chi, t)|_{\varepsilon=1} = V_m^{prop}(\chi, t, \varepsilon)|_{\varepsilon=1}; \quad I_m^{inc}(\chi, t)|_{\varepsilon=1} = I_m^{prop}(\chi, t, \varepsilon)|_{\varepsilon=1}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Підставимо еволюційні коефіцієнти до граничних умов та зробимо перевірку на фізичний сенс.

5.2.1.1. Поперечна магнітна компонента

Гранична умова для магнітної компоненти (5.8) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} & A^{m,inc(p)}(\chi, \varepsilon) \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(J_{2k_i}(\chi vt) + J_{2+2k_i}(\chi vt) \right) \Big|_{\varepsilon=1} = \\ & = - \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m,prop}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_p+1}(\chi vt) + J_{k_p-1}(\chi vt) \right) \Big|_{\varepsilon=1} \end{aligned}$$

У лівій частині суму функцій Бесселя парних порядків можна спростити, застосувавши (5.12). Скориставшись граничним випадком, отримуємо, що $v = c$ і

$$A^{m,inc(p)}(\chi, 1) = - \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m,prop}(\chi, 1) \left(J_{k_p+1}(\chi ct) + J_{k_p-1}(\chi ct) \right). \quad (5.17)$$

Тут можна розглянути, принаймні, два варіанти розв'язку, які задовольняють рівняння (5.17).

Варіант 1. Усі коефіцієнти хвилі, що пройшла у середовище, при нульовому, додатних парних та усіх від'ємних індексах k_p дорівнюють нулю. Решту коефіцієнтів приймемо рівними між собою:

$$B_{k_p < 1}^{m,prop}(\chi, 1) = 0, \quad B_{2k_p}^{m,prop}(\chi, 1) = 0. \quad (5.18)$$

Тоді у виразі (5.17) залишаться лише коефіцієнти з непарними індексами:

$$A^{m,inc(p)}(\chi, 1) = - \sum_{k_p=0}^{\infty} B_{2k_p+1}^{m,prop}(\chi, 1) \left(J_{k_p+1}(\chi ct) + J_{k_p-1}(\chi ct) \right).$$

Враховуючи однаковість невідомих коефіцієнтів $B_{2k_p+1}^{m,prop}$, їх можна винести з-під оператора сумування. Згідно (5.12), дійдемо до висновку, що

$$B_{2k_p+1}^{m,prop}(\chi, 1) = -A^{m,inc(p)}(\chi, 1) = -A^{m,inc}(\chi). \quad (5.19)$$

Варіант 2. Усі коефіцієнти з парним індексом дорівнюють нулю. Коефіцієнти з додатним індексом рівні по модулю коефіцієнтам з відповідним від'ємним, але відрізняються по знаку:

$$B_{k_p < 0}^{m,prop}(\chi, 1) = -B_{k_p > 0}^{m,prop}(\chi, 1), \quad B_{2k_p}^{m,prop}(\chi, 1) = 0. \quad (5.20)$$

Тоді в рівнянні (5.17) можна розділити суму на дві частини:

$$A^{m,inc(p)}(\chi, 1) = - \sum_{k_p=1}^{\infty} B_{2k_p+1}^{m,prop}(\chi, 1) \left(J_{2k_p+2}(\chi ct) + J_{2k_p}(\chi ct) \right) - \\ - \sum_{k_p=-\infty}^{-1} B_{2k_p+1}^{m,prop}(\chi, 1) \left(J_{2k_p+2}(\chi ct) + J_{2k_p}(\chi ct) \right).$$

Відповідно до (5.12), з урахуванням (5.20), обидва вирази в дужках дорівнюють одиниці. Отримуємо такі співвідношення між шуканими амплітудами:

$$B_{2k_p+1}^{m,prop}(\chi, 1) = -\frac{1}{2} A^{m,inc(p)}(\chi, 1) = -\frac{1}{2} A^{m,inc}(\chi); \\ B_{2k_p+1}^{m,prop}(\chi, 1) = -A_0 \frac{i\sqrt{\mu_0} R J_1(\chi R)}{4 \chi \sqrt{\chi}} (\delta_{m,1} + \delta_{m,-1}). \quad (5.21)$$

5.2.1.2. Поперечна електрична компонента

Для електричної компоненти гранична умова (5.8), з урахуванням граничного випадку, набуває такого вигляду:

$$B^{m,inc}(\chi) J_0(\chi ct) \Big|_{\varepsilon=1} = \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B_{k_p}^{m,prop}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_p+1}(\chi vt) - J_{k_p-1}(\chi vt) \right) \Big|_{\varepsilon=1}.$$

Якщо його застосувати, то виходить, що

$$B^{m,inc}(\chi) J_0(\chi ct) = \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} B_{k_p}^{m,prop}(\chi, 1) \left(J_{k_p+1}(\chi ct) - J_{k_p-1}(\chi ct) \right). \quad (5.22)$$

Перевіримо варіанти розв'язків для (5.22), які були застосовані у (5.17) та проаналізуємо фізичний сенс отриманих результатів.

Варіант 1. Відповідно до (5.18) виявляється, що

$$B^{m,inc}(\chi)J_0(\chi ct) = \sum_{k_p=0}^{\infty} B_{2k_p+1}^{m,prop}(\chi, 1) \left(J_{2k_p+2}(\chi ct) - J_{2k_p}(\chi ct) \right).$$

Розраховуючи вираз для різниці функцій Бесселя

$$\sum_{k_p=0}^{\infty} \left(J_{2k_p+2}(\chi ct) - J_{2k_p}(\chi ct) \right) = -J_0(\chi ct), \quad (5.23)$$

легко бачити, що

$$B_{2k_p+1}^{m,prop}(\chi, 1) = -B^{m,inc}(\chi). \quad (5.24)$$

Варіант 2. Згідно з (5.20) ми можемо розділити (5.22) на дві нескінченні суми:

$$\begin{aligned} B^{m,inc}(\chi)J_0(\chi ct) &= \sum_{k_p=0}^{\infty} B_{2k_p+1}^{m,prop}(\chi, 1) \left(J_{2k_p+2}(\chi ct) - J_{2k_p}(\chi ct) \right) + \\ &+ \sum_{k_p=-\infty}^{-1} B_{2k_p+1}^{m,prop}(\chi, 1) \left(J_{2k_p+2}(\chi ct) - J_{2k_p}(\chi ct) \right). \end{aligned}$$

За умови рівності амплітудних коефіцієнтів з різними нижніми індексами, в цих сумах залишається тільки один член з функцією Бесселя нульового порядку. В результаті, вони скорочуються, і ми отримуємо такі співвідношення між коефіцієнтами-амплітудами:

$$B_{k_p}^{m,prop}(\chi, 1) = -\frac{1}{2}B^{m,inc}(\chi). \quad (5.25)$$

Якщо порівняти результати першого варіанту (5.19) і (5.23), то дійдемо висновку, що вони не суперечать один одному, і їх можна аналізувати далі. У другому варіанті, (5.22) і (5.25) дають різні знаки у співвідношеннях між коефіцієнтами, тому його відкидаємо.

5.2.2. Випадок повного відбиття

Розглянемо випадок, що відповідає повному відбиттю падаючої хвилі від границі розділу середовищ. Граничні умови (5.8) можна переписати у такій формі:

$$V_m^{prop}(\chi, t, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon \rightarrow \infty} = 0; \quad (5.26)$$

$$V_m^{inc}(\chi, t)\Big|_{\varepsilon \rightarrow \infty} = -V_m^{ref}(\chi, t, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon \rightarrow \infty}; \quad I_m^{inc}(\chi, t)\Big|_{\varepsilon \rightarrow \infty} = I_m^{ref}(\chi, t, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon \rightarrow \infty}.$$

Еволюційний коефіцієнт для електричного поля заломленої хвилі дорівнює нулю тому, що, коли діелектрична проникність наближається до нескінченності, швидкість хвилі у середовищі наближається до нуля. В останньому співвідношенні відсутній знак «-», щоб задовольнити природню зміну напрямку поширення енергії.

5.2.2.1. Поперечна магнітна компонента

Співвідношення між еволюційними коефіцієнтами поперечної магнітної компоненти поля матиме вигляд:

$$A^{n,inc}(\chi) \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(J_{2k_i}(\chi ct) + J_{2+2k_i}(\chi ct) \right) \Big|_{\varepsilon \rightarrow \infty} =$$

$$= \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{n,ref}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_r+1}(\chi ct) + J_{k_r-1}(\chi ct) \right) \Big|_{\varepsilon \rightarrow \infty}.$$

Зауважимо, що функції Бесселя усіх порядків, окрім нульового, які містять нульовий аргумент, дорівнюють нулю. Відповідна циліндрична функція нульового порядку дорівнює одиниці [69]. Комбінація (5.18) зі значенням функції Бесселя у нулі в граничній умові для непарних коефіцієнтів дасть

$$B_{2k_r+1}^{m,ref}(\chi, \varepsilon \rightarrow \infty) = A^{m,inc}(\chi). \quad (5.27)$$

5.2.2.2. Поперечна електрична компонента

Перепишемо граничну умову для еволюційних коефіцієнтів поперечної електричної компоненти поля у явному вигляді:

$$B^{m,inc}(\chi) J_0(\chi ct) \Big|_{\varepsilon \rightarrow \infty} = - \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m,ref}(\chi, \varepsilon) \left(J_{k_r+1}(\chi ct) - J_{k_r-1}(\chi ct) \right) \Big|_{\varepsilon \rightarrow \infty}.$$

Далі, застосування граничної умови дає

$$B^{m,inc}(\chi)J_0(\chi ct) = - \sum_{k_r=-\infty}^{\infty} B_{k_r}^{m,ref}(\chi, \varepsilon \rightarrow \infty) \left(J_{k_r+1}(\chi ct) - J_{k_r-1}(\chi ct) \right).$$

Згідно з (5.18) залишаться непарні коефіцієнти з додатними індексами. Враховуючи рівність значень шуканих функцій, що залишилися, бачимо, що нескінченна сума дасть функцію Бесселя нульового порядку (5.23), яку можна скоротити в обох частинах рівняння. Отже,

$$B_{2k_r+1}^{m,ref}(\chi, \varepsilon \rightarrow \infty) = B^{m,inc}(\chi). \quad (5.28)$$

5.2.3. Загальний випадок поширення

Розглянемо випадок довільного додатного значення діелектричної проникності середовища. Можна бачити, що для усіх граничних випадків справедливі отримані коефіцієнти

$$A^{m,inc(r)}(\chi, \varepsilon), A^{m,inc(p)}(\chi, \varepsilon), B_{k_r}^{m,ref}(\chi, \varepsilon), B_{k_p}^{m,prop}(\chi, \varepsilon),$$

якщо аналізувати **Варіант 1** шуканого розв'язку. Дивлячись на співвідношення (5.19), (5.28), можна побачити, що

$$\begin{aligned} B_{2k_r+1}^{m,ref}(\chi, \varepsilon) &= A^{m,inc(r)}(\chi, \varepsilon); \\ B_{2k_p+1}^{m,prop}(\chi, \varepsilon) &= -\sqrt{\varepsilon} A^{m,inc(p)}(\chi, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5.29)$$

де коефіцієнти $A^{m,inc(r)}$, $A^{m,inc(p)}$ задані виразами (5.14).

Перевіримо їх на граничній умові для магнітного поля (5.8):

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi) \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(J_{2k_i}(\chi ct) + J_{2+2k_i}(\chi ct) \right) + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi) \cdot \\ & \cdot \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(J_{2k_i}(\chi vt) + J_{2+2k_i}(\chi vt) \right) + \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi) \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(J_{2k_r}(\chi ct) + \right. \\ & \left. + J_{2k_r+2}(\chi ct) \right) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi) \sum_{k_p=-\infty}^{\infty} \left(J_{2k_p}(\chi vt) + J_{2k_p+2}(\chi vt) \right). \end{aligned}$$

Скориставшись формулою для суми функцій Бесселя (5.12), виходить

$$\frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi) + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi) + \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi),$$

тобто остаточно ми отримали тотожність. Щодо граничної умови для електричного поля,

$$\begin{aligned} A^{m,inc}(\chi) J_0(\chi ct) + \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi) \sum_{k_r=1}^{\infty} (J_{2k_r+2}(\chi ct) - J_{2k_r}(\chi ct)) = \\ = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi) \sum_{k_p=1}^{\infty} (J_{2k_p+2}(\chi vt) - J_{2k_p}(\chi vt)). \end{aligned}$$

Застосувавши вираз для різниць циліндричних функцій (5.23), отримуємо

$$A^{m,inc}(\chi) J_0(\chi ct) - \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi) J_0(\chi ct) = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{m,inc}(\chi) J_0(\chi vt).$$

Спрощуючи ліву частину, дійдемо до висновку, що

$$\frac{2}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{n,inc}(\chi) J_0(\chi ct) = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon} + 1} A^{n,inc}(\chi) J_0(\chi vt),$$

тобто множники рівні, але аргументи функцій Бесселя – різні. Отже, умову задачі необхідно уточнити.

В подальшому, можна застосувати інтеграл Дюамеля для поперечного електричного поля хвилі, що пройшла у середовище. Для кожного з полів, що відповідають за процеси відбиття та проходження, має сенс обчислити потужність та повну енергію випромінювання та провести фізичний аналіз отриманих залежностей. Крім того, можна перейти до узагальненого випадку та розглянути електричне та магнітне поля для точок спостереження, що не лежать на осі випромінювання, оцінити їх енергетичні характеристики. Ще більш цікавим з точки зору енергетичного аналізу є дослідження поведінки поздовжньої магнітної компоненти поля та впливу поверхневої хвилі на розв'язувану задачу.

ВИСНОВОК

Завдяки еволюційному підходу було аналітично, у першому наближенні, розв'язано у часовому просторі задачу опромінення діелектрика нестационарною електромагнітною хвилею на осі випромінювання. За допомогою методів функції Рімана та розділення змінних було отримано загальні розв'язки диференціальних рівнянь для падаючої, відбитої та заломленої хвиль. Виведено співвідношення між еволюційними коефіцієнтами поперечних електричних компонент поля на границі розділу середовищ, за допомогою якого, за певних припущень, було знайдено коефіцієнти з однорідних диференціальних рівнянь для відбитої та заломленої хвиль. Отриманий розв'язок перевірено для двох граничних випадків поведінки електричного матеріального параметру. Для магнітної компоненти досягнуто повне узгодження граничних умов, а електрична складова вимагає уточнення шляхом введення додаткової поверхневої хвилі.

Вперше продемонстровано явище електромагнітного снаряду у середовищі, що опромінене імпульсною електромагнітною хвилею надкороткої тривалості. За допомогою інтеграла Дюамеля отримано аналітичну форму поперечного електричного поля відбитої хвилі вздовж поздовжньої осі для довільної часової залежності джерела. Показано вплив часової форми перехідних хвиль на поведінку їх енергії на різних відстанях від джерела. Для деяких випадків показано явище збільшення енергії хвилі.

Отримано аналітичні вирази для потужності та повної енергії нестационарного поперечного електромагнітного поля плоского випромінювача. Проілюстровано перетворення енергії в статичну та хвильову частини. Показано ступінь зменшення енергії для такого модельного розв'язку як електромагнітний снаряд.

ЛІТЕРАТУРА

1. Думін О. М. Нестационарні електромагнітні поля вісесиметричних випромінювачів : дис. ... канд. фіз. мат. наук : 01.04.03 / Думін Олександр Миколайович. – Х., 2004. 149 с.
2. Nicolson A. M. Broadband microwave transmission characteristics from a single measurement of the transient response : IEEE Trans. Instrum. Meas. – 1968. – V.17, N4. – P.395–402.
3. Nicolson A. M., Ross G. F. Measurement of the intrinsic properties of materials by time domain techniques : IEEE Trans. Instrum. Meas. – 1970. – V.19, N4. – P.377–382.
4. Albanese R., Penn J., Medina R. Short-rise-time microwave pulse propagation through dispersive biological media : J. Opt. Soc. Amer. – 1989. – V.6, N9. – P.1441–1446.
5. Cook J. C. Radar transparencies of mine and tunnel rocks : Geophysics. – 1975. – V.40, N5. – P.865–885.
6. Cheldavi A. Optimum design of radar pulses for stealth targets (time domain approach) : Proc. International Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ–98). – Kharkov (Ukraine). – 1998. – P.339.
7. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Дисперсійні спотворення високочастотних надширокосмугових радіосигналів при поширенні в іоносфері : Геомагнетизм і аерономія. – 1997. – Т.37, N6. – С.80–90.
8. Ахмедов Р. Д. Поля імпульсних антен у лінійному та нелінійному середовищах : дис. ... канд. фіз. мат. наук : 01.04.03 / Ахмедов Ролан Джавадович. – Х., 2021. 165 с.
9. Gourova R., Krasnov O., Yarovoy A.: Analysis of rain clutter detections in commercial 77 ghz automotive radar : In 2017 European Radar Conference (EURAD), pp. 2528. Springer (2017).
10. Garcia M. A. Uwb antenna design for underwater communications : Ph.D. thesis, University of Barcelona (2009).

11. Karagianni E. Electromagnetic waves under sea: Bow-tie antenna design for wi-fi underwater communications : Progress In Electromagnetics Research M 41, 189-198 (2015).
12. Думін О. М. Випромінювання і розповсюдження нестационарних електромагнітних полів у нелінійних, нестационарних та біологічних середовищах : дис. ... докт. фіз. мат. наук : 01.04.03 / Думін Олександр Миколайович. – Х., 2021. 374 с.
13. Luszcz J., Smolenski R. Low frequency conducted emissions of grid connected static converters : IEEE Electromagnetic Compatibility Mag., vol. 4, no, pp. 86–100, 2015.
14. Vogel M. H. Impact of lightning and high-intensity radiated fields on cables in aircraft : IEEE Electromagnetic Compatibility Mag., vol. 3,no 2, pp. 56–61, 2014.
15. Kebel R., Stadtler T., Rouquette J.-A., Flourens F., Avenet A., Rouvrais N. Numeric Lightning Protection Prediction for Wires in an Aircraft Wing Raceway : IEEE Electromagnetic Compatibility Magazine, vol. 5, no. 4, pp. 71-79, 2016.
16. Grcev L. D., Menter F. E. Transient electromagnetic fields near large earthing systems : IEEE Trans. on Magnetics, vol. 32, no. 3, pp. 1525-1528, 1996.
17. Tanaka H., Baba Y., Barbosa C. F. Effect of shield wires on the lightning-induced currents on buried cables : IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. 58, no 3, pp.738–746, 2016.
18. Rachidi F., Janischewskyj W., Hussein A. M., Nucci C. A., Guerrieri S., Kordi B., Chang J.-S. Current and electromagnetic field associated with lightning-return strokes to tall towers : IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, vol. 43, no. 3, pp. 356-367, 2001.
19. Сіренко Ю. К. Моделювання і аналіз перехідних процесів у відкритих періодичних, хвилеводних та компактних резонаторах : Харків: «ЕДЕНА», 2003. 363с.
20. Time Domain Electromagnetics / Edited by Rao S. M. – San Diego (CA, USA) : Academic Press, 1999. – 372 p.

21. Harmuth H. Nonsinusoidal waves for radar and radio communication : Advances in electronics and electron physics : Supplement. Academic Press, New York (1981).
22. Dumin O. M., Volvach I. S., Dumina O. O. Transient Near field of Hertzian dipole : in Proc. 6 th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (UWBUSIS–2012), Sevastopol, Ukraine, Sep. 17-21, 2012, pp. 69–71.
23. Самсонов А. В. Випромінювання плаского однорідного струму при довільному законі зміни у часі. : Радіотехніка і електроніка. – 1986. – Т.31, №2. – С.399–402.
24. Rybin O., Nerukh A. Transient electromagnetic field in a dissipative medium with rectangular pulse modulated parameters : Proc. International Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory (MMET–98). – Kharkov (Ukraine). – 1998. – P.336–338.
25. Yee K. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media : IEEE Transactions on Antennas and Propagation 14(3), 302-307 (1966).
26. Taflove A., Brodwin M. E. Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations : IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques 23(8), 623-630 (1975).
27. Nagaoka, T., Watanabe, S. Gpu-based 3d-fdtd computation for electromagnetic field dosimetry. : In IEEE Africon '11, pp. 1-6. IEEE Xplore (2011).
28. Liu Q. H. The PSTD algorithm: a time-domain method requiring only two cells per wavelength : Microwave Optical Technology Letters. – June 1997. – Vol. 15, v 3. – P. 158–165.
29. Baum, C. E. Reminiscences of high-power electromagnetics : IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility 49(2), 211-218 (2007).
30. Borisov V. V., Simonenko I. I. Transient waves generated by a source on a circle : J. Phys. A: Math. Gen. – 1994. – V.27. – P.6243–6252.

31. Perov A. O. Evolutionary basis and operators of transformation of non-stationary waves in periodic structures : Proc. International Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ-98). – Kharkov (Ukraine). – 1998. – P.321–323.
32. Третьяков О. О. Метод модового базису : Радіотехніка і електроніка, Т. 31, № 6, С. 1071–1082, 1986.
33. Бутрим О. Ю. Використання модових розкладів у вузькосмугових задачах електродинаміки : дис. ... докт. фіз. мат. наук : 01.04.03 / Бутрим Олександр Юрійович. – Х., 2014. 347 с.
34. Третьяков О. О., Чумаченко С. В. Коливання в резонаторі з нестационарним діелектриком : Радіофізика і радіоастрономія. – 1997. – Т.2, № 2. – С. 222-229.
35. Назиров З. Ф., Шматько О. О. Метод модового базису в задачах електродинаміки з кусково-неоднорідними нестационарними середовищами : Радіотехніка і електроніка. – 1988. – Т. 33, № 5. – С. 1042-1049.
36. Антюфеева М. С. Електромагнітні коливання в резонаторі з нестационарним і дисперсивним середовищем : дис. ... канд. фіз. мат. наук : 01.04.03 / Антюфеева Марія Станіславівна. – Х., 2010. 213 с.
37. Tretyakov O. O. A Set of Exact Analytical Solutions in Time Domain for UWB electromagnetic Signals in Waveguides : Proc. of International Conference EUROEM'2000. – Edinburgh (England), 30 May - 2 June 2000. – P. 125.
38. Адоніна А. І., Слюсарев А. І. Векторна задача для неоднорідних, нестационарних, анізотропних середовищ : Радіотехніка і електроніка. – 1995. – Т. 40, № 8. – С. 1176-1183.
39. Третьяков О. О., Думін О. М. Випромінювання нестационарних електромагнітних полів пласким випромінювачем : Електромагнітні хвилі & електронні системи, Т.3, № 1, С. 12-22, 1998.
40. Dumin O., Dumina O., Katrich V. Evolution of transient electromagnetic fields in spherical coordinate system : in Proc. XI-th International Conf. on Math.

- Methods in Electromagnetic Theory (ММЕТ–2006), Kharkiv, Ukraine, June 26-29, 2006, pp. 363–365.
41. Fellner–Feldegg H. The measurement of dielectrics in the time domain : J. Phys. Chem. – 1969. – V.73, N3. – P.616–623.
 42. Scheers B. Ultra-Wideband Ground Penetrating Radar, with Application to the Detection of Anti Personnel Landmines : Ph.D. thesis / Université Catholique de Louvain, Laboratoire D’Hyperfréquences. – Louvain-la-Neuve (Belgium), March 2001. – 277 p.
 43. Легенький М. М. Поширення і випромінювання імпульсних сигналів у діелектричних хвилеводах : дис. ... канд. фіз. мат. наук : 01.04.03 / Легенький Максим Миколайович. – Х., 2011. 195 с.
 44. Tatotian J., Franceschetti G., Giri D., Gibbs G. Through-the-Wall Imaging using Impulse SAR : Book of Abstracts of the International Conference “Euro Electromagnetics” (EUROEM 2004). – Magdeburg (Germany), 12-16 July, 2004. – P. 148.
 45. Masalov S. A., Pochanin G. P., Kholod P. V. Antenna system for georadar “Zond– 10” consisting of a pair of curved loaded wideband dipoles : Proc. Third International Conf. on Antenna Theory and Techniques (ICATT–99). – Sevastopil (Ukraine). – 1999. – P.392–394.
 46. Dogaru T. Time-domain sensing of targets buried under a rough air-ground interface : T. Dogaru, L. Carin // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1998. – Vol. 46, No 3. – P. 360-372.
 47. Півненко С. М. Взаємодія обмежених у просторі нестационарних полів з діелектричними та металодіелектричними структурами : дис. ... канд. фіз. мат. наук : 01.04.03 / Півненко Сергій Миколайович. – Х., 1999. 140 с.
 48. Azevedo S. G. Landmine Detection and Imaging Using Micropower Impulse Radar : S.G. Azevedo, D.T. Gavel, J.E. Mast, J.P. Warhus // Proceedings of the Workshop on Anti-personnel Mine Detection and Removal, August 7,1995. – Lausanne, Switzerland, 1995. – P. 24-51.

49. Carin L. Ultra-wide-band synthetic-aperture radar for mine-field detection : L. Carin, N. Geng, M. McClure, J. Sichina, L. Nguyen // IEEE Antennas and Propagation Magazine. – February 1999. – Vol. 41. No. 1 – P. 18-33.
50. Батраков Д. О. Основи георадіолокації та дистанційного зондування : Конспект лекцій, Х., 2023, 58 с.
51. Özdemir C., Demirci S., Yiğit E., Yilmaz B. A Review on Migration Methods in B-Scan Ground Penetrating Radar Imaging : Mathematical Problems in Engineering, vol. 2014, Article ID 280738, 16 pages, 2014.
52. Özdemir C., Demirci S., Yiğit E., Kavak A., A hyperbolic summation method to focus B-scan ground penetrating radar images: an experimental study with a stepped frequency system : Microwave and Optical Technology Letters, vol. 49, no. 3, pp. 671–676, 2007.
53. Lecomte I., Hamran S.-E., Gelius L.-J., Improving Kirchhoff migration with repeated local plane-wave imaging? A SAR-inspired signal-processing approach in prestack depth imaging, : Geophysical Prospecting, vol. 53, no. 6, pp. 767–785, 2005.
54. Gazdag J., Wave equation migration with the phase-shift method : Geophysics, vol. 43, no. 7, pp. 1342–1351, 1978.
55. Stolt R. H., Migration by Fourier transform : Geophysics, vol. 43, no. 1, pp. 23–48, 1978.
56. Gilmore C., Jeffrey I., LoVetri J. Derivation and comparison of SAR and frequency-wavenumber migration within a common inverse scalar wave problem formulation : IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 44, no. 6, pp. 1454–1461, 2006.
57. Munson Jr. D. C., O'Brien J. D., Jenkins W. K. A tomographic formulation of spotlight-mode synthetic aperture radar : Proceedings of the IEEE, vol. 17, no. 8, pp. 917–925, 1983.
58. Fisher E., McMechan G. A., Annan A. P., Cosway S. W. Examples of reverse-time migration of single-channel, ground- penetrating radar profiles : Geophysics, vol. 57, no. 4, pp. 577–586, 1992.

59. Capineri L., Grande P., Temple J. A. G. Advanced imageprocessing technique for real-time interpretation of groundpenetrating radar images : International Journal of Imaging Systems and Technology, vol. 9, no. 1, pp. 51–59, 1998.
60. Leuschen C. J., Plumb R. G. A matched-filter-based reverse-time migration algorithm for ground-penetrating radar data : IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 39, no. 5, pp. 929–936, 2001.
61. Morrow I. L., van Genderen P. A., 2D polarimetric backpropagation algorithm for ground-penetrating radar applications : Microwave and Optical Technology Letters, vol. 28, pp. 1–4, 2001.
62. Гавриленко Д. І., Думін О. М., Плахтій В. А. Аналіз імпульсного електромагнітного поля у часовому просторі на границі розділу двох середовищ : Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2021;35:41-55. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-35-04>.
63. Гавриленко Д. І., Думін О. М., Прищенко О. А. Аналітична форма розв'язку для нестационарного електромагнітного поля на границі двох середовищ : Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка». 2022;37:86-97. <https://doi.org/10.26565/2311-0872-2021-37-07>.
64. Havrylenko D. I, Dumin O. M, Plakhtii V. A. Irradiation of Medium by Plane Disk with Uniform Distribution of Transient Current : 2021 IEEE 26th International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED). 2021 Sep 8;pp. 74-77, <https://doi.org/10.1109/DIPED53165.2021.9552298>.
65. Havrylenko D. I, Dumin O. M, Plakhtii V. A., Katrich V. O., Nesterenko M. V. Time Domain Analysis of Impulse Electromagnetic Field on the Interface of Two Media : 2022 IEEE 16th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). 2022 Feb 22;<https://doi.org/10.1109/TCSET55632.2022.9766855>.

66. Havrylenko D. I, Dumin O. M, Plakhtii V. A., Katrich V. O. Analytical Time Domain Solution for Electromagnetic Field on the Interface of Two Media : 2022 IEEE 2nd Ukrainian Microwave Week (UkrMW). 2023 Feb 13; [https://doi.org/ 10.1109/UkrMW58013.2022.10037067](https://doi.org/10.1109/UkrMW58013.2022.10037067).
67. Havrylenko D. I, Dumin O. M, Plakhtii V. A., Katrich V. O. Energy Transformation of Transient Radiation of Plane Source with Step-Like Excitation : 2023 IEEE XXVIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), 2023, pp.20-23, [https://doi.org/ 10.1109/DIPED59408.2023.10269461](https://doi.org/10.1109/DIPED59408.2023.10269461).
68. Dumin O. M., Tretyakov O. O. Radiation of arbitrary signals by plane disk : MMET '96 VIth International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory Proceedings; Lviv, Ukraine. pp. 248–251. <https://doi.org/10.1109/MMET.1996.565704>.
69. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions : 1964. 832 p.
70. Dumin O. M., Tretyakov O. O., Akhmedov R. D., Dumina O. O. Evolutionary approach for the problem of electromagnetic field propagation through nonlinear medium : Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, series “Radio Physics and Electronics”. 2014;24(1115):23-28.
71. Prudnikov A.P. , Bychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integrals and Series, Vol. 2: Special Functions* : Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986, 750 p.
72. Miller W. Jr., *Symmetry and Separation of Variables* : Addison-Wesley Pub. Co., Massachusetts, 1977.
73. Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions* : Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
74. Wu T. T. Electromagnetic missiles : *Journal of Applied Physics*, vol. 57, pp. 2370–2373, 1985.
75. Думін О. М, Ахмедов Р. Д, Черкасов Д. В. Імпульсне випромінювання антени з круговою апертурою в ближній зоні : Вісник Харківського

- національного університету імені В.Н. Каразієа. Серія «Радіофізика та електроніка» 28, 30-33, 2018.
76. Akhmedov R. D., Dumin O. M., Katrich V. O. Impulse radiation of antenna with circular aperture : *Telecommunications and radio engineering*, vol. 77, no. 20, pp. 1767–1784, 2018.
77. Pochanin G. P., Pochanina I. Ye., Proper mode of excitation for large current radiators : *5th International Conference on “Ultra Wideband and Ultra Short Impulse Signals”*, Sevastopol (Ukraine), pp. 218-220., 2010.
78. Tretyakov O. O. Essentials of Nonstationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory : in Analytical and numerical methods in electromagnetic wave theory, M. Hashimoto, M. Idemen, O. O. Tretyakov, Eds., ch. 3., Science House Co., Ltd., Tokyo, 1993.
79. Tretyakov O. O., Dumin O. M. Emission of Nonstationary Electromagnetic Fields by a Plane Radiator : *Telecommunications and Radio Engineering*. 2000;54(1):2–15.
80. Arfken G. B., Weber H. J., Harris F. E. *Mathematical Methods for Physicists* : 6th edition Harcourt: San Diego, 2005.
81. Черногор Л. Ф. Нелінійна радіофізика : Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна. – Харків. – 2016. – 208 с.

ДОДАТОК. ОРТОГОНАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ

У першому розділі, при отриманні співвідношення між еволюційними коефіцієнтами поперечних електричних компонент поля на границі розділу середовищ $z = 0$, ми користуємося тотожністю

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_n^*(\rho, \varphi, \xi) = \delta_{mn} \delta(\xi - \chi).$$

Доведемо її. Для цього запишемо базисні функції у явному вигляді:

$$\psi_m(\rho, \varphi, \chi) = \frac{J_m(\chi\rho)}{\sqrt{\chi}} e^{im\varphi}; \quad \psi_n^*(\rho, \varphi, \xi) = \frac{J_n(\xi\rho)}{\sqrt{\xi}} e^{-in\varphi}.$$

Верхній індекс, у вигляді зірочки, позначає комплексне спряження. Градієнт у поперечних циліндричних координатах обчислюється таким способом:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_0.$$

Для заданих мембранних функцій, після диференціювання за радіальною та кутовою змінними, ми прийдемо до виразів

$$\begin{aligned} \nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) &= \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{\chi}} \left(\frac{im}{\rho} J_m(\chi\rho) \vec{\varphi}_0 + \frac{\partial}{\partial \rho} J_m(\chi\rho) \vec{\rho}_0 \right) \\ \nabla \psi_n^*(\rho, \varphi, \xi) &= \frac{e^{-in\varphi}}{\sqrt{\xi}} \left(-\frac{in}{\rho} J_n(\xi\rho) \vec{\varphi}_0 + \frac{\partial}{\partial \rho} J_n(\xi\rho) \vec{\rho}_0 \right) \end{aligned}$$

Перейдемо до обчислення скалярного добутку градієнтів. Між собою перемножуватимуться доданки, що відповідають орту $\vec{\rho}_0$, та ті, що відповідають кутовому одиничному вектору $\vec{\varphi}_0$. Виходить, що

$$\begin{aligned} \nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_n^*(\rho, \varphi, \xi) &= \\ &= \frac{e^{i(m-n)\varphi}}{\sqrt{\chi\xi}} \left(\frac{mn}{\rho^2} J_m(\chi\rho) J_n(\xi\rho) + \frac{\partial}{\partial \rho} J_m(\chi\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} J_n(\xi\rho) \right). \end{aligned}$$

Далі, скористаємося рекурентними співвідношеннями для функції Бесселя та її похідної (1.14) [73] та підставимо до скалярного добутку

$$\begin{aligned} \nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \cdot \nabla \psi_n^*(\rho, \varphi, \xi) &= \\ &= e^{i(m-n)\varphi} \frac{\sqrt{\chi\xi}}{2} (J_{m-1}(\chi\rho) J_{n-1}(\xi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho) J_{n+1}(\xi\rho)). \end{aligned}$$

Подіявши на обидві частини рівності інтегралом за радіальною змінною

$$\int_0^{\infty} \rho d\rho,$$

приходимо до інтегралу, що містить добуток двох функцій Бесселя, радіальну змінну та спектральні параметри базисних функцій. Він в точності дорівнює дельта-функції Дірака, тобто виражає властивість їх ортогональності [80]:

$$\sqrt{\chi\xi} \int_0^{\infty} \rho d\rho J_{m-1}(\chi\rho) J_{n-1}(\xi\rho) = \delta(\xi - \chi).$$

А проінтегрувавши вираз за кутовою змінною у межах одного оберту

$$\int_0^{2\pi} d\varphi,$$

маємо інтеграл від комплексної експоненти, що дає дельта-символ Кронекера з поправкою у 2π [80]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi} d\varphi = \delta_{mn}.$$

Звідси й випливає використана у дипломній роботі тотожність.