Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948
№ 514, 2001, с. 73–90

Схема рассеяния для сингулярного метрического узла

И. В. Воробьев

Харьковский национальный университет, Украина

В работе построена модель сингулярного метрического узла для операторов, близких к нормальным. Получена связь между характеристической и определяющей функциями этого узла. Для узла с инволютивной метрикой построена унитарная дилатация решения линейной однородной задачи Коши. Изучены свойства волновых операторов и оператора рассеяния. *2000 Mathematics Subject Classification* 47A20.

В данной статье на основании сингулярной интегральной модели для операторов, близких к нормальным, построена модель сингулярного метрического узла, а также введена его характеристическая функция. Посредством формул Племеля, обобщенных на векторнозначные функции [1], [2], получена задача Римана-Гильберта, связывающая граничные значения определяющей функции с характеристической функцией узла. Методами операторных узлов [3]-[5] с использованием теории дилатации [8] в статье построена унитарная дилатация решения линейной однородной задачи Коши, а также в соответствии со схемой рассеяния [9] построены и изучены волновые операторы и оператор рассеяния.

1. Основные обозначения и определения

Пусть δ – ограниченное замкнутое множество на вещественной оси, Λ – множество всех борелевских множеств, содержащихся в δ, m – мера Лебега на δ, ν – сингулярная мера на Λ (то есть существует множество $Q \in \Lambda$, такое что $m(Q) = 0$ и $\nu(\delta \setminus Q) = 0$), $\mu = m + \nu$ – σ-конечная мера, $\Omega = (\delta, \Lambda, \mu)$ – пространство с мерой, D – комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $\langle a, b\rangle_D$ – скалярное произведение векторов a и b в D, $L(D)$ – алгебра всех линейных операторов в D, $f(x) \in D$ – векторнозначная (D-значная) измеримая функция, определенная для всех $x \in \delta$,

$$L^2(\Omega, D) = \left\{ f \in D : \int_\delta \|f(x)\|_D^2 \, d\mu(x) < \infty \right\} -$$

гильбертово пространство измеримых векторнозначных квадратично-суммируемых функций со скалярным произведением:

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\Omega,D)} = \int_\delta \langle f(x), g(x)\rangle_D \, d\mu(x), \quad \forall f,g \in L^2(\Omega,D).$$

Мы отождествим функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ из $L^2(\Omega,D)$, если они отличаются только на множество μ-меры ноль.

Пусть $\{0\} = D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$ – последовательность пространств конечной размерности в D, $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$ – последовательность множеств в Λ. Стандартной проекторнозначной функцией [1] называется $L(D)$-значная измеримая функция $R(x)$, $x \in \delta$, такая что:

1) $R(x) = 0$, $x \in F_0$;

2) $R(x)$ – ортопроектор из D в D_n, если $x \in F_n \setminus F_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$;

3) $R(x) = I$, $x \notin \bigcup\limits_{n\geq 0} F_n$.

Если $\mu(\delta) = 1$, то вектор $a \in D$ можно отождествить с векторнозначной функцией с постоянным значением a. В этом смысле D – подпространство $L^2(\Omega,D)$, и их скалярные произведения совпадают. В общем случае можно определить ортопроектор из $L^2(\Omega,D)$ в D следующим образом:

$$\tilde{P}_0 : f(\cdot) \to \frac{1}{\mu(\delta)} \int_\delta f(x)\, d\mu(x).$$

В дальнейшем мы будем использовать следующий оператор:

$$P_0 = \mu(\delta)\,\tilde{P}_0. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение следующее пространство:

$$H = L^2(\Omega, D, R(\cdot)) = \left\{ f \in L^2(\Omega, D) : R(\cdot)\, f(\cdot) = f(\cdot) \right\}. \tag{2}$$

Оно как подпространство $L^2(\Omega,D)$ также является гильбертовым пространством.

Пусть F – векторное преобразование Фурье функции $f(\cdot)$, определенное в $L^2(D)$ на вещественной оси, то есть следующий сильный предел

$$(Ff)(x) = s - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} f(t)\, e^{itx} dt.$$

Хорошо известно, что F – унитарный оператор в $L^2(D)$ на оси. Определим следующий оператор

$$P = F^* P_{[0,+\infty)} F,$$

где $P_{[0,+\infty)}$ – оператор умножения на характеристическую функцию полуоси $[0,+\infty)$. По формуле Племеля можно явно выразить оператор P [1], [2]:

$$(Pf)(x) = s - \lim\nolimits_{\varepsilon\to -0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)dt}{(x+i\varepsilon)-t} = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)dt}{x-t}, \tag{3}$$

где символ $v.p.$ означает главное значение сингулярного интеграла.

2. Построение сингулярной интегральной модели

Пусть $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot) = \beta^*(\cdot)$ – равномерно ограниченные измеримые функции, определенные в Ω, со значениями в $L(D)$, такие что

$$\begin{gathered} \alpha(\cdot) R(\cdot) = R(\cdot) \alpha(\cdot) = \alpha(\cdot), \\ \beta(\cdot) R(\cdot) = R(\cdot) \beta(\cdot) = \beta(\cdot), \\ \alpha(x) = 0, \quad x \in Q, \end{gathered} \tag{4}$$

где Q – множество в δ, для которого $m(Q) = 0$ и $\nu(\delta \setminus Q) = 0$.

Определим самосопряженный оператор X в гильбертовом пространстве H (2) следующим образом:

$$(Xf)(x) = xf(x), \quad \forall f \in H. \tag{5}$$

Пусть σ – самосопряженный оператор в D. Легко проверить, что следующий оператор

$$(Yf)(x) = \beta(x) f(x) + \alpha^*(x) \sigma P(\alpha(\cdot) f(\cdot)), \quad \forall f \in H, \tag{6}$$

где P определен в (3), является самосопряженным в H (здесь мы считаем, что $\alpha f \equiv 0$ вне δ, то есть сингулярный интеграл P мы берем по δ). Пусть операторы X и Y являются соответственно вещественной и мнимой частью оператора T, то есть

$$T = X + iY. \tag{7}$$

Определим ограниченный линейный оператор из D в H:

$$Ka = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \alpha^*(\cdot) a, \quad \forall a \in D. \tag{8}$$

Сопряженный оператор K^* как оператор из H в D имеет вид:

$$K^* f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} P_0(\alpha(\cdot) f(\cdot)), \quad \forall f \in H, \tag{9}$$

где P_0 определен в (1). Используя определения самосопряженных операторов X и Y (5)-(6), можно вычислить самокоммутатор оператора T (7):

$$([T^*, T] f)(x) = \frac{1}{\pi} \alpha^*(x) \sigma P_0(\alpha(\cdot) f(\cdot)), \quad \forall f \in H. \tag{10}$$

Кроме того, из свойств скалярного произведения следует, что

$$\langle [T^*, T] f, f \rangle_H = \frac{1}{\pi} \langle \sigma P_0(\alpha(\cdot) f(\cdot)), P_0(\alpha(\cdot) f(\cdot)) \rangle_D, \quad \forall f \in H. \tag{11}$$

В терминах оператора K из (8)-(9), самокоммутатор T имеет вид:

$$[T^*, T] = 2i [X, Y] = K \sigma K^*, \tag{12}$$

откуда видно, что при $\sigma \geq 0$, оператор T – гипонормальный.

В книге Кся [1] доказано, что любой гипонормальный оператор унитарно эквивалентен оператору T (5)-(7) с $\sigma = I_D$ и $\alpha(x) = \alpha^*(x) \geq 0$. Таким образом, сингулярная интегральная операторная модель является функциональной моделью гипонормального оператора.

Определение. *Произвольный оператор A называется вполне ненормальным (см. [1]), если не существует приводящего A подпространства, на котором A индуцирует нормальный оператор.*

Лемма 1. *Если сингулярный интегральный оператор T (7) вполне ненормальный, то сингулярная мера $\nu \equiv 0$.*

Доказательство. От противного. Предположим, что $\nu \not\equiv 0$, сосредоточена во множестве $Q \in \Lambda$ и $m(Q) = 0$. Рассмотрим следующее подпространство H:

$$N = \{f \in H : f(x) = 0, \forall x \notin Q\}.$$

Тогда из (4) $\alpha f \equiv 0$, $\forall f \in N$, поэтому

$$(Tf)(x) = xf(x) + i\beta(x) f(x), \quad \forall f \in N,$$
$$(T^* f)(x) = xf(x) - i\beta(x) f(x), \quad \forall f \in N.$$

Следовательно, N – нетривиальное нормальное подпространство, приводящее оператор T – противоречие вполне ненормальности T. Лемма доказана.

3. Определение сингулярного метрического узла

В предыдущих работах [3]-[7] были введены и изучены локальный, унитарный и нормальный метрические узлы. Здесь мы аналогичным образом определим сингулярный метрический узел и изучим его свойства.

Определение. *Сингулярным метрическим узлом будем называть совокупность*

$$\Delta = (T, H, K, D, \sigma),$$

для которой выполнено соотношение (12), где оператор $T = X + iY$ (5)-(6) действует в гильбертовом пространстве H (2), а отображение K действует из вспомогательного пространства D в H и имеет вид (8).

Введем открытую систему $\{\Re_\Delta, S_\Delta\}$ ассоциированную с узлом Δ:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Re_\Delta : & i\frac{d}{dx}h(x) + \beta(x) h(x) = \alpha^*(x)\sigma u(x), \quad h(0) = h_0, \\ S_\Delta : & \qquad\qquad v(x) = u(x) + \alpha(x) h(x). \end{array} \right. \tag{13}$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что справедлива

Лемма 2. *Имеет место следующий энергетический закон сохранения:*

$$\frac{d}{dx}\|h(x)\|_D^2 = \langle i\sigma v(x), u(x)\rangle_D - \langle i\sigma u(x), v(x)\rangle_D =$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & i\sigma \\ -i\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \right\rangle_{D\oplus D}. \tag{14}$$

По аналогии с [3] для всех невещественных z мы можем ввести в рассмотрение следующую D-значную оператор-функцию

$$S_{\Delta}(x,z) = I_D + \alpha(x)(\beta(x) - zI_D)^{-1}\alpha^*(x)\sigma, \tag{15}$$

которую назовем характеристической функцией узла Δ. Непосредственно из определения (15) легко проверить справедливость следующих свойств характеристической функции:

$$S_{\Delta}(x,z)\alpha(x) = \alpha(x)(\beta(x) - zI_D)^{-1}(\beta(x) + \alpha^*(x)\sigma\alpha(x) - zI_D), \tag{16}$$

$$\alpha^*(x)\sigma S_{\Delta}(x,z) = (\beta(x) + \alpha^*(x)\sigma\alpha(x) - zI_D)(\beta(x) - zI_D)^{-1}\alpha^*(x)\sigma, \tag{17}$$

$$S_{\Delta}(x,z)^{-1} = I_D - \alpha(x)(\beta(x) + \alpha^*(x)\sigma\alpha(x) - zI_D)^{-1}\alpha^*(x)\sigma, \tag{18}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{\bar{w}-z}\left[S^*_{\Delta}(x,w)\sigma - \sigma S_{\Delta}(x,z)\right] = \kappa^*(x,w)\kappa(x,z), \\ \kappa(x,z) = (\beta(x) - zI_D)^{-1}\alpha^*(x)\sigma. \end{gathered} \tag{19}$$

Пусть оператор σ обратим. Для всех невещественных z и w определим следующую операторнозначную функцию $E(z,w): D \to D$:

$$E(z,w) = \sigma^{-1} + \frac{1}{2i}K^*(X - zI_H)^{-1}(Y - wI_H)^{-1}K, \tag{20}$$

которую назовем определяющей функцией оператора T. Легко проверить, что определяющая функция удовлетворяет следующим соотношениям:

$$K\sigma E(z,w) = \{(X - zI_H),(Y - wI_H)\}K, \tag{21}$$

$$E(z,w)\sigma K^* = K^*\left\{(X - zI_H)^{-1},(Y - wI_H)^{-1}\right\}, \tag{22}$$

$$E(z,w)^{-1} = \sigma - \frac{1}{2i}\sigma K^*(Y - wI_H)^{-1}(X - zI_H)^{-1}K\sigma, \tag{23}$$

где $\{A,B\} = ABA^{-1}B^{-1}$ – мультипликативный коммутатор операторов A и B.

Обозначим $f(x,w;a) = (Y - wI_H)^{-1}\alpha^*(\cdot)a$. Из (6) следует, что $\forall a \in D$

$$(Y - \beta(\cdot))f(\cdot,w;a) = \alpha^*(\cdot)\sigma P_-[\alpha(\cdot)f(\cdot,w;a)],$$

где $P_- = P$ – сингулярный интегральный оператор (3). Поскольку

$$(Y - wI_H)f(\cdot,w;a) = \alpha^*(x)a,$$

то очевидно, что

$$(\beta(\cdot) - wI_D)f(\cdot,w;a) + \alpha^*(\cdot)\sigma P_-[\alpha(\cdot)f(\cdot,w;a)] = \alpha^*(\cdot)a.$$

Умножим обе части слева на $\alpha(\cdot)(\beta(\cdot) - wI_D)^{-1}$ и обозначим $P_+ = I_H - P_-$. Тогда

$$\begin{gathered} (P_+ + P_-)[\alpha(\cdot)f(\cdot,w;a)] + \alpha(\cdot)(\beta(\cdot) - wI_D)^{-1}\alpha^*(\cdot)\sigma\times \\ \times P_-[\alpha(\cdot)f(\cdot,w;a)] = \alpha(\cdot)(\beta(\cdot) - wI_D)^{-1}\alpha^*(\cdot)\sigma\sigma^{-1}a. \end{gathered}$$

Прибавим к обеим частям $\sigma^{-1}a$ и учтем (15). Следовательно

$$\sigma^{-1}a + P_{+}\left[\alpha(\cdot) f(\cdot, w; a)\right] = S(\cdot, w)\left[\sigma^{-1}a - P_{-}\left[\alpha(\cdot) f(\cdot, w; a)\right]\right]. \qquad (24)$$

Используя (5), (8) и (9), определяющую функцию можно записать как интеграл

$$E(z, w) a = \sigma^{-1}a + \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta} \frac{\alpha(x) f(x, w; a)}{x - z} dx, \qquad (25)$$

откуда по формулам Племеля [2] получаем, что для всех вещественных x

$$E(x \pm i0, w) a = \sigma^{-1}a \pm P_{\pm}\left[\alpha(\cdot) f(\cdot, w; a)\right]. \qquad (26)$$

Таким образом, из (24) и (26) мы окончательно получаем, что определяющая функция удовлетворяет следующей задаче Римана-Гильберта:

$$E(x + i0, w) = S(x, w) E(x - i0, w). \qquad (27)$$

4. Узел с инволютивной метрикой

Рассмотрим частный случай, когда $\sigma = \sigma^{-1}$, то есть σ инволюция. Тогда, очевидно, что оператор

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma \\ -i\sigma & 0 \end{pmatrix}$$

также является инволюцией. Введем в рассмотрение ортопроекторы $\tilde{P}_{\pm} = \frac{I_{D\oplus D} \pm J}{2}$. Тогда очевидно, что энергетический закон сохранения (14) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dx}\|h(x)\|_D^2 = \|w_{+}(x)\|_{D\oplus D}^2 - \|w_{-}(x)\|_{D\oplus D}^2, \qquad (28)$$

где

$$w_{\pm}(x) = \tilde{P}_{\pm}\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Определим вход $\hat{u}$ и выход $\hat{v}$ нормированной открытой системы

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u(x) + i\sigma v(x)\right), \qquad \hat{v}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\sigma v(x) - u(x)\right). \qquad (30)$$

Тогда

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{u}(x) - \hat{v}(x)\right), \qquad v = -\frac{i\sigma}{\sqrt{2}}\left(\hat{v}(x) + \hat{u}(x)\right), \qquad (31)$$

и система $\{\Re_{\Delta}, S_{\Delta}\}$ (13) примет вид:

$$\begin{cases} \hat{\Re}_{\Delta}: & i\frac{d}{dx}h(x) + B(x) h(x) = A(x)\hat{u}(x), \quad h(0) = h_0, \\ \hat{S}_{\Delta}: & \hat{v}(x) = i\sigma\hat{u}(x) + \sigma A^{*}(x) h(x). \end{cases} \qquad (32)$$

где

$$B(x) = \beta(x) + \frac{1}{2}\alpha^*(x)(\sigma + iI_D)\alpha(x), \quad A(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha^*(x)(\sigma - iI_D). \quad (33)$$

Для открытой системы $\left\{\hat{\mathfrak{R}}_\Delta, \hat{S}_\Delta\right\}$ (32) энергетический закон сохранения (28) перепишется в виде

$$\frac{d}{dx}\|h(x)\|_D^2 = \|\hat{u}(x)\|_D^2 - \|\hat{v}(x)\|_D^2, \quad (34)$$

а характеристическая функция будет иметь вид:

$$\hat{S}_\Delta(x,z) = i\sigma + \sigma A^*(x)[B(x) - z]^{-1} A(x). \quad (35)$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что характеристическая функция (35) имеет следующие свойства:

$$\hat{S}_\Delta(x,z)^{-1} = -i\sigma + A^*(x)[B(x) - iA(x)A^*(x) - z]^{-1} A(x)\sigma, \quad (36)$$

$$\begin{gathered} \tfrac{i}{\bar{w}-z}\left(I_D - \hat{S}^*_\Delta(x,w)\hat{S}_\Delta(x,z)\right) = \hat{\kappa}^*(x,w)\hat{\kappa}(x,z), \\ \hat{\kappa}(x,z) = [B(x) - z]^{-1} A(x). \end{gathered} \quad (37)$$

Кроме того, справедлива следующая

Лемма 3. *Характеристическая функция $\hat{S}_\Delta(x,z)$ (35) является преобразованием Кэли функции $\sigma S_\Delta(x,z)$ (см. (15)), то есть*

$$\begin{gathered} \hat{S}_\Delta(x,z) = (\sigma S_\Delta(x,z) + iI_D)(\sigma S_\Delta(x,z) - iI_D)^{-1}, \\ S_\Delta(x,z) = i\sigma\left(\hat{S}_\Delta(x,z) + I_D\right)\left(\hat{S}_\Delta(x,z) - I_D\right)^{-1}. \end{gathered} \quad (38)$$

Доказательство. Достаточно проверить второе соотношение (38). Прямым вычислением можно показать, что

$$\left(\hat{S}_\Delta(x,z) - I_D\right)^{-1} = -\tfrac{1}{2}(i\sigma + I_D) -$$
$$-\tfrac{1}{2}(i\sigma + I_D)A^*(x)\left[B(x) - A(x)\tfrac{1}{2}(iI_D + \sigma)A^*(x) - z\right]^{-1} A(x)\tfrac{1}{2}(i\sigma + I_D).$$

Далее, раскрывая скобки в выражении

$$\left(\hat{S}_\Delta(x,z) + I_D\right)\left(\hat{S}_\Delta(x,z) - I_D\right)^{-1},$$

прибавляя и вычитая

$$\sigma A^*(x)\left[B(x) - A(x)\frac{1}{2}(iI_D + \sigma)A^*(x) - z\right]^{-1} A(x)\frac{1}{2}(i\sigma + I_D),$$

получаем, что

$$\left(\hat{S}_\Delta(x,z) + I_D\right)\left(\hat{S}_\Delta(x,z) - I_D\right)^{-1} = -i\sigma -$$
$$-(iI_D + \sigma)A^*(x)\left[B(x) - A(x)\tfrac{1}{2}(iI_D + \sigma)A^*(x) - z\right]^{-1} A(x)\tfrac{1}{2}(i\sigma + I_D).$$

Откуда с учетом определения коэффициентов $A(x)$ и $B(x)$ (33) имеем второе соотношение (38). Лемма доказана.

5. Унитарная дилатация решения линейной однородной задачи Коши с диссипативным оператором

Здесь мы по-прежнему будем считать, что σ – инволюция. Рассмотрим следующую линейную однородную абстрактную задачу Коши:

$$i\dot{h}_t + B(t)\,h_t = 0, \quad h|_{t=0} = h, \tag{39}$$

где оператор $B(t)$ определен в (33) и очевидно, является диссипативным, поскольку

$$\frac{1}{2i}\left(B(t) - B^*(t)\right) = \frac{1}{2}\alpha^*(t)\,\alpha(t) \geq 0. \tag{40}$$

Мы будем считать, что операторы $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, а значит и операторы $A(t)$ и $B(t)$ (см. (4) и (33)) заданы на всей вещественной оси.

Легко проверить, что

$$\frac{d}{dt}\|h_t\|_D^2 = -\left\langle \frac{1}{i}\left(B(t) - B^*(t)\right)h_t, h_t \right\rangle_D = -\|\alpha(t)\,h_t\|_D^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

откуда следует, что диссипативность $B(t)$ (40) эквивалентна тому, что решение абстрактной задачи Коши (39) является сжимающим, то есть

$$\|h_t\|_D \leq \|h\|_D\,, \quad \forall h \in D, \quad \forall t \geq 0. \tag{41}$$

Запишем решение задачи Коши (39) явно с помощью матрицы Коши

$$h_t = \Phi(t,0)\,h, \tag{42}$$

где $\Phi(t,0) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(0)$ и $\Phi(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (39). Из условия сжимаемости (41) и представления (42) (в котором вместо 0 можно брать любое число t_0) следует, что

$$\|\Phi(t,t_0)\| \leq 1, \quad \forall t \geq t_0, \tag{43}$$

то есть оператор $\Phi(t,t_0)$ является сжатием.

Определение. *Оператор U_t, действующий в гильбертовом пространстве G, называется унитарной дилатацией сжатия $\Phi(t,0)$, дейтвующего в гильбертовом пространстве H, если*

1) Оператор U_t – унитарный;

2) $G \supset H$ и $P_H U_t h = \Phi(t,0)\,h$, $\forall h \in D$, $\forall t \geq 0$, где P_H – ортопроектор на пространство H.

В [8] доказано, что всякое сжатие обладает унитарной дилатацией. Здесь мы предъявим конкретную конструкцию дилатации для семейства сжатий $\Phi(t,0)$.

Теорема 1. *Всякое решение линейной однородной задачи Коши (39) с диссипативным оператором $B(t)$ обладает унитарной дилатацией.*

Доказательство. Определим пространство дилатации

$$G = \{f = (u(\xi), h, v(\xi))\};$$
$$u(\xi) \in L^2((-\infty, 0], D), h \in D, v(\xi) \in L^2([0, +\infty), D). \tag{44}$$

с соответствующей нормой

$$\|f\|_G^2 = \int_{-\infty}^{0} \|u(\xi)\|_D^2 \, d\xi + \|h\|_D^2 + \int_{0}^{+\infty} \|v(\xi)\|_D^2 \, d\xi < \infty. \tag{45}$$

Ясно, что носитель $u(\xi)$ расположен на $(-\infty, 0]$, а носитель $v(\xi)$ – на $[0, +\infty)$.

Определим в пространстве G (44) семейство операторов с параметром $t \geq 0$

$$U_t f = f_t = (u_t(\xi), h_t, v_t(\xi)) \tag{46}$$

следующим образом. Сначала зададим $u_t(\xi)$:

$$u_t(\xi) = \chi_{(-\infty,0)}(\xi) \, u(\xi - t), \tag{47}$$

где $\chi_{(-\infty,0)}(\xi)$ – характеристичекая функция интервала $(-\infty, 0)$ по переменной ξ.

Далее, рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $\xi \in [0, t]$, зависящую от параметра t:

$$i\frac{d}{d\xi} y(\xi) + B(\xi) \, y(\xi) = A(\xi) \, u(\xi - t), \quad y(0) = h, \tag{48}$$

где $B(\xi)$ и $A(\xi)$ определены в (33). Тогда h_t зададим следующим образом:

$$h_t = y(t). \tag{49}$$

Последнюю компоненту f_t определим так:

$$v_t(\xi) = \chi_{(t,+\infty)}(\xi) \, v(\xi - t) + \chi_{(0,t)}(\xi) \left[i\sigma u(\xi - t) + \sigma A^*(\xi) \, y(\xi)\right] \tag{50}$$

(см. (32)).

Покажем, что U_t – унитарная дилатация решения линейной однородной задачи Коши (39). Поскольку из определений компонент f_t (47)-(50) очевидно, что $P_H U_t h$ является решением линейной однородной задачи Коши

$$i\frac{d}{d\xi} y(\xi) + B(\xi) \, y(\xi) = 0, \quad y(0) = h,$$

на правом конце $h_t = y(t)$, то ясно, что пункт 2) определения дилатации выполнен.

Проверим, что U_t сохраняет скалярное произведение. Для любого элемента $f \in G$, имеем

$$\begin{gathered}\|f_t\|_G^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \|u(\xi - t)\|_D^2 \, d\xi + \|h_t\|_D^2 + \\ + \int\limits_0^t \|i\sigma u(\xi - t) + \sigma A^*(\xi)\, y(\xi)\|_D^2 \, d\xi + \int\limits_t^{+\infty} \|v(\xi - t)\|_D^2 \, d\xi.\end{gathered} \tag{51}$$

Заметим, что если (34) проинтегрировать от 0 до t, то для нашей задачи Коши справедлив энергетический закон сохранения в следующем виде:

$$\begin{gathered}\|h_t\|_D^2 = \|h\|_D^2 + \int\limits_0^t \|u(\xi - t)\|_D^2 \, d\xi - \\ - \int\limits_0^t \|i\sigma u(\xi - t) + \sigma A^*(\xi)\, y(\xi)\|_D^2 \, d\xi.\end{gathered} \tag{52}$$

Тогда, подставляя (52) в (51), и производя замену переменных $\xi - t = \eta$, мы получим:

$$\begin{gathered}\|f_t\|_G^2 = \int\limits_{-\infty}^{-t} \|u(\eta)\|_D^2 \, d\eta + \|h\|_D^2 + \\ + \int\limits_{-t}^{0} \|u(\eta)\|_D^2 \, d\eta + \int\limits_0^{+\infty} \|v(\eta)\|_D^2 \, d\eta = \|f\|_G^2 .\end{gathered}$$

Таким образом, U_t – изометрия.

Чтобы доказать, что U_t – унитарный оператор, достаточно показать, что $\ker U_t^* = \{0\}$ (то есть, что U_t отображает все пространство на все пространство). Пусть

$$U_t^* f = (u_t^*(\xi), h_t^*, v_t^*(\xi)). \tag{53}$$

Используя свойства скалярного произведения, получаем, что соответствующие компоненты равны

$$v_t^*(\xi) = \chi_{(0,+\infty)}(\xi)\, v(\xi + t), \tag{54}$$

$$h_t^* = \hat{y}(0), \tag{55}$$

$$\begin{gathered}u_t^*(\xi) = \chi_{(-\infty,-t)}(\xi)\, u(\xi + t) + \\ + \chi_{(-t,0)}(\xi)\left[-i\sigma v(\xi + t) + iA^*(\xi + t)\, \hat{y}(\xi + t)\right],\end{gathered} \tag{56}$$

где $\hat{y}(\xi)$ удовлетворяет следующей задаче Коши на отрезке $\xi \in [0, t]$, соответствующей матрице Коши $\Phi^*(t, \xi)$

$$\frac{d}{d\xi}\hat{y}(\xi) = \hat{B}(\xi)\, \hat{y}(\xi) - A(\xi)\, \sigma v(\xi), \quad \hat{y}(t) = h. \tag{57}$$

Определим, чему равен $\hat{B}(\xi)$. Из свойства фундаментальной системы решений и формулы для производной обратного оператора следует, что

$$\frac{d}{d\xi}\left[(\Phi^*(\xi))^{-1}\right] = \hat{B}(\xi)\, (\Phi^*(\xi))^{-1} = -(\Phi^*(\xi))^{-1}\left[\frac{d}{d\xi}\Phi^*(\xi)\right](\Phi^*(\xi))^{-1} \tag{58}$$

и

$$\frac{d}{d\xi}\left[\Phi\left(\xi\right)\right]=iB\left(\xi\right)\Phi\left(\xi\right). \tag{59}$$

Таким образом, переходя к сопряжению в (58) и сопоставляя с (59), мы получаем, что $\hat{B}\left(\xi\right)=iB^{*}\left(\xi\right)$, и задача Коши (57) принимает вид:

$$i\frac{d}{d\xi}\hat{y}\left(\xi\right)+B^{*}\left(\xi\right)\hat{y}\left(\xi\right)=-iA\left(\xi\right)\sigma v\left(\xi\right),\quad \hat{y}\left(t\right)=h. \tag{60}$$

Пусть $U_t^* f = 0$. Тогда из (56) очевидно, что $u(\xi) \equiv 0$ на всей полуоси $(-\infty, 0)$, и из (54) $v(\xi) \equiv 0$ на $(t, +\infty)$. Из (56) мы также имеем $v(\xi) = \sigma A^*(\xi)\hat{y}(\xi)$, $\forall \xi \in [0, t]$. Подставляя это равенство в задачу Коши (60), и учитывая из (55), что $\hat{y}(0) = h_t^* = 0$, получаем, что $\hat{y}(\xi) \equiv 0$. $\forall \xi \in [0, l]$ как решение линейной однородной задачи Коши с нулевым начальным условием. Таким образом, из (56) $v(\xi) \equiv 0$ на $(0, t]$, и из (60) $h = 0$. Следовательно, мы получили, что

$$f=\left(u\left(\xi\right),h,v\left(\xi\right)\right)\equiv 0,$$

то есть, $\ker U_t^* = \{0\}$ и оператор U_t – унитарная дилатация решения линейной однородной задачи Коши (39). Теорема доказана.

6. Волновые операторы и оператор рассеяния

Построенное выше пространство дилатации (44) имеет вид:

$$G=L^{2}\left(\left(-\infty,0\right],D\right)\oplus D\oplus L^{2}\left(\left[0,+\infty\right),D\right)=D_{-}\oplus D\oplus D_{+}. \tag{61}$$

Определение. *Подпространство $D_- = \{(u(\xi), 0, 0) \in G\}$ называется приходящим подпространством дилатации, а $D_+ = \{(0, 0, v(\xi)) \in G\}$ – уходящим подпространством дилатации, в том смысле, что $U_t D_+ \subset D_+$ и $U_t^* D_- \subset D_-$, $\forall t \geq 0$.*

Определим в пространстве

$$L^{2}\left(\left(-\infty,+\infty\right),D\right)=\left\{g\left(\xi\right)\in D:\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\Vert g\left(\xi\right)\right\Vert_{D}^{2}d\xi<\infty\right\}$$

следующий оператор сдвига влево:

$$(V_t g)(\xi)=g(\xi-t), \tag{62}$$

который является унитарным оператором, и его сопряженный оператор является сдвигом вправо

$$(V_t^* g)(\xi)=g(\xi+t)=(V_{-t}g)(\xi). \tag{63}$$

Зададим в пространстве G семейство операторов

$$\tilde{U}_t^* f=\left(u_t\left(\xi\right),h_t,v_t\left(\xi\right)\right),\quad \forall f\in G,\quad \forall t\geq 0 \tag{64}$$

следующим образом:

$$v_t(\xi) = \chi_{(0,+\infty)}(\xi)\, v(\xi + t), \tag{65}$$

$$h_t = y(-t), \tag{66}$$

$$u_t(\xi) = \chi_{(-\infty,-t)}(\xi)\, u(\xi + t) + \chi_{(-t,0)}(\xi)\left[-i\sigma v(\xi + t) + iA^*(\xi)\, y(\xi)\right], \tag{67}$$

где $y(\xi)$ удовлетворяет следующей задаче Коши на отрезке $[-t, 0]$:

$$i\frac{d}{d\xi}y(\xi) + B^*(\xi)\, y(\xi) = -iA(\xi)\,\sigma u(\xi - t), \quad y(0) = h. \tag{68}$$

Сопряженный оператор действует следующим образом:

$$\tilde{U}_t f = (u_t(\xi), h_t, v_t(\xi)), \quad \forall f \in G, \quad \forall t \geq 0, \tag{69}$$

$$u_t(\xi) = \chi_{(-\infty,0)}(\xi)\, u(\xi - t), \tag{70}$$

$$h_t = y(0), \tag{71}$$

$$\begin{gathered} v_t(\xi) = \chi_{(t,+\infty)}(\xi)\, v(\xi - t) + \\ + \chi_{(0,t)}(\xi)\left[i\sigma u(\xi - t) + \sigma A^*(\xi - t)\, y(\xi - t)\right], \end{gathered} \tag{72}$$

а $y(\xi)$ удовлетворяет следующей задаче Коши на отрезке $[-t, 0]$:

$$i\frac{d}{d\xi}y(\xi) + B(\xi)\, y(\xi) = A(\xi)\, u(\xi), \quad y(-t) = h. \tag{73}$$

Как и в случае дилатации U_t очевидно, что оператор $\tilde{U}_t$ осуществляет унитарную дилатацию решения h_t следующей линейной однородной задачи Коши на отрезке $[-t, 0]$

$$i\frac{d}{d\xi}y(\xi) + B(\xi)\, y(\xi) = 0, \quad y(-t) = h, \quad y(0) = h_t \tag{74}$$

с матрицей Коши $\Phi(0, -t)$.

Легко видеть, что дилатация (69) $\tilde{U}_t$ так же как и дилатация (46) удовлетворяет свойствам инвариантности $\tilde{U}_t D_+ \subset D_+$ и $\tilde{U}_t^* D_- \subset D_-$, $\forall t \geq 0$.

Пусть

$$G_L = L^2((-\infty, +\infty), D) \bigcap L^1((-\infty, +\infty), D). \tag{75}$$

Определим пару волновых операторов $W_\pm : G_L \to G$ как сильный предел следующих последовательностей операторов:

$$W_- = s - \lim_{t\to+\infty} U_t P_{D_-} V_t^*, \qquad W_+ = s - \lim_{t\to+\infty} \tilde{U}_t^* P_{D_+} V_t, \tag{76}$$

где $P_{D_\pm}$ – ортопроекторы на подпространства дилатации $D_\pm$.

Теорема 2. *Пусть функция $\alpha(t)$ (4), а значит и функция $A(t)$ (33) ограничена на вещественной оси, то есть*

$$\|A(t)\| \leq C, \quad \forall t. \tag{77}$$

Пусть также существуют $\Phi(\pm\infty)$, то есть

$$\begin{aligned} \|\Phi(t+s,t) - I_D\| &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \\ \|\Phi(-t,-t-s) - I_D\| &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall s \geq 0. \end{aligned} \tag{78}$$

Тогда существуют волновые операторы $W_\pm : G_L \to G$ (76) и обладают следующими свойтвами:

1) $W_\pm$ являются изометрическими отображениями;

2) сужения волновых операторов $W_\pm$ на соответствующие подпространства дилатации являются ортопроекторами, то есть

$$W_\pm|_{D_\pm} = P_{D_\pm}. \tag{79}$$

Доказательство. 0) Сначала докажем, что существует W_-. Для любого $g \in G_L$ рассмотрим семейство $f_t = U_t P_{D-} V_t^* g$, и покажем, что $\|f_{t+s} - f_t\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall s > 0$.

Сначала вычислим f_t. Из определений (46)-(50) следует, что

$$f_t = U_t\left(\chi_{(-\infty,0)}(\xi)\, g(\xi+t), 0, 0\right) = \left(\chi_{(-\infty,0)}(\xi)\, g(\xi), h_t, v_t(\xi)\right), \tag{80}$$

где

$$h_t = \int\limits_0^t \Phi(t,\tau)\left(-iA(\tau)\, g(\tau)\right) d\tau, \tag{81}$$

$$v_t(\xi) = \chi_{(0,t)}(\xi)\left[i\sigma g(\xi) + \sigma A^*(\xi)\, y(\xi)\right], \tag{82}$$

а $y(\xi)$ удовлетворяет задаче Коши:

$$i\frac{d}{d\xi} y(\xi) + B(\xi)\, y(\xi) = A(\xi)\, g(\xi), \quad y(0) = 0. \tag{83}$$

Таким образом, из определения нормы (45) и из (80)-(83) следует, что

$$\|f_{t+s} - f_t\|_G^2 = \|h_{t+s} - h_t\|_D^2 + \int\limits_t^{t+s} \|v_{t+s}(\xi)\|_D^2\, d\xi. \tag{84}$$

Вычислим $\|v_{t+s}(\xi)\|_D^2$:

$$\begin{gathered} \|v_{t+s}(\xi)\|_D^2 = \|g(\xi)\|_D^2 + \|A^*(\xi)\, y(\xi)\|_D^2 - \langle iy(\xi), A(\xi)\, g(\xi)\rangle_D - \\ - \langle A(\xi)\, g(\xi), iy(\xi)\rangle_D = \|g(\xi)\|_D^2 + \|A^*(\xi)\, y(\xi)\|_D^2 - \tfrac{d}{d\xi}\|y(\xi)\|_D^2 + \\ + \langle i[B(\xi) - B^*(\xi)]\, y(\xi), y(\xi)\rangle_D. \end{gathered}$$

Используя определения операторов $B(\xi)$ и $A(\xi)$ (33), легко проверить, что

$$\|A^*(\xi)\, y(\xi)\|_D^2 + \langle i[B(\xi) - B^*(\xi)]\, y(\xi), y(\xi)\rangle_D = 0. \tag{85}$$

Таким образом, из (49) и (85) получаем, что (84) имеет вид:

$$\|f_{t+s}-f_t\|_G^2=\|h_{t+s}-h_t\|_D^2-\|h_{t+s}\|_D^2+\|h_t\|_D^2+\int\limits_t^{t+s}\|g(\xi)\|_D^2\,d\xi. \qquad (86)$$

Поскольку из (81)

$$h_{t+s}-h_t=\left[\Phi(t+s,t)-I_D\right]\int\limits_0^t\Phi(t,\tau)(-iA(\tau)g(\tau))\,d\tau+$$
$$+\int\limits_t^{t+s}\Phi(t+s,\tau)(-iA(\tau)g(\tau))\,d\tau,$$

то из (43), (77), (78), в силу того, что $g\in G_L$ (75) и из определения нормы пространства $L^1((-\infty,+\infty),D)$, получаем:

$$\|h_{t+s}-h_t\|_D\le\|\Phi(t+s,t)-I_D\|_D\,C\,\|g\|_{L^1((-\infty,+\infty),D)}+$$
$$+C\int\limits_t^{t+s}\|g(\tau)\|_D\,d\tau\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0,\quad\forall s\ge 0.$$

Таким образом, из (86) $\|f_{t+s}-f_t\|\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\forall s>0$, и следовательно существует волновой оператор W_-.

Теперь аналогично покажем, что существует W_+. Для любого $g\in G_L$ рассмотрим семейство $f_t=\tilde U_t^*P_{D_+}V_tg$. Следовательно из определений (64)-(68) получаем, что

$$f_t=\tilde U_t^*\left(0,0,\chi_{(0,+\infty)}(\xi)\,g(\xi-t)\right)=\left(u_t(\xi),h_t,\chi_{(0,+\infty)}(\xi)\,g(\xi)\right), \qquad (87)$$

где

$$h_t=\int\limits_{-t}^{0}\Phi^*(\tau,-t)\,A(\tau)\,\sigma g(\tau)\,d\tau, \qquad (88)$$

$$u_t(\xi)=\chi_{(-t,0)}(\xi)\left[-i\sigma g(\xi)+iA^*(\xi)\,y(\xi)\right], \qquad (89)$$

$$y(\xi)=\int\limits_{\xi}^{0}\Phi^*(\tau,\xi)\,A(\tau)\,\sigma g(\tau)\,d\tau. \qquad (90)$$

Таким образом, из (87)-(90) получаем:

$$\|f_{t+s}-f_t\|_G^2=\|h_{t+s}-h_t\|_D^2+\int\limits_{-t-s}^{-t}\|u_{t+s}(\xi)\|_D^2\,d\xi. \qquad (91)$$

Как и в предыдущем случае с учетом (85) легко проверить, что

$$\|u_{t+s}(\xi)\|_D^2=\|g(\xi)\|_D^2+\frac{d}{d\xi}\|y(\xi)\|_D^2, \qquad (92)$$

а значит в силу (66), (91) принимает вид:

$$\|f_{t+s} - f_t\|_G^2 = \|h_{t+s} - h_t\|_D^2 - \|h_{t+s}\|_D^2 + \|h_t\|_D^2 + \int\limits_{-t-s}^{-t} \|g(\xi)\|_D^2 \, d\xi. \qquad (93)$$

Поскольку из (88)

$$h_{t+s} - h_t = [\Phi^*(-t, -t-s) - I_D] \int\limits_{-t}^{0} \Phi^*(\tau, -t) A(\tau) \sigma g(\tau) \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{-t-s}^{-t} \Phi^*(\tau, -t-s) \sigma A(\tau) g(\tau) \, d\tau,$$

то из (43), (77), (78), в силу того, что $g \in G_L$ (75) и из определения нормы пространства $L^1((-\infty, +\infty), D)$, получаем:

$$\|h_{t+s} - h_t\|_D \le \|\Phi^*(-t, -t-s) - I_D\|_D \, C \, \|\sigma\|_D \, \|g\|_{L^1((-\infty,+\infty),D)} +$$

$$+ C \, \|\sigma\|_D \int\limits_{-t-s}^{-t} \|g(\tau)\|_D \, d\tau \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall s \ge 0.$$

Таким образом, из (93) $\|f_{t+s} - f_t\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall s > 0$, и следовательно существует волновой оператор W_+. Существование волновых операторов доказано.

1) Докажем, что W_- – изометрия. Для любого $g \in G_L$ рассмотрим допредельное выражение

$$\|U_t P_{D_-} V_t^* g\|_G^2 = \|P_{D_-} V_t^* g\|_G^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \|g(\xi + t)\|_D^2 \, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{t} \|g(\xi)\|_D^2 \, d\xi.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, получаем, что

$$\|W_- g\|_G^2 = \|g\|_{L^2((-\infty,+\infty),D)}^2,$$

то есть W_- – изометрия.

Аналогично для W_+:

$$\left\|\tilde{U}_t^* P_{D_+} V_t g\right\|_G^2 = \int\limits_{-t}^{+\infty} \|g(\xi)\|_D^2 \, d\xi,$$

следовательно

$$\|W_+ g\|_G^2 = \|g\|_{L^2((-\infty,+\infty),D)}^2,$$

и W_+ – изометрия. Изометричность волновых операторов доказана.

2) Докажем, что $W_-|_{D_-} = P_{D_-}$. Рассмотрим допредельное выражение:

$$\|U_t P_{D_-} V_t^* P_{D_-} g\|_G^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \left\|\chi_{(-\infty,0)}(\xi + t) \, g(\xi + t)\right\|_D^2 d\xi = \int\limits_{-\infty}^{0} \|g(\xi)\|_D^2 \, d\xi.$$

Таким образом, переходя к пределу, получаем:

$$\left\|W_- P_{D_-} g\right\|_G^2 = \left\|P_{D_-} g\right\|_G^2,$$

то есть, сужение оператора W_- на подпространство дилатации D_- является ортопроектором на D_-.

Аналогично для W_+:

$$\left\|\tilde{U}_t^* P_{D_+} V_t P_{D_+} g\right\|_G^2 = \int\limits_0^{+\infty} \|g(\xi)\|_D^2 \, d\xi,$$

следовательно

$$\left\|W_+ P_{D_+} g\right\|_G^2 = \left\|P_{D_+} g\right\|_G^2.$$

Таким образом, сужение оператора W_+ на подпространство дилатации D_+ является ортопроектором на D_+. Теорема полностью доказана.

Лемма 4. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2. Кроме того, если существует достаточно большое число $R > 0$, такое, что $\forall t : |t| > R$ оператор-функция $A(t)$ (33) (или что эквивалентно $\alpha(t)$ (4)) обратима, то $W_\pm$ являются унитарными операторами (которые, конечно, отображают все пространство G_L на все пространство G).*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $W_\pm$ изометрии. Таким образом, чтобы доказать унитарность, достаточно доказать (как и в теореме 1), что $\ker W_\pm^* = \{0\}$. Рассматривая допредельное выражение для W_-^*, имеем

$$V_t P_{D_-} U_t^* (u(\xi), h, v(\xi)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, из (56), (61) и (62) имеем

$$\chi_{(-\infty,0)}(\xi)\, u(\xi) + \chi_{(0,+\infty)}(\xi)\left[-i\sigma v(\xi) + iA^*(\xi)\, y(\xi)\right] = 0.$$

Поэтому $u \equiv 0$ и $v(\xi) = \sigma A^*(\xi)\, y(\xi)$, а значит из (60) $y(\xi)$ удовлетворяет следующей задаче Коши:

$$i\frac{d}{d\xi} y(\xi) + B^*(\xi)\, y(\xi) = -iA(\xi)\, A^*(\xi)\, y(\xi), \quad y(t) = h.$$

Поскольку $v \in L^2([0,+\infty), D)$, следовательно $v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, а в силу предположения леммы для достаточно больших t $A(t)$ обратима и из (77) ограничена, поэтому $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Но $y(t) = h$, следовательно $h = 0$, и в силу единственности решения линейной однородной задачи Коши $y \equiv 0$ и следовательно $v \equiv 0$. Таким образом, $\ker W_-^* = \{0\}$.

Аналогично для W_+^*, предполагая, что

$$V_t^* P_{D_+} \tilde{U}_t (u(\xi), h, v(\xi)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

из (61), (63) и (72) получаем, что

$$\chi_{(0,+\infty)}(\xi)\, v(\xi) + \chi_{(-\infty,0)}(\xi)\, [i\sigma u(\xi) + \sigma A^*(\xi)\, y(\xi)] = 0,$$

откуда из (73) $y(\xi)$ удовлетворяет следующей линейной однородной задаче Коши:

$$i\frac{d}{d\xi} y(\xi) + B(\xi)\, y(\xi) = iA(\xi)\, A^*(\xi)\, y(\xi), \quad y(-t) = h.$$

Следовательно, из аналогичных соображений получаем, что $u \equiv v \equiv y \equiv 0$, $h = 0$. Таким образом, $\ker W_+^* = \{0\}$. Лемма доказана.

Определение. *Оператором рассеяния* $S : G_L \to G_L$ *называется оператор* $S = W_+^* W_-$.

Теорема 3. *1) Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда оператор рассеяния является сжатием, то есть* $\|S\| \leq 1$. *Если кроме того выполнены условия леммы 4, то оператор* S *унитарный.*

2) При условиях теоремы 2 справедливо свойство инвариантности $SD_- \subset D_-$.

Доказательство. Первое утверждение очевидное следствие первого свойства теоремы 2 и леммы 4. Для того, чтобы доказать второе утверждение, рассмотрим $g_\pm \in D_\pm$. Поскольку из второго свойства теоремы 2

$$\begin{aligned}\langle Sg_-, g_+\rangle_{L^2((-\infty,+\infty),D)} &= \langle W_- g_-, W_+ g_+\rangle_{L^2((-\infty,+\infty),D)} = \\ &= \langle g_-, g_+\rangle_{L^2((-\infty,+\infty),D)} = 0,\end{aligned}$$

то $Sg_- \perp g_+$, $\forall g_\pm \in D_\pm$. Это и означает, что $SD_- \subset D_-$. Теорема доказана.

Вычислим оператор S на элементах из G_L. Рассматривая допредельное выражение, легко проверить, что

$$\begin{aligned}\left(V_t^* P_{D_+} \tilde{U}_t U_t P_{D_-} V_t^* g\right)(\xi) &= \chi_{(-t,t)}(\xi)\, i\sigma g(\xi) + \\ &+ \chi_{(-t,0)}(\xi)\, \sigma A^*(\xi)\, \tilde{y}(\xi) + \chi_{(0,t)}(\xi)\, \sigma A^*(\xi)\, y(\xi),\end{aligned}$$

где

$$y(\xi) = \int_0^\xi \Phi(\xi,\tau)(-iA(\tau)\, g(\tau))\, d\tau,$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}(\xi) = \Phi(\xi,-t) &\int_0^t \Phi(t,\tau)(-iA(\tau)\, g(\tau))\, d\tau + \\ &+ \int_{-t}^\xi \Phi(\xi,\tau)(-iA(\tau)\, g(\tau))\, d\tau.\end{aligned}$$

Таким образом, переходя к пределу при $t \to +\infty$, окончательно получаем:

$$\begin{aligned}(Sg)(\xi) = i\sigma g(\xi) + \sigma A^*(\xi)\, \Phi(\xi,-\infty) &\int_0^{+\infty} \Phi(+\infty,\tau)(-iA(\tau)\, g(\tau))\, d\tau + \\ + \sigma A^*(\xi) &\int_{-\infty}^\xi \Phi(\xi,\tau)(-iA(\tau)\, g(\tau))\, d\tau, \quad \xi < 0,\end{aligned}$$

$$(Sg)(\xi) = i\sigma g(\xi) + \sigma A^*(\xi) \int_0^\xi \Phi(\xi,\tau)(-iA(\tau)\, g(\tau))\, d\tau, \quad \xi > 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Xia Daoxing. Spectral theory of hyponormal operators. Operator Theory: Advances and Applications. // Basel; Boston; Stuttgart: Birkhauser-Verlag. – 1983. – V. 10. – 242 p.

2. Алешков Ю. З., Смышляев П. П. Теория функций комплексного переменного и ее приложения. – Л.: Изд. ленингр. ун-та, – 1986. – 248 с.

3. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков: Изд. харьк. ун-та, – 1971. – 160 с.

4. Бродский М. С. Унитарные операторные узлы и их характеристические функции. // УМН. – 1978.– Т. 33, вып. 4 /202/. – С. 141-168.

5. Золотарев В. А. Метод открытых систем. Треугольные и функциональные модели коммутативных систем двух операторов. // Рукопись. Деп. в укр. НИИНТИ РЖ. Мат. 9Б630. Деп. – 1984. – 166 с.

6. Золотарев В. А., Воробьев И. В. Нормальный метрический узел. // Вестн. Харьк. ун-та. Сер. математика, прикладная математика и механика. – 1999. – **458**. – С. 119-129.

7. Воробьев И. В. Свойства нормальных метрических узлов и нормальная дилатация. // Вісн. Харк. ун-ту. Сер. актуальні проблеми сучасн. науки в дослідженнях молодих вчених м. Харкова. – 2000. – **456**. – Ч. 2. – С. 250-253.

8. С.-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, – 1970. – 431 с.

9. Золотарев В. А. Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности. // Мат. сборник. – 1990. – **181**. – № 7. – С. 965-994.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 531.38 № 514, 2001, с. 91–98

О трех инвариантных соотношениях уравнений динамики твердого тела

Г. В. Горр, А. С. Мельник

ИПММ НАН Украины, г. Донецк, Украина

В данной работе рассмотрены три инвариантных соотношения для уравнений Д.Гриоли - М.П. Харламова. В предположении, что известны потенциальная и гироскопическая функции, указан алгоритм исследования условий их существования, который основан на использовании первых интегралов и интегрировании уравнений Пуассона.

2000 Mathematics Subject Classification 70E17, 70E05.

Наиболее общие уравнения динамики твердого тела с неподвижной точкой, допускающие три перых интеграла, получены итальянским механиком Д. Гриоли [7]. В частном случае из этих уравнений вытекают уравнения М.П. Харламова [5], установленные им для систем с потенциальными и гироскопическими силами с симметрией. Метод инвариантных соотношений [6] позволяет на конструктивном уровне исследовать условия существования произвольных инвариантных соотношений и построить новые решения уравнений динамики твердого тела. Обзор результатов, посвященных частным решениям в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, приведен в [1].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении твердого тела с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил в постановке [5, 7]. Тогда в векторном виде имеем уравнения

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{x} \times a\mathrm{x} + \mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)(\nu \times a\mathrm{x}) + \frac{\partial L}{\partial \nu} \times a\mathrm{x} + \frac{\partial U}{\partial \nu} \times \nu, \tag{1}$$

$$\dot{\nu} = \nu \times a\mathrm{x}, \tag{2}$$

где: $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$ - вектор момента количества движения тела; $a\mathrm{x} = \omega$ - вектор угловой скорости тела; $a = (a_{ij})$ - гирационный тензор, построенный в неподвижной точке; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ - единичный вектор оси симметрии силового поля; $\mu = \mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L = L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U = U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$- скалярные дифференцируемые функции компонент вектора ν; $\frac{\partial L}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial L}{\partial \nu_1}, \frac{\partial L}{\partial \nu_2}, \frac{\partial L}{\partial \nu_3}\right)$, $\frac{\partial U}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial U}{\partial \nu_1}, \frac{\partial U}{\partial \nu_2}, \frac{\partial U}{\partial \nu_3}\right)$; точка над векторами означает производную по времени. Вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ имеет компоненты

$$\omega_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \omega_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \omega_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \quad (3)$$

Уравнения (1), (2) допускают три первых интеграла

$$\mathbf{x} \bullet a\mathbf{x} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E, \quad \mathbf{x} \bullet \nu + L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = k, \quad \nu \bullet \nu = 1, \qquad (4)$$

-где $|\bullet|$ - скалярное произведение. Отметим, что в классических задачах $\mu \equiv 0$, а $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ и $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ - многочлены по ν_i до второго порядка. Примечательное свойство уравнений (1), (2) состоит в том, что функция $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ не содержится в интегралах (4).

Для уравнений (1), (2) поставим задачу о нахождении условий существования трех инвариантных соотношений

$$f_i(x_1, x_2, x_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0, \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad (5)$$

где $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \neq 0$, $(i, j = 1, 2, 3)$. Тогда из соотношений (5) можно определить

$$x_i = g_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (6)$$

Без ограничения общности будем предполагать, что подвижной системой координат служит главная система, то есть $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Из равенств (3) получим и компоненты вектора $a\mathbf{x}$

$$\omega_1 = a_1 g_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \omega_2 = a_2 g_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \omega_3 = a_3 g_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \qquad (7)$$

здесь для краткости положено $a_{11} = a_1$, $a_{22} = a_2$, $a_{33} = a_3$. Таким образом, целью настоящей работы является разработка методики исследования у дифференциальных уравнений (1), (2) инвариантных соотношений вида (6).

2. Решение в рамках обратной задачи

Пусть соотношения (6) заданы, а функции $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ подлежат определению. В этом случае можно воспользоваться результатами работы [4], в которой функции $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ и $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ находятся из интегралов (4)

$$L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = k - \nu_1 g_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) - \nu_2 g_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) - \nu_3 g_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \qquad (8)$$

$$U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{2}\left(a_1 g_1^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + a_2 g_2^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + a_3 g_3^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\right) - E, \ (9)$$

После подстановки (6)-(9) в уравнения (1) в указанной работе получено

$$\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\frac{\partial g_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_1}+\frac{\partial g_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}+\frac{\partial g_3(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}. \tag{10}$$

Таким образом, если функции $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ удовлетворяют соотношениям (8), (9), то уравнения (1), (2) допускают три инвариантных соотношения (6) только при выполнении условия (10). При этом для сведения задачи к квадратурам (либо построения интегрального многообразия системы (1), (2)) необходимо проинтегрировать уравнения Пуассона (2), которые на основании (6), (7) приводят к трем скалярным уравнениям

$$\begin{cases}\dot\nu_1=a_3\nu_2 g_3(\nu_1,\nu_2,\nu_3)-a_2\nu_3 g_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3),\\ \dot\nu_2=a_1\nu_3 g_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)-a_3\nu_1 g_3(\nu_1,\nu_2,\nu_3),\\ \dot\nu_3=a_2\nu_1 g_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)-a_1\nu_2 g_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3).\end{cases} \tag{11}$$

Эти уравнения допускают интеграл $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^3=1$, что позволяет редуцировать систему (11) к неавтономному уравнению первого порядка вида

$$\frac{d\nu_2}{d\nu_1}=F(\nu_1,\nu_2).$$

Очевидно, что в общем случае проинтегрировать это уравнение невозможно. Итак, в рамках обратной задачи тривиальным образом определяются функции $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, а исследование проблемы нахождения условий существования трех инвариантных соотношений (6) у системы (1), (2) сведено к интегрированию нелинейной системы третьего порядка (11). То есть, строго говоря, в [4] указана лишь методика изучения соотношений (6) и построения соответствующего интегрального многообразия уравнений (1), (2).

В связи с тем, что интегрирование системы (11) является самостоятельной проблемой, то повышается значение тех примеров функций $g_i(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ [2, 3], для которых решение системы (11) можно найти в замкнутом виде. Кроме того, особый интерес представляет постановка задачи изучения трех инвариантных соотношений (6) при наличии дополнительных условий

$$\nu_2=\nu_2(\nu_1),\qquad \nu_3=\nu_3(\nu_1),\qquad \nu_1=\nu_1(t), \tag{12}$$

здесь ν_1 - вспомогательная переменная. Предполагаем, что соотношения (6), (12) удовлетворяют уравнениям (2). По терминологии [6] соотношения (6), (12) задают частное решение. В рамках обратной задачи теории обыкновенных дифференциальных уравнений, когда функции $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ подлежат нахождению, условия существования этого частного решения опять найдем с помощью метода статьи [4]. Для этой цели считаем, что соотношения (6), заданные на множестве $\nu_2=\nu_2(\nu_1)$, $\nu_3=\nu_3(\nu_1)$, в области трехмерного пространства также определены формулами (6). Тогда функции $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ можно найти по формулам (8)-(10).

Для сведения задачи к квадратурам соотношения (12) следует подставить в (6) и полученные выражения внести в систему (11).

Отметим, что принятый здесь способ доопределения функций (6) на область пространства (ν_1, ν_2, ν_3) не привел к изменению соотношений, так как в нем (как и в методе [4]) использованы градиенты функций $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, порожденные функциями (8), (9).

3. Решение в рамках прямой задачи

Будем считать, что функции $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, заданы. Основная задача остается прежней - определить условия существования инвариантных соотношений (6), (12). Прежде всего следует проверить условие (10). Рассмотрим пример из [2]. Зададим функции $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3), U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ входящие в уравнения (1), в виде

$$L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{b_2}{a_1}\left(a_1\nu_2^2 - \alpha_0 a_2 \nu_1^2\right), \quad U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{a_2 b_2^2}{2a_1}\left(a_1\nu_2^2 + \alpha_0^2 a_2 \nu_1^2\right), \tag{13}$$

где b_2 и α_0 - некоторые параметры. Пусть в качестве (6), (12) приняты соотношения

$$g_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = a_2 b_2\left(e_1\nu_1^2 + e_0\right)\nu_1 D^{-1}, \quad g_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = b_2\left(n_1\nu_1^2 + n_0\right)\nu_2 D^{-1},$$

$$g_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2a_2 b_2\left(h_1\nu_1^2 + h_0\right)\nu_3 D^{-1}, \tag{14}$$

$$\nu_2^2(\nu_1) = \alpha_0\nu_1^2 + \beta_0, \quad \nu_3^2(\nu_1) = (1 - \beta_0) - (1 + \alpha_0)\nu_1^2,$$

$$\dot{\nu}_1 = -a_2 b_2\sqrt{\nu_2^2(\nu_1)\,\nu_3^2(\nu_1)}. \tag{15}$$

В формулах (14), (15) обозначено

$$D = d_1\nu_1^2 + d_0, \quad d_1 = \alpha_0 a_1(a_2 - a_3) + a_2(a_1 - a_3), \quad d_0 = a_1\left[(a_2 - a_3)\beta_0 - a_2\right],$$

$$e_1 = \alpha_0\left[\alpha_0 a_1(a_3 - a_2) + 2a_1 a_3 - a_2(a_1 + a_3)\right],$$

$$e_0 = a_1\left[2\beta_0 a_3 + \alpha_0 a_2 + \alpha_0\beta_0(a_3 - a_2)\right], \tag{16}$$

$$n_1 = \alpha_0(a_1 a_3 + a_1 a_2 - 2a_2 a_3) - a_2(a_3 - a_1), \quad n_0 = a_1\left[\beta_0(a_2 + a_3) - a_2\right],$$

$$h_1 = \alpha_0(a_1 - a_2), \quad h_0 = \beta_0 a_1,$$

здесь β_0 - произвольный параметр. Можно убедиться, что соотношения (14)-(16) определяют решение уравнений (1), (2) при условии, что $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ заданы формулами (13), а функция $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ на решении (15) принимает значение

$$\mu(\nu_1, \nu_2(\nu_1), \nu_3(\nu_1)) = \mu^*(\nu_1) = a_2 b_2 a_1^{-1}\left[\left(e_1\nu_1^2 + e_0\right)\nu_1 D^{-1}\right]' +$$

$$2b_2(a_3-a_2)\left(n_1\nu_1^2+n_0\right)\left(h_1\nu_1^2+h_0\right)D^{-2}+4b_2a_3\left(h_1\nu_1^2+h_0\right)D^{-1}+b_2. \quad (17)$$

По методу [4] значение $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ на решении (14)-(16) таково

$$\mu_*(\nu_1)=a_2b_2a_1^{-1}\left[\left(e_1\nu_1^2+h_0\right)\nu_1D^{-1}\right]'+$$

$$b_2\left[\left(n_1+2a_2h_1\right)\nu_1+n_0+h_0\right]D^{-1}. \quad (18)$$

Различие значений (17), (18) очевидно. Это означает, что при рассмотрении прямой задачи невозможно непосредственное использование формулы (10). Следует иметь ввиду, что интегральное многообразие уравнений (1), (2) в пространстве $(x_1,x_2,x_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, порожденное тремя соотношениями (14), можно построить и по тривиальному методу [4]. Но тогда вид функций $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ из (8), (9) и их градиентов будет отличаться от функций (13) и их градиентов. Однако при таком подходе интегрирование уравнений (11) без дополнительного задания соотношений (15) затруднительно.

Данный пример не только показывает невозможность перенесения результатов [4] в прямую задачу, но и иллюстрирует известный в теории обыкновенных дифференциальных уравнений факт, что одно и то же интегральное многообразие могут допускать уравнения с различными по структуре правыми частями.

Изложим общую методику исследования инвариантных соотношений (6), (12). Систему дифференциальных уравнений (1) преобразуем к виду

$$\dot{\mathrm{x}}\bullet\nu=\nu\bullet(\mathrm{x}\times a\mathrm{x})+\nu\bullet\left(\frac{\partial L}{\partial\nu}\times a\mathrm{x}\right), \quad (19)$$

$$\dot{\mathrm{x}}\bullet a\mathrm{x}=a\mathrm{x}\bullet\left(\frac{\partial U}{\partial\nu}\times\nu\right), \quad (20)$$

$$\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\frac{1}{(\nu\times a\mathrm{x})^2}\left(\dot{\mathrm{x}}-\mathrm{x}\times a\mathrm{x}-\frac{\partial L}{\partial v}\times a\mathrm{x}-\frac{\partial U}{\partial v}\times\nu\right)\bullet(\nu\times a\mathrm{x}). \quad (21)$$

Если продифференцировать интегралы (4) только в силу уравнений Пуассона (2), то получим уравнения (19), (20). Это значит, что вместо трех дифференциальных уравнений, вытекающих из (1), достаточно рассмотреть соотношения, которые получаются подстановкой выражений (6), (12) в интегралы (4), и уравнение (21). Обозначим через $\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=(g_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3),\ g_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3),\ g_3(\nu_1,\nu_2,\nu_3))$. Тогда из (4), (21) имеем

$$\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1))\bullet a\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1))-2U(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1))=2E, \quad (22)$$

$$\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1))\bullet\nu(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1))+L(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1))=k, \quad (23)$$

$$\mu(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1))=\Big\{\mathbf{div}\,\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+(\nu\times a\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2,\nu_3))^{-2}$$

$$(\nu\times a\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2,\nu_3))\bullet\left[\nu\times\frac{\partial}{\partial\nu}\left(U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)-\frac{1}{2}\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\bullet a\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right)+\right.$$

$$\mathbf{a}\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\times\frac{\partial}{\partial\nu}\left(L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+\nu\bullet\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right)\Big]\Big\}\Big|_{\substack{\nu_2=\nu_2(\nu_1)\\ \nu_3=\nu_3(\nu_1)}}. \tag{24}$$

В скалярной форме, используя главную систему координат, из (22), (23) получим

$$\sum_{i=1}^{3}a_ig_i^2\left(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1)\right)-2U\left(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1)\right)-2E=0, \tag{25}$$

$$\nu_1g_1\left(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1)\right)+\nu_2(\nu_1)\,g_2\left(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1)\right)+$$
$$\nu_3(\nu_1)\,g_3\left(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1)\right)+L\left(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1)\right)-k=0. \tag{26}$$

Вместо формулы (24) возьмем формулу

$$\mu\left(\nu_1,\nu_2(\nu_1),\nu_3(\nu_1)\right)=$$
$$\Big\{\mathbf{div}\,\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+\frac{1}{\mathrm{a}_3\mathrm{g}_3(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\nu_2-\mathrm{a}_2\mathrm{g}_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\nu_3}$$
$$\Big[a_2g_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\frac{\partial}{\partial\nu_3}\left(L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+\sum_{i=1}^{3}\nu_ig_i(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right)-$$
$$a_3g_3(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\frac{\partial}{\partial\nu_2}\left(L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)+\sum_{i=1}^{3}\nu_ig_i(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right)+$$
$$\frac{1}{2}\nu_2\frac{\partial}{\partial\nu_3}\left(2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)-\sum_{i=1}^{3}a_ig_i^2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right)-$$
$$\frac{1}{2}\nu_3\frac{\partial}{\partial\nu_2}\left(2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)-\sum_{i=1}^{3}a_ig_i^2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\right)\Big]\Big\}\Big|_{\substack{\nu_2=\nu_2(\nu_1)\\ \nu_3=\nu_3(\nu_1)}}, \tag{27}$$

которую найдем, проектируя уравнения (1) на первую главную ось подвижной системы координат. В формулах (24), (25) обозначено

$$\mathbf{div}\,\mathbf{g}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\frac{\partial\mathrm{g}_1(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_1}+\frac{\partial\mathrm{g}_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_2}+\frac{\partial\mathrm{g}_3(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\nu_3}. \tag{28}$$

Таким образом методика исследования инвариантных соотношений (6), (12) состоит в применении уравнений (11), (25) - (28). При этом при заданных функциях $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ равенства (25), (26) выражают требование того, что первые интегралы должны быть тождествами на соотношениях (6), (12) (тождествами по переменной ν_1). Формула (27) дает значение функции $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ на кривой $\nu_2=\nu_2(\nu_1)$, $\nu_3=\nu_3(\nu_1)$, в других точках пространства (ν_1,ν_2,ν_3) она может принимать произвольные значения, в частности и значения, которые имеет выражение в фигурных скобках соотношения (27). Если считать, что функция $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\equiv 0$, то уравнение (27) служит дополнительным к (25), (26) условием существования инвариантных соотношений (6), (12). Как отмечено выше, интегрирование системы (11) при наличии соотношений (6), выделяется в самостоятельную (в общем случае трудную) задачу. Однако проверка существования у системы (11) решения (12) не представляет затруднений. Преимущество предложенной методики по сравнению с общим интегрированием уравнений (1), (2) заключается в получении выражения для $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ и исследовании конечных соотношений (25), (26). Можно привести и примеры [2, 3] эффективного подхода в интегрировании системы (11).

Проведем сопоставление формул (10), (27). Как и следовало ожидать после рассмотрения примера (13) - (16) значения $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, определенные по формулам (10) и (27), в общем случае не совпадают на кривой $\nu_2 = \nu_2(\nu_1)$, $\nu_3 = \nu_3(\nu_1)$. Однако, если соотношения (6) таково, что выражения

$$L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) + \sum_{i=1}^{3} \nu_i g_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \qquad 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) - \sum_{i=1}^{3} a_i g_i^2(\nu_1, \nu_2, \nu_3),$$

либо постоянны, либо не зависят от ν_2 и ν_3 (что тоже приводит к постоянству указанных выражений), то значения (10), (27) на решении $\nu_2 = \nu_2(\nu_1)$, $\nu_3 = \nu_3(\nu_1)$ совпадают. В этом и заключается основной результат данного раздела.

4. Пример

Рассмотрим пример [2], демонстрирующий эффективность предложенной методики. Пусть правые части соотношений (6) имеют вид

$$g_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \phi_1(\nu_1), \quad g_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \nu_2 \phi_2(\nu_1), \quad g_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \nu_3 \phi_3(\nu_1). \tag{29}$$

Тогда при заданных $\phi_i(\nu_1)$ уравнения Пуассона (11) интегрируются в квадратурах

$$\nu_2^2(\nu_1) = 2\int \frac{a_1\phi_1(\nu_1) - a_3\nu_1\phi_3(\nu_1)}{a_3\phi_3(\nu_1) - a_2\phi_2(\nu_1)} d\nu_1, \qquad \nu_3^2(\nu_1) = 1 - \nu_1^2 - \nu_2^2, \tag{30}$$

$$\dot{\nu}_1 = \sqrt{\nu_2^2(\nu_1)\,\nu_3^2(\nu_1)\,(a_3\phi_3(\nu_1) - a_2\phi_2(\nu_1))}. \tag{31}$$

Зададим $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ в классе многочленов по ν_1, ν_2, ν_3 до второго порядка

$$L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3 -$$
$$\frac{1}{2}\left(B_{11}\nu_1^2 + B_{22}\nu_2^2 + B_{33}\nu_3^2 + 2B_{12}\nu_1\nu_2 + 2B_{13}\nu_1\nu_3 + 2B_{23}\nu_2\nu_3\right),$$
$$U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = s_1\nu_1 + s_2\nu_2 + s_3\nu_3 -$$
$$\frac{1}{2}\left(C_{11}\nu_1^2 + C_{22}\nu_2^2 + C_{33}\nu_3^2 + 2C_{12}\nu_1\nu_2 + 2C_{13}\nu_1\nu_3 + 2C_{23}\nu_2\nu_3\right). \tag{32}$$

Соотношения (25), (26) на основе (29) запишутся так

$$a_1\phi_1^2(\nu_1) + a_2\nu_2^2(\nu_1)\,\phi_2^2(\nu_1) + a_3\nu_3^2(\nu_1)\,\phi_3^2(\nu_1) - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) - 2E = 0,$$

$$\nu_1\phi_1(\nu_1) + \nu_2^2\phi_2(\nu_1) + \nu_3^2\phi_3(\nu_1) + L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) - k = 0. \qquad (33)$$

где L и U имеют вид (32). Положим $\nu_2^2(\nu_1) = \alpha_0\nu_1^2 + \beta_0$ и поставим задачу исследования уравнений (30), (31), (33) в классе рациональных функций $\phi_i(\nu_1)$ ($i = 1, 2, 3$). Несмотря на то, что $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ и $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ - многочлены по своим переменным, данная задача имеет решение, которое описывается соотношениями (13) - (17). Другие примеры данного подхода рассмотрены в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Горр Г.В., Кудряшева Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. Думка, – 1978. – 294 с.

2. Горр Г.В., Узбек У.К. К постановке задачи о решениях уравнений Д.Гриоли-М.П. Харламова в специальной форме. // Механика твердого тела. – 1997. – **29**. – С. 133-139.

3. Мельник А.С. Об одном решении обобщенных уравнений динамики твердого тела. // Труды института прикладной математики и механики. – 1999. – Т. 4. – С. 113-119.

4. Орешкина Л.Н. Об уравнениях М.П. Харламова. // Механика твердого тела. – 1987. –**19**. – С. 30-33.

5. Харламов М.П. Симметрия в системах с гироскопическими силами. // Механика твердого тела. – 1983. – **15**. – С. 87-95.

6. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений. // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.

Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету
Серiя "Математика, прикладна математика i механiка"
УДК 517.5 № 514, 2001, с. 99–105

Равномерная корректность одной задачи Коши и матричное условие Макенхаупта

Е. И. Олефир

Южноукраинский государственный педуниверситет, г. Одесса, Украина

В работе изучается класс неограниченных несамосопряженных операторов в пространстве вектор-функций $L_2([0,a],C^n)$, для которых условие генерировать полугруппу класса C_0 формулируется в терминах условия Макенхаупта для специального матричного веса. Рассмотрено приложение основных результатов к теории периодических в среднем функций относительно системы функционалов. *2000 Mathematical Subject Classification* 30A99.

Возникшее впервые в работе Б.С. Павлова [5] при изучении базисности экспонент на отрезке условие Макенхаупта оказалось в точности тем инструментом, который позволил методом ортогонального проектирования решить ряд разных задач спектральной теории функций. Использование весов Макенхаупта при изучении безусловной базисности квазиэкспонент [1] и функций типа Миттаг-Лефлера показало естественную универсальность найденного метода. В данной работе исследуются полугруппы $U(t) = \exp\{iAt\}$, порождаемые несамосопряженными операторами A и изучается условие принадлежности этих полугрупп классу C_0. Установлено, что $U(t) \in C_0$ тогда и только тогда, когда матричный вес w_b удовлетворяет условию Макенхаупта, при этом w_b в существенном определяется несамосопряженным оператором A, заданном в $L_2([0,a],C^n)$.

Пусть w^2 – произвольный A_2 – вес Макенхаупта на вещественной оси, w_- – внешняя в области Im $z<0$ функция такая, что

$$\mathrm{w}^2(x) \quad \overset{\text{п.в.}}{=} \quad |\ \mathrm{w}_-(x-i0)\,|^2, x \in R.$$

Функция w_- допускает интегральное представление [1]

$$\mathrm{w}_-(z) = z\int_0^\infty e^{-izt} y_{\mathrm{w}}(t)dt, \quad \mathrm{Im}\, z<0 \tag{1}$$

с некоторой функцией $y_{\mathrm{w}} \in L_2^{loc}(R_+)$.

Пусть w_k^2 $(1 \le k \le n)$ – система весов Макенхаупта на R, y_{w_k} -функции, отвечающие им в силу формулы (1). В пространстве $L_2([0,a],C^n)$ вектор-функций (столбцов) со скалярным произведением

$$\langle f,\, g\rangle = \sum_{k=l}^{n}\int\limits_0^a f_k(t)g_k(t)dt, \quad f = \mathrm{col}(f_k), \quad g = \mathrm{col}(g_k)$$

рассмотрим произвольный оператор K вида

$$Kh := i\int\limits_0^t h(s)ds + \sum_{k=l}^{n} < h, x > y_k,$$

где оператор интегрирования действует поокоординантно, векторы $x_k \in L_2([0,a],C^n)$, а вектор-функции y_k определяются равенствами

$$y_k(t) = \mathrm{col}(y_{\mathrm{w}_j}(t)\delta_{k_j}), \quad 1 \le k \le n, \quad t \in [0,a];$$

(δ_{k_j} – дельта Кронекера). Проверяется, что Ker $K = \{0\}$. Предположим также, что векторы x_k выбраны так, что Ker $K^* = \{0\}$. Тогда формулой

$$A = K^{-1} \tag{2}$$

определяется замкнутый плотно заданный в пространстве $L_2([0,a],\ C^n)$ оператор A. В этой работе выясняются условия при которых задача Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = iAu(t), \quad u(0) = u_0$$

равномерно корректна, то разрешающая полугруппа $U(t) := \exp\{iAt\}$ принадлежит классу C_0 [2]. Рассматривается также приложение основного результата к разрешимости некоторых систем интегро-дифференциальных уравнений.

1. Обозначим через $\Lambda := \{\lambda_p\}$ множество корней детерминанта

$$\Delta(z) := \det\Phi(z), \quad \Phi(z) = E - z\varphi(z), \tag{3}$$

где элементы матрицы $\varphi(z)$ вычисляются по формулам

$$\varphi_{ik}(z) := (e_{\mathrm{w}_k}(z,t),\ x_i^k), \quad x_i = \mathrm{col}(x_i^k). \tag{4}$$

Здесь w_k – квазиэкспонента e_{w_k} [1] определяется равенством

$$e_{\mathrm{w}_k}(z,t) := \frac{d}{dt}\int\limits_0^t y_{\mathrm{w}_k}(t-s)e^{izs}\ ds, \quad 1 \le k \le n, \tag{5}$$

а скобки в (4) обозначают скалярное произведение в $L_2(0,a)$. Из этих формул вытекает, что $h_\Delta\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le na$, $h_\Delta\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le 0$, где – h_Δ индикатор роста целой функции экспоненциального типа Δ. Для упрощения формулировок будем считать, что выполнются равенства

$$h_\Delta\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad h_\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right)=na \tag{6}$$

Далее, для каждого $b<0$ введем в рассмотрение матричный вес на R:

$$\mathrm{W}_b(x):=\Phi_{\mathrm{w}}(x+bi)\Phi_{\mathrm{w}}^*(x+bi),\quad \Phi_{\mathrm{w}}(z):=\Phi(z)\mathrm{w}^{-1}(z),$$
$$\mathrm{w}(z):=\operatorname{diag}\{\mathrm{w}_j^-(z)\},\quad \operatorname{Im}z<0,$$

где w_j^- – внешняя в $\operatorname{Im}z<0$ функция такая, что

$$\mathrm{w}_j^2(x)\ \overset{\text{п.в.}}{=}\ |\,\mathrm{w}_j^-(x-i0)\,|^2, x\in R,\quad 1\le j\le n.$$

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть A – произвольный оператор вида (2) и выполнено условие (6). Полугруппа $U(t)=\exp\{iAt\}, t\ge 0$ принадлежит классу C_0 тогда и только тогда, когда*

1) $\omega:=\inf\limits_{\lambda_p\in A}\operatorname{Im}\lambda_p>-\infty$, 2) при некотором $b<\min\{0,\omega\}$ матричный вес W_b удовлетворяет условию Макенхаупта на R:

$$\sup_{\mathfrak{I}}\left\{\left\|\frac{1}{|\,\mathfrak{I}\,|}\left(\int_{\mathfrak{I}}\mathrm{W}_b^{-1}(x)dx\right)^{\frac12}\frac{1}{|\,\mathfrak{I}\,|}\left(\int_{\mathfrak{I}}\mathrm{W}_b(x)dx\right)^{\frac12}\right\|\right\}<\infty,$$

где $\mathfrak{I}$ – произвольный интервал вещественной оси.

Отметим, что здесь впервые найдено применение матричного условия Макенхаупта в теории однопараметрических полугрупп операторов. Техника, необходимая для доказательства этой теоремы, разработана в статье [3].

Пусть функционалы $x_k(h,z)$, $1\le k\le n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\Phi_{kj}(z)x_j(h,z)=\langle h(z),x_k\rangle\quad 1\le k\le n \tag{7}$$

где матрица $\Phi(z)$ определяется формулами (3)-(5), а координаты вектор-функции $h(z)$ имеют вид

$$\frac{d}{dt}\int_0^t h_k(t-s)e^{izs}ds,\quad 1\le k\le n,\quad h=\operatorname{col}(h_k)\in L_2([0,a],C^n).$$

Введем в рассмотрение следующие вектор-функции

$$e_k(z,s):=\operatorname{col}(e_{\mathrm{w}_j}(z,s)\delta_{kj}),\quad 1\le k\le n.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)–2) теоремы 1. Тогда для полугруппы $U(t)$ имеет место формула:*

$$U(t)h = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+bi}^{+\infty+bi} e^{izt}\sum_{k=1}^{n} x_k(h,z)e_k(z,s)dz, \quad t \geq 0, \quad s \in [0,a],$$

где h – произвольный вектор из $L_2([0,a],C^n)$.

2. Укажем одно из возможных применений сформулированных теорем. Пусть $W_2^1([0,a],C^n)$ – пространство Соболева со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle_l = \sum_{k=1}^{n}\int_0^a f_k(s)g_k(s)ds + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^a f_k'(s)\overline{g_k'(x)}dx, \quad f = \mathrm{col}(f_i), \quad g = \mathrm{col}(g_i).$$

Рассмотрим систему $\varphi_i (1 \leq i \leq n)$ непрерывных в $W_2^1([0,a],C^n)$ функционалов, каждая линейная комбинация которых неограничена в пространстве $L_2([0,a],C^n)$. Предположим также, что выполнено условие нормировки

$$\varphi_k(e_j) = \delta_{kj}, \quad 1 \leq k,j \leq n,$$

где $e_k = \mathrm{col}(\delta_{kl})$ – стандартный орт, рассматриваемый как элемент пространства $W_2^1([0,a],C^n)$. Запишем каждый функционал φ_k в канонической форме

$$\varphi_k(f) = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^a \overline{g_{kj}(s)}f_j(s)ds + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^a \overline{g_{kj}'(s)}f_j'(s)dx, \quad f = \mathrm{col}(f_i),$$

и рассмотрим систему уравнений

$$\int\limits_0^a G(s)U(s+1)ds + \int\limits_0^a G'(s)U'(s+1)ds = 0, \quad G(s) := \| \overline{g_{kj}(x)} \|, \tag{8}$$

где вектор-функция $u(s+t)$ при каждом $t \geq 0$ принадлежит пространству $W_2^1([0,a],C^n)$ и удовлетворяет при $t=0$ начальным условиям:

$$u(s) = u_0(s), \quad s \in [0,a], \quad u_o \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\,\varphi_k. \tag{9}$$

Будем говорить, что задача (8)-(9) поставлена корректно, если при каждом $u_0 \in W_2^1([0,a],C^n)$, удовлетворяющем условиям (9), система уравнений (8) имеет единственное решение $u(t)$ $(t \in R_+)$, локально принадлежащее $W_2^1([0,a],C^n)$. Другими словами, в этой задаче речь идет об однозначном продолжении вправо каждой вектор-функции $u_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\,\varphi_k$ так, чтобы продолженная функция $u(s+1) \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\,\varphi_k$ при каждом $t > 0$. По аналогии со случаем $n = 1$ [4] такие продолжения будем называть периодическими в среднем относительно системы функционалов φ_k $1 \le k \le n$.

Рассмотрим в пространстве $L_2([0,a], C^n)$ оператор

$$A = i\frac{d}{ds}, \quad D_A = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} \varphi_k.$$

Он изображается в виде (2) в том частном случае, когда все веса Макенхаупта $\mathrm{w}_k^2(x) \equiv 1$, $x \in R$, $1 \le k \le n$. Соответствующая задача Коши имеет вид

$$\frac{\partial u(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial u(t,s)}{\partial s} \quad u(0,s) = u_0(s)$$

и если она равномерно корректна, то каждая вектор-функция $u_0 \in D_A$ допускает единственное периодическое в среднем продолжение вправо относительно функционалов φ_k. Можно показать, что эти рассуждения обращаются. Поэтому следующая теорема выводится из теоремы 1, в формулировке которой вес $\mathrm{W}_b(x)$ определяется формулой

$$\mathrm{W}_b(x) = \Phi(x+bi)\Phi^*(x+bi), \quad \Phi_{kj}(z) = \varphi_k(e^{izt}e_j),$$

где e_j – стандартный орт $(1 \le j \le n)$. Как и раньше, через Λ обозначается множество корней уравнения

$$\Delta(z) = 0, \quad \Delta(z) := \det \Phi(z).$$

Теорема 3. *Пусть выполняется условие (6). Тогда задача (8)-(9) поставлена корректно в том и только в том случае, когда 1)* $\omega := \inf\limits_{\lambda p \in \Lambda} \operatorname{Im} \lambda_p > -\infty$; *2) при некотором* $b < \min\{0, \omega\}$ *вес* $\mathrm{W}_b(x) = \Phi(x+bi)\Phi^*(x+bi)$ *удовлетворет условию Макенхаупта на* R.

Каждый функционал

$$\varphi_k\Big(\int_0^t h(s)ds\Big), \quad 1 \le k \le n, \quad h \in L_2([0,a], C^n),$$

будучи ограниченным в пространстве $L_2([0,a], C^n)$ допускает представление

$$\varphi_k\Big(\int_0^t h(s)ds\Big) = i\langle h, z_k\rangle, \quad x_k \in L_2([0,a], C^n). \tag{10}$$

Пусть $x_j(h,z)$ $(1 \le j \le n)$ удовлетворяет системе (7), в которой векторы x_k определены равенствами (10). Укажем явный вид решения системы (8).

Теорема 4. *Пусть выполняются все условия теоремы 3. Тогда каждая вектор-функция* $u_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} \varphi_k$ *допускает единственное периодическое в* *среднем продолжение вправо, которое задается формулой*

$$u(t)=\sum_{k=l}^{n}\left(-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty+bi}^{+\infty+bi}e^{izt}x_k(u_0,z)dz\right)e_k,\quad t\geq 0. \qquad (11)$$

Отметим, что соответствующая полугруппа $U(t)$ на пересечении ядер $\bigcap\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Ker}\varphi_k$ действует как полугруппа сдвигов

$$U(t)u=u(t+s),\quad s\in[0,a],\quad t\geq 0$$

вдоль периодических в среднем продолжений функций вправо. После продолжения по непрерывности $U(t)$ на все пространство $L_2([0,a],C^n)$ она остается полугруппой сдвигов вдоль продолжений, которые снова задаются формулой (11), но уже при любом $u_0\in L_2([0,a],C^n)$.

3. Приведем простой пример, иллюстрирующий сформулированные результаты. Пусть матрица-функция $R(s)$ с элементами из $L_2([0,a])$ такова, что система функционалов

$$\varphi_k(f)=\sum_{j=0}^{l}f_k(a_j)+\int\limits_0^a\sum_{j=1}^{a}R_{kj}(s)f_j(s)ds,\quad f=\operatorname{col}(f_j),\quad 1\leq k\leq n$$

где $0=a_0<a_1<\ldots<a_l=a$ – фиксированные точки сегмента [0,a], удовлетворяет условиям нормировки предыдущего пункта. Поскольку элементы матрицы $\Phi(z)$ вычисляется по формулам

$$\Phi_{kj}(z)=\left(\sum_{n=0}^{l}e^{iza_n}\right)\delta_{kj}+\int\limits_0^a R_{kj}(s)e^{izs}ds,\quad 1\leq k,j\leq n,$$

то имеют место равенства (6) и выполняется словие 1) теоремы 3. Далее, с помощью признака, установленного в [3], проверяется, что существуют $b<\min\{0,\omega\}$, для которых вес $\mathrm{W}_b(x)=\Phi(x+bi)\Phi^*(x+bi)$ удовлетворяет матричному условию Макенхаупта. Поэтому в силу теоремы 3 задача

$$\sum_{j=1}^{l}u(a_j+t)+\int\limits_0^a R(s)u(s+t)ds=0,\quad t\geq 0$$

$$\varphi_k(u)=0,\quad 1\leq k\leq n,\quad u(s)=u_0(s),\quad 0\leq s\leq a$$

поставлена корректно.

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю Г. М. Губрееву за постановку задачи и многочисленные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губреев Г. М. L_2 – устойчивые полугруппы, веса Макенхаупта и безусловные базисы из значений квазиэкспонент. // Матем. сборник. – 1999. – Т.190,**12**. – С. 3-35.

2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, – 1967.

3. Губреев Г. М., Олефир Е. И. Безусловная базисность некоторых семейств функций, матричное условие Макенхаупта и серии Карлесона в спектре. // Записки научн. семинаров ЛОМИ, исследов. по лин. операторам и теории функций. – 1999. – Т. 262, **27**. – С. 90-126.

4. Губреев Г. М. Спектральный анализ биортогональных разложений функций в ряды экспонент. // Изв. АН СССР.– 1989.– Т. 53, **6**. – С. 1236-1268.

5. Павлов Б. С. Базисность систем экспонент и условие Макенхаупта. // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 247, **1**. – С. 37-40.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 513.88 № 514, 2001, с. 106–114

Криволинейный интеграл от почти периодических и почти периодических по Левитану абстрактных функций

С. Д. Димитрова
НТУ "ХПИ", Украина

В настоящей статье теорема Боля-Бора переносится на криволинейный интеграл при условии независимости его от пути интегрирования, для которого определенный интеграл является частным случаем. Расширяется класс функций, для которых верна теорема Боля-Бора - почти периодические, почти периодические по Левитану и даже непрерывные функции в некоторой более слабой топологии, чем исходная. Также расширяется класс пространств. Рассмотрены пространства Фреше и общие локально-выпуклые пространства. *2000 Mathematics Subject Classification* 43A60.

Теорема Боля-Бора об интегрировании скалярных почти периодических (п.п.) функций утверждает, что ограниченность неопределенного интеграла от п.п. функции влечет его почти периодичность [6]. Она была объектом исследования многих математиков. М. И. Кадец [4] показал, что теорема Боля-Бора переносится на функции со значениями в пространстве Банаха, если (а) пространство не содержит подпространств, изоморфных c_0, либо (б) пространство произвольно, но множество значений интеграла слабо относительно компактно. М. Г. Любарский [7] несколько ослабил требование ограниченности интеграла, что позволило ему перенести теорему об интегрировании на числовые почти периодические функции Левитана (L-п.п.).

В данной работе рассматривается вопрос о распространении теоремы Боля-Бора на функции нескольких переменных со значениями в линейно-топологических пространствах. Как заметил Б. Болес [1] теорема об интегрировании для двойного интеграла не верна. В настоящей статье рассмотрен криволинейный интеграл, не зависящий от пути интегрирования. Показано, что для него теорема Боля-Бора переносится на п.п. и L-п.п. функции со значениями в Y-ЛВТП, если (а) пространство Y не содержит подпространств, изоморфных c_0, либо (б) пространство Y произвольно, но множество значений криволинейного интеграла относительно слабо полно в Y. Ограниченность интеграла требуется только на некотором относительно плотном множестве, что дает возможность рассматривать и неограниченные функции.

В дальнейшем через Y будем обозначать полное локально выпуклое линейно-топологическое пространство (ЛВТП); Y^*- его топологическое сопряженное, наделенное сильной топологией; $\langle y^*, y\rangle$-линейная форма, где $y^* \in Y^*, y \in Y$; $\{p_\beta(y)\}_{\beta\in B}$-полная система полунорм, задающая топологию на $Y; Y_p = Y/Z$-фактор-пространство, где $Z = \{z \in Y : p(z) = 0\}$; Y_p- нормированные пространства с нормой $p(\widehat{y}) = \inf\{p(y+z) : z \in Z\}, \widehat{y} = y + z$. Каждый линейный непрерывный функционал $\widehat{y}^* \in Y_p^*$ порождает линейный непрерывный функционал $y^* \in Y^*$, согласно формуле $\langle \widehat{y}^*, \widehat{y}\rangle = \langle y^*, y\rangle$, где y-некоторый представитель класса $\widehat{y}$.

Определение 1. *Множество* $E \subset R^K$ *называется относительно плотным, если существует конечное число элементов* $\{a_i\}_{i=1}^n, a_i \in R^K$ *таких, что* $R^K = \bigcup_{i=1}^n (a_i + E)$.

Определение 2. *Непрерывная абстрактная функция* $f(x)\colon R^K \to Y$ *называется почти периодической (п.п.) (по Бору), если для любых* $\varepsilon > 0$ *и полунормы* p(.) *множество* B_f *относительно плотно, где*

$$B_f = \{\tau \in R^K : \sup_{x\in R^K} p[f(x+\tau) - f(x)] < \varepsilon\}.$$

Это определение, как легко видеть, означает в точности, что f равномерно непрерывна в боровской топологии на R^K.

Определение 3. *Непрерывная абстрактная функция* $f(x)\colon R^K \to Y$ *называется почти периодической по Левитану (L-п.п.), если для любых* $\varepsilon > 0$, *полунормы* p(.) *и конечного множества* $N \subset R^K$, *существует относительно плотное множество* $E \subset R^K$ *такое, что* $E - E \subset B_{N,f}$, *где*

$$B_{N,f} = \{\tau \in R^K \sup_{x\in N} p[f(x+\tau) - f(x)] < \varepsilon\}.$$

Множество E из определения можно выбрать симметричным и далее будем считать его таковым.

Из теоремы 3 статьи Райха [10] следует эквивалентность данного определения 3 для случая $k = 1, Y = C$ определению 8 L-почти периодических функций из статьи Б. Левина [5]. В теореме 1 работы [5] доказана эквивалентность определений по Левину и по Левитану L-почти периодических функций на вещественной оси.

Рассмотрим K непрерывных функций $\{P_i(x)\}_{i=1}^K$, $P_i(x)\colon R^K \to Y$, $x = (x_1, x_2, ..., x_K) \in R^K$. Исходную (эвклидову) топологию R^K обозначим через $\Im_0$. В R^K рассмотрим криволинейный интеграл

$$\Phi(\tau) = \int_0^\tau \sum_{i=1}^K P_i(x)dx_i \qquad \tau \in R^K. \tag{1}$$

Далее, будем предполагать, что этот интеграл не зависит от пути интегрирования. Это эквивалентно выполнению условия $\Phi'_{x_j}(x) = P_j(x)$, $j = 1, ..., K$. Тогда Φ является решением следующего уравнения:

$$\Phi(u+h) - \Phi(u) = F_h(u) \tag{2}$$

где
$$F_h(u) = \int_u^{u+h} \sum_{i=1}^K P_i(x)dx_i \,.$$

Для краткости записи выражение $\sum_{i=1}^K P_i(x)dx_i$ обозначим через R. Тогда уравнение (2) имеет вид:
$$\int_0^{u+h} R - \int_0^u R = \int_u^{u+h} R.$$

Легко проверить, что справедливо тождество:
$$\int_u^{u+\sum\limits_{i=1}^n h_i} R = \sum_{s=1}^n \left[\int_{u+h_{s+1}}^{u+\sum\limits_{i=1}^{s+1} h_i} R - \int_u^{u+\sum\limits_{i=1}^{s} h_i} R\right] + \sum_{s=1}^n \int_u^{u+h_s} R \qquad (3)$$

или
$$F_{\sum_{i=1}^n h_i}(u) = \sum_{s=1}^{n-1} [F_{\sum_{i=1}^{s-1} h_i}(u) - F_{\sum_{i=1}^{s} h_i}(u)] + \sum_{s=1}^n F_{h_s}(u).$$

Лемма 1. *Если в секвенциально полном ЛВТП Y есть расходящийся ряд $\sum y_k$, все частичные суммы которого ограничены в совокупности : $p_\beta(\sum y_{k_i}) < A_\beta$, то Y содержит подпространство, изоморфное c_0 .*

Доказательство. Возьмем непрерывный линейный функционал $y^* \in Y_\beta^*$ (Y_β^* – сопряженное пространство в сильной топологии $\beta(Y^*, Y)$, определяемое полярами ограниченных множеств из Y). Из непрерывности следует, что существует полунорма p_{n_0}:$\mid y^*(y) \mid < C_{n_0} p_{n_0}(x)$. Слабая абсолютная сходимость ряда $\sum y_k$ означает абсолютную сходимость ряда $\sum_i \mid y^*(y_k) \mid$. Абсолютная сходимость эквивалентна сходимости по любым подпоследовательностям, а это эквивалентно равномерной ограниченности частичных сумм по любым подпоследовательностям. То есть существует число A, независящее от последовательности $\{k_i\}_{i=1}^\infty$, а только от y^* и для него выполнено неравенство
$$\mid \sum y^*(y_{k_i}) \mid < \mid y^*(\sum y_{k_i}) \mid < C_{n_0} p_{n_0}(\sum y_{k_i}) \le C_{n_0} A_{n_0} = A \quad \forall k_i.$$

Это означает, что ряд слабо абсолютно сходится. Из расходимости ряда $\sum y_k$ следует, что $S_n = \sum_{k=1}^n y_k$ не является последовательностью Коши. Таким образом, можно применить лемму 1 статьи Димитрова Д. Б. [2] и лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть Y - пространство Фреше с монотонной системой полунорм, не содержащее подпространство, изоморфное пространству c_0 ($Y \not\supset c_0$). Пусть функции $P_i(x), i = 1, 2, ..., K$ непрерывны в более слабой топологии $\Im$, чем эвклидова ($\Im \prec \Im_0$). Тогда, если криволинейный интеграл (1) ограничен для любых τ из некоторой окрестности нуля U топологии $\Im$, то он является $\Im$– непрерывной функцией.*

Доказательство. Покажем, что правая часть уравнения (2) является непрерывной функцией в любой точке u в топологии $\Im$. При фиксированном h рассмотрим разность:

$$F_h(u+\tau)-F_h(u)=\int_{u+\tau}^{u+\tau+h} R - \int_u^{u+h} R.$$

Перейдем от криволинейного интеграла к определенному, выбрав в качестве пути интегрирования в первом интеграле отрезок, соединяющий точки $u+\tau$ и $u+\tau+h$, а во втором интеграле - точки u и $u+h$.

$$F_h(u+\tau)-F_h(u)=\int_0^1\{\sum_{i=1}^K h_i[P_i(u+\tau+\lambda h)-P_i(u+\lambda h)]\}d\lambda. \qquad (4)$$

В R^K куб $I_K=[u_1,u_1+h_1]\times...\times[u_k,u_k+h_k]$ является компактным множеством и в топологии $\Im$ $(\Im\prec\Im_0)$. Поэтому по $\varepsilon>0$, полунорме $p_k(.)$ и $\max\limits_{1\le i\le K}\mid h_i$ можно найти V-окрестность нуля в $\Im$ такую, что выполняется неравенство:

$$\max_{1\le i\le K}\sup_{x\in I_K}p_k[P_i(x+\tau)-P_i(x)]<\frac{\varepsilon}{K\max\limits_{1\le i\le K}\mid h_i\mid}\quad\forall\tau\in V\subset U$$

Тогда на полунорме $p_k(.)$ оценим разность (4).

$$p_k[F_h(u+\tau)-F_h(u)]\le\int_0^1\sum_{i=1}^K\mid h_i\ p_k[P_i(u+\tau+\lambda h)-P_i(u+\lambda h)]d\lambda\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{K\max\limits_{1\le i\le K}\mid h_i\mid}K\max_{1\le i\le K}\mid h_i\mid=\varepsilon.$$

Этим доказана непрерывность правой части $F_h(u)$ уравнения (2).

Докажем, что функция $\Phi(\tau)$ непрерывна в нуле в топологии $\Im$. Допустим противное, т. е.существуют $\varepsilon_0>0$, полунорма p_{k_0}, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходящаяся к нулю такие, что

$$p_{k_0}[\Phi(x_n)-\Phi(0)]=p_{k_0}\left(\int_0^{x_n}R\right)\ge\varepsilon_0. \qquad (5)$$

Выберем $x_{m_1}\in U$ и положим $u_1=x_{m_1}$. Из непрерывности правой части $F_h(u)$, непрерывности полунормы $p_1(.)$ и сходимости $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ к нулю следует, что можно выбрать $x_{m_2}\in U$ так, чтобы $x_{m_2}+u_1\in U$ и

$$p_1\left(F_{u_1}(x_{m_2})-F_{u_1}(0)\right)=p_1\left(\int_{x_{m_2}}^{u_1+x_{m_2}}R-\int_0^{u_1}R\right)<\frac{1}{2},$$

Тогда положим $u_2=x_{m_2}$. Допустим, что на каком-то этапе мы уже выбрали по индукции элементы $u_1,u_2,...,u_n$. Выбор элемента $u_{n+1}\in U$ осуществляется так: $u_{n+1} = x_{m_{n+1}}, u_{n+1} \subset U, \sigma_n + u_{n+1} \subset U$, где $\sigma_n = \sum\limits_{k_i \leq n} u_{k_i}$, числа k_i пробегают все конечные подпоследовательности из натуральных чисел от 1 до n,т.е. $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < ... \leq n$ и

$$\sup_{\sigma_n} p_n \left(\int\limits_{u_{n+1}}^{u_{n+1}+\sum u_{k_i}} R - \int\limits_{0}^{\sum u_{k_i}} R \right) < \frac{1}{2^n}. \qquad (6)$$

Монотонность полунормы обеспечивает неравенство (6) для всех полунорм с номерами меньше n для последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для этой последовательности сходятся все ряды вида

$$\sum_{s=1}^{\infty} p_k \left[\int_{\xi_{s+1}}^{\sum\limits_{i=1}^{s+1} \xi_i} R - \int_0^{\sum\limits_{i=1}^{s} \xi_i} R \right] < \infty, \quad k = 1, 2, 3, ..., \qquad (7)$$

где $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ -произвольная подпоследовательность последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Из неравенства (7), ограниченности Φ в U и равенства

$$\sum_{s=1}^{n} \Phi(\xi_s) = -\sum_{s=1}^{n-1} [F_{\sum_{k=1}^{s}(\xi_k)}(\xi_{s+1}) - F_{\sum_{k=1}^{s} \xi_k}(0)] + \Phi(\sum_{i=1}^{n} \xi_i)$$

следует, что ограничены все суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\xi_k} R$, а из неравенства (5),что ряд расходится и согласно лемме 1 пространство содержит подпространство, изоморфное пространству c_0 . Это противоречит условию, следовательно интеграл непрерывен в нуле. Непрерывность интеграла в произвольной точке u следует из непрерывности правой части в (2) и из непрерывности интеграла в точке 0. Это видно из следующего равенства

$$\int_0^{u+h} R - \int_0^{u} R = \int_h^{u+h} R - \int_0^{u} R + \int_0^{h} R.$$

Теорема доказана.

Для общих ЛВТП с несчетным определяющим множеством полунорм имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть Y-ЛВТП и каждое фактор-пространство $Y_p = Y/Z$,где $Z = \{z \in Y : p(z) = 0\}$, $Y_p \not\supset c_0$. Тогда, если интеграл (1) ограничен для всех τ из некоторой окрестности U нуля топологии $\Im$ и подынтегральные функции непрерывны в топологии $\Im$, то он является $\Im$-непрерывной функцией.*

Доказательство ведется как в теореме 1 до неравенства (5) включительно. Далее переходим к фактор-пространству $Y_0 = Y/Z$, где $Z = \{z \in Y : p_{k_0}(y) = 0\}$. $Y_0 \not\supset c_0$ и является нормированным пространством. Продолжая рассуждения как в теореме 1, приходим к противоречию с тем, что пространство не содержит c_0, а в нем существует расходящийся ряд с ограниченными суммами.

Теорема 3. *Пусть Y - пространство Фреше, $Y \not\supset c_0$ и подынтегральные функции $P_i(x) : R^K \to Y, i = 1, 2, ...K$ п. п. Тогда из ограниченности интеграла* (1) *на некотором относительно плотном множестве $E \subset R^K$ следует, что этот интеграл является п. п. функцией на R^K.*

Доказательство. На R^K введем топологию $\Im$ при помощи окрестностей

$$V_\varepsilon = \{\tau \in R^K : \max_{1 \le i \le k} \sup_{x \in R^K} p[P_i(x+\tau) - P_i(x)] < \varepsilon\}.$$

Правая часть $F_h(u)$ уравнения (2) непрерывна при любом фиксированном h в топологии $\Im$ ($\Im \prec \Im_0$). Интеграл $\Phi(u)$ ограничен на некотором симметричном относительно плотном множестве $E \subset R^K$. Это означает, что для любой полунормы $p(.)$ существует константа L такая, что $p(\Phi(\tau)) \le L, \tau \in E$. Покажем, что этот интеграл ограничен для некоторой окрестности нуля в топологии $\Im$. Пусть $R^K = \bigcup_{i=1}^n (a_i + E)$. Рассмотрим куб $A = [-c, 0]^K \subset R^K$, где $c = \max_{1 \le j \le K} \max_{1 \le i \le n} | a_{ij} |, a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ij}, ..., a_{iK}), i = 1, 2, ..., n$. Для любой точки x выберем окрестность нуля U_x так,чтобы

$$\max_{1 \le i \le K} \sup_{\tau \in U_x} p[P_i(x+\tau) - P_i(x)] < 1.$$

По окрестности нуля U_x выбирается окрестность нуля V_x так, чтобы $V_x + V_x \subset U_x$. Из открытого покрытия $\{x + V_x\}_{x \in A}$ компакта A выбирается конечное покрытие $\{x_j + V_j\}_{j=1}^{n_1}$. $A \subset \bigcup_{j=1}^{n_1} (x_j + V_j)$. Пусть $V_0 = \bigcap_{j=1}^{n_1} V_j, U_0 = \bigcap_{j=1}^{n_1} U_j$. Тогда $V_0 + V_0 \subset \bigcap_{j=1}^{n_1} (V_j + V_j) \subset \bigcap_{j=1}^{n_1} U_j = U_0$. Пусть $M = \max_{1 \le i \le k} \max_{1 \le j \le n_1} p[P_i(x_j)]$ и $\tau \in V_0, x \in A$, тогда

$$p[P_i(x+\tau)] \le p[P_i(x+\tau) - P_i(x_j)] + p[P_i(x_j)] \le 1 + M \quad \forall i = 1, 2, ..., K$$

Тут использованно, что $x + \tau = (x_j + \tau_1) + \tau \in x_j + V_0 + V_0 \subset x_j + U_0$. Для любой точки $x \in U_0 \quad x = a_i + \tau, \quad \tau \in E$ и

$$p(\Phi(x)) \le p(\Phi(\tau)) + p(-\Phi(\tau) + \Phi(x)) \le L + p\left(\int_\tau^x R\right) \le$$

$$\le L + p\left(\int_{\tau - x}^0 \sum_{i=1}^K P_i(t+x) dt_i\right) \le L + \sum_{i=1}^K \int_{-c}^0 p[P_i(t+x)] dt_i.$$

Это означает, что интеграл $\Phi(x)$ ограничен для любого $x \in U_0$. Согласно теореме 1 $\Phi(x)$ является непрерывной функцией, а это означает п. п. функцией на R^K, поскольку рассматриваемая топология слабее боровской в R^K.

Теорема 4. *Пусть Y - пространство Фреше и $Y \not\supset c_0$, $P_i(x) : R^K \to Y, i = 1, 2, ..., K$ L-п.п. функции. Тогда, если криволинейный интеграл* (1) *ограничен на некотором относительно плотном множестве $E \subset R^K$, то он является L-п.п. функцией.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 3 с заменой окрестностей V_ε на

$$W_\varepsilon = \{\tau \in R^K : \max_{1\le i\le k} \sup_{x\in N} p\,[P_i(x+\tau) - P_i(x)] < \varepsilon\},$$

Замечание 1. *Ограничения теоремы 4 не очень жесткие и интеграл (1) может оказаться и неограниченной функцией, поэтому интеграл может быть неограниченой L-п.п. функцией.*

Теорема 5. *Пусть Y-ЛВТП, каждое фактор-пространство $Y_p \not\supset c_0$ и $P_i(x) : R^K \to Y, i = 1, 2, .., K$ п. п. (L-п.п.) функции. Тогда, если интеграл (1) ограничен на некотором относительно плотном множестве $E \subset R^K$, то он является п. п. (L-п.п.) функцией на R^K.*

Доказательство следует из теоремы 3 (теоремы 4) со ссылкой на теорему 2 вместо теоремы 1.

Имеет место следующее обобщение теоремы Орлича-Петтиса [3] для безусловно сходящихся рядов в банаховом пространстве.

Теорема 6. *Если ряд $\sum y_n$ слабо безусловно сходится в ЛВТП Y, то он сильно безусловно сходится.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют полунорма $p(y), \varepsilon_0 > 0$, две последовательности чисел N_k, M_k $(N_k < M_k < N_{k+1})$ и перестановка, которую для краткости записи будем считать данную так, что $p\left(\sum_{i=N_k}^{M_k} y_i\right) \ge \varepsilon_0$, $k = 1, 2, 3, ...$ Рассмотрим фактор-пространство Y_p. Покажем, что ряд вида $\sum \widehat{y}_{n_k}$ слабо сходится к некоторому элементу $\widehat{y}$ пространства Y_p, где $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ -какая-нибудь перестановка натуральных чисел. Пусть $\sum_{k=1}^\infty \langle y_{n_k}, y^*\rangle = \langle y, y^*\rangle$ для любой перестановки натуральных чисел $\{n_k\}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^\infty \langle \widehat{y}_{n_k}, \widehat{y}^*\rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle y_{n_k}, y^*\rangle = \langle y, y^*\rangle = \langle \widehat{y}, \widehat{y}^*\rangle.$$

Таким образом, ряд $\sum \widehat{y}_{n_k}$ слабо безусловно сходится к элементу пространства Y_p. По теореме Орлича-Петтиса [3] ряд $\sum \widehat{y}_{n_k}$ безусловно сходится. Тогда

$$\forall \varepsilon_0 > 0 \quad \exists N(\varepsilon_0) : p\left(\sum_{i=n}^m \widehat{y}_i\right) < \varepsilon_0 \quad \forall n, m > N.$$

Приходим к противоречию: $\varepsilon_0 \le p\left(\sum_{i=N_k}^{M_k} \widehat{y}_i\right) < \varepsilon_0$ для $N_k > N(\varepsilon_0)$. Этим теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть Y-пространство Фреше. Тогда, если множество значений интеграла (1) ограничено для любых τ из некоторой окрестности нуля топологии $\Im$ и относительно слабо полно в Y, то интеграл (1) является непрерывной функцией в топологии $\Im$.*

Доказательство проводится как в теореме 1 и повторяются все рассуждения до неравенства (7) включительно. Используя тождество (3) и рассматривая произвольный линейный функционал $y^* \in Y^*$, получаем:

$$|\langle y^*, \sum_{s=1}^{n}\int_0^{\xi_s} R\rangle| \le |\langle y^*, \int_0^{\sum_{i=1}^{n}\xi_i} R\rangle| + |\langle y^*, \sum_{s=1}^{n-1}\left(\int_{\xi_{s+1}}^{\sum_{i=1}^{s+1}\xi_i} R - \int_0^{\sum_{i=1}^{s}\xi_i} R\right)\rangle| \le$$

$$\le |\langle y^*, \int_0^{\sum_{i=1}^{n}\xi_i} R\rangle| + \sum_{s=1}^{n-1}|\langle y^*, \int_{\xi_{s+1}}^{\sum_{i=1}^{s+1}\xi_i} R - \int_0^{\sum_{i=1}^{s}\xi_i} R\rangle|$$

$$\le C_1 p_{k_0}\left(\int_0^{\sum_{i=1}^{n}\xi_i} R\right) + C_1\sum_{s=1}^{n-1} p_{k_0}\left(\int_{\xi_{s+1}}^{\sum_{i=1}^{s+1}\xi_i} R - \int_0^{\sum_{i=1}^{s}\xi_i} R\right) \le C_1 + C_2 = C,$$

где $\sum_{i=1}^{n}\xi_i \in U$. Следовательно, для любой подпоследовательности $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ последовательности $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходятся ряды $\sum_{s=1}^{\infty}\langle y^*, \int_0^{\xi_s} R\rangle$, $\quad y^* \in Y^*$. Значит, ряд $\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{u_s} R$ сходится слабо абсолютно. Из равенства

$$\sum_{s=1}^{n}\int_0^{u_s} R + \sum_{s=1}^{n-1}\left[\int_{u_{s+1}}^{\sum_{i=1}^{s+1}u_i} R - \int_0^{\sum_{i=1}^{s}u_i} R\right] = \int_0^{\sum_{i=1}^{n}u_i} R,$$

сильной сходимости ряда $\sum_{s=1}^{\infty}(\int_{u_{s+1}}^{\sum_{i=1}^{s+1}u_i} R - \int_0^{\sum_{i=1}^{s}u_i} R)$, слабой сходимости ряда $\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{u_s} R$ и слабой относительной полноты множества значений интеграла $\Phi(\sum_{i=1}^{n}u_i)$ следует, что ряд $\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{u_s} R$ сходится слабо безусловно к некоторому элементу пространства Y. Согласно теореме 6, он сильно безусловно сходится в Y. Это противоречит неравенству (5). Следовательно, интеграл Φ является непрерывной функцией в точке 0. Непрерывность интеграла в любой другой точке доказывается как в теореме 1. Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема 8. *Пусть Y-ЛВТП. Тогда, если множество значений интеграла (1) ограничено для любых τ из некоторой окрестности нуля топологии $\Im$ и относительно слабо полно в Y_p, то интеграл Φ является непрерывной функцией в топологии $\Im$.*

Доказательство проводится аналогично теореме 7, однако после неравенства (5) делается переход к фактор-пространству Y_p.

Теорема 9. *Пусть $P_i(x) : R^K \to Y, i = 1, 2, ..., K$ п.п. (L-п.п.) функции,где Y- пространство Фреше. Тогда, если множество значений интеграла (1) ограничено на некотором относительно плотном множестве $E \subset R^K$ и относительно слабо полно в Y , то интеграл является п.п. (L-п.п.) функцией на R^K .*

Доказательство проводится как в теореме 3 (теореме 4) со ссылкой на теорему 7 вместо теоремы 1.

Теорема 10. *Пусть $P_i(x) : R^K \to Y, i = 1, 2, ..., K$ п.п. (L-п.п.) функции, где Y-ЛВТП. Тогда, если множество значений интеграла (1) ограничено на некотором относительно плотном множестве $E \subset R^K$ и относительно слабо полно в Y_p, то интеграл (1) является п.п. (L-п.п.) функцией на R^K.*

Доказательство следует из теоремы 9 со ссылкой на теорему 8 вместо теоремы 7.

Автор выражает глубокую благодарность проф. М.И.Кадецу за полезные научные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болес Б. Р. Обобщение двух теорем М.И.Кадеца о неопределенном интеграле абстрактных почти периодических функций. // Мат. заметки. – 1971. – **9.** – 3. С. 311-320.

2. Димитров Д. Б. Об абстрактных функциях со значениями в ЛВП, не содержащем подпространства, изоморфного c_0. // Теория функций, функциональный анализ и их прил. ХГУ, 1972. – **16.** – С. 159-165.

3. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. – М.: ИЛ, – 1961. – 232 с.

4. Кадец М. И. Об интегрировании почти периодических функций со значениями в пространстве Банаха. // Функциональный анализ и его приложения. – 1969. – **3.** – 3. – С. 71-74.

5. Левин Б. Я. О почти периодических функций Левитана. // УМЖ. – 1949. – 1. – С. 49-101.

6. Левитан Б. М. Почти периодические функции. – ГИТТЛ, – 1953.

7. Любарский М. Г. О неопределенном интеграле почти периодической по Левитану функции. //Теория функций, фукциональный анализ и их приложения. – ХГУ, – 1972. – **16.** – С. 139-150.

8. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, – 1965, – 519 с.

9. Pelczynski A. On B-spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0. // Bull. Acad. Polon. Sci., – 1957. –**5.** – 8. – С. 797-798.

10. Reich A. Prakompakte Gruppen and Fastperiodizitat. // Math. Z.. – 1970. –**116.** – С. 216-234.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 519.46 № 514, 2001, с. 115–121

Класифікація та точні розв'язки нелінійних еволюційних рівнянь

А. Ю. Андрейцев

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

В роботі запропонований метод класифікації нелінійних еволюційних рівнянь виду $u_t = uu_{xx} + F(u, u_x)$ з диференціальними зв'язками $u_{xx} = f(u, u_x)$, що допускають редукцію до систем двох звичайних диференціальних рівнянь. Показано, що сумісність вихідної системи рівнянь забезпечується, якщо $F(u, u_x)$ задовольняє рівнянню параболічного типу, яке за допомогою класичної заміни змінних зводиться до звичайного диференціального рівняння з параметром. Доведено, що при підстановці розв'язків додаткового рівняння в вихідне еволюційне, останнє редукується до системи двох звичайних диференціальних рівнянь. Наведені приклади редукції та точні розв'язки вихідного рівняння, одержані, за допомогою описаного методу. *2000 Mathematics Subject Classification* 35K10.

Проблемам редукції еволюційних рівнянь з квадратичними нелінійностями присвячено ряд робіт В. Галактіонова, зокрема [1]. В [2] запропонований новий метод класифікації та редукції нелінійних рівнянь параболічного типу, що базується на ідеї умовних симетрій вищих порядків досліджуваних рівнянь. Результати застосування даного методу до редукції еволюційних рівнянь

$$u_t = uu_{xx} + F(u, u_x)$$

з додатковими умовами на функцію u:

$$u^{(N)} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i(x,t)\, u^{(i)},$$

$u^{(i)} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$, $N = 3, 4, 5$ наведені в [3]. Зазначимо, що в рамках вказаного підходу одержано

$$F(u, u_x) = \lambda_0 u_x^2 + \lambda_1 u u_x + \lambda_2 u^2 + \mu_0 u_x + \mu_1 u + \mu_2.$$

В даній роботі пропонується новий підхід до класифікації нелінійних еволюційних рівнянь, що допускають редукцію до систем двох звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо спочатку систему

$$u_t = F(u, u_x), \quad u_{xx} = f(u, u_x). \qquad (1)$$

Продиференцюємо перше рівняння двічі за змінною x, а друге по t, вилучимо з розгляду u_t, u_{tx}, u_{xx} та прирівняємо праві частини одержаних рівнянь. Отримуємо

$$u_x^2 F_{uu} + 2fu_x F_{uu_x} + f^2 F_{u_x u_x} + (f - f_{u_x} u_x) F_u + f_u u_x F_{u_x} - f_u F = 0. \qquad (2)$$

Це рівняння параболічного типу відносно функції F є умовою сумісності вихідної системи. Покажемо, що за допомогою класичної заміни змінних $\xi = \xi(u, u_x), \eta = \eta(u, u_x)$ дане рівняння зводиться до вигляду

$$g_1(\xi, \eta) F_{\eta\eta} + g_2(\xi, \eta) F_\eta + g_3(\xi, \eta) F = 0. \qquad (3)$$

Дійсно, рівняння характеристик для (2):

$$u_x^2 (du_x)^2 - 2fu_x du du_x + f^2 (du)^2 = (u_x du_x - f du)^2 = 0$$

має один розв'язок $\xi(u, u_x) = \varphi_1(t)$, що задовольняє рівняння

$$f\xi_{u_x} + u_x \xi_u = 0. \qquad (4)$$

η вибираємо довільно, але за умови, що якобіан

$$\begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_{u_x} & \eta_{u_x} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В нових змінних рівняння (2) запишеться у вигляді

$$h_1(\xi, \eta) F_{\eta\eta} + h_2(\xi, \eta) F_\eta + h_3(\xi, \eta) F_\xi + h_4(\xi, \eta) F = 0.$$

Покажемо, що для рівняння (2) $h_3 = 0$. З умови (4) маємо

$$(f\xi_{u_x} + u_x \xi_u)_x = f^2 \xi_{u_x u_x} + f_{u_x} f \xi_{u_x} + 2fu_x \xi_{uu_x} + f_u u_x \xi_{u_x} + u_x^2 \xi_{uu} + f\xi_u = 0.$$

Після заміни змінних в рівнянні (2), отримаємо, що коефіцієнт при F_ξ

$$\begin{aligned} f^2 \xi_{u_x u_x} &+ 2fu_x \xi_{uu_x} + u_x^2 \xi_{uu} + f_u u_x \xi_{u_x} + (f - f_{u_x} u_x) \xi_u = \\ &= (f\xi_{u_x} + u_x \xi_u)_x - f_{u_x} f \xi_{u_x} - f_{u_x} u_x \xi_u = \\ &= (f\xi_{u_x} + u_x \xi_u)_x - f_{u_x} (f\xi_{u_x} + u_x \xi_u) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, (2) перетворюється до вигляду (3), яке є лінійним ЗДР 2-го порядку з параметром ξ. Якщо це рівняння вдається проінтегрувати, то ми одержуємо явний вигляд F, для яких вихідна система є сумісною.

Зауваження 1. *Так як u_x є частковим розв'язком рівняння (2), а значить у рівняння (3), то підстановка $F(\xi,\eta) = u_x(\xi,\eta)G(\xi,\eta)$ зводить (3) до лінійного ЗДР 1-го порядку.*

Зауваження 2. *Рівняння*

$$u_x du_x - f(u, u_x)\, du = 0 \tag{5}$$

за умов, що u_x, f та їх похідні визначені і неперервні і $u_x f \neq 0$ в деякій однозв'язній області площини uOu_x, може за допомогою інтегруючого множника бути зведене до рівняння в повних диференціалах, яке в будь-якій обмеженій підобласті даної області має розв'язок

$$\xi(u, u_x) = \varphi_1(t) \tag{6}$$

Враховуючи, що друге рівняння системи (1) заміною $u_x = p(u)$, звідки $u_{xx} = p\frac{dp}{du}$, зводиться до рівняння (5), ми можемо одержати його загальний розв'язок, проінтегрувавши (6). Якщо рівняння (6) розв'язне відносно u_x, то одержимо

$$u_x = z(u, \varphi_1) \tag{7}$$

звідки

$$\int \frac{du}{z(u, \varphi_1)} = x + \varphi_2(t). \tag{8}$$

Це можливо, наприклад, коли (5) є рівняння з відокремленими змінними. Якщо (6) не розв'язне відносно u_x то перевіряємо виконання умов теореми про існування неявної функції в деякому околі точки $(u(x_0,t), u_x(x_0,t))$, в якому одержуємо той самий результат. Надалі ми будемо вважати, що умови теореми про існування неявної функції виконані.

Доведемо таке твердження: підстановка анзаців - розв'язків другого рівняння системи (1) - в перше рівняння цієї системи, редукує його до системи двох ЗДР при умові, що $F(u, u_x)$ задовольняє (2).

Нехай $\eta = u$. Враховуючи зауваження 1 і (7) одержимо

$$G_{\eta\eta} + \left(\frac{3f}{z^2} - \frac{f_z}{z}\right) G_\eta = 0. \tag{9}$$

Далі з (5) слідує

$$\frac{f}{z} = z_\eta, \quad z_{\eta\xi} = \left(\frac{f}{z}\right)_\xi = \frac{f_z z_\xi}{z} - \frac{f z_\xi}{z^2}, \quad f_z = z_\eta + z z_{\eta\xi}\frac{1}{z_\xi}.$$

Після відповідних підстановок, (9) перетворюється до вигляду

$$G_{\eta\eta} + \left(\frac{2z_\eta}{z} - \frac{1}{z_\xi} z_{\eta\xi}\right) G_\eta = 0,$$

звідки

$$G_\eta = \frac{1}{z^2} z_\xi f_1(\xi).$$

Остаточно

$$G = f_1(\xi) \int^{u} \frac{1}{z^2} z_\xi d\eta + f_2(\xi)$$

або

$$F = f_1(\xi) u_x \int^{u} \frac{1}{z^2} z_\xi d\eta + f_2(\xi) u_x.$$

Розглянемо тепер рівняння

$$u_t = f_1(\xi) u_x \int^{u} \frac{1}{z^2} z_\xi d\eta + f_2(\xi) u_x, \qquad (10)$$

$$u_t = u_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + u_{\varphi_2} \dot{\varphi}_2 .$$

З (8) випливає, що $u = u(\varphi_1(t), x + \varphi_2(t))$, тобто $u_{\varphi_2} = u_x = u_{x+\varphi_2}$. З урахуванням (6), (10) набуває вигляду

$$u_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 + u_{x+\varphi_2} \dot{\varphi}_2 = f_1(\varphi_1) u_x \int^{u} \frac{1}{z^2} z_\xi d\eta + f_2(\varphi_1) u_{x+\varphi_2}.$$

Покладемо $\dot{\varphi}_2 = f_2(\varphi_1)$ і продиференціюємо одержану рівність за x. Маємо

$$u_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1 = f_1(\varphi_1) u_x \int^{u} \frac{1}{z^2} z_\xi d\eta \qquad (11)$$

$$u_{x\varphi_1} \dot{\varphi}_1 = f_1(\varphi_1) u_{xx} \int^{u} \frac{1}{z^2} z_\xi d\eta + f_1(\varphi_1) u_x \frac{d}{dx} \left(\int^{u} \frac{1}{z} z_\xi dx \right) = \qquad (12)$$

$$= f_1(\varphi_1) u_{xx} \int^{u} \frac{1}{z^2} z_\xi d\eta + f_1(\varphi_1) z_\xi .$$

З іншого боку, продиференціювавши (7) за $\varphi_1(t)$, отримаємо

$$u_{x\varphi_1} = z_\eta \eta_{\varphi_1} + z_\xi . \qquad (13)$$

Так як $\eta = u$ та $z_\eta = \frac{f}{u_x}$, домножимо (13) на $\dot{\varphi}_1$ і підставимо в (12), врахувавши (11). Одержимо

$$f_1(\varphi_1) u_x \frac{f}{u_x} \int^{u} \frac{1}{z^2} z_\xi d\eta + z_\xi \dot{\varphi}_1 = f_1(\varphi_1) u_{xx} \int^{u} \frac{1}{z^2} z_\xi d\eta + f_1(\varphi_1) z_\xi$$

або

$$\dot{\varphi}_1 = f_1(\varphi_1),$$

так як $u_{xx} = f(u, u_x)$

Таким чином, перше рівняння системи (1) редукується до системи ЗДР:

$$\dot{\varphi_1} = f_1(\varphi_1), \quad \dot{\varphi_2} = f_2(\varphi_1).$$

Описаний підхід можна застосувати до класифікації та редукції рівнянь типу

$$u_t = \Phi(u, u_x, u_{xx}) + F(u, u_x),$$

де $\Phi(u, u_x, u_{xx})$ - відома функція. В даній роботі ми наведемо приклади класифікації та редукції рівнянь

$$u_t = uu_{xx} + F^1(u, u_x), \tag{14}$$

які згадувалися вище. Зазначимо, що

$$F^1(u, u_x) = F(u, u_x) - uf(u, u_x),$$

а тому ми можемо безпосередньо застосувати отримані вище результати.

Для прикладу розглянемо рівняння (14) з додатковою умовою на u

$$u_{xx} = f(u_x).$$

В цьому випадку

$$\xi = u - \int \frac{u_x du_x}{f(u_x)},$$

$$F^1 = f_1\left(u - \int \frac{u_x du_x}{f(u_x)}\right) + f_2\left(u - \int \frac{u_x du_x}{f(u_x)}\right) u_x - uf(u_x).$$

Нехай $f(u_x) = u_x$. Тоді

$$u = e^{x+\varphi_2(t)} + \varphi_1(t).$$

Рівняння

$$u_t = uu_{xx} + (u - u_x)^n - uu_x, \quad n \neq 1 \tag{15}$$

редукується до системи

$$\dot{\varphi_1} = \varphi_1^n, \quad \dot{\varphi_2} = 0,$$

розв'язок якої

$$\varphi_1 = ((1-n)t + C_1)^{\frac{1}{1-n}}, \quad \varphi_2 = C_2.$$

Таким чином,

$$u = e^{x+C_2} + ((1-n)t + C_1)^{\frac{1}{1-n}}$$

розв'язок рівняння (15).

Рівняння

$$u_t = uu_{xx} + (u - u_x)^n - u_x^2, \quad n \neq 1 \tag{16}$$

(тут $f_2(u - u_x) = u - u_x$) редукується до системи

$$\dot{\varphi_1} = \varphi_1^n, \quad \dot{\varphi_2} = \varphi_1.$$

$$\varphi_1 = ((1-n)\,t + C_1)^{\frac{1}{1-n}}, \quad \varphi_2 = \frac{((1-n)\,t + C_1)^{\frac{2-n}{1-n}}}{2-n} + C_2.$$

Розв'язок рівняння (16)

$$u = e^{x + \frac{((1-n)t+C_1)^{\frac{2-n}{1-n}}}{2-n} + C_2} + ((1-n)\,t + C_1)^{\frac{1}{1-n}}$$

Розглянемо випадок $f = u_x^2, \quad u = -\ln(x + \varphi_2(t)) + \varphi_1(t)$ Рівняння

$$u_t = uu_{xx} + e^{-2u}u_x^2 + e^u - uu_x^2 \tag{17}$$

$(f_1(u - \ln u_x) = e^{-2(u - \ln u_x)}, \quad f_2(u - \ln u_x) = e^{u - \ln u_x})$ рудукується до системи

$$\dot{\varphi_1} = e^{-2\varphi_1}, \quad \dot{\varphi_2} = -e^{\varphi_1}.$$

$$\varphi_1 = \ln\sqrt{2t + C_1}, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{3}(2t + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2.$$

Розв'язок рівняння (17)

$$u = -\ln\left(x - \frac{1}{3}(2t + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2\right) + \ln\sqrt{2t + C_1}.$$

При $f = u_x^P, \quad P \neq 1, \quad P \neq 2$

$$u = \frac{1}{2-P}((1-P)(x + \varphi_2(t)))^{\frac{2-P}{1-P}} + \varphi_1(t), \quad \xi = u - \frac{1}{2-P}u_x^{2-P}$$

і, наприклад, рівняння

$$u_t = uu_{xx} + uu_x - \frac{1}{2-P}u_x^{3-P} - uu_x^P$$

матиме розв'язок

$$u = \frac{1}{2-P}((1-P)(x + C_1 t + C_2))^{\frac{2-P}{1-P}} + C_1.$$

Тепер, нехай додаткова умова має вигляд $u_{xx} = f(u)$

$$\xi = u_x^2 - 2\int f(u)\,du, \quad u_x = \sqrt{2\int f(\eta)\,d\eta + \xi},$$

$$F^1 = f_1\left(u_x^2 - 2\int f(u)\,du\right)u_x \int^u \frac{d\eta}{(2\int f(\eta)\,d\eta + \xi)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+ f_2\left(u_x^2 - 2\int f(u)\,du\right)u_x - uf(u).$$

Якщо $f(u) = e^u$, то $u = \ln\frac{-\varphi_1}{2\cos^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\varphi_1}(x + \varphi_2)\right)}$ при $\varphi_1(t) < 0$,

та $\quad u = \ln\frac{\varphi_1}{2ch^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\varphi_1}(x + \varphi_2)\right)}$ при $\varphi_1(t) > 0$.

Рівняння
$$u_t = uu_{xx} + u_x^3 - 2e^u u_x - ue^u$$
має розв'язки
$$u = \ln \frac{-C_1}{2\cos^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-C_1}\,(x + C_1 t + C_2)\right)}, \quad C_1 < 0;$$

$$u = \ln \frac{C_1}{2ch^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{C_1}\,(x + C_1 t + C_2)\right)}, \quad C_1 > 0.$$

На завершення зазначимо, що в [4] проведено класифікацію та редукцію нелінійних еволюційних рівнянь (14) за додаткових умов
$$u_{xx} = au_x + bu, \quad a, b = const.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. // Proc. Roy Soc. Edinburgh 125A. – 1995. – P. 225-246.

2. Zhdanov R.Z. Conditional Lie-Backlund symmetry and reduction non-linear evolution equation. // J. Phys A: Math Gen. – 1995. – **28**. - No 13. – P. 3841-3850.

3. Андрейцев А.Ю. Редукція нелінійних еволюційних рівнянь, що допускають умовні симетрії вищих порядків. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 2000. – С. 3-8.

4. Андрейцев А.Ю. Про умови редукції одного класу нелінійних еволюційних рівнянь. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 1999. – С. 3-6.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 532.59 № 514, 2001, с. 122–128

Резонанс и форма волнового пакета на поверхности контакта жидких сред

О. В. Авраменко

Кировоградский государственный педуниверситет, Украина

Исследуется форма волнового пакета, направление распространения, а также условия резонанса второй гармоники на поверхности контакта двух сред, одна из которых полупространство, а вторая слой. Представлены условия распространения пакетов различной формы: ∪-образной и ∩-образной, обнаружены характерные особенности резонансной области, сформулированы условия образования встречных волн.
2000 Mathematics Subject Classification 354J.

Устойчивость волновых пакетов на поверхности контакта жидкой полуограниченной области и жидкого слоя исследована в статьях [1] и [2]. В настоящей статье исследуется форма волн на поверхности контакта указанных двух сред, направление их распространения, а также условия резонанса второй гармоники.

1. Постановка задачи

Математическая постановка задачи о распространении волновых пакетов вдоль поверхности $z=-h_1$ двух жидких сред имеет вид

$$\nabla^2\varphi_i = 0 \qquad \text{в} \quad (i=1,2), \tag{1}$$

$$\eta_{,t} - \varphi_{i,z} = -\varphi_{i,x}\eta_{,x} \quad \text{на} \quad z=-h_1+\eta(x,t)\,, \quad (i=1,2), \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\varphi_{1,t} - \rho\varphi_{2,t} + (1-\rho)\,\eta + 0.5\,(\nabla\varphi_1)^2 - 0.5\,(\nabla\varphi_2)^2 - \\ -\left(1+\eta_{,x}^2\right)^{-3/2}\eta_{,xx} = 0 \quad \text{на} \quad z=-h_1+\eta(x,t)\,,\end{gathered} \tag{3}$$

$$\varphi_{2,x} = 0 \quad \text{на} \quad z=-h_2 \tag{4}$$

$$|\varphi_1| \to 0 \quad \text{при} \quad z\to-\infty, \tag{5}$$

где φ_i $(i=1,2)$- потенциалы скоростей в жидких средах, η - отклонение поверхности контакта жидких сред: $\Omega_1=\{(x,y,z), -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty, z<-h_1\}$ и $\Omega_2=\{(x,y,z), -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty, -h_1<z<-h_2\}$, $\rho=\rho_2/\rho_1$. Безразмерные переменные в задаче (1)-(5) введены на основе характерной длины $(T/\rho_1 g)^{1/2}$, характерного времени $(l/g)^{1/2}$, плотности нижней жидкой среды ρ_1, где T - поверхностное натяжение, g - ускорение свободного падения.

В статье [2] приводится построение приближенных решений задачи (1)-(5) методом многомасштабных разложений

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O\left(\varepsilon^4\right), \tag{6}$$

$$\varphi_i(x,z,t) = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \varphi_n(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O\left(\varepsilon^4\right), \tag{7}$$

где ε - малый безразмерный параметр, $x_n = \varepsilon^n x$, $t_n = \varepsilon^n t$.

2. Анализ формы волны

Исследуем форму волны в зависимости от различных значений параметров системы на основе аналитических результатов, полученных ранее [2]. Величина $\Lambda(\rho, k, h)$, зависящая от величины волнового числа k, отношения плотностей ρ и толщины слоя h

$$\begin{aligned} \Lambda = \omega^2 \left[1 - \rho(3\, cth\, kh cth\, 2\, kh - 2)\right](1 + \rho\, cth\, kh) \times \\ \times \left(2\left[(1 - \rho + k^2)(1 + \rho\, cth\, 2kh) - 3k^2(1 + \rho\, cth\, kh)\right]\right)^{-1} \times \\ \times \left((1 - \rho - k^2)(1 + \rho\, cth\, kh)\right)^{-1} \end{aligned} \tag{8}$$

играет большую роль при исследовании поведения волн, т.к. $\Lambda(\rho, k, h)$ является коэффициентом при втором слагаемом в выражении для отклонения поверхности контакта двух сред

$$\eta(x,t) = \varepsilon\, a\, cos\left(kx - \widetilde{\omega}\, t\right) + 0.5\varepsilon^2 a^2 \Lambda(\rho, k, h)\, cos\, 2\left(kx - \widetilde{\omega}\, t\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right), \tag{9}$$

где $\widetilde{\omega} = \omega - \varepsilon a^2 \omega^{-1} J(\rho, k, h)$.

Следовательно, для определения формы поверхности контакта $\eta(x,t)$ важен знак $\Lambda(\rho, k, h)$, который меняется при переходе через кривую L_1 вдоль которой $\Lambda(\rho, k, h) = 0$, или при переходе через кривую L_2, вдоль которой $\Lambda(\rho, k, h) \to \infty$. Уравнения таких кривых в неявной форме имеют вид

$$L_1 : 1 - \rho(3\, cth\, kh cth\, 2\, kh - 2) = 0, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} L_2 : 2\left[(1 - \rho + k^2)(1 + \rho\, cth\, 2kh) - \right. \\ \left. -3k^2(1 + \rho\, cth\, kh)\right] - (1 - \rho - k^2)(1 + \rho\, cth\, kh) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Графики L_1 и L_2 изображены на рис. 1. при различных значениях толщины слоя $h = 1$, $h = 2$ (сплошные кривые), а также в предельном случае $h \to \infty$

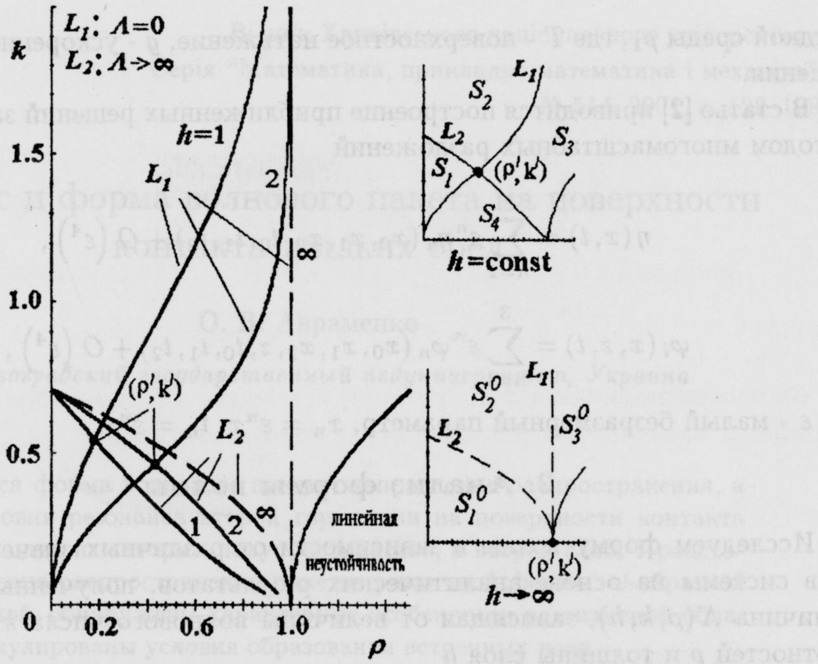

Рис. 1: Области знакопостоянства Λ: для системы "слой-полупространство" S_1 и S_3 $(\Lambda > 0)$, S_2 и S_4 $(\Lambda < 0)$; для системы "полупространство-полупространство" S_1^0 и S_3^0 $(\Lambda > 0)$, S_2^0 $(\Lambda < 0)$

(пунктир). Видно, что при увеличении h кривая L_1 приближается к прямой $\rho = 1$, являющейся ее вертикальной асимптотой. Вдоль $\rho = 1$ в случае двух полуограниченных областей величина $\Lambda(\rho, k) = 0$. При увеличении h вторая кривая L_2 приближается к кривой $\rho = 1 - 2k^2$, вдоль которой $\Lambda(\rho, k) \to \infty$ в случае двух полуограниченных жидких сред. Как видно из рис. 1, кривые L_1 и L_2 пересекаются в точке (ρ', k') и разделяют область линейной устойчивости на четыре области S_1, S_2, S_3, S_4. В областях S_1 и S_3: $\Lambda(\rho, k, h) > 0$, а в областях S_2 и S_4: $\Lambda(\rho, k, h) < 0$. При увеличении толщины слоя h кривая L_1 приближается к контуру, состоящему из отрезка оси $k = 0$ при $\rho \in [0, 1]$ и прямой $\rho = 1$, точка (ρ', k') смещается к точке $(1, 0)$, в результате чего области S_1, S_2, S_3 вырождаются в S_1^0, S_2^0, S_3^0, а область S_4 - в отрезок $\rho \in [0, 1]$ на оси $k = 0$. В областях S_1^0 и $S_3^0 \Lambda(\rho, k) > 0$, а в S_2^0 $\Lambda(\rho, k) < 0$. Таким образом, при $h \to \infty$ получаем случай, рассмотренный ранее [4].

На рис. 2 представлены отклонение свободной поверхности $\eta(x, t)$ (сплошная линия) и первые две гармоники $\eta_1(x, t)$ и $\eta_2(x, t)$ (пунктир) при следующих значениях параметров $h = 0.75$, $k = 0.7$, $x = 1$, $t = 0$, $\varepsilon = 0.1$, $a = 10$, на (а) $\rho \approx 0.13032$ $(\Lambda = -0.5)$, (б) $\rho \approx 0.94155$ $(\Lambda = 0.5)$. Отклонение поверхности контакта $\eta(x, t)$ представляет собой сумму двух косинусоид (9), одна из которых сжата в два раза относительно другой, амплитуда первой гармоники значительно больше амплитуды второй. Если $\Lambda(\rho, k, h) < 0$ и $a > 0$, то максимум $\eta_1(x, t)$ совпадет с минимумом $\eta_2(x, t)$, а минимум $\eta_1(x, t)$ со-

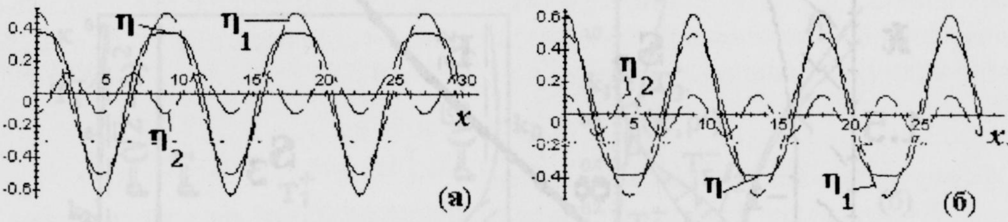

Рис. 2: Отклонение свободной поверхности $\eta(x,t)$ (сплошная линия) и первые две гармоники $\eta_1(x,t)$ и $\eta_2(x,t)$ (пунктир)

впадет со следующим минимумом $\eta_2(x,t)$. Таким образом, в областях S_2 и S_4 поверхность контакта $\eta(x,t)$ имеет $\cap$-образную форму (рис. $2a$). Если же $\Lambda(\rho,k,h) > 0$ и $a > 0$, то максимумы $\eta_1(x,t)$ и $\eta_2(x,t)$ совпадают, а минимум $\eta_1(x,t)$ накладывается на следующий максимум $\eta_2(x,t)$. Следовательно, в областях S_1 и S_3 волна имеет $\cup$-образную форму, как на рис. $2б$.

3. Резонанс второй гармоники

Как известно, в окрестности кривой L_2 возникает так называемый резонанс второй гармоники, когда амплитуда $\eta_2(x,t)$, равная $0.5\varepsilon^2 a^2 \Lambda(\rho,k,h)$, возрастает по сравнению с амплитудой $\eta_1(x,t)$, равной $\varepsilon\, a$. Такое явление для двух полупространств рассмотрено в работе [3]. В отличие от случая, рассмотренного ранее, в настоящей задаче кривая L_2, вдоль которой $\Lambda(\rho,k,h) = \infty$, разбивается точкой (ρ',k') на две части L_2' и L_2''. Вдоль L_2' при увеличении k величина $\Lambda(\rho,k,h)$ изменяет знак с "+" на "-", а вдоль L_2'' с "-" на "+".В самой же точке (ρ',k') значение $\Lambda(\rho,k,h)$ не определено, а значение предела $lim_{(\rho,k)\to(\rho',k')}\Lambda(\rho,k,h) = \infty$ (при подходе к (ρ',k') из областей S_1 или S_3 значение предела $+\infty$, а из областей S_2 и S_4 $-\infty$). В как угодно малой окрестности (ρ',k') будут существовать точки, принадлежащие всем четырем областям S_1, S_2, S_3 и S_4.

На рис. 3 представлены резонансные области, в которых $|\Lambda(\rho,k,0.75)| > 10$ и $|\Lambda(\rho,k,0.75)| > 1$. Как видно из рис. 3, в отличие от рассмотренного ранее случая двух полуограниченных областей, резонансным участком, где значение $\Lambda(\rho,k,h)$ принимает как угодно большие значения, в настоящей задаче является окрестность кривой L_2, на которой расположена точка (ρ',k'), где резонансная область сужается и стягивается в эту точку, а также окрестность координатной прямой $k = 0$ при $\rho \in [0,1]$.

Как уже было отмечено выше, при увеличении толщины слоя h область S_4 вырождается в отрезок $\rho \in [0,1]$ на оси $k = 0$, при этом точка (ρ',k') смещается к точке $(1,0)$, а кривая L_2 будет иметь свойства только ее верхней части L_2'. Отметим, что если h равно как угодно большому фиксированному числу, то все выше перечисленные особенности, полученные для слоя конечной толщины, будут иметь место, однако во все более узких областях.

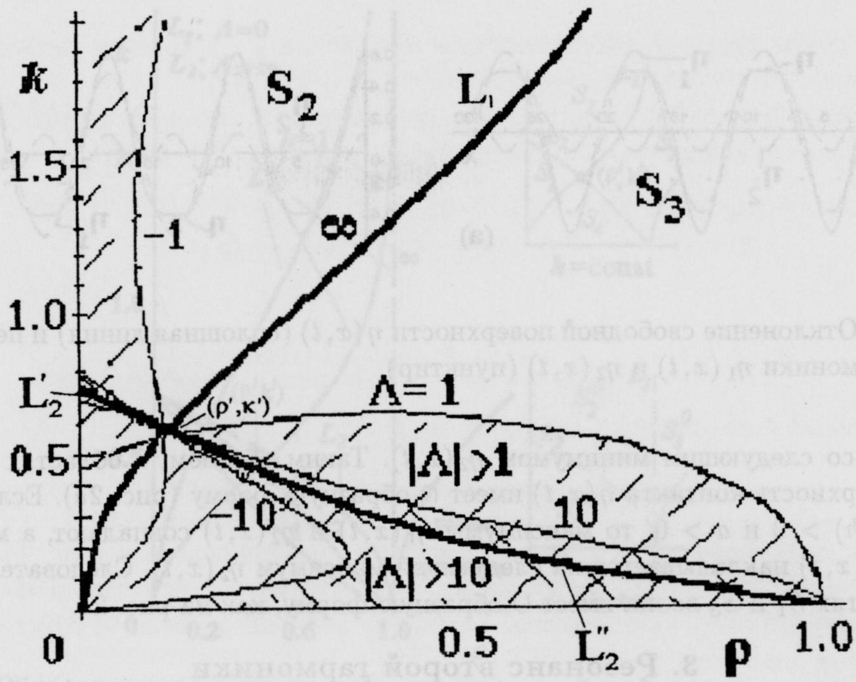

Рис. 3: Область резонанса второй гармоники

4. Направление распространения волн

Знак $\widehat{\omega}$, как известно, определяет направление распространения волны. Если $\widehat{\omega} > 0$, то волна распространяется в положительном направлении оси x, если же $\widehat{\omega} < 0$, то в противоположном (встречные волны), при $\widehat{\omega} = 0$ наблюдаются стоячие волны. Знак $\widehat{\omega}$ может изменяться вдоль кривых, где $\widehat{\omega} = 0$, а также вдоль кривой L_2, где $\Lambda(\rho, k, h)$ изменяет значение с как угодно больших на как угодно малые или наоборот, т.к. $\widehat{\omega} = \omega - \varepsilon a^2 \omega^{-1} J$, а J в свою очередь зависит от $\Lambda(\rho, k, h)$

$$J = -k/\ (16\ (1 + \rho\, cth\, kh\ )) \times$$
$$\times [4\,\Lambda\,\omega^2\,(1 - \rho\,(-1.5 + 0.5 cthkh + cth\,2kh + cth\,kh\,cth\,2kh)) - 3k^4 +$$
$$+4k\omega^2 \left(1 + \rho \left(0.75 + 2.25 cth\,kh - cth\,kh\,cth\,2kh - cth^2\,kh\,cth 2kh\right)\right)].$$

Анализ знака $\widehat{\omega}$ показал наличие двух больших областей, где $\widehat{\omega} > 0$, и системы пяти областей, где $\widehat{\omega} < 0$. Существует две кривые, вдоль которых $\widehat{\omega} = 0$. Первая из них, кривая l_1, расположена в области $\rho > 1$, а вторая l_2 в области $\rho < 1$.

На рис. $4a$ видно, что первая кривая l_1 выходит из точки $(1, 0)$, поднимается вверх вправо до некоторого значения k_0, а затем продолжает подниматься вверх влево, асимптотически приближаясь к горизонтальной прямой $\rho = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$. Вторая кривая l_2, также как и l_1, выходит из точки $(1, 0)$, поднимается вверх влево по координатной плоскости и пересекает ось Ok в точке

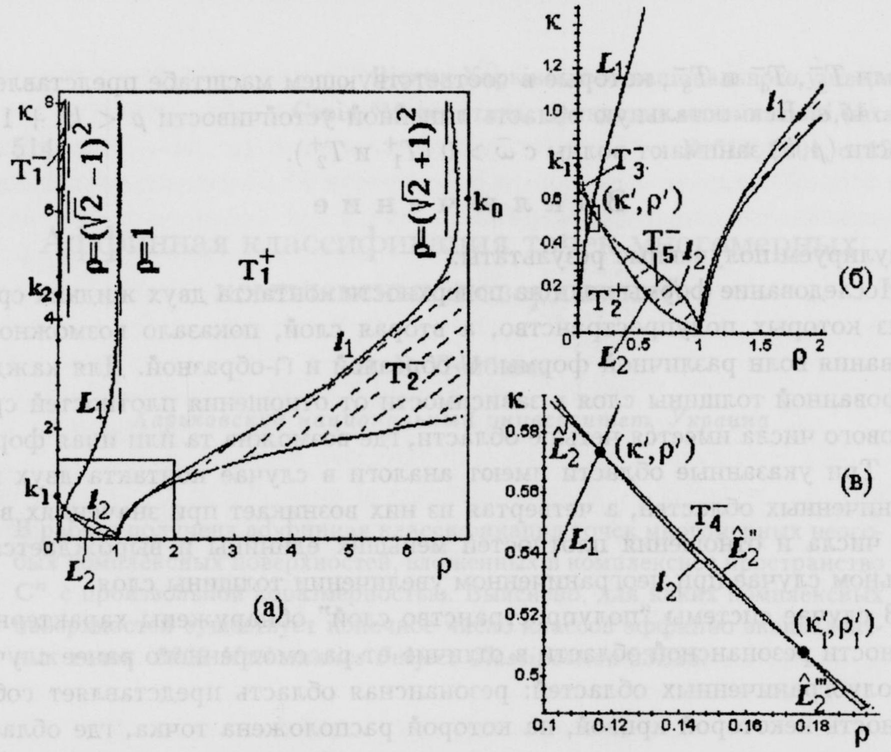

Рис. 4: Область знакопостоянства $\widehat{\omega}$: T_i^+ $(i=1,2)$, где $\widehat{\omega}<0$ – не заштрихованы; T_i^- $(i=\overline{1,5})$, где $\widehat{\omega}<0$ – заштрихованы

$k_1 > 0.707$. При $k_1 < k < k_2$ кривая l_2 расположена вне первого квадранта ($k \geq 0$, $\rho \geq 0$), что означает отсутствие соответствующих стоячих волн на данном промежутке. При больших значениях волновых чисел $k > k_2$ кривая l_2 вновь появляется в первом квадранте, поднимаясь вверх вправо, асимптотически приближаясь к горизонтальной прямой $\rho = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$. Назовем l_2' эту верхнюю часть кривой l_2.

Таким образом, для больших значений волновых чисел $k \to \infty$ (капиллярные волны) существуют две области где $\widehat{\omega} < 0$ и одна, расположенная между ними, где $\widehat{\omega} > 0$. Первая область T_1^-, где $\widehat{\omega} < 0$ ограничена кривой $l_2^?$ и координатной осью Ok, вторая T_2^- лежит правее кривой l_1, а третья область T_1^+, где $\widehat{\omega} > 0$, расположена между l_2' и l_1.

Исследование кривых l_2 и L_2 показывает, что они пересекаются в двух точках (ρ', k') и, (ρ_1', k_1'), первая из которых (ρ', k') является точкой пересечения кривых l_2 и L_1. В этих точках у функции $\widehat{\omega}(k, \rho, h)$ при фиксированном значении толщины слоя h имеются особенности такого же вида, что и у функции $\Lambda(\rho, k, h)$ в точке (ρ', k'). Эти точки разбивают кривую L_2 на три части $\widehat{L}_2'$, $\widehat{L}_2''$, $\widehat{L}_2'''$ (рис. 4в). Вдоль $\widehat{L}_2'$ и $\widehat{L}_2'''$ величина $\widehat{\omega}(k, \rho, h)$ изменяет знак с "+" на "-" а вдоль $\widehat{L}_2''$ с "-" на "+". Таким образом, области, где наблюдаются встречные волны, ограничены кривыми l_2 и L_2, пересекающимися в точках (ρ', k') и, (ρ_1', k_1'), в результате образуется система из трех малых областей встречных волн T_3^-, T_4^- и T_5^-, которые в соответствующем масштабе представлены на рис. 4*б,в*. Всю остальную область линейной устойчивости $\rho < k^2 + 1$ на плоскости (ρ, k) занимают волны с $\widetilde{\omega} > 0$ (T_1^+ и T_2^+).

Заключение

Сформулируем полученные результаты.

1. Исследование формы волн на поверхности контакта двух жидких сред, одна из которых полупространство, а вторая слой, показало возможность образования волн различной формы: ∪-образной и ∩-образной. Для каждой фиксированной толщины слоя в зависимости от отношения плотностей сред и волнового числа имеется четыре области, где возможна та или иная форма волны. Три указанные области имеют аналоги в случае контакта двух полуограниченных областей, а четвертая из них возникает при значениях волнового числа и отношения плотностей меньших единицы и вырождается в предельном случае при неограниченном увеличении толщины слоя.

2. В случае системы "полупространство слой" обнаружены характерные особенности резонансной области в отличие от рассмотренного ранее случая двух полуограниченных областей: резонансная область представляет собой окрестность некоторой кривой, на которой расположена точка, где область сужается, стягиваясь в эту точку; к резонансной области относится также окрестность, где волновые числа малы, а отношение плотностей меньше единицы.

3. Анализ знака частоты волнового пакета показал наличие двух больших областей, где частота положительна и направление распространения волны совпадает с положительным направлением горизонтальной пространственной координаты; а также системы пяти областей, где частота отрицательна и образуются встречные волны. Три из пяти областей встречных волн расположены в резонансной области. Существует две кривые, вдоль которых частота равна нулю, при этих условиях образуются стоячие волны.

Данная работа выполняется при поддержке INTAS (проект № 99-16-37).

ЛИТЕРАТУРА

1. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Нелинейное распространение волновых пакетов при околокритических волновых числах в кусочно-неоднородной по глубине жидкости. // Теор. и прикл. мех. – 2000. – **31**. – С. 151-157.

2. Avramenko O.V., Selezov I.T. Nonlinear wave propagation in a fluid layer based on semi-infinite fluid. // Доп. НАНУ. – 1997. – **10**. – С. 61-66.

3. McGoldrick L.F. On the rippling of small waves. // J.Fluid Mech. – 1972. – **52**. – P. 725-752.

4. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface. // Trans. ASME J. Appl. Mech. Ser. E. – 1976. – **43**, N4. – P. 584-588.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 514 № 514, 2001, с. 129–141

Аффинная классификация точек многомерных комплексных поверхностей

О. В. Лейбина

Харьковский национальный университет, Украина

В работе получена аффинная классификация точек многомерных неособых комплексных поверхностей, вложенных в комплексное пространство $\mathbf{C}^n$ с произвольной коразмерностью. Выяснено, для каких комплексных поверхностей существует конечное число классов аффинно эквивалентных точек. *2000 Mathematics Subject Classification* 53B25.

Введение

Вопрос о разбиении точек многомерной поверхности на классы, устойчивые относительно некоторой группы преобразований пространства рассматривался в работе [6].

Из работы [5] следует, что только группы аффинных и конформных преобразований сохраняют локально геометрические свойства поверхностей, а стало быть, только эти группы могут служить основой классификации точек многомерных поверхностей.

В работе [1] получена аффинная классификация точек регулярных поверхностей, вложенных в евклидово пространство $\mathbf{E}^n$ с произвольной коразмерностью.

Целью данной работы является аффинная классификация точек многомерных неособых комплексных поверхностей, вложенных в комплексное пространство $\mathbf{C}^n$ с произвольной коразмерностью. Основной результат работы составляют теоремы 1 – 5.

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^n$ неособая комплексная поверхность, вложенная в n-мерное комплексное пространство. Локально она задаётся радиус-вектором $\mathbf{w} = \mathbf{w}(w^1, w^2, ..., w^n)$, где $w^k = w^k(z^1, z^2, ..., z^l)$ – голоморфные функции многих комплексных переменных $z^j = x^j + iy^j$, $k = 1, ..., n$, $j = 1, ..., l$ и $rg\left(\frac{\partial w^\alpha}{\partial z^j}\right) = l$.

Поскольку комплексная поверхность F^l – гладкое подмногообразие в $\mathbf{C}^n$, то в окрестности каждой своей точки она может быть задана явно, в виде

$z^{l+\alpha} = z^{l+\alpha}(z^1, ..., z^l)$, $\alpha = 1, ..., n-l$. Тогда координаты радиус-вектора примут вид: $w^k = z^k$, $k = 1, ..., l$, $w^{l+\alpha} = z^{l+\alpha}(z^1, ..., z^l)$, $\alpha = 1, ..., n-l$.

Пусть ν_α – нормаль к F^l в некоторой точке q, $\alpha = 1, ..., n-l$. Элементы матрицы второй квадратичной формы поверхности F^l относительно нормали ν_α определяются следующим образом [2]:

$$a^\alpha_{ij} = \langle \frac{\partial^2 w}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}, \nu_\alpha \rangle,$$

$\langle , \rangle$ означает эрмитово скалярное произведение вида $\langle z_1, z_2 \rangle = z_1^1 \bar{z}_2^1 + z_1^2 \bar{z}_2^2 + ... + z_1^n \bar{z}_2^n$, где $z_1 = (z_1^1, ..., z_1^n)$ и $z_2 = (z_2^1, ..., z_2^n)$ – векторы в $\mathbf{C}^n$, а $\bar{z}_2 = (\bar{z}_2^1, ..., \bar{z}_2^n)$ – вектор, комплексно сопряженный к z_2.

Матрицу $\mathrm{A}_\alpha = (a^\alpha_{ij})^n_{i,j=1}$ можно записать в виде $\mathrm{A}_\alpha = C_\alpha + iD_\alpha$, где $\mathrm{C}_\alpha = (\mathrm{c}^\alpha_{ij})^n_{i,j=1}$, $D_\alpha = (d^\alpha_{ij})^n_{i,j=1}$ – вещественные матрицы. Каждой комплексной нормали

$$\nu_\alpha = (a^1_\alpha + ib^1_\alpha, a^2_\alpha + ib^2_\alpha, ..., a^n_\alpha + ib^n_\alpha)$$

соответствуют две вещественные нормали

$$n_{\alpha_1} = (a^1_\alpha, a^2_\alpha, ..., a^n_\alpha, b^1_\alpha, b^2_\alpha, ..., b^n_\alpha),$$

$$n_{\alpha_2} = (-b^1_\alpha, -b^2_\alpha, ..., -b^n_\alpha, a^1_\alpha, a^2_\alpha, ..., a^n_\alpha),$$

если рассматривать комплексную поверхность F^l как $2l$-мерное вещественное подмногообразие F^{2l} в $\mathbf{E}^{2n}$, где $\mathbf{E}^{2n}$ – овеществленное комплексное пространство C^n. Матрицы вторых квадратичных форм поверхности F^{2l} относительно нормалей n_{α_1} и n_{α_2} будут иметь соответственно следующий вид:

$$A_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} C_\alpha & -D_\alpha \\ -D_\alpha & -C_\alpha \end{pmatrix}, \qquad A_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} D_\alpha & C_\alpha \\ C_\alpha & -D_\alpha \end{pmatrix}.$$

Если в пространстве $\mathbf{C}^n$ выбрать систему координат так, чтобы точка q совпала с началом координат O, а касательное пространство T_qF^l – с подпространством $z^1, z^2, ..., z^l$, то уравнение соприкасающегося параболоида к поверхности F^l в точке q будет следующим:

$$z^{l+\alpha} = a^\alpha_{ij} z^i \bar{z}^j, \qquad \alpha = 1, ..., n-l. \tag{1}$$

Введем обозначение $A^\alpha(z, \bar{z}) = a^\alpha_{ij} z^i \bar{z}^j$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$z^{l+\alpha} = A^\alpha(z, \bar{z}), \qquad \alpha = 1, ..., n-l. \tag{2}$$

Определим вектор вторых квадратичных форм комплексной поверхности F^l в точке O следующим образом:

$$H = (A^1(z, \bar{z}), A^2(z, \bar{z}), ..., A^{n-l}(z, \bar{z}))$$

Всюду в дальнейшем будем отождествлять квадратичные формы $A^\alpha(z,z)$ с соответствующими им матрицами A^α. Таким образом, соприкасающийся параболоид полностью описывается вектором вторых квадратичных форм комплексной поверхности F^l в точке q.

Две точки неособой комплексной поверхности, вложенной в пространство C^n, называются аффинно эквивалентными, если соприкасающиеся параболоиды в этих точках можно отобразить друг на друга невырожденным аффинным преобразованием в объемлющем пространстве.

Комплексной точечной коразмерностью комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^n$ в данной точке называется размерность пространства вторых квадратичных форм поверхности F^l в этой точке. Очевидно, что точечная коразмерность не превышает $l(l+1)/2$ и, вообще говоря, не равна $n-l$.

Для комплексной поверхности F^l определяется внешний нуль-индекс $\mu(q)$ в точке q. Он равен размерности максимального подпространства $L(q)$ касательного пространства T_qF^l, такого, что для любого $y \in L(q)$ выполняется условие $Ay = 0$, где A – матрица второй квадратичной формы поверхности F^l относительно произвольной нормали.

В теореме 1 показано, для каких комплексных поверхностей существует конечное число классов аффинно эквивалентных точек:

Теорема 1. *Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^n$ неособая комплексная поверхность, вложенная в n-мерное комплексное пространство ($l \geq 2$). Тогда точки поверхности можно разбить на конечное число классов аффинной эквивалентности в следующих случаях:*

1) для двумерных комплексных поверхностей произвольной комплексной точечной коразмерности,

2) для комплексных гиперповерхностей $F^l \subset \mathbf{C}^{l+1}$ и двойственного случая $F^l \subset \mathbf{C}^n$, где комплексная точечная коразмерность $p = l(l+1)/2 - 1$,

3) для комплексных поверхостей $F^l \subset \mathbf{C}^n$, где комплексная точечная коразмерность минимальна ($p = 0$) или максимальна ($p = l(l+1)/2$),

4) для трехмерных комплексных поверхностей, где комплексная точечная коразмерность равна 2 или 4.

Классы аффинно эквивалентных точек комплексных поверхностей $F^2 \subset \mathbf{C}^n$ приведены в следующей теореме:

Теорема 2. *Для двумерных комплексных поверхностей $F^2 \subset \mathbf{C}^n$ комплексной точечной коразмерности p существует 6 классов аффинно эквивалентных точек :*

При $p = 0$ – один класс – точка уплощения.

При $p = 1$ – два класса; соприкасающийся параболоид невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к одному из следующих канонических видов:

а) $z^3 = (z^1)^2 + (z^2)^2$,

б) $z^3 = (z^1)^2$.

При $p=2$ – два класса; соприкасающийся параболоид невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к одному из следующих канонических видов:

а) $z^3=(z^1)^2$, $z^4=(z^2)^2$,

б) $z^3=(z^1)^2$, $z^4=2z^1z^2$.

При $p=3$ – один класс; соприкасающийся параболоид невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к следующему каноническому виду:

$z^3=(z^1)^2$, $z^4=(z^2)^2$, $z^5=2z^1z^2$.

Классы аффинно эквивалентных точек комплексных гиперповерхностей приведены в следующей теореме:

Теорема 3. *Для комплексных гиперповерхностей $F^l\subset\mathbf{C}^{l+1}$ существует l классов аффинно эквивалентных точек; соприкасающийся параболоид невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к одному из следующих канонических видов:*

$z^{k+1}=(z^1)^2+(z^2)^2+...+(z^k)^2$, $k=1,...,l$.

Согласно теореме 1 аффинная классификация точек в случае, когда $F^l\subset\mathbf{C}^n$ и комплексная точечная коразмерность $p=l(l+1)/2-1$, сводится к классификации точек гиперповерхностей.

Классы аффинно эквивалентных точек комплексных поверхностей минимальной или максимальной комплексной точечной коразмерности приведены в следующей теореме:

Теорема 4. *Для комплексных поверхностей $F^l\subset\mathbf{C}^n$, где комплексная точечная коразмерность минимальна ($p=0$) или максимальна ($p=l(l+1)/2$) существует один класс аффинно эквивалентных точек:*

При $p=0$ – точка уплощения.

При $p=l(l+1)/2$ соприкасающийся параболоид невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к следующему каноническому виду:

$z^{l+1}=(z^1)^2$, $z^{l+2}=2z^1z^2$, $z^{l+3}=2z^1z^3,...,$

$z^{2l}=2z^1z^l$, $z^{2l+1}=(z^2)^2,...,$ $z^{l+p}=(z^l)^2$.

Аффинные классы точек трехмерных комплексных поверхностей комплексной точечной коразмерности $p=2$ приведны в следующей теореме:

Теорема 5. *Две точки неособой комплексной поверхности $F^3\subset\mathbf{C}^5$ с нулевым внешним нуль-индексом являются аффинно эквивалентными тогда и только тогда, когда пучки вторых квадратичных форм комплексной поверхности в этих точках имеют равные степени и числа элементарных делителей.*

Существует 7 невырожденных классов аффинно эквивалентных точек:

В зависимости от элементарных делителей выделяются следующие канонические виды пучков вторых квадратичных форм:

1) $\lambda-\lambda_1,\ \lambda-\lambda_2,\ \lambda-\lambda_3,\ \lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$

$$(z^2)^2+(z^3)^2,\ (z^1)^2+(z^3)^2,$$

2) $\lambda-\lambda_1,\ \lambda-\lambda_1,\ \lambda-\lambda_3,\ \lambda_1\neq\lambda_3$

$$(z^3)^2,\ (z^1)^2+(z^2)^2,$$

3) $\lambda-\lambda_1,\ \lambda-\lambda_1,\ \lambda-\lambda_1$

$$0,\ (z^1)^2+(z^2)^2+(z^3)^2,$$

4) $(\lambda-\lambda_1)^2,\ \lambda-\lambda_3,\ \lambda_1\neq\lambda_3$

$$(z^2)^2+(z^3)^2,\ 2z^1z^2+(z^3)^2,$$

5) $(\lambda-\lambda_1)^2,\ \lambda-\lambda_1$

$$(z^2)^2,\ 2z^1z^2+(z^3)^2,$$

6) $(\lambda-\lambda_1)^3$

$$2z^2z^3,\ (z^2)^2+2z^1z^3,$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{C}$,

7) пучок вырожден

$$2z^2z^3,\ 2z^1z^3$$

Согласно теореме 1 аффинная классификация точек трехмерных комплексных поверхностей комплексной точечной коразмерности $p=4$ сводится к классификации при $p=2$, так как эти коразмерности являются двойственными для трехмерных поверхностей: их сумма равна $l(l+1)/2$ для $l=3$.

2. Условия конечности числа аффинных классов точек

Для выяснения условий существования конечного числа аффинных классов точек неособых комплексных поверхностей проведем рассуждения аналогично работе [1].

Пусть $F^l\subset\mathbf{C}^n$ неособая комплексная поверхность, вложенная в n-мерное комплексное пространство, $\mathrm{H}=\{H\}$ – пространство всевозможных векторов вторых квадратичных форм рассматриваемой поверхности. Тогда фактор-пространство

$$\mathbf{H}/(GL(l,\mathbf{C})\times GL(p,\mathbf{C}))$$

линейного пространства $\mathbf{H}$ по действию группы $GL(l,\mathbf{C})\times GL(p,\mathbf{C})$ совпадает с пространством аффинных классов точек комплексной поверхности.

Действительно, пусть p – комплексная точечная коразмерность неособой комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^n$. Это означает, что размерность пространства вторых квадратичных форм равна p. Значит, можно выбрать базис нормалей так, чтобы вторые квадратичные формы рассматриваемой поверхности относительно первых p нормалей были ненулевыми, а вторые квадратичные формы относительно оставшихся $n-l-p$ нормалей были тождественно равны нулю. Таким образом, комплексную поверхность F^l можно рассматривать как F^l в $\mathbf{C}^{l+p} \subset \mathbf{C}^n$.

Пусть q и q' точки на $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$,

$$H = (A^1(z,z), A^2(z,z), ..., A^p(z,z)),$$

$$H' = (A'^1(z,z), A'^2(z,z), ..., A'^p(z,z)) \ -$$

векторы вторых квадратичных форм поверхности F^l в точках q и q' соответственно.

Согласно (2) уравнение соприкасающегося параболоида к поверхности F^l в точке q будет иметь вид:

$$z^{l+\mu} = A^\mu(z,z), \qquad \mu = 1, ..., p.$$

После параллельного переноса на вектор $q'q$ и поворота в $\mathbf{C}^{l+p}$ так, чтобы T_qF^l и $T_{q'}F^l$ совпали, уравнение соприкасающегося параболоида в точке q' будет следующим:

$$z^{l+\mu} = A'^\mu(z,z), \qquad \mu = 1, ..., p.$$

Точки q и q' аффинно эквивалентны, если существует преобразование $\Lambda \in GL(l+p, \mathbf{C})$ такое, что $\Lambda H = H'$.

Аналогично [1] можно показать, что для наших целей достаточно ограничиться преобразованиями Λ, которые имеют блочный вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

где $U \in GL(l, \mathbf{C})$ и $V \in GL(p, \mathbf{C})$ – аффинные преобразования в касательном T_oF^l и нормальном N_oF^l пространствах в точке O к комплексной поверхности F^l. Иными словами, можно полагать, что $\Lambda \in GL(l, \mathbf{C}) \times GL(p, \mathbf{C})$. Тогда

$$\Lambda H = V \begin{pmatrix} U^*A^1U \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U^*A^pU \end{pmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad (\Lambda H)^\nu = U^*(v^\nu_\mu A^\mu)U, \tag{3}$$

где v^ν_μ элементы матрицы V, U^* – матрица, транспонированная и комплексно сопряженная к U.

Таким образом, аффинными классами точек поверхности являются классы эквивалентности пространства $\mathrm{H} = \{H\}$ всевозможных векторов вторых квадратичных форм (т. е. p-мерных векторов симметрических $l \times l$ матриц) по действию группы

$$G = GL(l, \mathbf{C}) \times GL(p, \mathbf{C}),$$

определенному формулой (3). Следовательно,

$$\mathbf{H}/G = \mathbf{H}/(GL(l, \mathbf{C}) \times GL(p, \mathbf{C})) \ -$$

пространство аффинных классов.

Лемма 1. *Для того, чтобы число классов аффинно эквивалентных точек комплексной поверхности $F^l \subset \mathbf{C}^{l+p}$ было конечно, необходимо, чтобы*

$$p(l(l+1)/2 - p) \leq l^2 - 1. \tag{4}$$

Доказательство. Для того, чтобы число аффинных классов было конечно, необходимо, чтобы

$$dim\mathbf{H}/G = 0, \tag{5}$$

так как в этом случае связная компонента группы $\mathbf{H}/G$ состоит из изолированных точек, а конечность размерности гарантирует конечность числа компонент. Фактор-пространство $\mathbf{H}/GL(p, \mathbf{C})$ – пространство всевозможных p-мерных плоскостей $l(l+1)/2$-мерного пространства L симметрических $l \times l$ матриц, т. е.

$$\mathbf{H}/GL(p, \mathbf{C}) = G(p, l(l+1)/2),$$

где $G(m, n)$ – многообразие Грассмана m-мерных комплексных плоскостей в $\mathbf{C}^n$, поэтому

$$dim\mathbf{H}/GL(p, \mathbf{C}) = p(l(l+1)/2 - p),$$

Из (5) следует, что

$$dim\mathbf{H}/GL(p, \mathbf{C}) \leq dimGL(l, \mathbf{C}).$$

Усилим это неравенство, замечая, что подгруппа $\{\lambda I, \lambda \in C\backslash\{0\}\} \subset GL(l, \mathbf{C})$ (I – единичная матрица порядка l) оставляет на месте p-мерную плоскость в пространстве L, натянутую на $A^1, A^2, ..., A^p$), что следует из формулы (3). Поэтому множество аффинных классов совпадает с фактор-пространством

$$\mathbf{H}/(GL(p, \mathbf{C}) \times GL(l, \mathbf{C})/\{\lambda I\}_{\lambda \neq 0})$$

Нетрудно видеть, что $GL(l, \mathbf{C})/\{\lambda I\} = SL(l, \mathbf{C})$ и $dimGL(l, \mathbf{C})/\{\lambda I\} = l^2 - 1$.

Итак, чтобы число аффинных классов было конечно, необходимо, чтобы

$$dim\mathbf{H}/GL(p, \mathbf{C}) \leq dimSL(l, \mathbf{C}).$$

Значит,

$$p(l(l+1)/2 - p) \leq l^2 - 1,$$

что и требовалось доказать.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $F^l \subset \mathbf{C}^n$ неособая комплексная поверхность комплексной точечной коразмерности p.

Неравенство (4) имеет следующие решения:

1) $l = 2$,

2) $p = 1$ или $p = l(l+1)/2 - 1$, $l \geq 2$,

3) $p = 0$ или $p = l(l+1)/2$, $l \geq 2$,

4) $l = 3$, $p = 2$ или $p = 4$.

Для вещественных поверхностей $F^l \subset \mathbf{E}^n$ точечной коразмерности p в работе [1] доказано, что аффинная классификация точек поверхности при $p = l(l+1)/2 - q$ сводится к классификации при $p = q$. Дословно повторяя рассуждения можно показать, что это верно и для комплексных поверхностей $F^l \subset \mathbf{C}^n$ комплексной точечной коразмерности p.

Таким образом, получаем, что точки поверхности можно разбить на конечное число классов аффинной эквивалентности в случаях 1) – 4), что и завершает доказательство теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2

Имеем двумерную комплексную поверхность $F^2 \subset \mathbf{C}^n$. Комплексная точечная коразмерность $0 \leq p \leq l(l+1)/2$, $l = 2$, следовательно, $0 \leq p \leq 3$.

При $p = 0$ все точки аффинно эквивалентны. Получаем один аффинный класс – точки уплощения. Канонический вид соприкасающегося параболоида $z^3 = 0$.

При $p = 1$ имеем $F^2 \subset \mathbf{C}^3$. Получается два аффинных класса. Соприкасающийся параболоид приводится к одному из следующих канонических видов:

а) $z^3 = (z^1)^2 + (z^2)^2$,

б) $z^3 = (z^1)^2$.

При $p = 2$ имеем $F^2 \subset \mathbf{C}^4$. Вектор вторых квадратичных форм $H = (A^1, A^2)$.

Оказывается, что элементарные делители пучка вторых квадратичных форм $A^1 - \lambda A^2$ полностью определяют аффинный класс точки в данном случае. Ход рассуждений аналогичен доказательству теоремы 5.

Пусть λ_1, λ_2 – корни уравнения $det(A^1 - \lambda A^2) = 0$. Тогда в зависимости от элементарных делителей получаем следующие канонические виды соприкасающихся параболоидов:

1) $\lambda - \lambda_1,\ \lambda - \lambda_2,\ \ \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \ \lambda_1, \lambda_2 \in C$

$$(z^3) = (z^1)^2,\ (z^4) = (z^2)^2,$$

2) $(\lambda - \lambda_1)^2,\ \ \lambda_1 \in C$

$$(z^3) = (z^1)^2,\ (z^4) = 2z^1 z^2.$$

Таким образом, получаем два аффинных класса.

При $p = 3$ (комплексная точечная коразмерность максимальна) вектор вторых квадратичных форм $H = (A^1, A^2, A^3)$. Базис пространства вторых квадратичых форм будет следующим:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение соприкасающегося параболоида имеет вид $z^{\mu+2} = A^{\mu}(z, z)$, где $z = (z^1, z^2)$, $\mu = 1, 2, 3$. Следовательно, получаем один аффинный класс:

$$z^3 = (z^1)^2, \;\; z^4 = (z^2)^2, \;\; z^5 = 2z^1 z^2.$$

5. Доказательство теоремы 3

При $p = 1$ имеем $F^l \subset \mathbf{C}^{l+1}$ – комплексная гиперповерхность. Вектор вторых квадратичных форм $H = (A^1)$. Значит, $\mathrm{H} = L$ – пространство симметрических $l \times l$ матриц. Группа $GL(p, \mathbf{C})$ является мультипликативной группой $C \backslash \{0\}$, поэтому пространство аффинных классов есть $L/GL(l, \mathbf{C})$. Матрицу второй квадратичной формы поверхности F^l в точке q можно привести к диагональному виду, на главной диагонали будут находиться собственные числа. Количество аффинных классов будет определяться числом ненулевых собственных чисел. Следовательно, получаем l аффинных классов. Канонический вид соприкасающихся параболоидов будет следующим:

$$z^{k+1} = (z^1)^2 + (z^2)^2 + \ldots + (z^k)^2, \qquad k = 1, \ldots, l.$$

6. Доказательство теоремы 4

При $p = l(l+1)/2$ уже $\mathrm{H}\ /GL(p, \mathbf{C})$ состоит из одного элемента. Получаем один аффинный класс. Выбирая базис $A^1, A^2, \ldots, A^p$ пространства вторых квадратичных форм, согласно (2) соприкасающийся параболоид приводится к такому каноническому виду:

$z^{l+1} = (z^1)^2, \;\; z^{l+2} = 2z^1 z^2, \;\; z^{l+3} = 2z^1 z^3, \ldots,$

$z^{2l} = 2z^1 z^l, \;\; z^{2l+1} = (z^2)^2, \ldots, \;\; z^{l+p} = (z^l)^2.$

При $p = 0$ все точки аффинно эквивалентны.

7. Доказательство теоремы 5

Пусть $F^3 \subset \mathbf{C}^5$ неособая комплексность поверхность. Тогда вектор вторых квадратичных форм $H = (A^1, A^2)$. Условимся обозначать $A = A^1$, $B = A^2$ и рассмотрим пучок $A - \lambda B$.

Лемма 2. [4] *Если A и B – симметрические комплексные $l \times l$ матрицы, причем B невырожденная, то преобразованием $U \in GL(l, \mathbf{C})$ их можно одновременно привести к виду*

$$U^*AU = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}, \quad U^*BU = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix},$$

где k – число элементарных делителей λ-матрицы $A - \lambda B$. Каждому элементарному делителю $(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$ соответствуют блоки

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_i l_i \\ \cdot & & & \cdot & l_i \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \lambda_i l_i & l_i & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot & l_i \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \\ l_i & & & 0 \end{pmatrix}$$

размеров $r_i \times r_i$, $l_i = \pm 1$.

Лемма 3. [3] *Два пучка симметрических комплексных $l \times l$ матриц $A - \lambda B$ и $A' - \lambda B'$ эквивалентны относительно преобразований $U \in GL(l, C)$ (т.е. $U^*AU = A'$ и $U^*BU = B'$) тогда и только тогда, когда элементарные делители λ-матриц совпадают.*

Лемма 3 в применении к нашему случаю даёт полную систему инвариантов пространства $\mathbf{H}$ относительно группы $GL(3, C)$, т. е. полностью описывает $\mathbf{H}/GL(3, C)$, но так как аффинные классы являются элементами фактор-пространства $\mathbf{H}/(GL(3, \mathbf{C}) \times GL(2, \mathbf{C}))$, то следует дополнительно профакторизовать $\mathbf{H}/GL(3, \mathbf{C})$ по действию группы $GL(2, \mathbf{C})$, описываемому формулой (3).

При этом условие леммы 3 заменится более слабым, а именно: должны совпадать лишь степени и числа элементарных делителей.

Так как из аффинной эквивалентности точек следует совпадение степеней и чисел элементарных делителей, то доказательство теоремы 5 будем вести только в сторону достаточности.

Пучок $A - \lambda B$ называется невырожденным, если $det(A - \lambda B)$ не равен тождественно нулю. Для невырожденного пучка возможны только такие наборы элементарных делителей:

1) $\lambda - \lambda_1,\ \ \lambda - \lambda_2,\ \ \lambda - \lambda_3,\ \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3,$
2) $\lambda - \lambda_1,\ \ \lambda - \lambda_1,\ \ \lambda - \lambda_3,\ \lambda_1 \neq \lambda_3,$
3) $\lambda - \lambda_1,\ \ \lambda - \lambda_1,\ \ \lambda - \lambda_1,$
4) $(\lambda - \lambda_1)^2,\ \lambda - \lambda_3,\ \ \lambda_1 \neq \lambda_3,$
5) $(\lambda - \lambda_1)^2,\ \lambda - \lambda_1,$
6) $(\lambda - \lambda_1)^3,$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C}$.

Проверим справедливость теоремы в случаях 1 и 4, остальные проверяются аналогично.

1) В соответствии с леммой 2 пучок $A - \lambda B$ приводится преобразованиями из $GL(3, \mathbf{C})$ в $T_q F^3$ к виду

$$A = \begin{pmatrix} l_1\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3\lambda_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}, \qquad l_i = \pm 1.$$

Преобразованиями

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} l_3/(\lambda_3 - \lambda_1) & 0 \\ 0 & l_3/(\lambda_3 - \lambda_2) \end{pmatrix}$$

в нормальном пространстве матрицы A и B приводятся к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (l_2(\lambda_2 - \lambda_1))/(l_3(\lambda_3 - \lambda_1)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} (l_1(\lambda_1 - \lambda_2))/(l_3(\lambda_3 - \lambda_2)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В касательном пространстве подействуем преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$l_1(\lambda_1 - \lambda_2)/l_3(\lambda_3 - \lambda_2)) = c''b^2, \, l_2(\lambda_2 - \lambda_1)/l_3(\lambda_3 - \lambda_1)) = c'a^2.$$

Получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} l'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В зависимости от знаков l', l'' имеются 4 варианта. Покажем, что все они описывают один и тот же аффинный класс.

Действительно, пусть $l' = 1$, $l'' = -1$. Тогда, действуя в касательном пространстве преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а в нормальном – преобразованием

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

сведем этот вариант к $l' = l'' = 1$.

Аналогично действуем в случае $l' = -1, l'' = 1$ и сводим этот вариант к $l' = l'' = 1$.

Если $l' = l'' = -1$, то действуя в касательном пространстве преобразованием

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

сведем этот вариант к $l' = l'' = 1$.

Таким образом, получаем один аффинный класс. Канонический вид пучка вторых квадратичных форм

$$z^4 = (z^1)^2 + (z^3)^2, \;\; z^5 = (z^2)^2 + (z^3)^2.$$

4) В соответствии с леммой 2 пучок приводится к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 l_1 & 0 \\ \lambda_1 l_1 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 l_3 k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}, \quad l_i = \pm 1.$$

Последовательно действуя в нормальном пространстве аффинными преобразованиями

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/(\lambda_3 - \lambda_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

приводим матрицы A и B к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1/(\lambda_3 - \lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}.$$

Преобразованием в касательном пространстве

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_3 - \lambda_1)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приведем матрицы A и B к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $l_1 = 1,\ l_3 = -1$, тогда, действуя преобразованием в касательном пространстве

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix},$$

сводим к случаю $l_1 = l_3 = 1$. Аналогично можно показать, что случаи $l_1 = l_3 = \pm 1,\ l_1 = l_3 = \pm 1$ эквивалентны.

Таким образом, имеем один аффинный класс. Канонический вид пучка вторых квадратичных форм

$$z^4 = (z^2)^2 + (z^3)^2 \quad z^5 = 2z^1 z^2 + (z^3)^2.$$

Если пучок $A - \lambda B$ вырожденный, т. е. $det(A - \lambda B) \equiv 0$, то естественно потребовать равенства нулю внешнего нуль-индекса $\mu(q)$ комплексной поверхности F^3 в точке q; в противном случае классификация сводится к аффинным типам точек двумерных поверхностей. Аналогично [1] в рассматриваемом случае получаем, что канонический вид пучка вторых квадратичных форм

$$z^4 = 2z^2 z^3, \quad z^5 = 2z^1 z^3.$$

Таким образом, теоремы 1 – 5 полностью доказаны.

Выражаю искреннюю благодарность А.А. Борисенко за постановку задачи и руководство работой и А.Л. Ямпольскому за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисенко А.А. Аффинная классификация точек многомерных комплексных поверхностей. // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31,3. – С. 19-29.

2. Борисенко А.А. О поверхностях неположительной внешней кривизны. // Мат. сб. – 1981. – Т. 114(156),3. – С. 339-354.

3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, – 1984. – 318 с.

4. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. – М.: Физматгиз, – 1961. – 464 с.

5. Шефель Г.С. Группы преобразований евклидова пространства. // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 26,3. – С. 197-215.

6. Шефель С.З. Поверхности в евклидовом пространстве. // Математический анализ и смежные вопросы математики. – Новосибирск: Наука, – 1978. – С. 297-318.