

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Я. Л. Геронимус

Введение

Пусть многочлены $\{\varphi_n(z)\}$ ортонормальны относительно некоторого обложения на единичной окружности или на конечном отрезке вещественной оси; ищутся условия, достаточные для существования предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left| \varphi_k(z) \right|^2 \right\}, \quad (I)$$

где z — на множестве, на котором многочлены ортонормальны.

Для ортогональности на конечном отрезке вещественной оси задача была впервые рассмотрена Г. Сегё [21], затем Н. И. Ахиезером [1], П. Эр-дешем и П. Тураном [16], а в более общем случае — автором ([4, 6, 7]; [13], стр. 445—450, 485—486). В случае ортогональности на единичной окружности задача была рассмотрена У. Гренандером и М. Розенблат-том [18] и в более общем случае автором ([8, § 5.6]).

В настоящей работе мы получили условия, достаточные для существования (I) и более общие, чем те, которые были получены во всех указанных работах.

§ 1

Рассмотрим сперва некоторые известные результаты, относящиеся к тригонометрической проблеме моментов и к многочленам, ортогональным на единичной окружности $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

1. Если задана последовательность комплексных чисел $\{c_k\}_0^n$, для которой определители Тёплица $\{D_k\}_0^n$ удовлетворяют условиям

$$D_k = |c_{i-j}|_0^k > 0, \quad c_{-k} = \bar{c}_k, \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad (1.1)$$

то по этим числам можно построить систему многочленов

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \frac{1}{\sqrt{D_0}}, \quad \varphi_k(z) = \frac{1}{\sqrt{D_k D_{k-1}}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_k \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-k+1} & c_{-k+2} & \dots & c_{-1} \\ 1 & z & \dots & z^k \end{vmatrix} = \\ &= \alpha_k z^k + \dots, \quad \alpha_k > 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.2)$$

ортонормальных на единичной окружности

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(e^{i\theta}) \overline{\varphi_s(e^{i\theta})} d\sigma_n(\theta) = \delta_{ks}, \quad (k, s = 0, 1, \dots, n); \quad (1.3)$$

неубывающая на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция $\sigma_n(\theta)$ является одним из решений так называемой укороченной проблемы моментов

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\sigma_n(\theta) = c_k, \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (1.4)$$

Имеет место формула Кристоффеля—Дарбу

$$K_m(z, z_0) = \sum_{k=0}^m \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(z_0)} = \frac{\varphi_m^*(z) \overline{\varphi_m^*(z_0)} - z \overline{z_0} \varphi_m(z) \overline{\varphi_m(z_0)}}{1 - z \overline{z_0}},$$

$$\varphi_m^*(z) = z^m \overline{\varphi_m\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad (m = 0, 1, \dots, n) \quad (1.5)$$

([13], гл. XI; [5], §§ 2, 8, 10).

II. Вместо моментов $\{c_k\}_0^n$, удовлетворяющих условию (1.1), можно задать параметры $\{a_k\}_0^{n-1}$, подчиненные условиям

$$|a_k| < 1, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1); \quad (1.6)$$

параметры связаны с моментами и с определителями Тёплица соотношениями

$$\left. \begin{aligned} (-1)^k a_k &= \frac{|c_{i-j+1}|_0^k}{|c_{i-j}|_0^k}, \\ \frac{1}{a_{k+1}^2} &= \frac{D_{k+1}}{D_k} = c_0 \prod_{v=0}^k (1 - |a_v|^2). \end{aligned} \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a_{k+1}^2} &= \frac{D_{k+1}}{D_k} = c_0 \prod_{v=0}^k (1 - |a_v|^2). \end{aligned} \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.8)$$

(из 1.8) вытекает эквивалентность условий (1.1) и (1.6).

По параметрам $\{a_k\}_0^{n-1}$ можно построить систему многочленов

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{k+1}(z) &= z\Phi_k(z) - \overline{a_k} \Phi_k^*(z) \\ \Phi_{k+1}^*(z) &= \Phi_k^*(z) - a_k z\Phi_k(z) \end{aligned} \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1); \quad (1.9)$$

$$\left\{ \Phi_k(z) = \frac{\varphi_k(z)}{a_k} \right\}_0^n. \quad (1.9')$$

Зная c_0 , можно найти и старшие коэффициенты $\{a_k\}_0^n$. Все корни многочленов (1.9) лежат при условиях (1.6) в области $|z| < 1$ ([5], §§ 3, 4, 9).

III. Укороченная тригонометрическая проблема моментов (1.4) имеет бесчисленное множество решений — в частности, решений в виде ступенчатых функций с $n+1$ точками роста. Каждое из таких решений полностью определяется заданием одной точки роста (например, $\theta_0^{(n)}$) — все остальные точки роста $\{\theta_k^{(n)}\}_1^n$ и соответствующие массы $\{\mu_k^{(n)}\}_0^n > 0$ найдутся из $2n+1$ уравнений (1.4)

$$\sum_{s=0}^n \mu_s^{(n)} e^{-ik\theta_s^{(n)}} = c_k, \quad \mu_s^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sigma_n(\theta_s^{(n)} + 0) - \sigma_n(\theta_s^{(n)} - 0) \right\}, \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (1.10)$$

([2], гл. I, § 2; [5], §§ 10—12).

IV. Если по заданным параметрам $\{a_k\}_0^{n-1}$, удовлетворяющим условиям (1.6), построить многочлены $\{\Phi_k(z)\}_0^n$, а затем положить $|a_n|=1$ и построить по (1.9) многочлен

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \bar{a}_n \Phi_n^*(z) \quad (1.11)$$

степени $n+1$, то все его корни простые и лежат на окружности $|z|=1$; все массы соответствующего обложения $d\tau_n(\theta)$ можно найти по формуле

$$\mu_s^{(n)} = \frac{c_0}{2} e^{-i\theta_s^{(n)}} \frac{\Psi_{n+1}(e^{i\theta_s^{(n)}})}{\Phi_{n+1}'(e^{i\theta_s^{(n)}})}, \quad (s=0, 1, \dots, n), \quad (1.12)$$

где многочлены второго рода $\{\Psi_k(z)\}_0^{n+1}$ построены по формуле, аналогичной (1.9), но с параметрами $\{-a_k\}_0^n$ ([5], §§ 9—10); [19]).

V. Если задать точку $z_0 = e^{i\theta_0}$ и положить в (1.5) $m=n$, то многочлен

$$\frac{K_n(z, z_0)(z - z_0)}{\alpha_n^2 \Phi_n(z_0)} = z\Phi_n(z) - \frac{z_0 \overline{\Phi_n^*(z_0)}}{\Phi_n(z_0)} \Phi_n^*(z) = \Phi_{n+1}(z, z_0) \quad (1.13)$$

можно рассматривать по (1.11) как многочлен $\Phi_{n+1}(z)$ с заданным корнем z_0 на окружности $|z|=1$, причем параметр a_n таков:

$$a_n = \frac{\Phi_n^*(z_0)}{\Phi_n(z_0)}, \quad |a_n|=1. \quad (1.14)$$

Мы получаем, таким образом, решение $\sigma_n(\theta, \theta_0)$ укороченной проблемы моментов в виде ступенчатой функции с заданной точкой роста $\theta_0 = \theta_0^{(n)}$; соответствующая этой точке масса такова:

$$\mu_0^{(n)} = \frac{1}{K_n(z_0, z_0)}, \quad (1.15)$$

ибо из очевидного равенства

$$\frac{1}{K_n(z_0, z_0)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{K_n(z, z_0)}{K_n(z_0, z_0)} \right|^2 d\tau_n(\theta)$$

получим, полагая $\sigma_n(\theta) = \sigma_n(\theta, \theta_0)$,

$$\frac{1}{K_n(z_0, z_0)} = \frac{1}{2\pi} \{\sigma_n(\theta_0 + 0, \theta_0) - \sigma_n(\theta_0 - 0, \theta_0) = \mu_0^{(n)}\}. \quad (1.16)$$

([5], §§ 10, 20]; [2, § 3]; [3]).

§ 2

После этих алгебраических свойств рассмотрим некоторые предельные соотношения.

VI. Каждое из условий

$$\{D_k\}_0^\infty > 0, \quad \{|a_k|\}_0^\infty < 1, \quad (2.1)$$

наложенных на моменты или на параметры, достаточно для того, чтобы

функция $\sigma(\theta)$, являющаяся решением тригонометрической проблемы моментов

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\sigma(\theta) = c_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

имела бесчисленное множество точек роста и не убывала на отрезке $[-\pi, \pi]$; она в существенном однозначно определяется своими моментами или параметрами. Если рассмотреть бесконечную последовательность ступенчатых функций $\{\sigma_n(\theta, \theta_0)\}_1^\infty$, имеющих точку θ_0 одной из своих точек роста, то, применяя теоремы Хелли, находим, что эта последовательность сходится в основном к функции $\sigma(\theta)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\theta, \theta_0) = \sigma(\theta). \quad (2.3)$$

([2, гл. 2, § 1]; [5, §§ 12, 13]:

VII. Пусть E бесконечное замкнутое множество точек единичной окружности, причем дополнительное к нему множество F связно и регулярно, т. е. для него существует функция Грина $g(z, \infty)$, для которой в окрестности точки $z = \infty$ имеем

$$g(z, \infty) = \ln |z| + \gamma + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad (2.4)$$

где γ — константа Робена, а $d(E) = e^{-\gamma}$ трансфинитный диаметр (емкость) множества E . Функция $w = \varphi(z) = \exp\{g(z, \infty) + ih(z, \infty)\}$, где функция $h(z, \infty)$ сопряжена с функцией $g(z, \infty)$, отображает область F на область $|\varphi| > 1^*$.

Если $T_n(z) = z^n + \dots$ многочлен Чебышева, наименее уклоняющийся от нуля на E , и если

$$\mu_n = \text{Max} |T_n(z)|, \quad z \in E, \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

то существует предел ([17]; [9], гл. VII)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{\frac{1}{n}} = d(E). \quad (2.6)$$

VIII. Пусть $e \subset [-\pi, \pi]$ — замкнутое множество точек роста функции $\sigma(\theta)$; пусть на множестве $e_1 \subset e$ существует производная $\sigma'(\theta) > 0$ и пусть $e_2 \subset e_1$ — множество точек Лебега характеристической функции множества e_1 ; при помощи соотношения $z = e^{i\theta}$ получим соответствующие множества $E_2 \subset E_1 \subset E$ на единичной окружности.

Если $d(E_2) = d(E) > 0$, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{\frac{1}{n}} = d(E), \quad M_n = \text{Max} |\Phi_n(z)|, \quad z \in E, \quad (n=1, 2, \dots); \quad (2.7)$$

([10], § 2). Эта теорема П. П. Коровкина является обобщением результата А. Эдреи [15] и теоремы 5.1 нашей работы [6], где $E = E^{(1)} + E^{(2)}$, причем $E^{(1)}$ — сумма конечного числа дуг единичной окружности, а $E^{(2)}$ — изолированное счетное множество; при этом $\sigma'(\theta) > 0$ почти всюду на множестве $e^{(1)} \subset e$, соответствующем множеству $E^{(1)}$.

Теорема 2.1. Пусть $\{P_n(z) = z^n + \dots\}_n^\infty$ произвольные многочлены степени n , не имеющие корней в области $|z| > 1$, и пусть суще-

* Функция $h(z, \infty)$ определена с точностью до добавочной константы.

ствует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{\frac{1}{n}} = d(E), \quad m_n = \text{Max} |P_n(z)|, \quad z \in E, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.8)$$

где E — множество, рассмотренное в VII; тогда в области $|z| > R > 1$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(z)|^{\frac{1}{n}} = d(E) |\varphi(z)|. \quad (2.9)$$

Действительно, функция

$$\lambda_n(z) = \frac{F_n(z)}{m_n \{\varphi(z)\}^n}$$

регулярна в области F , и на границе области имеем $|\lambda_n(z)| \leq 1$; поэтому это же неравенство справедливо во всей области F .

Рассмотрим теперь семейство функций

$$\delta_n(z) = \frac{1}{n} \ln |\lambda_n(z)|, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad |z| > R > 1. \quad (2.10)$$

Благодаря условию, наложенному на корни многочленов $\{P_n(z)\}_1^\infty$, все эти функции гармоничны в области $|z| > R$, удовлетворяют на ее границе $|z| = R$ условию $\{\delta_n(z)\}_1^\infty \leq 0$, причем, как легко видеть,

$$\delta_n(\infty) = \ln \frac{a(E)}{m_n^{\frac{1}{n}}}.$$

Так как семейство (2.10) нормально в области $|z| > R$, то мы можем выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\delta_{n_i}(z)\}$, для которой имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_{n_i}(z) = \delta(z), \quad |z| > R; \quad (2.11)$$

на границе области мы имеем $\delta(z) \leq 0$. Кроме того, $\delta(\infty) = 0$ по условию (2.8); поэтому любая предельная функция $\delta(z)$ тождественно равна нулю в области $|z| > R$, т. е. мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ \frac{|P_n(z)|}{|\varphi(z)|^n m_n} \right\}^{\frac{1}{n}} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(z)|^{\frac{1}{n}} &= |\varphi(z)| \lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{\frac{1}{n}}, \end{aligned} \right\} |z| > R \quad (2.12)$$

откуда вытекает (2.9)*.

Теорема 2.2. Из предыдущей теоремы при условии VIII вытекает существование пределов

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi_n(z)|^{\frac{1}{n}} &= d(E) |\varphi(z)|, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |\Phi_{n+1}(z, z_0)|^{\frac{1}{n+1}} &= d(E) |\varphi(z)|. \end{aligned} \right\} |z| > R \quad (2.13)$$

* Наше доказательство является небольшим видоизменением доказательства более общей теоремы Дж. Уолша ([14, §§ 7.3, 7.4]), от которой наша теорема отличается дополнительным ограничением, наложенным на расположение корней многочленов $\{P_n(z)\}_1^\infty$.

Существование первого из них вытекает из VIII; для доказательства существования второго напомним по (1.13), (1.14)

$$|\Phi_{n+1}(z, z_0)| = |z\Phi_n(z) - \bar{a}_n \Phi_n^*(z)| \leq 2|\Phi_n(z)|, \quad |z|=1;$$

поэтому, полагая $P_{n+1}(z) = \Phi_{n+1}(z, z_0)$, получим по (2.7)

$$p_{n+1} \leq m_{n+1} \leq 2M_n, \quad m_{n+1} = \max |\Phi_{n+1}(z, z_0)|, \quad z \in E,$$

откуда по (2.6), (2.7) вытекает (2.8), а, следовательно, и справедливость второго из соотношений (2.13).

§ 3

IX. При условиях VII распределением Робена $\mu(\theta)$ называется такое неотрицательное распределение единичной массы на замкнутом множестве E , при котором логарифмический потенциал обложения $d\mu(\theta)$ сохраняет на E постоянное значение, равное константе Робена γ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|z - e^{i\theta}|} d\mu(\theta) = \gamma, \quad z \in E; \quad (3.1)$$

значение того же потенциала в области F таково:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|z - e^{i\theta}|} d\mu(\theta) = \gamma - g(z; \infty), \quad z \in F. \quad (3.2)$$

Распределение Робена можно найти по формуле

$$\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi} h(e^{i\theta}; \infty) = \frac{1}{2\pi} h_0(\theta), \quad (3.3)$$

где $h(z; \infty)$ гармоническая функция, сопряженная с функцией Грина $g(z; \infty)$ области F ([11], гл. V, § 3; [12], гл. V, § 5).

X. Пусть $\psi_n(\theta, \theta_0)$ ступенчатая неубывающая функция, имеющая положительный скачок $\frac{1}{n+1}$ в каждой точке $\{\theta_k^{(n)}\}_0^n$, где $\{z_k^{(n)} = e^{i\theta_k^{(n)}}\}_0^n$ — корни многочлена $\Phi_{n+1}(z, z_0)$ (1.13). Рассмотрим бесконечную последовательность этих функций распределения $\{\psi_n(\theta, \theta_0)\}_1^\infty$, причем пусть $\{\theta_0^{(n)}\}_{n=1}^\infty = \theta_0$, т. е. θ_0 является точкой роста всех этих функций. По первой теореме Хелли существует подпоследовательность $\{\psi_{n_i}(\theta, \theta_0)\}$, сходящаяся в основном к некоторой предельной функции распределения

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \psi_{n_i}(\theta, \theta_0) = \psi(\theta, \theta_0). \quad (3.4)$$

При $|z| > 1$ мы имеем

$$\ln |\Phi_{n+1}(z, z_0)|^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \ln |z - e^{i\theta_k^{(n)}}| = \int_{-\pi}^{\pi} \ln |z - e^{i\theta}| d\psi_n(\theta, \theta_0);$$

так как функция $\ln |z - e^{i\theta}|$ при этом условии непрерывна, то по второй теореме Хелли имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |z - e^{i\theta}| d\psi_{n_i}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln |z - e^{i\theta}| d\psi(\theta, \theta_0), \quad (3.5)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\Phi_{n_i+1}(z)|^{\frac{1}{n_i+1}} = \exp \left\{ - \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|z - e^{i\theta}|} d\psi(\theta, \theta_0) \right\}.$$

Теорема 3.1. При условиях VIII сходится вся последовательность функций распределения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\theta, \theta_0) = \psi(\theta, \theta_0) = \mu(\theta) \quad (3.6)$$

к предельной функции, совпадающей с функцией распределения Робена для множества E .

Действительно, по (2.13) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} |\Phi_{n_i+1}(z)|^{\frac{1}{n_i+1}} &= d(E) |\varphi(z)| = d(E) |\exp \{g(z; \infty) + ih(z; \infty)\}| = \\ &= d(E) \exp \{g(z; \infty)\} = \exp \{-\gamma + g(z; \infty)\}, \quad |z| > 1; \end{aligned}$$

сопоставляя с (3.5), получим равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|z - e^{i\theta}|} d\psi(\theta, \theta_0) = \gamma - g(z; \infty), \quad |z| > 1,$$

которое по (3.2) характеризует функцию распределения Робена $\mu(\theta)$.

Теорема 3.2. При условиях VIII справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n(z_0, z_0)}{n+1} = \frac{h'_0(\theta_0)}{\sigma'(\theta_0)}, \quad z_0 = e^{i\theta_0}, \quad (3.7)$$

в каждой точке θ_0 , в которой существуют $\sigma'(\theta_0) > 0$, $h'_0(\theta_0) > 0$.

Действительно, выберем достаточно малую величину $\varepsilon_n > 0$ таким образом, чтобы обе функции ограниченной вариации $\sigma(\theta)$ и $h_0(\theta)$ были непрерывны в точках $\theta_0 \pm \varepsilon_n$ и чтобы между точками $e^{i(\theta_0 + \varepsilon_n)}$ и $e^{i(\theta_0 - \varepsilon_n)}$ лежал лишь один корень многочлена $\Phi_{n+1}(z, z_0)$.

По (1.16) и (3.6) имеем

$$\sigma_n(\theta_0 + \varepsilon_n, \theta_0) - \sigma_n(\theta_0 - \varepsilon_n, \theta_0) = \frac{2\pi}{K_n(z_0, z_0)},$$

$$\psi_n(\theta_0 + \varepsilon_n, \theta_0) - \psi_n(\theta_0 - \varepsilon_n, \theta_0) = \frac{1}{n+1}, \quad z_0 = e^{i\theta_0},$$

откуда находим

$$\frac{K_{n+1}(z_0, z_0)}{n+1} = 2\pi \frac{\psi_n(\theta_0 + \varepsilon_n, \theta_0) - \psi_n(\theta_0 - \varepsilon_n, \theta_0)}{\sigma_n(\theta_0 + \varepsilon_n, \theta_0) - \sigma_n(\theta_0 - \varepsilon_n, \theta_0)}.$$

Если n достаточно велико, то по (2.3), (3.6) числитель и знаменатель правой части сколь угодно мало отличаются от соответствующих значений для предельных функций и мы имеем

$$\frac{K_{n+1}(z_0, z_0)}{n+1} = 2\pi \cdot \frac{\mu(\theta_0 + \varepsilon_n) - \mu(\theta_0 - \varepsilon_n)}{\sigma(\theta_0 + \varepsilon_n) - \sigma(\theta_0 - \varepsilon_n)} + o(1);$$

деля числитель и знаменатель правой части на $2\varepsilon_n$ и пользуясь существованием производных, находим

$$\frac{K_n(z_0, z_0)}{n+1} = 2\pi \cdot \frac{\mu'(\theta_0)}{\sigma'(\theta_0)} + o(1),$$

откуда по (3.3) следует (3.7).

Примечание 3.1. Теорема, аналогичная теореме 3.2, справедлива и для многочленов, ортонормальных на конечном отрезке вещественной оси—в этом случае роль многочленов (1.13) играют квази-ортонормальные многочлены порядка $n+1$ с одним фиксированным корнем ([20, гл. II]).

§ 4

Рассмотрим несколько примеров.

1) Пусть $\ln \sigma'(\theta) \in L_1[-\pi, \pi]$; в таком случае $\sigma'(\theta) > 0$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и мы имеем

$$\begin{aligned} d(E) = 1, \quad \varphi(z) = z, \quad G(z; \infty) = g(z; \infty) + ih(z; \infty) = \ln z, \\ h(z; \infty) = \arg z, \quad h(e^{i\theta}; \infty) = h_0(\theta) = \theta; \end{aligned} \quad (4.1)$$

следовательно, во всех точках множества $e_1 \subset [-\pi, \pi]$ имеем предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n(z_0, z_0)}{n+1} = \frac{1}{\sigma'(\theta_0)}, \quad z_0 = e^{i\theta_0}. \quad (4.2)$$

Тот же результат получим, если (при обозначениях VIII) $d(e_2) = 1$.

2) Рассмотрим многочлены Полачека, для которых

$$d\sigma(\theta) = p(\theta) d\theta, \quad p(\theta) = \left| \sin \theta \right| \frac{\exp \{ (2\theta - \pi) \nu(\theta) \}}{\operatorname{ch} \{ \pi \nu(\theta) \}}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (4.3)$$

$$\nu(\theta) = \frac{a \cos \theta + b}{2 \sin \theta},$$

где a, b вещественны и $a > |b|$. Хотя в этом случае $\ln \sigma'(\theta) \notin L_1$, тем не менее снова $\sigma'(\theta) > 0$ почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$ и справедливо (4.1), (4.2)*.

3) Пусть теперь E —дуга единичной окружности $[e^{i\alpha}, e^{i(2\pi-\alpha)}]$. Пользуясь преобразованием Жуковского-Чаплыгина**, имеем

$$z = w \cdot \frac{dw-1}{w-d}, \quad w = \varphi(z) = \frac{z+1+\Phi(z)}{2d}, \quad d = d(E) = \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (4.4)$$

причем выбрана та ветвь функции $\Phi(z) = \sqrt{(z - e^{i\alpha})(z - e^{-i\alpha})}$, для которой $\lim_{z \rightarrow \infty} \{\Phi(z):z\} = 1$. Мы имеем в этом случае

$$G(z; \infty) = g(z; \infty) + ih(z; \infty) = \ln \frac{z+1+\Phi(z)}{2d}; \quad (4.5)$$

* Пользуясь явным выражением многочленов Полачека [13, стр. 396, формула (5.1)], можно проверить в этом случае справедливость (4.2) непосредственным вычислением.

** См., например, [8, гл. VIII].

полагая $z = e^{i\theta}$, $w = e^{i\psi}$, имеем на дуге E

$$e^{i\psi} = e^{\frac{i\theta}{2} - \frac{\cos \frac{\theta}{2} \pm i \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = e^{i \left(\frac{\theta}{2} \pm \lambda \right)}, \quad (4.6)$$

$$\cos \lambda = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \leq \theta \leq 2\pi - \alpha, \quad 0 \leq \lambda \leq \pi.$$

([8, гл. VIII).

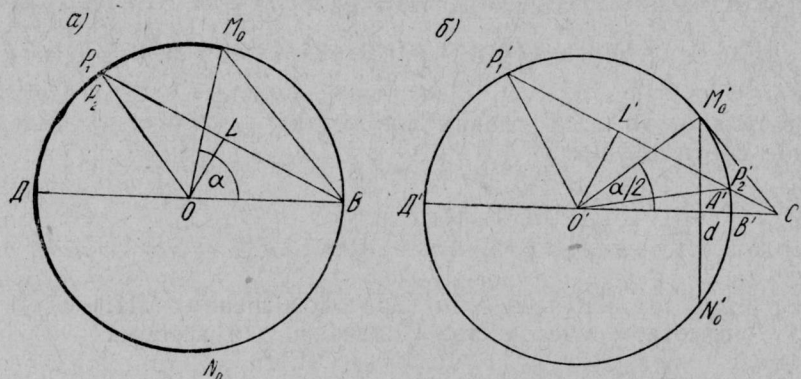


Рис. 1

На рис. 1 а изображена плоскость z , разрезанная вдоль дуги $E = \cup M_0 D N_0$, причем $\alpha = \angle B O M_0$; двигаясь в направлении $M_0 D N_0$, обозначим через P_1 , P_2 две совпадающие точки, лежащие соответственно на правом и на левом берегах разреза. На рис. 1 б изображена плоскость w , причем $O A' = d$, $O' C' = \frac{1}{d}$, $M'_0 C' \perp M'_0 O'$; все точки в этой плоскости обозначены теми же буквами, что и соответствующие им точки в плоскости z , но со штрихами. Точкам P_1 , P_2 плоскости z соответствуют две различные точки P'_1 , P'_2 плоскости w , которые можно получить, проводя $C' P'_2 P'_1 \parallel B P_1$. Величина λ такова:

$$\lambda = \angle L' O' P'_1 = \angle L' O' P'_2, \quad O' L' \perp P'_1 P'_2.$$

Если точка P_1 движется по правому берегу разреза, пробегая дугу $M_0 D N_0$, то соответствующая ей точка P'_1 пробегает дугу $M'_0 D' N'_0$; если же после этого точка P_2 будет пробегать дугу $N_0 D M_0$, двигаясь по левому берегу разреза, то при этом точка P'_2 будет пробегать дугу $N'_0 B' M'_0$. Таким образом, когда точка P' опишет, двигаясь в положительном направлении, всю окружность $|w| = 1$, то соответствующая точка P дважды опишет разрез E , двигаясь сперва в положительном направлении по правому берегу, а затем в отрицательном — по левому. Так как на окружности $|w| = 1$ имеем

$$w = e^{i\psi} = \exp \{ \varphi(e^{i\theta}) \} = \exp \{ i h_0(\theta) \} = \exp \left\{ i \left(\frac{\theta}{2} \pm \lambda \right) \right\}, \quad (4.7)$$

то легко найдем:

на правом берегу разреза:

$$\psi_1 = h_0^{(1)} = \frac{\theta_1}{2} + \lambda_1, \quad dh_0^{(1)} = \frac{1}{2} d\theta_1 + d\lambda_1; \quad (4.8)$$

на левом берегу разреза:

$$\psi_2 = h_0^{(2)} = \frac{\theta_2}{2} - \lambda_2, \quad dh_0^{(2)} = \frac{1}{2} d\theta_2 - d\lambda_2,$$

причем $\theta_1 = \theta_2$ и благодаря (4.6) $\lambda_1 = \lambda_2$.

Рассмотрим дугу

$$\left\{ \exp \left[\theta_1 - \frac{d\theta_1}{2} \right], \exp \left[\theta_1 + \frac{d\theta_1}{2} \right] \right\}, \quad d\theta_1 > 0 \quad (4.9)$$

на правом берегу разреза — на ней сосредоточена масса $dh_0^{(1)} = \frac{1}{2} d\theta_1 + d\lambda_1$; для этой же дуги на левом берегу имеем $d\theta_2 = -d\theta_1$, $d\lambda_2 = -d\lambda_1$, ибо теперь эта дуга должна пробегаться в отрицательном направлении. Рассматривая вместо двух дуг на обоих берегах одну дугу

$$\left\{ \exp \left[\theta - \frac{d\theta}{2} \right], \exp \left[\theta + \frac{d\theta}{2} \right] \right\}, \quad d\theta = d\theta_1 = -d\theta_2 > 0, \quad (4.10)$$

пробегаемую лишь один раз и притом в положительном направлении, мы видим, что на ней надо сосредоточить массу

$$dh_0(\theta) = dh_0^{(1)}(\theta) + dh_0^{(2)}(\theta) = \frac{d\theta_1 + d\theta_2}{2} + d\lambda_1 - d\lambda_2 = 2d\lambda,$$

$$d\lambda = d\lambda_1 = d \arccos \left(\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{2 \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta. \quad (4.11)$$

Таким образом, в этом случае функция распределения Робена $\mu(\theta)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ и плотность распределения такова:

$$\mu'(\theta) = \frac{1}{2\pi} h_0'(\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}; \quad (4.12)$$

(она переходит в (4.1) при $\alpha = 0$). Следовательно, по (3.7) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n(z_0, z_0)}{n+1} = \frac{\sin \frac{\theta_0}{2}}{\sigma'(\theta_0) \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}}, \quad \alpha < \theta_0 < 2\pi - \alpha, \quad (4.13)$$

при условии, что $\sigma'(\theta) > 0$ почти всюду на отрезке $[\alpha, 2\pi - \alpha]$, или при условии $d(e_2) = \cos \frac{\alpha}{2}$.

В том частном случае, когда $\sigma'(9) = \sqrt{\frac{\sin \frac{\theta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\theta - \alpha}{2}}}$, нам известны

явное выражение ортогональных многочленов ([8], формула (4.14')) и в справедливости формулы (4.13) можно убедиться непосредственным вычислением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Про теорему акад. С. Н. Бернштейна відносно квадратурної формули П. Чебишова. Журнал Ін-ту математики АН УРСР, № 3, 1937, 75—82.
2. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Статья 1. ГОНТИ УССР, Харьков, 1938.
3. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. Деякі зауваження про коефіцієнти квадратурних формул Gauss'овського типу. Труды Одесского державного університету. Математика. 11, 1938, 29—38.
4. Я. Л. Геронимус. О некоторых функциях распределения, связанных с системой полиномов. ДАН СССР, 44, № 9, 1944, 383—387.
5. Я. Л. Геронимус. Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения. «Записки научно-исслед. Ин-та матем. и мех. и Харьк. матем. о-ва», (4), 19, 1948, 35—120.
6. Я. Л. Геронимус. О некоторых асимптотических свойствах полиномов. «Матем. сб.», 23 (65), № 1, 1948, 77—88.
7. Я. Л. Геронимус. О некоторых квадратурных формулах. ДАН СССР, 45, 1949, 437—440.
8. Я. Л. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Физматгиз, М., 1958.
9. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. ГТТИ, М.—Л., 1952.
10. П. П. Коровкин. Емкость множества и полиномы, минимизирующие интеграл. «Уч. зап. Калининград. пед. ин-та», 5, 1958, 34—52.
11. Р. Невандинна. Однозначные аналитические функции. ГТТИ, М.—Л., 1941.
12. С. Стоилов. Теория функций комплексного переменного, т. 2, ИЛ, М., 1962.
13. Г. Сегё. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
14. Дж. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. ИЛ, М., 1961.
15. A. Edrei. Sur les determinants recurrents et les singularités d'une fonction, donnée par son développement de Taylor. Compos. Math. 7, 1939, 20—80.
16. P. Erdős and P. Turán. On interpolation. III. Annals of Math., 4, 1940, 510—553.
17. G. Faber. Über Tchebyscheffsche Polynome. Journ. reine und angew. Math., 150, 1919, 79—106.
18. U. Grenander and M. Rosenblatt. An extension of a theorem of G. Szegő and its application to the study of stochastic processes. Trans. Amer. Math. Soc., 76, № 1, 1954, 112—126.
19. J. Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. Journ. reine und angew. Math., 147, 1917, 205—232; 148, 1918, 122—145.
20. J. Shohat and J. Tamarkin. The problem of moments. N. Y., 1943.
21. G. Szegő. Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. Math. Zeitschr., 12, 1922, 61—94.

О РАЗЛОЖЕНИЯХ МНОГОМЕРНЫХ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ БЕЗ ГАУССОВОЙ КОМПОНЕНТЫ

И. В. Островский

В теории разложений одномерных вероятностных законов, современное состояние которой отражено в монографии [3], получено большое количество глубоких и разнообразных результатов. Что же касается разложений многомерных вероятностных законов, то о них, насколько мы можем судить, к настоящему времени получены лишь следующие две теоремы:

1) (Г. Крамер [9]). Если сумма двух независимых случайных векторов распределена по закону Гаусса, то и каждый из этих векторов распределен по закону Гаусса.

2) (Г. Тейчер [16]). Если сумма двух независимых случайных векторов распределена по закону Пуассона, то и каждый из этих векторов распределен по закону Пуассона*.

В этой статье изучаются два специальных класса многомерных безгранично делимых законов, не имеющих гауссовой компоненты, и относительно законов, входящих в эти классы, устанавливается, что они имеют лишь безгранично делимые компоненты. Наши основные результаты можно рассматривать как обобщение результатов работы Д. А. Райкова [7].

К исследованию этих специальных классов законов нас побудил следующий вопрос, поставленный Ю. В. Линником [3]: всякий ли безгранично делимый закон с континуальным пуассоновым спектром имеет неразложимые компоненты? Из наших результатов вытекает отрицательный ответ на этот вопрос.

§ 1. Обозначения. Формулировки результатов

Будем придерживаться следующих обозначений: $R^{(n)}$ — вещественное, $C^{(n)}$ — комплексное n -мерные евклидовы пространства; $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, ... — их векторы (точки); $\operatorname{Re} x = (\operatorname{Re} x_1, \dots, \operatorname{Re} x_n)$, $\operatorname{Im} x = (\operatorname{Im} x_1, \dots, \operatorname{Im} x_n)$;

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k; |x| = \sqrt{(x, x)}, \text{ если } x \in R^{(n)},$$

$$|x| = \sqrt{|\operatorname{Re} x|^2 + |\operatorname{Im} x|^2}, \text{ если } x \in C^{(n)}.$$

Если A и B — два множества в $R^{(n)}$, то через $A + B$ мы обозначаем множество $\{x: x = y + z, y \in A, z \in B\}$, причем если B состоит из

* Этот результат есть многомерный аналог известной теоремы Д. А. Райкова [6] о разложениях закона Пуассона.

единственной точки z , то, вместо $A + B$, пишем $A + z$. Для записи выражения $A_1 + A_2 + \dots + A_m$, где $A_1 = A_2 = \dots = A_m = A$, мы используем символ $(m)A$. Через $-A$ мы обозначаем множество $\{x: -x \in A\}$.

Множество $\bigcup_{m=1}^{\infty} (m)A$ будем обозначать через $M(A)$; это множество можно определять как совокупность всех векторов, представимых в виде линейных комбинаций с натуральными коэффициентами, составленных из векторов множества A .

Все множества из $R^{(n)}$, которые встречаются в дальнейшем, являются борелевскими, и это специально не оговаривается.

Будем обозначать через M_+ класс вполне конечных мер, определенных на классе борелевских множеств в $R^{(n)}$. Если $P \in M_+$ и $P(R^{(n)}) = 1$, то мере P будем называть законом распределения вероятностей (з. р.). Функцию множеств, представимую в виде $\mu_1 - \mu_2$, где $\mu_1, \mu_2 \in M_+$ будем называть зарядом. Будем говорить, что заряд μ сосредоточен во множестве A , если для любого E имеем $\mu(E) = \mu(E \cap A)$. Очевидно, что заряд μ сосредоточен в A в том и только в том случае, если из $E \cap A = \emptyset$ следует $\mu(E) = 0$.

Преобразованием Фурье заряда μ мы называем функцию $\varphi(t; \mu)$, определенную при всех $t \in R^{(n)}$ равенством*

$$\varphi(t; \mu) = \int e^{i(t, x)} d\mu.$$

Как известно, заряд однозначно определяется своим преобразованием Фурье. Преобразование Фурье от з. р. будем называть характеристической функцией (х. ф.) этого з. р.

Сверткой зарядов μ_1 и μ_2 мы называем заряд μ , определенный равенством**.

$$\mu(E) = \int \mu_1(E - x) d\mu_2$$

Свертку зарядов μ_1 и μ_2 будем обозначать через $\mu_1 * \mu_2$. Напомним, что операция свертки коммутативна и ассоциативна и соотношение $\mu = \mu_1 * \mu_2$ эквивалентно соотношению

$$\varphi(t; \mu) = \varphi(t; \mu_1) \varphi(t; \mu_2), \quad t \in R^{(n)}.$$

Для записи выражения $\mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_m$, где $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = \mu \in M$, будем и пользоваться обозначением μ^{m*} .

Если P , P_1 и P_2 суть з. р. и $P = P_1 * P_2$, то з. р. P будем называть композицией з. р. P_1 и P_2 , а з. р. P_1 и P_2 — компонентами з. р. P .

Обозначим через ε_c , $c \in R^{(n)}$, з. р., определяемый равенствами

$$\varepsilon_c(E) = 1, \text{ если } c \in E, \quad \varepsilon_c(E) = 0, \text{ если } c \notin E.$$

Всякий з. р. P , очевидно, имеет компоненты ε_c и $P_c = P(E + c)$. Эти компоненты называются несобственными. З. р. P , имеющий только несобственные компоненты, называется неразложимым.

Закон P называется безгранично делимым (б. д.), если для каждого $m = 2, 3, 4, \dots$ существует з. р. P_m такой, что $P = P_m^{m*}$. По тео-

* Здесь, как и в дальнейшем, мы понимаем интеграл в смысле Лебега-Стилтьеса и область интегрирования не указываем, если ею является все пространство $R^{(n)}$.

** Правая часть этого равенства имеет смысл, так как $\mu(E - x)$ при $\mu \in M$ является, как функция от x , измеримой по Борелю.

реме П. Леви ([13] стр. 220) з. р. P является б. д. законом в том и только том случае, когда его х. ф. $\varphi(t; P)$ допускает представление ($t \in R^{(n)}$)

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ i(b, t) - \sum_{j, k=1}^n \gamma_{jk} t_j t_k + \int \left(e^{i(t, x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + |x|^2} \right) d\nu_P \right\}, \quad (1.1)$$

где $b \in R^{(n)}$, $\sum_{j, k=1}^n \gamma_{jk} t_j t_k$ — неотрицательная квадратичная форма, ν_P — вполне σ -конечная мера на классе борелевских множеств в $R^{(n)}$, удовлетворяющая условию $\int |x|^2 (1 + |x|^2)^{-1} d\nu_P < \infty$. Б. д. закон P будем называть б. д. законом без гауссовой компоненты, если

$$\sum_{j, k=1}^n \gamma_{jk} t_j t_k \equiv 0.$$

Обозначим через I_0 класс б. д. законов, имеющих лишь б. д. компоненты*.

Теперь мы можем сформулировать основные результаты работы.

Теорема 1. Если P — б. д. закон без гауссовой компоненты, для которого мера ν_P сосредоточена в некотором ограниченном открытом выпуклом множестве A , обладающем свойством $A \cap (2)A = \emptyset$ то $P \in I_0$.

Эта теорема является обобщением следующей теоремы Д. А. Райкова [7]:

Если х. ф. одномерного б. д. закона P допускает представление

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ i\beta t + \sum_{j=1}^r \lambda_j (e^{ix_j t} - 1) \right\}, \quad \text{где } \beta \text{ — вещественно, } \lambda_j > 0 (j = 1, \dots, r), 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_r < 2x_1, \text{ то } P \in I_0.$$

Из теоремы 1 вытекает отрицательный ответ на сформулированный выше вопрос Ю. В. Линника, ибо, например, одномерный б. д.

закон с х. ф. $\exp \left\{ \int_2^3 (e^{itx} - 1) dx \right\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1

и, следовательно, не имеет неразложимых компонент, а его пуассонов спектр* составляет отрезок [2, 3].

Теорема 2. Если P — б. д. закон без гауссовой компоненты, для которого мера ν_P принадлежит M_+ и сосредоточена в некотором множестве A , лежащем в гипероктанте $\{x: x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ и обладающем свойством: любая конечная система векторов из A линейно независима в поле рациональных чисел, то $P \in I_0$.

Эта теорема обобщает другую теорему Д. А. Райкова [7]:

Если х. ф. одномерного б. д. закона P допускает представление

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ i\beta t + \sum_{j=1}^r \lambda_j (e^{ix_j t} - 1) \right\}, \quad \text{где } \beta \text{ — вещественно, } \lambda_j, x_j > 0 (j = 1, \dots, r), \text{ и числа } x_j \text{ линейно независимы в поле рациональных чисел, то } P \in I_0.$$

* Как было установлено А. Я. Хинчиным и Д. А. Райковым ([3], стр. 105) класс I_0 не совпадает с классом всех б. д. законов.

* Напомним, что пуассоновым спектром б. д. закона P называется наименьшее замкнутое множество в котором сосредоточена мера ν_P .

Отметим, что множество A , о котором идет речь в теореме 2, может иметь мощность континуума: это следует из установленного Д. А. Райковым и В. Рудиным (см. [1], стр. 209) факта существования совершенных множеств, любая конечная система векторов которых линейно независима в поле рациональных чисел.

Теоремы 1 и 2 мы выводим из следующей теоремы о разложениях б. д. законов без гауссовой компоненты:

Теорема 3. Пусть P — б. д. закон без гауссовой компоненты, для которого мера ν_P принадлежит M_+ , и сосредоточена в некотором ограниченном множестве A типа F_σ , лежащем в гипероктанте $(x: x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0)$, причем $0 = \{0, 0, \dots, 0\} \in A$. Если з. р. P_1 является компонентой з. р. P , то его х. ф. имеет вид

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ i(b, t) + \int (e^{i(t, x)} - 1) d\lambda \right\}, \quad (1.2)$$

где $b \in R^{(n)}$, λ — заряд, удовлетворяющий условиям:

- а) этот заряд сосредоточен во множестве $A_1 \cap M(A)$, где A_1 — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее множество A ,
- б) при $E \cap (2)M(A) = \emptyset$ имеем $\lambda(E) \geq 0$.

Теорема 3 обобщает следующий результат Д. А. Райкова [7]:

Пусть P — одномерный б. д. закон, х. ф. которого представима в виде

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ i\beta t + \sum_{j=1}^r \lambda_j (e^{ix_j t} - 1) \right\},$$

где β — вещественно, $\lambda_j, x_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, r$). Если з. р. P_1 является компонентой з. р. P , то его х. ф. имеет вид

$$\varphi(t; P_1) = \exp \left\{ i\beta' t + \sum_{s=1}^{r'} \lambda'_s (e^{ix'_s t} - 1) \right\},$$

где β' и λ'_s — вещественны, а числа x'_s являются линейными комбинациями чисел x_j с целыми неотрицательными коэффициентами и, кроме того, удовлетворяют неравенству $\max_s x'_s \leq \max_j x_j$.

В одномерном случае теоремы 1, 2 и 3 были приведены в нашей заметке [4]. В этом случае доказательство теоремы 3 опиралось на один результат Ю. В. Линника об общем виде компонент б. д. закона с ограниченным пуассоновым спектром ([3], стр. 191, лемма 6). Для рассмотрения многомерного случая потребовалось получить многомерный аналог результата Ю. В. Линника. Этот аналог представляет, как нам кажется, самостоятельный интерес.

Теорема 4. Пусть P — б. д. закон, для которого мера ν_P сосредоточена в ограниченном выпуклом множестве $D \subset R^{(n)}$. Обозначим через $H(x)$ опорную функцию* множества D . Если з. р. P_1 является компонентой з. р. P , то его х. ф. имеет вид

* Опорной функцией выпуклого множества $D \subset R^{(n)}$ называется функция $H(x)$, определенная на единичной сфере пространства $R^{(n)}$ равенством $H(x) = \sup_{y \in D} (x, y)$.

$$\varphi(t; P_1) = \exp \{f(t)\},$$

где $f(t)$ — целая функция от n комплексных переменных $t_1, \dots, t_n$ ($t = (t_1, \dots, t_n)$), допускающая оценку

$$|f(t)| \leq K(1 + |t|^3)(1 + \exp \left\{ H \left(\frac{|\operatorname{Im} t|}{|\operatorname{Im} t|} \right) |\operatorname{Im} t| \right\} \right), \quad t \in C^{(n)},$$

где K — не зависящая от t постоянная.

Отметим, что в теореме 4 не предполагается, что мера ν_P принадлежит M_+ и что з. р. P не имеет гауссовой компоненты.

§ 2. Доказательство теоремы 4

Если х. ф. $\varphi(t; P)$ n -мерного з. р. P аналитически продолжается до целой функции в $C^{(n)}$, то продолженную функцию будем обозначать снова через $\varphi(t; P)$ и будем говорить, что х. ф. $\varphi(t; P)$ — целая функция в $C^{(n)}$. Нам понадобятся некоторые свойства таких х. ф.; установим сейчас их наличие.

Лемма 1. Если х. ф. $\varphi(t; P)$ — целая функция в $C^{(n)}$, то при всех $t \in C^{(n)}$ справедливо равенство.

$$\varphi(t; P) = \int e^{i(t, x)} dP, \quad (2.1)$$

в котором интеграл сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве в $C^{(n)}$, и справедливо неравенство

$$|\varphi(t; P)| \leq \varphi(i \operatorname{Im} t, P). \quad (2.2)$$

Доказательство. Заметим сначала, что одномерный случай этой леммы хорошо известен и содержится в результатах Д. А. Райкова и П. Леви (см. напр. [3], стр. 60—61). При доказательстве леммы мы будем опираться на ее одномерный случай.

Положим $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$. Заметим, что если P — n -мерный з. р., то функции $\varphi(te_k; P)$ $k=1, \dots, n$ суть х. ф. одномерных з. р. $P^{(k)}$, определяемых равенствами $P^{(k)}(E) = P(\{x: (x, e_k) \in E\})$.

В условиях леммы функции $\varphi(te_k; P)$ являются целыми в $C^{(1)}$ и, следовательно, интегралы $\int e^{-\eta x} dP^{(k)}$ сходятся при любом $\eta \in R^{(1)}$. Отсюда заключаем, что при любом $r \in R^{(n)}$

$$\begin{aligned} \int e^{-(r, x)} dP &= \int \prod_{k=1}^n \{e^{-nr_k x_k}\}^{\frac{1}{n}} dP \leq \sum_{k=1}^n \int e^{-nr_k x_k} dP = \\ &= \sum_{k=1}^n \int e^{-nr_k x} dP^{(k)} < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому интеграл, стоящий справа в (2.1), сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве в $C^{(n)}$ и является, следовательно, целой функцией от t . Поскольку соотношение (2.1) имеет место при $t \in R^{(n)}$ то оно сохранит силу из-за единственности аналитического продолжения всюду в $C^{(n)}$.

Отметим, что соотношение (2.2), являющееся непосредственным следствием (2.1), в одномерном случае играет важную роль в теории

разложений вероятностных законов и называется «свойством хребта».

Теперь получим многомерный аналог следующей теоремы Д. А. Райкова — П. Леви ([3], стр. 69).

Если х. ф. $\varphi(t; P)$ одномерного з. р. P является целой функцией в $C^{(1)}$, то и х. ф. любой компоненты з. р. P является целой функцией в $C^{(1)}$.

Лемма 2. Если х. ф. $\varphi(t; P)$ n -мерного з. р. P является целой функцией в $C^{(n)}$, то и х. ф. любой компоненты з. р. P является целой функцией в $C^{(n)}$.

Доказательство. Пусть $P = P_1 * P_2$. Тогда при всех $t \in R^{(n)}$ справедливо

$$\varphi(t; P) = \varphi(t; P_1) \varphi(t; P_2).$$

Отсюда вытекает, что

$$\varphi(te_k; P) = \varphi(te_k; P_1) \varphi(te_k; P_2), \quad k = 1, \dots, n, \quad t \in R^{(1)},$$

(мы используем обозначения, введенные при доказательстве леммы 1) и, следовательно, $P^{(k)} = P_1^{(k)} * P_2^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$. Но х. ф. $\varphi(te_k; P)$ одномерного закона $P^{(k)}$ — целая функция в $C^{(1)}$. Значит, по теореме Райкова-Леви, и х. ф. $\varphi(te_k; P_j)$ закона $P_j^{(k)}$ — целая функция в $C^{(1)}$. Рассуждая далее так, как при доказательстве леммы 1, приходим к выводу, что х. ф. $\varphi(t; P_j)$, $j = 1, 2$, — целые функции в $C^{(n)}$. Лемма доказана.

Пусть теперь з. р. P удовлетворяет условиям теоремы 4. Тогда мы имеем ($t \in R^{(n)}$)

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ i(b, t) - \sum_{i, k=1}^n \gamma_{ik} t_i t_k + \int_D \left(e^{i(t, x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + |x|^2} \right) d\nu_P \right\}.$$

Положим

$$\psi(t) = \int_D \left(e^{i(t, x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + |x|^2} \right) d\nu_P. \quad (2.3)$$

Лемма 3. Функция $\psi(t)$ аналитически продолжается до целой функции в $C^{(n)}$. Продолженная функция (будем обозначать ее снова через $\psi(t)$) допускает оценку*

$$|\psi(t)| \leq K_1 (1 + |t|^2) \left(1 + \exp \left\{ H \left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|} \right) |\operatorname{Im} t| \right\} \right), \quad t \in C^{(n)}. \quad (2.4)$$

Доказательство. Из легко проверяемого соотношения

$$e^z = 1 + z + z^2 k(z), \quad \text{где } |k(z)| < 1 + e^{\operatorname{Re} z} \quad (z \in C^{(1)}),$$

вытекает, что при $x \in R^{(n)}$, $t \in C^{(n)}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| e^{i(t, x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + |x|^2} \right| &= \left| - (t, x)^2 k(i(t, x)) + \frac{i(t, x)|x|^2}{1 + |x|^2} \right| \leq \\ &\leq |t|^2 |x|^2 (1 + e^{-\operatorname{Im}(t, x)}) + \frac{|t| |x|^3}{1 + |x|^2} \leq 2 |x|^2 (1 + |t|^2) (1 + e^{-\operatorname{Im}(t, x)}). \end{aligned}$$

Если t пробегает ограниченное множество пространства $C^{(n)}$, а $x \in D$, то величина $(1 + |t|^2) (1 + e^{-\operatorname{Im}(t, x)})$ ограничена некоторой не завися-

* Здесь и ниже буквой K с индексами мы обозначаем положительные постоянные (которые могут зависеть от рассматриваемой функции).

щей от t и x постоянной. Поэтому интеграл в (2.3) сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве в $C^{(n)}$ и является, следовательно, целой функцией в $C^{(n)}$. Тем самым доказано первое утверждение леммы.

Получим теперь оценку (2.4). Имеем

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &\leq 2 \int_D |x|^2 (1 + |t|^2) (1 + e^{-(\operatorname{Im} t, x)}) d\nu_P \leq \\ &\leq 2(1 + |t|^2) (1 + \exp \{ \sup_{x \in D} (\operatorname{Im} t, -x) \}) \int_D |x|^2 d\nu_P = \\ &= K_1 (1 + |t|^2) (1 + \exp \left\{ H \left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|} \right) |\operatorname{Im} t| \right\}), \end{aligned}$$

что и требовалось.

З а м е ч а н и е. Проводя оценку более тщательно (ср. [5]), можно доказать, что

$$|\psi(t)| \leq \varepsilon(t) (1 + |t|^2) (1 + \exp \left\{ H \left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|} \right) |\operatorname{Im} t| \right\}),$$

где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Это соотношение в одномерном случае установлено Ю. В. Линником ([3], гл. IX).

Итак, в силу леммы 3, х. ф. $\varphi(t; P)$ — целая функция в $C^{(n)}$. Пусть мы имеем $P = P_1 * P_2$. Тогда, по лемме 2, х. ф. $\varphi(t; P_1)$ и $\varphi(t; P_2)$ — тоже целые функции в $C^{(n)}$. Но тогда соотношение

$$\varphi(t; P) = \varphi(t; P_1) \varphi(t; P_2) \quad (2.5)$$

имеет место во всем пространстве $C^{(n)}$. Так как $\varphi(t; P)$ не обращается в нуль в $C^{(n)}$, то $\varphi(t; P_1)$ и $\varphi(t; P_2)$ также не обращаются в нуль. Поэтому, полагая

$$f_j(t) = \int_0^1 \left\{ [\varphi(t\tau; P_j)]^{-1} \sum_{k=1}^n t_k \frac{\partial \varphi(t\tau; P_j)}{\partial t_k} \right\} d\tau, \quad j = 1, 2,$$

видим, что функции $f_j(t)$ — целые в $C^{(n)}$. Очевидно,

$$\varphi(t; P_j) = \exp \{ f_j(t) \}, \quad f_j(0) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Будем изучать функцию $f_1(t)$. При $r \in R^{(n)}$, $s \in R^{(n)}$ положим

$$u(r, s) = \operatorname{Re} f_1(r + is).$$

Лемма 4. Справедливо неравенство ($r \in R^{(n)}$, $s \in R^{(n)}$):

$$0 \leq u(0, s) - u(r, s) \leq K_2 (1 + |r|^2 + |s|^2) \left(1 + \exp \left\{ H \left(\frac{s}{|s|} \right) |s| \right\} \right).$$

Доказательство. В силу (2.5) имеем

$$\frac{\varphi(is; P_1)}{\varphi(r + is; P_1)} = \frac{\varphi(is; P)}{\varphi(r + is; P)} \cdot \frac{\varphi(r + is; P_2)}{\varphi(is; P_2)}.$$

Отсюда в силу свойства хребта (2.2) получаем неравенство

$$1 \leq \left| \frac{\varphi(is; P_1)}{\varphi(r + is; P_1)} \right| \leq \left| \frac{\varphi(is; P)}{\varphi(r + is; P)} \right|,$$

которое, очевидно, можно переписать так:

$$0 \leq u(0, s) - u(r, s) \leq \sum_{j, k=1}^n \gamma_{jk} r_j r_k + \psi(is) - \\ - \frac{1}{2} [\psi(r + is) - \psi(r - is)].$$

Используя оценку функции ψ , даваемую леммой 3 получаем утверждение доказываемой леммы.

Лемма 5. При $s \in R^{(n)}$ справедливо неравенство

$$|u(0, s)| \leq K_3(1 + |s|^2) \left(1 + \exp \left\{ H \left(\frac{s}{|s|} \right) |s| \right\} \right).$$

Доказательство. Сначала сделаем следующее общее замечание: если х. ф. $\varphi(t; P)$ является целой функцией в $C^{(n)}$, то при $s \in R^{(n)}$ справедливо

$$\ln \varphi(is; P) \geq -K_4 |s|. \quad (2.6)$$

Для доказательства рассмотрим функцию $\vartheta(\tau) = \varphi(s\tau; P)$, $\tau \in C^{(1)}$. Эта функция является целой в $C^{(1)}$ и удовлетворяет условию $|\vartheta(\tau)| \leq \vartheta(i \ln \tau)$. По теореме Дюге ([3], стр. 62), $\ln \vartheta(i\alpha)$ является выпуклой функцией относительно $\alpha \in R^{(1)}$. Поэтому справедливо неравенство

$$\ln \vartheta(i\alpha) \geq \ln \vartheta(0) + \alpha (\ln \vartheta(i\beta))'_{\beta=0} = \alpha i \vartheta'(0) = \\ = \alpha i \left[\sum_{k=1}^n s_k \frac{\partial \varphi(i\beta s; P)}{\partial t_k} \right]_{\beta=0}.$$

Беря $\alpha = 1$ и замечая, что $\vartheta(i) = \varphi(is; P)$, получаем (2.6).

Докажем теперь лемму. В силу (2.6) имеем

$$u(0, s) = \ln \varphi(is; P_1) \geq -K_5 |s|$$

и, с другой стороны,

$$u(0, s) = \ln \varphi(is; P_1) = \ln \varphi(is; P) - \ln \varphi(is; P_2) \leq \\ \leq \ln \varphi(is; P) + K_6 |s| = -(\mathbf{b}, \mathbf{s}) + \sum_{j, k=1}^n \gamma_{jk} s_j s_k + \psi(is) + K_6 |s|.$$

Используя для оценки функции $\psi(i\eta)$ лемму 3, получаем доказываемое неравенство.

Завершим теперь доказательство теоремы 4. Из лемм 4 и 5 и неравенства

$$|u(r, s)| \leq |u(0, s)| + |u(r, s) - u(0, s)|$$

получаем оценку

$$|u(r, s)| \leq K_7(1 + |r|^2 + |s|^2) \left(1 + \exp \left\{ H \left(\frac{s}{|s|} \right) |s| \right\} \right), \quad (r, s \in R^{(n)}). \quad (2.7)$$

Обозначим $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ положим $\theta_k(\zeta) = f_1(t + e_k \zeta)$, $\zeta \in C^{(1)}$. По формуле Шварца имеем

$$\theta_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} \theta_k(e^{i\delta})] \frac{e^{i\delta} + \zeta}{e^{i\delta} - \zeta} d\delta + i \operatorname{Im} \theta_k(0), \quad (|\zeta| < 1).$$

Дифференцируя по ζ и полагая затем $\zeta=0$, получим

$$\theta'_k(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} \theta_k(e^{i\delta})] e^{-i\delta} d\delta,$$

откуда

$$\theta'_k(0) \leq 2 \max_{0 \leq \delta \leq 2\pi} |\operatorname{Re} \theta_k(e^{i\delta})|.$$

Это соотношение в силу определения функции $\theta_k(\zeta)$ можно переписать так:

$$\left| \frac{\partial f_1(t)}{\partial t_k} \right| \leq 2 \max_{0 \leq \delta \leq 2\pi} |u(r + e_k \cos \delta, s + e_k \sin \delta)|, \quad (r = \operatorname{Re} t, s = \operatorname{Im} t).$$

В силу (2.7) имеем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \delta \leq 2\pi} |u(r + e_k \cos \delta, s + e_k \sin \delta)| &\leq K_7 (1 + (|r| + 1)^2 + (|s| + 1)^2) \times \\ &\times \left(1 + \exp \left\{ \max_{0 \leq \delta \leq 2\pi} H \left(\frac{s + e_k \sin \delta}{|s + e_k \sin \delta|} \right) |s + e_k \sin \delta| \right\} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \delta \leq 2\pi} H \left(\frac{s + e_k \sin \delta}{|s + e_k \sin \delta|} \right) |s + e_k \sin \delta| &= \\ = \max_{0 \leq \delta \leq 2\pi} \sup_{x \in -D} (x, s + e_k \sin \delta) &\leq \max_{0 \leq \delta \leq 2\pi} [\sup_{x \in -D} (x, s) + \sup_{x \in -D} (x, e_k \sin \delta)] \leq \\ &\leq H \left(\frac{s}{|s|} \right) |s| + K_s, \end{aligned}$$

то мы приходим к оценке

$$\left| \frac{\partial f_1(t)}{\partial t_k} \right| \leq K_9 (1 + |t|^2) \left(1 + \exp \left\{ H \left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|} \right) |\operatorname{Im} t| \right\} \right).$$

Далее имеем

$$f_1(t) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} f_1(\tau t) d\tau = \sum_{k=1}^n t_k \int_0^1 \frac{\partial f_1(\tau t)}{\partial t_k} d\tau,$$

откуда

$$\begin{aligned} |f_1(t)| &\leq \sum_{k=1}^n |t_k| \int_0^1 \left| \frac{\partial f_1(\tau t)}{\partial t_k} \right| d\tau \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |t_k| \int_0^1 K_9 (1 + |t|^2) \left(1 + \exp \left\{ H \left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|} \right) \tau |\operatorname{Im} t| \right\} \right) d\tau \leq \\ &\leq K_{10} (1 + |t|^3) \left(1 + \exp \left\{ H \left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|} \right) |\operatorname{Im} t| \right\} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Докажем сначала некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть заряды μ_1 и μ_2 сосредоточены соответственно во множествах $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ типа F_σ . Тогда заряд $\mu = \mu_1 * \mu_2$ сосредоточен во множестве $A = A^{(1)} + A^{(2)}$.

Доказательство. Заметим, что A — множество типа F_σ и, следовательно, говорить о сосредоточенности заряда в нем имеет смысл. Действительно, беря неубывающие последовательности $\{A_m^{(1)}\}_{m=1}^\infty$ и $\{A_m^{(2)}\}_{m=1}^\infty$ ограниченных замкнутых множеств, сходящиеся соответственно к $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, видим, что множества $A_m^{(1)} + A_m^{(2)}$ также образуют неубывающую последовательность ограниченных замкнутых множеств и что эта последовательность сходится к $A^{(1)} + A^{(2)} = A$.

Возьмем любое множество E такое, что $E \cap A = \emptyset$. Имеем

$$\mu(E) = \int \mu_1(E - x) d\mu_2 = \int_{A^{(2)}} \mu_1(E - x) d\mu_2 = \int_{A^{(2)}} \mu_1((E - x) \cap A^{(1)}) d\mu_2 = 0$$

Но подынтегральная функция в последнем интеграле равна нулю, ибо при $x \in A^{(2)}$, $E \cap A = \emptyset$, справедливо $(E - x) \cap A^{(1)} = \emptyset$. Следовательно, $\mu(E) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть меры μ_1 и μ_2 принадлежат M_+ , а мера μ бо $= \mu_1 * \mu_2$ сосредоточена во множестве A , лежащем в гипероктанте $\{x: x_1 \geq b_1, \dots, x_n \geq b_n\}$, $\min_{1 \leq k \leq n} b_k > -\infty$, причем $\mu(\{b\}) > 0$ ($b = (b_1, \dots, b_n)$). Тогда меры μ_1 и μ_2 сосредоточены соответственно во множествах $A - b^{(1)}$ и $A - b^{(2)}$, где $b^{(1)} + b^{(2)} = b$, причем $\mu_1(\{b - b^{(1)}\}) > 0$ и $\mu_2(\{b - b^{(2)}\}) > 0$.

Доказательство. Сначала отметим, что если E_1, E_2 и $E_1 + E_2$ — борелевские множества, то

$$\mu(E_1 + E_2) \geq \mu_1(E_1) \mu_2(E_2). \quad (3)$$

Действительно

$$\begin{aligned} \mu(E_1 + E_2) &= \int \mu_1([E_1 + E_2] - x) d\mu_2 \geq \int_{E_2} \mu_1([E_1 + E_2] - x) d\mu_2 \geq \\ &\geq \mu_1(E_1) \mu_2(E_2), \end{aligned}$$

ибо из $x \in E_2$ следует $[E_1 + E_2] - x \supset E_1$.

Далее покажем, что меры μ_1 и μ_2 сосредоточены в гипероктанте вида $\{x: x_1 \geq a_1, \dots, x_n \geq a_n\}$, $\min_{1 \leq k \leq n} a_k > -\infty$ (такой гипероктант будем обозначать через $\Theta(a)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$).

Если бы это было не так, например, для меры μ_1 , то можно было бы найти последовательность шаров $U^{(m)} = \{x: |x - y^{(m)}| < r^{(m)}\}$, $m = 1, 2, \dots$ такую, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \min_{1 \leq k \leq n} y_k^{(m)} = -\infty$ и $\mu_1(U^{(m)}) > 0$, $m = 1, 2, \dots$.

Обозначая через U произвольный шар, для которого $\mu_2(U) > 0$, в силу (3.1) имели бы

$$\mu(U^{(m)} + U) \geq \mu_1(U^{(m)}) \mu_2(U) > 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Но это невозможно, так как $(U^{(m)} + U) \cap \Theta(b) = \emptyset$ при достаточно большом m .

Обозначим теперь через $\Theta(a^{(1)})$ гипероктант, являющийся пересечением всех гипероктантов $\Theta(a)$, в которых сосредоточена мера μ_1 . Эта мера сосредоточена также и в $\Theta(a^{(1)})$. Соответствующий гипероктант для меры μ_2 обозначим через $\Theta(a^{(2)})$. Из леммы 1 следует, что $\Theta(b) \subset \Theta(a^{(1)}) + \Theta(a^{(2)}) = \Theta(a^{(1)} + a^{(2)})$. С другой стороны, из

* Напомним, что мы условились рассматривать только борелевские множества. Из того, что $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ — борелевские, не следует, что $A^{(1)} + A^{(2)}$ — борелевское (см. стр. 200).

равенства (3.1) легко получаем, что $\Theta(a^{(1)} + a^{(2)}) \subset \Theta(b)$. Поэтому $\Theta(a^{(1)} + a^{(2)}) = \Theta(b)$ и, значит, $a^{(1)} + a^{(2)} = b$.

Замечая, что $[\{a^{(1)} + a^{(2)}\} - x] \cap \Theta(a^{(1)}) = \emptyset$ при всех $x \in \Theta(a^{(2)})$, за исключением $x = a^{(2)}$, получаем

$$\begin{aligned} \mu(\{b\}) &= \int \mu_1(\{a^{(1)} + a^{(2)}\} - x) d\mu_2 = \\ &= \int_{\Theta(a^{(2)})} \mu_1([\{a^{(1)} + a^{(2)}\} - x] \cap \Theta(a^{(1)})) d\mu_2 = \mu_1(\{a^{(1)}\}) \mu_2(\{a^{(2)}\}). \end{aligned}$$

Так как по условию $\mu(\{b\}) > 0$, то $\mu_1(\{a^{(1)}\}) > 0$ и $\mu_2(\{a^{(2)}\}) > 0$.

Возьмем любое множество E такое, что $E \cap (A - a^{(2)}) = \emptyset$. В силу (3.1) будем иметь

$$\mu_1(E) \mu_2(\{a^{(2)}\}) \leq \mu(E + a^{(2)}) = \mu([E + a^{(2)}] \cap A) = 0,$$

ибо $[E + a^{(2)}] \cap A = \emptyset$. Тем самым доказано, что мера μ_1 сосредоточена на множестве $A - a^{(2)}$. Аналогично доказывается, что мера μ_2 сосредоточена на $A - a^{(1)}$. Остается положить $b^{(1)} = a^{(2)}$, $b^{(2)} = a^{(1)}$.

Лемма 3. Пусть μ — заряд и пусть его преобразование Фурье $\varphi(t; \mu)$ аналитически продолжается до целой функции в C^n . Предположим, что продолженная функция (будем обозначать ее снова через $\varphi(t; \mu)$) при любом $\theta > 0$ допускает оценку

$$|\varphi(t; \mu)| \leq C_0 (1 + |t|^d) \exp \left\{ \left[H \left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|} \right) + \theta \right] |\operatorname{Im} t| \right\},$$

где d — натуральное число, C_0 — постоянная, зависящая лишь от θ , а $H(x)$ — опорная функция замкнутого ограниченного выпуклого множества $D \subset R^n$. Тогда заряд μ сосредоточен во множестве $-D$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\delta > 0$ и положим $\lambda_\delta(E) = \delta^{-n} \omega^{(n)}(E \cap \{x: |x_1| \leq \delta, \dots, |x_n| \leq \delta\})$, где $\omega^{(n)}$ — лебегова мера в R^n .

Обозначим через μ_δ свертку $\mu * \lambda_\delta^{(d+1)*}$. Так как

$$\varphi(t; \mu_\delta) = \varphi(t; \mu) [\varphi(t; \lambda_\delta)]^{d+1} = \varphi(t; \mu) \left[\prod_{k=1}^n \frac{\sin \delta t_k}{\delta t_k} \right]^{d+1}.$$

то функция $\varphi(t; \mu_\delta)$ продолжается до целой в C^n и продолженная функция (мы обозначаем ее снова через $\varphi(t; \mu_\delta)$) удовлетворяет условиям:

$$\int |\varphi(t; \mu_\delta)|^2 d\omega^{(n)} < \infty,$$

$$|\varphi(t; \mu_\delta)| \leq \tilde{C}_0 \exp \left\{ \left[H \left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|} \right) + \theta + n(d+1)\delta \right] |\operatorname{Im} t| \right\}, \quad t \in C^n.$$

Применяя теорему Полиа-Планшереля (см. напр. [8], стр. 401), получаем для $\varphi(t; \mu_\delta)$ представление

$$\varphi(t; \mu_\delta) = \int e^{i(t, x)} \psi_\delta(x) d\omega^{(n)},$$

где $\psi_\delta(x)$ — измеримая по Лебегу функция с $\int |\psi_\delta(x)|^2 d\omega^{(n)} < \infty$, равная нулю вне выпуклого множества $-D_\delta$, получаемого из множе-

ства $-D$ присоединением всевозможных шаров с центрами в $-D$ радиуса $n(d+1)\delta$. Таким образом заряд μ_δ имеет вид

$$\mu_\delta(E) = \int_E \psi_\delta(x) d\omega^{(n)}$$

и, следовательно, сосредоточен в $-D_\delta$.

Пусть $\mu = \mu^{(1)} - \mu^{(2)}$, где $\mu^{(1)}, \mu^{(2)} \in \mathbf{M}_+$, а E — интервал в R^n являющийся интервалом непрерывности и для $\mu^{(1)}$, и для $\mu^{(2)}$. Если мы покажем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_\delta(E) = \mu(E), \quad (3)$$

то отсюда будет следовать утверждение леммы.

Но $\mu^{(j)} * \lambda_\delta^{(d+1)*} \in \mathbf{M}_+$ ($j = 1, 2$), и при $\delta \rightarrow 0$

$$\varphi(t; \mu^{(j)} * \lambda_\delta^{(d+1)*}) = \varphi(t; \mu^{(j)}) \left[\prod_{k=1}^n \frac{\sin \delta t_k}{\delta t_k} \right]^{d+1} \rightarrow \varphi(t; \mu^{(j)})$$

равномерно на любом ограниченном множестве в R^n . Используя принцип непрерывного соответствия ([2], стр. 129) между мерами $\mathbf{M}_+$ и их преобразованиями Фурье, получаем, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\mu^{(j)} * \lambda_\delta^{(d+1)*})(E) = \mu^{(j)}(E)$ для каждого $E \subset R^n$, являющегося интервалом непрерывности для $\mu^{(j)}$, откуда следует (3.2).

Приступим к доказательству теоремы 3.

Пусть P — закон, удовлетворяющий условиям теоремы 3 и пусть $P = P_1 * P_2$, где P_1 и P_2 — некоторые з. р. По теореме 4 х. ф. $\varphi(t; P)$ имеет вид

$$\varphi(t; P_1) = \exp f(t),$$

где $f(t)$ — целая функция в C^n , допускающая оценку

$$|f(t)| \leq K(1 + |t|^3) \left(1 + \exp \left\{ H \left(\frac{|\operatorname{Im} t|}{|\operatorname{Re} t|} \right) |\operatorname{Im} t| \right\} \right), \quad (3)$$

где K — не зависящая от t постоянная, а $H(x)$ — опорная функция множества A_1 .

Так как закон P не имеет гауссовой компоненты и $\nu_P \in \mathbf{M}_+$, а выражение (1.1) для его х. ф. $\varphi(t; P)$ можно записать в виде

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ i(b', t) + \int (e^{i(t, x)} - 1) d\nu_P \right\}.$$

где $b' \in R^n$. Будем считать, что $b' = 0$. Это, очевидно, не уменьшает общности наших рассуждений.

Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t; P) &= \exp \left\{ \int (e^{i(t, x)} - 1) d\nu_P \right\} = e^{-\nu_P(A)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\{ \int e^{i(t, x)} d\nu_P \right\}^m = \\ &= e^{-\nu_P(A)} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int e^{i(t, x)} d\nu_P^m \right\} = e^{-\nu_P(A)} \int e^{i(t, x)} d \left\{ \varepsilon_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_P^m}{m!} \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$P = e^{-\nu_P(A)} \left(\varepsilon_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu_P^m}{m!} \right).$$

В силу леммы 1 отсюда следует, что закон P сосредоточен во множестве

$$\{0\} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} (m)A = \{0\} \cup M(A). \quad (3.4)$$

Это множество лежит в гипероктанте $\{x: x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$, а $P(\{0\}) = e^{-\gamma_P(A)} > 0$. Поэтому применима лемма 2, и мы заключаем, что законы P_1 и P_2 сосредоточены соответственно во множествах $[\{0\} \cup M(A)] - b^{(1)}$ и $[\{0\} \cup M(A)] - b^{(2)}$, где $b^{(1)} + b^{(2)} = 0$, причем $P_1(\{b^{(2)}\}) > 0$ и $P_2(\{b^{(1)}\}) > 0$.

В дальнейшем мы будем считать, что $b^{(1)} = b^{(2)} = 0$. Это не уменьшает общности нашего исследования, так как вместо законов $P_j, j = 1, 2$, можно рассматривать их „сдвиги“ $P_j^* \varepsilon_{-b^{(j)}}$, $j = 1, 2$. Очевидно, композиция этих „сдвигов“ тоже равна P , а х. ф. „сдвига“ отличается от х. ф. соответствующего закона P_j лишь множителем $\exp(i(b^{(j)}, t))$. Итак, законы P_1 и P_2 у нас сосредоточены во множестве (3.4) и $P_j(\{0\}) > 0, j = 1, 2$.

Очевидно, мера $\tilde{P}_1 = P_1 - P_1(\{0\})\varepsilon_0$ принадлежит M_+ и

$$\varphi(t; P_1) = P_1(\{0\}) + \int e^{i(t, x)} d\tilde{P}_1.$$

Так как мера $\tilde{P}_1$ сосредоточена в гипероктанте $\{x: x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ с исключенной точкой 0 , то числа $s_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$) можно выбрать столь большими, чтобы выполнялось неравенство

$$\int e^{-(s, x)} d\tilde{P}_1 < P_1(\{0\}), \quad s = (s_1, \dots, s_n).$$

Положим

$$\tilde{P}_{1s}(E) = \int_E e^{-(s, x)} d\tilde{P}_1.$$

Очевидно, что мера $\tilde{P}_{1s}$ принадлежит M_+ , удовлетворяет условию $\tilde{P}_{1s}(R^{(n)}) < P_1(\{0\})$ и сосредоточена в том же множестве, что и $\tilde{P}_1$, а именно на $M(A)$.

При $t \in R^{(n)}$ имеем

$$\begin{aligned} f(t + is) &= \ln \varphi(t + is; P_1) = \ln \left\{ P_1(\{0\}) + \int e^{i(t, x)} d\tilde{P}_{1s} \right\} = \\ &= \ln P_1(\{0\}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m [P_1(\{0\})]^m} \left\{ \int e^{i(t, x)} d\tilde{P}_{1s} \right\}^m. \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд

$$\mu_s = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m [P_1(\{0\})]^m} \tilde{P}_{1s}^{m*}. \quad (3.5)$$

Этот ряд, очевидно, сходится абсолютно и равномерно на классе борелевских множеств и, следовательно, μ_s является зарядом. Ясно,

что заряд μ_s сосредоточен во множестве $M(M(A)) = M(A)$ и

$$f(t + is) = \ln P_1(\{0\}) + \int e^{i(t, x)} d\mu_s \quad (t \in R^{(n)}). \quad (3.5)$$

Так как $f(t)$ — целая функция от t и удовлетворяет неравенству (3.3), то $f(t + is)$ — тоже целая функция от t и тоже удовлетворяет (3.3) — только, возможно, с другой постоянной K (заметим, что

$$H\left(\frac{\operatorname{Im} t + s}{|\operatorname{Im} t + s|}\right) |\operatorname{Im} t + s| = \sup_{x \in -A_1} (x, \operatorname{Im} t + s) \leqslant \sup_{x \in -A_1} (x, \operatorname{Im} t) + \sup_{x \in -A_1} (x, s).$$

Отсюда следует, что справедливо неравенство

$$|f(t + is)| \leqslant 2K(1 + |t|^3) \exp \left\{ H^+ \left(\frac{\operatorname{Im} t}{|\operatorname{Im} t|} \right) |\operatorname{Im} t| \right\}, \quad t \in C^{(n)}, \quad (3.6)$$

где $H^+(x) = \max\{H(x), 0\}$. Заметим, что $H^+(x)$ является опорной функцией наименьшего замкнутого выпуклого множества (будем обозначать его через $-A_2$), содержащего множество $\{0\} \cup (-A_1)$.

В силу (3.6), (3.7) и леммы 3 заключаем, что заряд μ_s сосредоточен во множестве A_2 . Так как ранее мы установили, что этот заряд сосредоточен и во множестве $M(A)$, то он сосредоточен в $A_2 \cap M(A)$.

Так как множество A , а, следовательно, и A_2 , ограничено, то правая часть соотношения (3.6) является целой функцией от t и соотношение (3.6) имеет место во всем пространстве $C^{(n)}$. Положим

$$\lambda(E) = \int_E e^{(s, x)} d\mu_s. \quad (3.7)$$

Очевидно, заряд λ сосредоточен во множестве $A_2 \cap M(A)$ и справедливы

$$f(t) = \ln P_1(\{0\}) + \int e^{i(t, x)} d\lambda. \quad (3.8)$$

Так как $f(0) = 0$, то $\ln P_1(\{0\}) = -\lambda(R^{(n)})$, и из (3.9) следует соотношение

$$f(t) = \int (e^{i(t, x)} - 1) d\lambda.$$

Покажем, что множество $A_2 \cap M(A)$ совпадает с $A_1 \cap M(A)$. Для этого заметим, что если D_1 и D_2 — два замкнутых выпуклых множества с опорными функциями соответственно $H_1(x)$ и $H_2(x)$, опорной функцией множества $D_1 + D_2$ является $H_1(x) + H_2(x)$. Если множество $A_1 \cap M(A)$ не совпадало с $A_2 \cap M(A)$, то существовал бы вектор y , удовлетворяющий условиям $y \in A_1$, $y \in A_2$, $y \in M(A)$. Тогда можно было бы найти вектор $x \in R^{(n)}$, $|x| = 1$, такой, что $(x, y) > H(x)$, $(x, y) \leqslant H^+(x)$ и, следовательно, $H(x) < 0$. Так как в некотором натуральном m мы имели бы $y \in (m)A \subset (m)A_1$, то должно было бы выполняться еще и неравенство $(x, y) \leqslant mH(x)$, что невозможно.

Остается показать, что если $E \cap (2)M(A) = \emptyset$, то $\lambda(E) \geq 0$. Для этого воспользуемся соотношениями (3.5) и (3.8). Поскольку заряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m [P_1(\{0\})]^m} \tilde{P}_{1s}^{m*}$$

сосредоточен во множестве $\bigcup_{m=2}^{\infty} (m)M(A) = (2)M(A)$, то

$$\mu_s(E) = [P_1(\{0\})]^{-1} \tilde{P}_{1s}(E) \geq 0.$$

если $E \cap (2)M(A) = \emptyset$. В силу (3.8) тогда и $\lambda(E) \geq 0$, что и требовалось.

В одномерном случае мы можем усилить теорему 3 следующим образом.

Теорема 3'. Пусть P — одномерный б. д. закон, х. ф. которого представима в виде

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ i\beta t + \int (e^{itx} - 1) d\nu + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (e^{ix_m t} - 1) \right\},$$

где β — вещественно, $\nu \in \mathbf{M}_+$, $\lambda_m \geq 0$, $x_m > 0$ ($m = 1, 2, \dots$) и выполнены условия:

1) мера ν сосредоточена в ограниченном множестве $A \subset (0, \infty)$ типа F_σ ,

2) $x_1 > c = \sup_{x \in A} x$, а все числа x_{m+1}/x_m ($m = 1, 2, \dots$) суть натуральные отличные от единицы,

3) существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$\lambda_m = O(\exp\{-Kx_m^2\}), \quad m \rightarrow +\infty.$$

Если P_1 — компонента закона P , то мы имеем

$$\varphi(t; P_1) = \exp \left\{ i\beta' t + \int (e^{itx} - 1) d\lambda + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m (e^{ix_m t} - 1) \right\}, \quad (3.10)$$

где β' — вещественно, λ — заряд, сосредоточенный во множестве $(0, c] \cap M(A)$ и удовлетворяющий условиям:

а) $\lambda(E) \geq 0$, если $E \cap (2)M(A) = \emptyset$,

б) $\lambda(\{c\}) \geq 0$, а числа λ'_m таковы, что $0 \leq \lambda'_m \leq \lambda_m$ ($m = 1, 2, \dots$).

Доказательство опирается на следующий результат автора [5], представляющий некоторое усиление одного результата Ю. В. Линника ([3], стр. 212, теорема 9, 12. 1).

Теорема ([5]). Пусть P — одномерный закон, х. ф. которого представима в виде

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ l(it) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (e^{ix_m t} - 1) \right\},$$

где $l(z)$ — целая функция в $C^{(1)}$, вещественная при $z \in R^{(1)}$ и допускающая оценку

$$l(z) = O((|z|^2 + 1) \exp\{c|\operatorname{Re} z|\}), \quad z \in C^{(1)},$$

(c — положительная постоянная); $x_1 > c$, а все числа x_{m+1}/x_m ($m = 1, 2, \dots$) суть натуральные отличные от единицы; существует

постоянная $K > 0$ такая, что

$$\lambda_m = O(\exp\{-Kx_m^2\}), \quad m \rightarrow +\infty.$$

Если P_1 — компонента закона P , то мы имеем

$$\varphi(t, P_1) = \exp\left\{l_1(it) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m (e^{ix_m t} - 1)\right\},$$

где $l_1(z)$ — целая функция в $C^{(1)}$, вещественная при $z \in R^{(1)}$ и допускающая оценку

$$l_1(z) = O(|z|^3 + 1) \exp\{c|\operatorname{Re} z|\}, \quad z \in C^{(1)}; \quad (3.1)$$

а числа λ'_m таковы, что $0 \leq \lambda'_m \leq \lambda_m$ ($m = 1, 2, \dots$).

Если закон P удовлетворяет условиям теоремы 3, то он удовлетворяет и условиям последней теоремы ($l(z) = \beta z + \int (e^{zx} - 1) d\nu$).

Поэтому для х. ф. $\varphi(t; P_1)$ имеет место представление

$$\varphi(t; P_1) = \exp\{f(t)\},$$

где

$$f(t) = l_1(it) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m (e^{ix_m t} - 1) \quad (3.1)$$

— очевидно является целой функцией в $C^{(1)}$.

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы, приходим к заключению, что при вещественных t и достаточно большом $s > 0$ справедливо соотношение

$$f(t + is) = \ln P_1(\{0\}) + \int e^{itx} d\mu_s, \quad (3.1)$$

где μ_s — заряд, определяемый формулой (3.5) и сосредоточенный на множестве $M(A \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x_m\})$.

Положим

$$\mu'_s = \mu_s - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m e^{-x_m s} \varepsilon_{x_m}. \quad (3.1)$$

Из (3.12) и (3.13) получаем, что при вещественных t

$$\int e^{itx} d\mu'_s = l_1(i(t + is)) - \ln P_1(\{0\}) - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m e^{-x_m s}.$$

Учитывая оценку (3.11) для функции $l_1(z)$ и применяя лемму 3, заключаем, что заряд μ'_s сосредоточен на отрезке $[-c, c]$, а, следовательно, и на множестве $[-c, c] \cap M(A \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x_m\}) = (0, c] \cap M(A)$.

Из (3.13) и (3.14) вытекает, что

$$f(t + is) = \ln P_1(\{0\}) + \int e^{itx} d\mu'_s + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_m e^{-x_m s} e^{ix_m t}.$$

Полагая $\lambda(E) = \int_E e^{xs} d\mu_s'$, видим, что заряд λ сосредоточен во множестве $(0, c] \cap M(A)$ и справедливо соотношение (3.10). То, что $\lambda(E) \geq 0$ при $E \cap (2) M(A) = \emptyset$, доказывается так же, как и в теореме 3. Остается установить, что $\lambda(\{c\}) \geq 0$.

Для этого воспользуемся „свойством хребта“ (2.2). Запишем тождество, вытекающее из (3.10) и того обстоятельства, что числа x_{m+1}/x_m — натуральные:

$$\left| \frac{\varphi(i\tau; P_1)}{\varphi\left(\frac{2\pi}{x_1} + i\tau; P_1\right)} \right| = \exp \left\{ 2 \int e^{-\tau x} \sin^2 \frac{\pi x}{x_1} d\lambda \right\}, \quad \tau \in R^{(1)}.$$

В силу «свойства хребта» левая часть этого соотношения не меньше единицы, и поэтому выражение, стоящее справа под знаком exp, не отрицательно. Так как при $\tau \rightarrow -\infty$

$$\int e^{-\tau x} \sin^2 \frac{\pi x}{x_1} d\lambda = (\lambda(\{c\}) + o(1)) e^{-\tau c} \sin^2 \frac{\pi c}{x_1},$$

то соотношение $\lambda(\{c\}) < 0$ невозможно, что и требовалось.

§ 4. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Сначала сделаем следующее замечание. Условие теоремы 3, состоящее в том, что множество A лежит в гипероктанте $\{x: x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$, можно ослабить, заменив его следующим: множество A лежит в „косоугольном“ гипероктанте $\{x: x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0\}$, где $e_1, \dots, e_n$ — линейно независимые орты в $R^{(n)}$.

Действительно, пусть P — закон, удовлетворяющий условиям теоремы 3 в таком варианте. Рассмотрим линейное преобразование $y = Fx$ пространства $R^{(n)}$ на себя, определяемое соотношениями $Fe_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $Fe_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $Fe_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$, и переводящее, следовательно, наш „косоугольный“ гипероктант в прямоугольный $\{y: y_1 \geq 0, \dots, y_n \geq 0\}$. Положим $P_F(E) = P(\{x: Fx \in E\})$. Если $P = P_1 * P_2$, то, очевидно, $P_F = P_{1F} * P_{2F}$. Поэтому, применяя теорему 3 (в первоначальном варианте), получим выражение для $\varphi(t; P_{1F})$. Переходя от P_{1F} к P_1 при помощи обратного преобразования F^{-1} , убеждаемся в справедливости замечания.

Пусть теперь закон P удовлетворяет условиям теоремы 1. Из условия $A \cap (2) A = \emptyset$ легко следует, что точка 0 не может быть предельной точкой множества A . Поэтому из $\int |x|^2 (1 + |x|^2)^{-1} d\nu_P < \infty$ следует $\nu_P(A) < \infty$ и, значит, $\nu_P \in \mathbf{M}_+$. В силу выпуклости и того, что $0 \notin A$, множество A лежит в некотором косоугольном гипероктанте рассмотренного в замечании вида. Применяя замечание, заключаем, что х. ф. любой компоненты P_1 закона P имеет вид (1.2). В силу условий, которые мы наложили на множество A , имеем $A_1 \cap M(A) = A$, $A \cap (2) M(A) = \emptyset$, поэтому $\lambda \in \mathbf{M}_+$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 3' следует, что в одномерном случае теорема 1 допускает усиление.

Теорема 1'. Пусть P — б. д. закон, х. ф. которого представима в виде

$$\varphi(t, P) = \exp \left\{ i\beta t + \int_{[b, c]} (e^{itx} - 1) d\nu + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (e^{ix_m t} - 1) \right\}.$$

где β — вещественно; $0 < b < c \leq 2b < \infty$; $\nu \in \mathbf{M}_+$; $x_1 > c$, а числа x_{m+1}/x_m ($m=1, 2, \dots$) — натуральные отличные от единицы; $\lambda_m > 0$ ($m=1, 2, \dots$) и существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$\lambda_m = O(\exp\{-Kx_m^2\}), \quad m \rightarrow +\infty.$$

Тогда $P \in I_0$.

Заметим, что теорема 1' даже при $0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots$ несколько сильнее одномерного случая теоремы 1, ибо если $c = 2b$, то

$$[b, c] \cap (2)[b, c] = \{c\} \neq \emptyset.$$

Заметим также, что условие $c \leq 2b$ существенно для справедливости утверждения теоремы 1'. Это непосредственно вытекает из следующего результата Р. Шимицу [15], представляющего усиление известной теоремы Г. Крамера [10].

Теорема. ([15]). Пусть P — одномерный б. д. закон. Если можно указать постоянные k, b и c , $k > 0$, $0 < b < 2b < c < \infty$, такие, что для любого $E \subset R^{(1)}$

$$\nu_P(E) \geq k\omega^{(1)}(E \cap [b, c]) \quad (\omega^{(1)} — \text{лебегова мера в } R^{(1)})$$

то закон P не принадлежит к I_0 .

Доказательство теоремы 2. Пусть P — закон, удовлетворяющий условиям теоремы и пусть $P = P_1 * P_2$. Так как в любом ν_P -измеримом множестве содержится подмножество с тем же значением ν_P и типа F_σ , то можно считать множество A множеством типа F_σ . Поэтому применима теорема 3, и мы имеем

$$\varphi(t; P_j) = \exp \left\{ i(b_j, t) + \int (e^{i(t, x)} - 1) d\lambda_j \right\}, \quad j = 1, 2,$$

где $b_j \in R^{(n)}$, а заряды λ_j сосредоточены во множестве $A_1 \cap M(A)$. Будем считать, что $b_j = 0$, $j = 1, 2$, — это, конечно, не уменьшает общности.

Так как векторы множества A линейно независимы в поле рациональных чисел, то среди множеств A , $(2)A$, $(3)A$, ... никакие два не имеют общих точек. Поэтому $A \cap (2)M(A) = \emptyset$ и, следовательно, при любом $E \subset A$ справедливо $\lambda_j(E) \geq 0$, $j = 1, 2$.

Положим

$$b_k = \sup_{x \in A} x_k, \quad D_0 = \{x: 0 \leq x_1 \leq b_1, \dots, 0 \leq x_n \leq b_n\},$$

$$D_1 = \left\{ x: 0 \leq x_1 \leq \frac{b_1}{2}, \dots, 0 \leq x_n \leq \frac{b_n}{2} \right\},$$

$$\bar{\lambda}_{j1}(E) = \lambda_j(E \cap A \cap [D_0 \setminus D_1]), \quad \lambda_{j1} = \lambda_j - \bar{\lambda}_{j1}. \quad (4.1)$$

Заметим, что множества A и A_1 лежат в D_0 и $\bar{\lambda}_{j1} \in \mathbf{M}_+$.

Рассмотрим заряд

$$P_{j1} = e^{-\lambda_{j1}(R^{(n)})} \left\{ \varepsilon_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j1}^{m*}}{m!} \right\}.$$

Покажем, что этот заряд является вероятностным законом. Для этого, очевидно, достаточно показать, что $P_{j1} \in \mathbf{M}_+$.

Легко видеть, что заряд λ_{j1} сосредоточен во множестве $\{D_0 \cap M(A)\} \setminus \{[D_0 \setminus D_1] \cap A\}$, которое, как нетрудно проверить, совпадает с $M(A \cap D_1) \cap D_0$. Поэтому заряд P_{j1} сосредоточен во множестве

$$\{0\} \cup M(M(A \cap D_1) \cap D_0) = \{0\} \cup M(A \cap D_1). \quad (4.2)$$

Рассмотрим разность

$$e^{\lambda_j(R^{(1)})} P_j - e^{\lambda_{j1}(R^{(n)})} P_{j1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^{m*} - \lambda_{j1}^{m*}}{m!}. \quad (4.3)$$

Так как

$$\lambda_j^{m*} - \lambda_{j1}^{m*} = (\lambda_{j1} + \bar{\lambda}_{j1})^{m*} - \lambda_{j1}^{m*} = \sum_{r=1}^{m-1} C_m^r \bar{\lambda}_{j1}^{r*} \lambda_{j1}^{(m-r)*} + \bar{\lambda}_{j1}^{m*},$$

то заряд $\lambda_j^{m*} - \lambda_{j1}^{m*}$ сосредоточен во множестве

$$Q_m = \bigcup_{r=1}^{m-1} \{(r) [A \cap (D_0 \setminus D_1)]\} + \\ + (m-r) [M(A \cap D_1) \cap D_1] \cup (m) [A \cap (D_0 \setminus D_1)].$$

Всякий вектор $e \in Q_m$ принадлежит $M(A)$, причем в представлении вектора e линейной комбинацией с натуральными коэффициентами векторов из A векторы из $A \cap (D_0 \setminus D_1)$ обязательно должны участвовать. Поэтому $e \in M(A \cap D_1)$. Мы приходим к заключению, что множество $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$, в котором сосредоточен заряд (4.3), не пересекается с множеством (4.2), в котором сосредоточен заряд P_{j1} .

Отсюда следует, что для любого $E \subset \{0\} \cup M(A \cap D_1)$ справедливо $e^{\lambda_j(R^{(n)})} P_j(E) - e^{\lambda_{j1}(R^{(n)})} P_{j1}(E) = 0$ и, значит, $P_{j1}(E) \geq 0$. Тем самым доказано, что $P_{j1} \in \mathbf{M}_+$, $j=1, 2$.

Положим $E_{31} = P_{11} * P_{21}$. Так как, очевидно,

$$\varphi(t; P_{j1}) = \exp \left\{ \int (e^{i(t,x)} - 1) d\lambda_{j1} \right\}, \quad j=1, 2,$$

то

$$\varphi(t; P_{31}) = \exp \left\{ \int (e^{i(t,x)} - 1) d(\lambda_{11} + \lambda_{21}) \right\}.$$

Поскольку

$$(\lambda_{11} + \lambda_{21})(E) = (\lambda_1 + \lambda_2)(E) - (\bar{\lambda}_{11} + \bar{\lambda}_{21})(E) = \\ = \nu_P(E) - \nu_P(E \cap A \cap (D_0 \setminus D_1)) = \nu_P(E \cap A \cap D_1),$$

то заряд $\lambda_{11} + \lambda_{21}$ принадлежит $\mathbf{M}_+$ и сосредоточен во множестве $A \cap D_1$. Применяя теорему 3 к законам P_{31} , P_{11} и P_{21} , получаем, что заряды λ_{j1} , $j=1, 2$, сосредоточены во множестве $D_1 \cap M(A \cap D_1)$. Отсюда, в силу (4.1), заключаем, что при любом $E \subset D_0/D_1$ имеем $\lambda_j(E) \geq 0$, $j=1, 2$.

Далее положим

$$D_2 = \left\{ x : 0 \leq x_1 \leq \frac{b_1}{2^2}, \dots, 0 \leq x_n \leq \frac{b_n}{2^2} \right\},$$

$$\bar{\lambda}_{j2}(E) = \lambda_{j1}(E \cap A \cap [D_1/D_2]), \quad \lambda_{j2} = \lambda_{j1} - \bar{\lambda}_{j2}, \quad j=1, 2.$$

Рассматривая заряд

$$P_{j2} = e^{-\lambda_{j2}(R^{(n)})} \left\{ \varepsilon_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j2}^{m*}}{m!} \right\}, \quad j=1, 2,$$

мы с помощью рассуждений, повторяющих приведенные выше, устанавливаем, что при $E \subset D_1 \setminus D_2$ справедливо $\lambda_{j1}(E) \geq 0$, $j=1, 2$.

Поскольку при $E \subset D_1 \setminus D_2$ имеем $\lambda_j(E) = \lambda_{j1}(E)$, то при $E \subset D_1 \setminus D_2$ неравенство $\lambda_j(E) \geq 0$ также справедливо.

Продолжая далее, получим следующий результат. Пусть $D_q = \{x: 0 \leq x_1 \leq \frac{b_1}{2^q}, \dots, 0 \leq x_n \leq \frac{b_n}{2^q}\}$, $q=0, 1, 2, \dots$. Если $E \subset D_q \setminus D_{q+1}$ то $\lambda_j(E) \geq 0$, $j=1, 2$.

Но это означает, что $\lambda_j \in \mathbf{M}_+$, ибо при любом E имеем

$$\lambda_j(E) = \lambda_j(E \cap D_0) = \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_j(E \cap (D_q \setminus D_{q+1})) \geq 0.$$

Теорема доказана.

При помощи теоремы 3' нетрудно получить, что в одномерном случае теорема 2 допускает следующее усиление.

Теорема 2'. Пусть P — одномерный б. д. закон, х. ф. которого допускает представление

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ i\beta t + \int (e^{itx} - 1) d\nu + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (e^{ix_m t} - 1) \right\},$$

где β — вещественно; $\nu \in \mathbf{M}_+$, $\lambda_m \geq 0$, $x_m > 0$ ($m=1, 2, \dots$) и выполнены следующие условия:

1) мера ν сосредоточена в ограниченном множестве $A \subset (0, \infty)$, любая конечная система чисел которого линейно независима в поле рациональных чисел;

2) число $x_1 > \sup_{x \in A} x$ не выражается линейной комбинацией чисел множества A с рациональными коэффициентами; числа x_{m+1}/x_m ($m=1, 2, \dots$) суть натуральные, отличные от единицы;

3) существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$\lambda_m = O(\exp\{-Kx_m^2\}), \quad m \rightarrow +\infty.$$

Тогда $P \in I_0$.

§ 5. Некоторые следствия теоремы 1

Из теоремы 1 вытекает, что класс I_0 является «базисом» в классе всех n -мерных б. д. законов в следующем смысле:

Всякий n -мерный б. д. закон P представляется в виде

$$P = P_0 * P_1 * P_2 * \dots,$$

где $P_m \in I_0$, $m=0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Легко видеть, что существует последовательность ограниченных выпуклых множеств $D_1, D_2, \dots$, обладающих

свойствами*:

$$1) D_j \cap D_k = \emptyset \quad (k \neq j). \quad 2) \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = R^{(n)} \setminus \{0\},$$

$$3) \overline{D_k} \cap (2) \overline{D_k} = \emptyset \quad (k=1, 2, \dots) \text{ (черта означает замыкание).}$$

Представим х. ф. $\varphi(t; P)$ закона P формулой Леви (1.1). Обозначим через $P_0, P_1, P_2, \dots$ законы, х. ф. которых задаются равенствами

$$\varphi(t; P_k) = \exp \left\{ \int_{\overline{D_k}} \left(e^{i(t, x)} - 1 - \frac{i(t, x)}{1 + |x|^2} \right) d\nu_P \right\}, \quad k=1, 2, 3, \dots,$$

$$\varphi(t; P_0) = \exp \left\{ i(b, t) - \sum_{j,k=1}^n \gamma_{jk} t_j t_k \right\}.$$

Тогда, очевидно, $P = P_0 * P_1 * P_2 * \dots$. Закон P_0 принадлежит I_0 в силу цитированной в начале статьи теоремы Крамера [9]. Принадлежность к I_0 законов P_k ($k=1, 2, \dots$) вытекает из теоремы 1: достаточно заметить, что из $\overline{D_k} \cap (2) \overline{D_k} = \emptyset$ следует существование ограниченного открытого выпуклого множества $A \supset D_k$, такого, что $A \cap (2) A = \emptyset$.

Отметим еще одно предложение, получающееся при помощи теоремы 1 и представляющее, по нашему мнению, интерес.

Проекцией n -мерного закона P на орт $e \in R^{(n)}$ называется одномерный закон P_e , определяемый равенством

$$P_e(E) = P(\{x: (x, e) \in E\})$$

(E — любое одномерное борелевское множество). Поскольку х. ф. закона P связана с х. ф. его проекции P_e соотношением $\varphi(t; P_e) = \varphi(te; P)$, то проекция б. д. закона на любой орт является одномерным б. д. законом (причем $\nu_{P_e}(E) = \nu_P(\{x: (x, e) \in E\})$). Мы покажем, что проекция закона класса I_0 может не принадлежать классу I_0 . Более того:

Существуют законы класса I_0 , у которых все проекции, за исключением двух, не принадлежат I_0 .

Для доказательства этого утверждения мы используем, кроме теоремы 1, результат Р. Шимицу [15], сформулированный нами в § 4.

Рассмотрим б. д. закон P без гауссовой компоненты, для которого мера ν_P фигурирующая в представлении х. ф. $\varphi(t; P)$ формулой Леви, дается соотношением

$$\nu_P(E) = \omega^{(n)}(E \cap A), \quad A = \{x: 1 < x_1 < 2, x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\}.$$

Поскольку $A \cap (2) A = \emptyset$, то по теореме 1 имеем $P \in I_0$. Используя соотношение $\nu_{P_e}(E) = \nu_P(\{x: (x, e) \in E\})$, убеждаемся, что для любого

* В одномерном случае такую последовательность получим, объединяя две последовательности полуинтервалов $\{[v^m, v^{m+1})\}_{m=-\infty}^{\infty}$ и $\{(-v^{m+1}, -v^m]\}_{m=-\infty}^{\infty}$, $1 < v < 2$. В двумерном случае последовательность $D_1, D_2, \dots$ можно построить объединяя четыре последовательности прямоугольников

$$\{x: v^m \leq x_1 < v^{m+1}, -v^{m+1} < x_2 < -v^m\}_{m=-\infty}^{\infty},$$

$$\{x: -v^{m+1} < x_1 \leq v^m, -v^{m+1} < x_2 < v^{m+1}\}_{m=-\infty}^{\infty}, \{x: -v^m < x_1 < v^m, v^m \leq x_2 < v^{m+1}\}_{m=-\infty}^{\infty}, \{x: -v^m < x_1 < v^m, -v^{m+1} < x_2 \leq v^{m+1}\}_{m=-\infty}^{\infty}, \quad 1 < v < 2$$

Очевидно, аналогичное построение можно провести и в общем случае.

орта $e \in R^{(n)}$, за исключением $(1, 0, 0, \dots, 0)$ и $(-1, 0, 0, \dots, 0)$, найдутся постоянные k , b и c , $k > 0$, $0 < b < 2b < c < \infty$, такие что $\nu_{P_e}(E) \geq k \omega^{(1)}(E \cap [b, c])$. Применяя теорему Шимицу, убеждаемся в справедливости доказываемого.

Замечание. Крамер и Волд показали [11], что закон вполне определяется совокупностью всех своих проекций*. Этот факт позволяет в ряде случаев (см. напр. [2], стр. 128—138) свести посредством проектирования многомерную задачу к одномерной. Однако применение этого приема (известного под названием приема Крамера-Волда) в вопросах о разложениях многомерных законов представляется затруднительным**. С одной стороны, при проектировании «разложимость» закона может существенно улучшиться: Леви [14] построил пример неразложимого закона, у которого все проекции безгранично делимы. С другой стороны, построенный нами выше пример*** показывает, что при проектировании может произойти и ухудшение «разложимости».

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилев. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, М., 1960.
2. Г. Крамер. Случайные величины и распределения вероятностей, ИЛ, М., 1947.
3. Ю. В. Линник. Разложения вероятностных законов. Изд-во ЛГУ, Л., 1960.
4. И. В. Островский. О разложениях безгранично делимых законов без гауссовой компоненты. ДАН СССР, **161**, № 1 (1965), 48—51.
5. И. В. Островский. Некоторые теоремы о разложениях вероятностных законов. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **79** (1965), 198—235.
6. Д. А. Райков. О разложении закона Пуассона, ДАН, **14** (1937), 9—12.
7. Д. А. Райков. О разложении законов Гаусса и Пуассона, «Изв. АН СССР, серия матем.», **2** (1938), 91—124.
8. Б. А. Фуks. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1962.
9. Н. Cramér. Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion. Math. Zeitschr., **41** (1936), 405—414.
10. Н. Cramér. On the factorisation of certain probability distribution. Arkiv för mat., **1**, № 7, (1949), 61—65.
11. Н. Cramér, H. Wold. Some theorems on distribution functions. J. Lond. Math. Soc., **11** (1936), 290—294.
12. Н. Kellner. Linearkombinationen zufälliger Größen und ihre gemeinsame Verteilung. Math. Zeitschr., **84** (1964), 403—414.
13. P. Lévy. Théorie de l'addition des variables aleatoires, Paris, Gauthier-Villars, 1937.
14. P. Lévy. The arithmetical character of the Wishart distribution, Proc. Camb. Phil. Soc., **44** № 2 (1948), 295—297.
15. R. Shimizu. On the decomposition of infinitely divisible characteristic functions with a continuous Poisson spectrum, Annals of the Institute Statistical Mathematics, **16** (1964), 387—407.
16. H. Teicher. On the multivariate Poisson distribution. Scand. Actuarietids., № 1—2 (1954), 1—9.

* Этот результат усилен в недавней работе Келлера [12].

** Хотя именно этим приемом Крамер [9] доказал теорему о разложениях многомерного закона Гаусса.

*** Менее интересный пример получим, рассматривая закон P с х. ф. $\varphi(t; P) = 2^{-n} \prod_{k=1}^n (1 + e^{it_k})$. Этот закон разложим, но его проекции на орты координатных

осей неразложимы. Нетрудно показать, что разложимый n -мерный закон обладает следующим свойством: если мы имеем совокупность из $s > 2n - 2$ ортов, из которых любые n линейно независимы, то среди проекций на эти орты найдутся разложимые.