

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА

(повне найменування вищого навчального закладу)

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

(назва факультету)

КАФЕДРА ФІЗИКИ ЯДРА ТА ВИСОКИХ ЕНЕРГІЙ ІМЕНІ О. І. АХІЄЗЕРА

(повна назва кафедри)

Пояснювальна записка

до дипломного проекту (роботи)

БАКАЛАВРА

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему

укр. Квантова ємність систем на основі кубітів

англ. Quantum capacitance of qubit-based systems

Виконав(ла): студент 4 курсу навчання

за ОПП бакалавр

напрям підготовки 6.040204 Прикладна фізика

Кіщенко О. Ю.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

Керівник к.ф.-м.н., доц. Кузнєцов П.Е.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

Консультант д.ф.-м.н., проф. Шевченко С. М.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

Рецензент к.т.н. Гордієнко Е.Ю.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

АНОТАЦІЯ

Кіценко Олександр. – Квантова ємність систем на основі кубітів. – рукопис. Дипломна робота бакалавра з прикладної фізики (напрямок підготовки «Прикладна фізика») – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2024.

47 с., 11 рис., 0 табл., 25 джерел.

Дипломна робота присвячена дослідженню гібридних систем, що складаються з класичної та квантової підсистем. Перший розділ присвячений огляду літератури і питань, що виникають в сучасних дослідженнях квантової ємності, індуктивності, Сізіфівського опору. У випадку слабкого зв'язку між підсистемами застосовано асимптотичний метод Крилова-Боголюбова для введення понять квантової ємності та індуктивності. На основі методу канонічного квантування запропоновано строгий формалізм отримання повної системи зв'язаних рівнянь еволюції квантової та класичної підсистем. Новий формалізм застосовано на практично важливих випадках подвійної квантової точки та одноелектронного транзистора. Результати роботи можуть бути використані для опису динаміки довільних гібридних систем.

ABSTRACT

Kitsenko Oleksandr. –Quantum capacitance of qubit-based systems. Bachelor's thesis in applied physics (specialty – «Applied physics») – V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2024.

47 p., 11 fig., 0 tabl., 25 ref.

The thesis is addressed to the description of hybrid system which consists of classical and quantum subsystems. The first section is devoted to the review of the literature and problems which arise in modern articles on quantum capacitance, inductance and Sisyphus resistance. In the case of weak link between the subsystems Krylov-Bogolyubov asymptotic method was applied to introduce quantum capacitance and inductance. On the basis of canonical quantization, the rigorous formalism for obtaining the complete set of equations for evolution of quantum and classical subsystems was applied. New formalism was employed for double quantum dot and single electron transistor which are essential for practical applications. Results of the work could be used for description of the dynamics for arbitrary hybrid systems.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.....	6
РОЗДІЛ 2. АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД КРИЛОВА-БОГОЛЮБОВА. КВАНТОВА ЄМНІСТЬ ТА ІНДУКТИВНІСТЬ.....	9
2.1 Асимптотичний метод Крилова-Боголюбова	9
2.2 Стаціонарні значення амплітуди і зсуву фаз	13
2.3 Квантова індуктивність.....	15
РОЗДІЛ 3. ФОРМАЛІЗМИ ЛАГРАНЖА І ГАМІЛЬТОНА. ПРОЦЕДУРА КАНОНІЧНОГО КВАНТУВАННЯ	18
3.1. Лагранжіан LC -контур	18
3.2. Формалізм Лагранжа для електричних контурів.....	20
3.3. Функція Рауса та функція Гамільтона	23
3.4. Процедура квантування	24
РОЗДІЛ 4. ПРИКЛАДИ КВАНТУВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ЛАНЦЮГІВ ...	27
4.1. Стаціонарний зарядовий кубіт	27
4.2. Подвійна квантова точка.....	30
4.3 Одноелектронний транзистор (послідовне з'єднання).....	35
4.4 Одноелектронний транзистор (паралельне з'єднання)	39
4.5 Динаміка послідовного одноелектронного транзистора.....	41
ВИСНОВКИ	44
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	45

ВСТУП

Актуальність теми. Квантові системи на основі кубітів відіграють все більшу роль в дослідженнях сьогодення, особливо в області квантових обчислень. Також неймовірно важливо знати як квантова підсистема впливає на класичну підсистему через квантову ємність [1], індуктивність [2] чи опір [3]. Якщо класичний резонатор взаємодіє з квантовою підсистемою, то характеристики класичної системи змінюються. Досліджуючи відгук резонатора можна отримати певні знання про квантову підсистему. Тим не менш підходи введення квантових та ефективних характеристик останніх досліджень природньо формулюють питання на які ми намагаємося дати відповідь. Саме тому ця робота присвячена вивченню динаміки складних двокомпонентних систем і яким чином можна строго прийти до визначення квантової індуктивності та ємності.

Мета дослідження полягає у ознайомленні і вивченні сучасних підходів у радіочастотній рефлектометрії, аналізі наявних теоретичних досліджень і запропонуванні нами нових підходів щодо опису зв'язку класичного резонатора та квантової підсистеми: напівкласичного опису лише класичної підсистеми на основі асимптотичного методу Крилова-Боголюбова, а також побудова більш фундаментального методу, що ґрунтується на адаптації класичних формалізмів Лагранжа і Гамільтона для електричних ланцюгів, канонічному квантуванні, що призводить до замкненої зв'язаної системи рівнянь еволюції квантової та класичної підсистем; на конкретних прикладах в рамках отриманого формалізму продемонструвати принцип побудови Лагранжіану і квантування різних систем: зарядового кубіту, подвійної квантової точки, одноелектронного транзистора.

Практична цінність роботи полягає в можливості більш системного і детального теоретичного опису наявних експериментальних робіт, теоретичному передбаченні динаміки як класичного резонатора, так і квантової системи.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

На противагу класичним системам існують більш складні — гібридні системи, що складаються з класичних і квантових елементів. Такі системи є цікавими як для теоретичних досліджень так і є необхідними з практичної точки зору для отримання знань про стан квантових систем за допомогою радіочастотної рефлектометрії [4]. В залежності від конкретного вигляду квантової підсистеми, її вплив на класичний резонатор визначають через квантову ємність [1; 2; 5], індуктивність [2; 6; 7] чи квантовий опір, або ж так званий Сізіфів опір [3; 8-10].

При цьому дослідження відбувається для багатьох типів систем: подвійних квантових точок [1; 11], ящиків на куперівських парах [12-14], одноелектронних транзисторів [15], тощо.

На прикладі роботи [12] розглянемо процедуру введення квантової ємності. Після запису електричного ланцюга (див. рис. 1.1) записується гамільтоніан квантової підсистеми

$$\begin{aligned} \hat{H} = E_C (\hat{n} - n_g)^2 - 2E_J \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos(\hat{\theta}) + \\ + 2dE_J \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\hat{\theta}) - \frac{C_g V_g^2}{2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

і визначаються стаціонарні рівні енергії

$$E_{0,1} = E_C (n_g^2 - 2n_g + 2) \mp \sqrt{[E_J \cos \varphi / 2]^2 + [2E_C (1 - n_g)]^2} - \frac{C_g V_g^2}{2}. \quad (1.2)$$

Після цього по аналогії з відомої формули для енергії конденсатора $E = CV^2/2$ можна визначити ємність як другу похідну за затворною напругою

$$C_{\text{eff}}^k = -\frac{\partial^2 E_k}{\partial V_g^2} = -\frac{C_g^2}{e^2} \frac{\partial^2 E_k}{\partial n_g^2}. \quad (1.3)$$

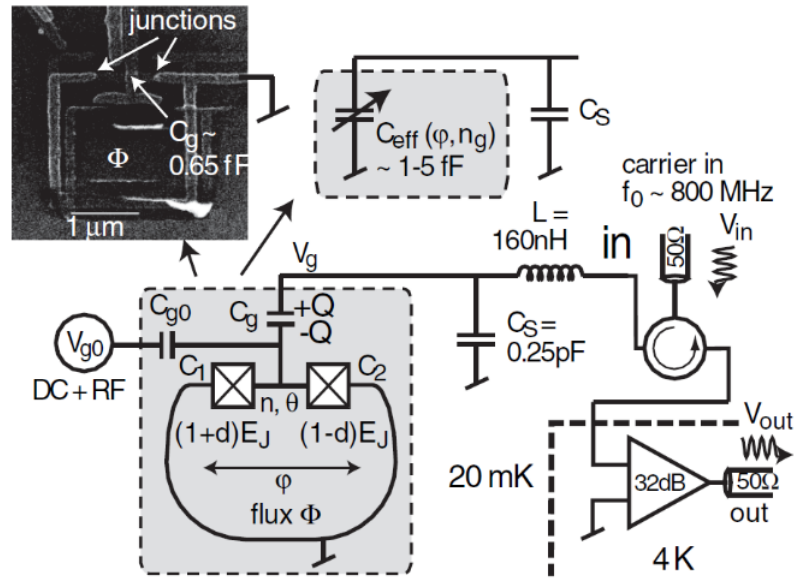


Рис. 1.1. Експериментальна схема роботи [12], повне схематичне зображення електричної схеми та спрощення схеми за допомогою поняття квантової ємності.

У такому підході спрощеного розгляду динаміки квантової системи виникає багато питань. Наприклад, залишається незрозумілим вплив класичної підсистеми на квантову. У повному розгляді комбінації класичної та квантової підсистем очевидним є те, що кожен з елементів має зворотній зв'язок на решту системи. Наявні обзори [10; 16] займаються лише питаннями побудови і дослідження динаміки квантових об'єктів, повністю відволікаючись від впливу класичної підсистеми на динаміку. Розгляд стаціонарного випадку очевидно обмежує застосування термінології квантової ємності при розгляді динаміки. Чи залишається можливим опис динаміки у термінах квантової ємності при сильному зв'язку між системами?

Ми спробуємо послідовно відповісти на поставлені питання. Для випадку слабого зв'язку, що розглянутий у розділі 2, слід очікувати, що класична частина системи описується рівнянням подібним до рівняння осцилятора зі

слабкою нелінійною правою частиною вигляду $\varepsilon f(x, \dot{x})$. Природньо очікувати, що класична частина системи описується рівнянням класу

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (1.4)$$

в той час як швидко осцилююча квантова підсистема знаходиться у стані з майже незмінними заселеностями енергетичних рівнів. Такий асимптотичний опис є цікавим, хоча, очевидно, не є повним, оскільки не містить рівнянь еволюції квантової підсистеми. Тому розділи 3 і 4 пропонують формалізм побудови замкненої системи рівнянь сумісної еволюції обох підсистем.

РОЗДІЛ 2. АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД КРИЛОВА-БОГОЛЮБОВА. КВАНТОВА ЄМНІСТЬ ТА ІНДУКТИВНІСТЬ

2.1 Асимптотичний метод Крилова-Боголюбова

Як зазначалося в розділі 1 з фізичних міркувань у випадку слабого зв'язку з квантовою підсистемою «рівняння руху» для класичної підсистеми може бути записано у вигляді

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad (2.1)$$

де ε — малий параметр. Рівняння може бути точно розв'язано у випадку $\varepsilon = 0$. Загальним розв'язком є

$$x = a \cos \psi = a \cos(\omega_0 t + \psi_0). \quad (2.2)$$

У випадку малих але відмінних від нуля ε метод Крилова-Боголюбова [17] полягає в пошуку залежності від часу функцій $a = a(t)$ та $\psi = \psi(t)$. Для вирішення цієї задачі розв'язок для узагальненої координати x шукається у вигляді наступного ряду

$$\begin{aligned} x &= a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots, \\ x &= a \cos \psi + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(a, \psi), \end{aligned} \quad (2.3)$$

в якому невідомими величинами є a , ψ та набір функцій $u_k(a, \psi)$. Крім того похідні за часом від амплітуди a та фази ψ шукаються у наступному вигляді

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \dot{\psi} &= \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обраховуючи другу похідну за часом $\ddot{x}$ в лівій частині (2.1) і підставляючи розкладання для x та $\dot{x}$ у праву частину (2.1) та розкладаючи в ряд за малим параметром ε отримаємо повну систему рівнянь для однозначного визначення усіх невідомих функцій. Продемонструємо

написане вище проводячи розкладання з точністю до ε^2 . Першим чином обрахуємо $\dot{x}$ та $\ddot{x}$ з визначення (2.3) за допомогою (2.4):

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \dot{a} \cos \psi - a \dot{\psi} \sin \psi + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\dot{a} \frac{\partial u_k}{\partial a} + \dot{\psi} \frac{\partial u_k}{\partial \psi} \right) = \\
 &= -a \omega_0 \sin \psi + \varepsilon \left[A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right] + \\
 &+ \varepsilon^2 \left[A_2 \cos \psi - a B_2 \sin \psi + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} + A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} + \omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial \psi} \right] + \dots, \\
 \ddot{x} &= -a \omega_0^2 \cos \psi + \varepsilon \left[-2a \omega_0 B_1 \cos \psi - 2a \omega_0 A_1 \sin \psi + \omega_0^2 u_1 + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \right] + \\
 &+ \varepsilon^2 \left[\left(A_1 \frac{dA_1}{da} - a B_1^2 - 2\omega_0 a B_2 \right) \cos \psi - \left(2\omega_0 A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi + \right. \\
 &\quad \left. + 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi} + 2\omega_0 B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

З Іншого боку підставляючи $x = a \cos \psi + \varepsilon u_1$ та

$$\dot{x} = -a \omega_0 \sin \psi + \varepsilon \left[A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right] \text{ у } f(x, \dot{x}) \text{ маємо}$$

$$\begin{aligned}
 f(x, \dot{x}) &\approx f(a \cos \psi, -a \omega_0 \sin \psi) + \\
 &+ \varepsilon \left[f^{(1,0)} u_1 + f^{(0,1)} \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Підставимо отримані розкладання в (2.1) і явно виділимо коефіцієнти при однакових ступенях ε :

$$\varepsilon \left(-2a \omega_0 B_1 \cos \psi - 2\omega_0 A_1 \sin \psi - f_1(a, \psi) + \omega_0^2 u_1 + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \right) +$$

$$+\varepsilon^2 \left(-2a\omega_0 B_2 \cos \psi - 2\omega_0 A_2 \sin \psi - f_2(a, \psi) + \omega_0^2 u_2 + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} \right) = 0, \quad (2.8)$$

де

$$\begin{aligned} f_1(a, \psi) &= f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi), \\ f_2(a, \psi) &= -aB_1^2 \cos \psi - 2A_1 B_1 \sin \psi + A_1 \frac{dA_1}{da} \cos \psi - aA_1 \frac{dB_1}{da} \sin \psi + \\ &+ f^{(0,1)}(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) + \\ &+ 2\omega_0 B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - u_1 f^{(1,0)}(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) + 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \psi}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Очевидно, для тотожного виконання рівності (2.8), коефіцієнти при усіх ступенях ε мають дорівнювати нулю, отже

$$\begin{cases} -2a\omega_0 B_1 \cos \psi - 2\omega_0 A_1 \sin \psi - f_1(a, \psi) + \omega_0^2 u_1 + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} = 0, \\ -2a\omega_0 B_2 \cos \psi - 2\omega_0 A_2 \sin \psi - f_2(a, \psi) + \omega_0^2 u_2 + \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Тепер задача полягає у вирішенні системи (2.10). Для прикладу розглянемо перше рівняння системи. Розв'язок в усіх наступних порядках будується аналогічно. Так як ми очікуємо періодичний розв'язок, то розкладемо u_1 та f_1 в ряд Фур'є по періодичній фазі ψ :

$$\begin{aligned} u_1(a, \psi) &= v_0(a) + \sum_{k=1}^{\infty} [v_k(a) \cos k\psi + w_k(a) \sin k\psi], \\ f_1(a, \psi) &= g_0(a) + \sum_{k=1}^{\infty} [g_k(a) \cos k\psi + h_k(a) \sin k\psi]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Підставляючи (2.11) в (2.10) отримаємо коефіцієнти при власних функціях

$$\begin{aligned}
1: \quad \omega_0^2 v_0(a) &= g_0(a), \\
\sin \psi: \quad 0 &= h_1(a) + 2\omega_0 A_1, \\
\cos \psi: \quad 0 &= g_1(a) + 2a\omega_0 B_1, \\
\sin k\psi: \quad \omega_0^2(1-k^2)w_k(a) &= h_k(a), \\
\cos k\psi: \quad \omega_0^2(1-k^2)v_k(a) &= g_k(a).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

З цих рівнянь можна однозначно визначити усі невідомі функції, окрім $v_1(a)$ та $w_1(a)$, які слід покласти рівними нулю, оскільки основна гармоніка окремо виділена в розв'язку (2.3). Остаточено

$$\begin{aligned}
v_0(a) &= \frac{g_0(a)}{\omega_0^2}, \quad A_1 = -\frac{h_1(a)}{2\omega_0}, \quad B_1 = -\frac{g_1(a)}{2a\omega_0}, \\
w_k(a) &= \frac{h_k(a)}{\omega_0^2(1-k^2)}, \quad v_k(a) = \frac{g_k(a)}{\omega_0^2(1-k^2)}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Отже

$$u_1(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\omega_0^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{g_k(a) \cos k\psi + h_k(a) \sin k\psi}{\omega_0^2(1-k^2)}, \tag{2.14}$$

а диференціальні рівняння для визначення амплітуди та фази (2.4) мають вигляд

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= -\varepsilon \frac{h_1(a)}{2\omega_0}, \\
\dot{\psi} &= \omega_0 - \varepsilon \frac{g_1(a)}{2a\omega_0} = \omega_1.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Слід зазначити, що можна аналогічно до (2.15) побудувати розв'язок, виписавши систему рівнянь для $\dot{a}$ та $\dot{\psi}$ в будь-якому порядку по ε . Таким чином можемо визначити у першому наближенні зсув власної частоти

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0 = -\frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \cos \psi d\psi. \tag{2.16}$$

Однак не менш важливим з експериментальної точки зору є отримання явних виразів для зсувів амплітуди та фази пробного сигналу на виході з цікавої для розгляду схеми. Тому слід додати до розгляду слабкий пробний сигнал у праву частину (2.1) і визначити стаціонарні значення амплітуди і зсуву фази сигналу, що встановилися.

2.2 Стаціонарні значення амплітуди і зсуву фаз

Розглянемо тепер рівняння для коливань осцилятора з наявністю зовнішнього слабого пробного сигналу, з частотою ω_p , що близька до резонансної $\omega_p \approx \omega_0$:

$$m\ddot{x} + k_0x = \varepsilon F(x, \dot{x}) + \varepsilon F_p \sin \omega_p t. \quad (2.17)$$

При наявності явної залежності від часу у правій частині рівняння асимптотичний метод Крілова-Боголюбова може бути аналогічно побудований [17]. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$x = a \cos \psi = a \cos(\omega_p t + \delta). \quad (2.18)$$

Тоді отримаємо наступні рівняння на амплітуду a та фазу δ :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 m} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi, -a\omega_p \sin \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\varepsilon F_p \cos \delta}{m(\omega_0 + \omega_p)}, \\ \frac{d\delta}{dt} &= \omega_0 - \omega_p - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a m} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi, -a\omega_p \sin \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\varepsilon F_p \sin \delta}{ma(\omega_0 + \omega_p)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Зробимо позначення

$$k_{\text{eff}} = k_0 - \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi, -a\omega_p \sin \psi) \cos \psi d\psi = k_0 + k_q, \quad (2.20)$$

та

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\varepsilon}{\pi a \omega_0} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi, -a \omega_p \sin \psi) \sin \psi d\psi = \lambda_q. \quad (2.21)$$

Ми ввели відповідні позначення для ефективної «жорсткості» та «коефіцієнту затухання», що складаються з двох частин: незбурених з індексом «0», та тих які додаються внаслідок взаємодії з квантовою підсистемою з індексом «q». Тоді підстановка цих позначень в (2.17) дасть

$$m\ddot{x} + \lambda_{\text{eff}}\dot{x} + k_{\text{eff}}x = \varepsilon F_p \sin \omega_p t. \quad (2.22)$$

Система рівнянь для визначення амплітуди і фази (2.19) при цьому значно спрощується

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\lambda_{\text{eff}}}{2m}a - \frac{\varepsilon F_p}{m(\omega_0 + \omega_p)} \cos \delta, \\ \frac{d\delta}{dt} &= \omega_{\text{eff}} - \omega_p + \frac{\varepsilon F_p}{ma(\omega_0 + \omega_p)} \sin \delta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

З системи (2.23) можна визначити амплітуду і фазу у стаціонарному режимі коливань. Для цього слід покласти $\dot{a} = \dot{\delta} = 0$. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{2m(\omega_{\text{eff}} - \omega_p)}{\lambda_{\text{eff}}}, \\ a &= -\frac{2\varepsilon F_p \cos \delta}{\lambda_{\text{eff}}(\omega_0 + \omega_p)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Важливим результатом є те, що стаціонарні значення амплітуди a та зсуву фази δ входять ефективні власна частота ω_{eff} та коефіцієнт затухання λ_{eff} . В свою чергу ефективні параметри складаються з незбурених та квантових, таким чином визначаючи експериментально амплітуду і зсув фаз, можна відновити λ_q та ω_q , а отже і визначити вплив квантової підсистеми на загальну динаміку!

Для того щоб більш наочно зрозуміти отриманий результат для зсуву фази та амплітуди стаціонарного сигналу розглянемо конкретний приклад індуктивно зв'язаного класичного резонансного RLC контуру та потокового кубіту.

2.3 Квантова індуктивність

Звісно можна розглядати не ємнісний зв'язок між квантовою і класичною підсистемами (див. розділи 3, 4), а індуктивний [7]. При цьому так само можна стверджувати про наявність квантової індуктивності. Підтвердимо це твердження теоретично на основі напівкласичної теорії з використанням рівнянь Кірхгофа.

Тож розглянемо потоковий кубіт індуктивно зв'язаний з класичним RLC контуром (див. рис. 2.1). Для того щоб визначити рівняння руху слід записати закони Кірхгофа для класичної підсистеми:

$$V = L_0 \dot{I}_L - \dot{\Phi}_e, \quad I_C = C_0 \dot{V}, \quad I_R = \frac{V}{R_0}, \quad (2.25)$$

де V — напруга, що падає на індуктивності L_0 , ємності C_0 та резисторі R_0 , а Φ_e — магнітний потік від кубіту до класичної індуктивності. Згідно із законом Кірхгофа сума струмів $I_C + I_R + I_L = I_{\text{bias}}$ є відомою величиною. Диференціюючи це рівняння за часом та підставляючи напругу V знайдемо

$$C_0 \ddot{V} + \frac{\dot{V}}{R_0} + \frac{V}{L_0} = -\frac{\dot{\Phi}_e(V, \dot{V})}{L_0} + \dot{I}_{\text{bias}}. \quad (2.26)$$

Нехай струм, подібно до (2.17), змінюється по синусоїдальному закону

$$I_{\text{bias}} = I_A \sin \omega_p t. \quad (2.27)$$

Якщо додатково подібно до (2.22) ввести

$$\frac{1}{R_{\text{eff}}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_q}, \quad \frac{1}{L_{\text{eff}}} = \frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_q}, \quad (2.28)$$

то тоді отримаємо відповідні вирази для квантової ємності та індуктивності

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_q} &= -\frac{\omega_0 C_0}{\pi a} \int_0^{2\pi} \dot{\Phi}_e(a \cos \psi, -a \omega_p \sin \psi) \cos \psi d\psi, \\ \frac{1}{L_q} &= \frac{1}{\pi a L_0} \int_0^{2\pi} \dot{\Phi}_e(a \cos \psi, -a \omega_p \sin \psi) \sin \psi d\psi,\end{aligned}\quad (2.29)$$

а також вирази для стаціонарних значень зсуву фаз і амплітуди:

$$\begin{aligned}\tan \delta &= 2\omega_0 C_0 R_{\text{eff}} \left(\xi_0 + \frac{L_0 - L_{\text{eff}}}{2L_0} \right), \\ a &= I_A R_{\text{eff}} (1 - \xi_0) \cos \delta,\end{aligned}\quad (2.30)$$

де було введено позначення малого параметра відхилення пробної частоти від власної $\xi_0 = 1 - \omega_p / \omega_0$.

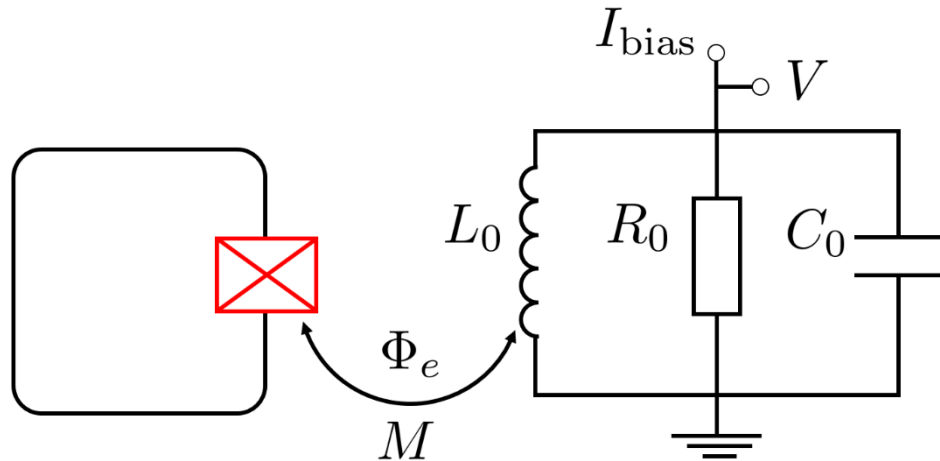


Рис. 2.1. Індуктивний зв'язок класичного RLC контуру та кубіту через малу взаємну індуктивність M та зовнішній магнітний потік Φ_e .

Питання подальшої побудови напівкласичної теорії індуктивного з'єднання вимагає знання явного вигляду залежності магнітного потоку $\Phi_e = \Phi_e(V, \dot{V})$ від напруги та її похідної за часом.

Більш загально, очевидно, для розв'язку рівняння руху (2.1) слід отримати явний вигляд сили взаємодії між класичною та квантовою підсистемою $f(x, \dot{x})$. Для того щоб визначити цей зв'язок для будь-яких

систем слід побудувати загальну теорію в якій містилися б і класичні і квантові рівняння руху. Якщо в цій системі існують швидкі квантові осциляції, то після усереднення за ними можна сподіватися отримати рівняння класу Крилова-Боголюбова із правою частиною у вигляді $f(x, \dot{x})$. Для розв'язку цієї задачі виявляється зручним опиратися на класичні підходи механік Лагранжа і Гамільтона.

РОЗДІЛ 3. ФОРМАЛІЗМИ ЛАГРАНЖА І ГАМІЛЬТОНА. ПРОЦЕДУРА КАНОНІЧНОГО КВАНТУВАННЯ

3.1. Лагранжіан LC -контур

Розпочнемо побудову механіки Лагранжа і Гамільтона для електричних контурів з найпростішого прикладу LC -контур (див. рис. 3.1.).

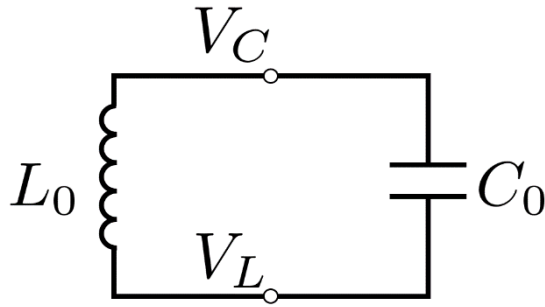


Рис. 3.1. Схематичне зображення LC -контур з індуктивністю L_0 та ємністю C_0 . Для класичного опису задаються електричні потенціали V_C та V_L між ємністю та індуктивністю.

В минулому розділі аналіз зв'язку з квантовою підсистемою відбувався за допомогою законів Кірхгофа. Для випадку LC -контур співвідношення між струмом та напругою на конденсаторі $I_C = C_0 (\dot{V}_C - \dot{V}_L)$, а електрорушійна сила (ЕРС) на індуктивності визначається із співвідношення $V_C - V_L = -\frac{L_0}{c^2} \dot{I}_L$ (в цьому розділі працюємо в системі СГС). Виражаючи $\dot{V}_C - \dot{V}_L$ з обох рівностей отримаємо

$$\dot{V}_C - \dot{V}_L = \frac{I_C}{C_0} = -\frac{L_0}{c^2} \ddot{I}_L. \quad (3.1)$$

Перший закон Кірхгофа пов'язує струми крізь конденсатор та індуктивність $I_C = I_L$, тому з (3.1) отримаємо класичне рівняння коливання електричного осцилятора:

$$\frac{L_0}{c^2} \ddot{I}_C + \frac{I_C}{C_0} = 0. \quad (3.2)$$

Можемо провести аналогію з рівнянням руху осцилятора в класичній механіці $m\ddot{x} + kx = 0$ і таким чином записати лагранжіан механічної системи

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \text{ Тепер користуючись наведеною аналогією лагранжіан}$$

для електричного контуру запишемо як

$$L(I_C, \dot{I}_C) = \frac{L_0 \dot{I}_C^2}{2c^2} - \frac{I_C^2}{2C_0}. \quad (3.3)$$

З цього виразу очевидно, що аналогом кінетичної енергії є енергія магнітного поля індуктивності $L_0 \dot{I}_C^2 / 2$, а аналогом потенційної енергії є енергія конденсатора $I_C^2 / 2C_0$. Однак цей вираз має декілька суттєвих недоліків.

По-перше, виходячи з лагранжіану поля класичної електродинаміки [18; 19]

$$L_f = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV \quad (3.4)$$

ми мали б отримати той самий лагранжіан $L(I_C, \dot{I}_C)$ після проведення усіх необхідних спрощень пов'язаних з введенням індуктивності та ємності.

Але можемо бачити, що відповідні вирази для $L(I_C, \dot{I}_C)$ та L_f відрізняються знаком. Це нам сигналізує про те, що не слід вважати параметризацію (3.3) природньою і найбільш зручною. Крім того очевидно, що розмірність лагранжіану (3.3) не є енергією: $[L(I_C, \dot{I}_C)] = \text{Дж}/\text{с}^2$. Тому в якості фундаментального слід обирати загальний лагранжіан теорії поля (3.4), це дасть змогу отримати правильну розмірність та правильний граничних випадок для лагранжіанів лінійних провідників.

3.2. Формалізм Лагранжа для електричних контурів

Спробуємо побудувати лагранжіан LC -контурі виходячи з загального виразу (3.4). Для цього запишемо енергію електричного та магнітного поля.

$$W_E = \int \frac{E^2}{8\pi} dV = \frac{C_0 (V_C - V_L)^2}{2}, \quad (3.5)$$

$$W_H = \int \frac{H^2}{8\pi} dV = \frac{c^2 \left[\int (V_C - V_L) dt \right]^2}{2L_0}. \quad (3.6)$$

Так як W_E має відповідати кінетичній енергії, а W_H — потенційній, то природньо ввести узагальнений потенціал $\psi = \int V dt$, узагальнену фазу $\Phi = c \int V dt$, а також безрозмірний потенціал $\varphi = \frac{2e}{\hbar} \int V dt$ [20]. При цьому маємо співвідношення між Φ та φ :

$$\Phi = \frac{\hbar c}{2e} \varphi = \frac{\Phi_0}{2\pi} \varphi, \quad (3.7)$$

де $\Phi_0 = \frac{\hbar c}{2e}$ — квант магнітного потоку. Таким чином лагранжіани ємності

L_C та індуктивності L_L (див. рис. 3.2 (а), (б)) мають вигляд

$$\begin{aligned} L_C(\Phi, \dot{\Phi}) &= \frac{C \dot{\Phi}^2}{2c^2}, \\ L_L(\Phi, \dot{\Phi}) &= -\frac{\Phi^2}{2L}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Загальний лагранжіан LC контуру (див. рис. 3.1) в термінах Φ записується як

$$L(\Phi, \dot{\Phi}) = \frac{C_0 (\dot{\Phi}_C - \dot{\Phi}_L)^2}{2c^2} - \frac{(\Phi_C - \Phi_L)^2}{2L_0}. \quad (3.9)$$

Відповідне стандартне рівняння руху має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} - \frac{\partial L}{\partial \Phi} = 0. \quad (3.10)$$

Можна узагальнити отриманий результат на випадок наявності зовнішнього магнітного потоку крізь індуктивність. У цьому випадку, як відомо, енергія магнітного поля дорівнюватиме [21]

$$W_H = \frac{L_0 I^2}{2c^2} + \frac{1}{c} I \Phi_{\text{ext}} = \frac{\Phi^2}{2L_0} + \frac{\Phi \Phi_{\text{ext}}}{L_0} = \frac{(\Phi + \Phi_{\text{ext}})^2}{2L_0} - \frac{\Phi_{\text{ext}}^2}{2L_0}. \quad (3.11)$$

Так як рівняння руху еквівалентні щодо заміни лагранжіану з точністю до повної похідної від функції координат та часу, то доданок $-\Phi_{\text{ext}}^2/2L_0$ можна відкинути з лагранжіану.

Також можемо розглянути побудову формалізму Лагранжа двох інших важливих елементів окрім ємності та індуктивності – резистора та переходу Джозефсона (див. рис. 3.2 (c) та (d)).

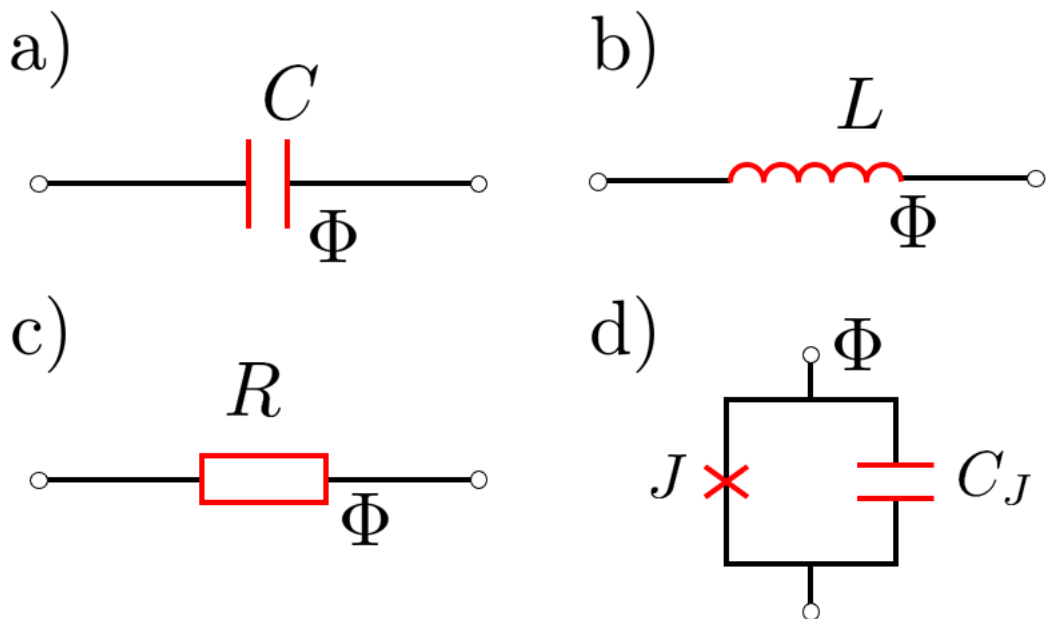


Рис. 3.2. Схематичне зображення (a) ємності, (b) індуктивності, (c) резистора та (d) переходу Джозефсона, що розглядається як паралельно з'єднані ємність та елемент Джозефсона. Лагранжіани ємності, індуктивності та переходу Джозефсона визначаються із співвідношення (3.8), (3.17) відповідно. Резистор, як дисипативний елемент, описується дисипативною функцією (3.14).

Спочатку розглянемо ситуацію, коли на резисторі опором R падає напруга V . Тоді на резисторі за законом Джоуля-Ленца за одиницю часу виділяється кількість теплоти $Q = \frac{V^2}{R}$ [22]. З іншого боку, дисипацію в механіку Лагранжа можна включити за допомогою дисипативної функції [23]. Як відомо, зміна енергії за одиницю часу

$$\frac{dE}{dt} = -2F. \quad (3.12)$$

Прирівнюючи $2F$ до Q здобудемо, що

$$F = \frac{V^2}{2R}. \quad (3.13)$$

Далі згадуючи зв'язок між напругою та узагальненою фазою остаточно маємо

$$F(\dot{\Phi}) = \frac{\dot{\Phi}^2}{2Rc^2}, \quad (3.14)$$

а у рівняння Лагранжа без дисипацій слід включити дисипативну функцію [23]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} - \frac{\partial L}{\partial \Phi} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{\Phi}}. \quad (3.15)$$

Перехід Джозефсона зазвичай складається з паралельно з'єднаної ємності та елемента Джозефсона для якого потенційна енергія має вигляд [24]

$$U = -E_J \cos \varphi = -E_J \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right). \quad (3.16)$$

Таким чином лагранжіан переходу Джозефсона складається з різниці кінетичної енергії ємності та потенційної енергії переходу Джозефсона

$$L_J = \frac{C_J \dot{\Phi}^2}{2c^2} + E_J \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right). \quad (3.17)$$

Далі нам буде важливо коректно описувати динаміку класичної і квантової підсистем. Виявляється, що зручно оперувати рівняннями Лагранжа для класичних ступенів вільності і рівняннями Гамільтона для квантових змінних, оскільки далі для них можна буде легко провести процедуру квантування і оперувати рівняннями Шредінгера або фон Неймана для хвильової функції або матриці густини відповідно.

3.3. Функція Рауса та функція Гамільтона

В цьому розділі розглянемо, яким чином визначається функція Рауса механічної системи. Розглянемо систему з S ступенями вільності, таким чином функція Лагранжа в загальному вигляді залежить від S узагальнених координат та швидкостей $L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$. Для того щоб здійснити перехід від формалізму Лагранжа до формалізму Гамільтона для перших k змінних слід скористатися функцією Рауса [23]

$$R(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_k, \dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_s) = \sum_{i=1}^k \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i - L, \quad (3.18)$$

де слід виразити узагальнені швидкості з $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ для перших k координат і

підставити у функцію Лагранжа. Так як зазвичай кінетична енергія в лагранжіані є квадратичною формою, то $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ визначає систему лінійних

алгебраїчних рівнянь, яка може бути легко вирішена. Таким чином для $i \leq k$ система описується рівняннями Гамільтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial R}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial R}{\partial q_i}, \quad (3.19)$$

а для $i > k$ система описується рівняннями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (3.20)$$

Зазначимо, що функція Рауса переходить в функцію Гамільтона при $k = s$. Далі слід з'ясувати яким чином проводити процедуру квантування для канонічно спряжених змінних у функції Рауса.

3.4. Процедура квантування

В цьому розділі проведемо процедуру квантування на прикладі системи, що складається з однієї класичної q_{cl} і однієї квантової q_q змінної. Лагранжіан має найбільш загальний вигляд $L = L(q_{cl}, \dot{q}_{cl}, q_q, \dot{q}_q)$, а функція Рауса $R = R(q_{cl}, \dot{q}_{cl}, q_q, p_q)$, крім того для класичної змінної q_{cl} присутня дисипативна функція $F(\dot{q}_{cl})$. Тоді при найпростішій параметризації рівняння руху для класичної змінної має вигляд

$$\ddot{q}_{cl} + 2\gamma_0 \dot{q}_{cl} + \omega_0^2 q_{cl} = f(q_{cl}, q_q, \dot{q}_q, \ddot{q}_q). \quad (3.21)$$

Слід зазначити, що це рівняння можна отримати одразу з Лагранжіану, не здійснюючи перехід до функції Рауса. Далі систему рівнянь Гамільтона для квантових змінних слід замінити рівнянням Шредінгера. При цьому канонічно спряжені координата та імпульс стають операторами, що пов'язані відомим комутаційним співвідношенням

$$[\hat{q}_q, \hat{p}_q] = i\hbar. \quad (3.22)$$

Система рівнянь Гамільтона замінюється в найпростішому випадку рівнянням Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{R} |\Psi\rangle, \quad (3.23)$$

в якому функція Рауса стає оператором $\hat{R} = \hat{R}(q_{cl}, \dot{q}_{cl}, \hat{q}_q, \hat{p}_q)$, який залежить як від класичних скалярних величин q_{cl} та $\dot{q}_{cl}$ так і від квантово-механічних операторів $\hat{q}_q$ та $\hat{p}_q$. Для того щоб система рівнянь (3.21) та (3.23) стала

самоузгодженою, слід в рівнянні Лагранжа праву частину f замінити на квантово-механічне очікуване $\langle \hat{f} \rangle$. Самоузгоджена система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \ddot{q}_{cl} + 2\gamma_0 \dot{q}_{cl} + \omega_0^2 q_{cl} = \langle \Psi | \hat{f}(q_{cl}, \hat{q}_q, \dot{\hat{q}}_q, \ddot{\hat{q}}_q) | \Psi \rangle, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Psi \rangle = \hat{R}(q_{cl}, \dot{q}_{cl}, \hat{q}_q, \hat{p}_q) | \Psi \rangle. \end{cases} \quad (3.24)$$

В першому рівнянні системи можуть бути присутні середні від операторів $\hat{q}_q$ або $\dot{\hat{q}}_q$. Згідно з загальним правилом обрахування оператора похідної [25] слід скористатися формулою

$$\hat{\dot{A}} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}]. \quad (3.25)$$

Тому для операторів першої та другої похідної в явному вигляді отримаємо

$$\hat{\dot{q}}_q = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{q}_q], \quad (3.26)$$

$$\hat{\ddot{q}}_q = \frac{\partial \hat{\dot{q}}_q}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\dot{q}}_q] = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}, \hat{q}_q \right] - \frac{1}{\hbar^2} [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{q}_q]]. \quad (3.27)$$

Також важливо зазначити, що зазвичай оператор $\hat{R}(q_{cl}, \dot{q}_{cl}, \hat{q}_q, \hat{p}_q)$ можна записати у вигляді суми трьох частин

$$\hat{R} = \hat{R}_{cl} + \hat{R}_q + \hat{R}_{int}, \quad (3.28)$$

де $\hat{R}_{cl}$ – залежить лише від класичних змінних, $\hat{R}_q$ – залежить лише від квантових змінних, а $\hat{R}_{int}$ містить як класичні змінні так і квантово-механічні оператори. Важливим тут є те, що $\hat{R}_{cl}$ завжди є діагональною матрицею в будь-якому представленні, отже впливає лише на зміну загальної фази хвильової

функції. Покажемо це. Для цього запишемо $\hat{R}_{\text{cl}} = R_{\text{cl}}(q_{\text{cl}}, \dot{q}_{\text{cl}})$ і підставимо у рівняння Шредінгера (3.24):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = R_{\text{cl}}(q_{\text{cl}}, \dot{q}_{\text{cl}}) |\Psi\rangle + (\hat{R}_{\text{q}} + \hat{R}_{\text{int}}) |\Psi\rangle. \quad (3.29)$$

Заміна хвильової функції

$$|\Psi\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t R_{\text{cl}} dt\right] |\chi\rangle \quad (3.30)$$

зводить рівняння до

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\chi\rangle = (\hat{R}_{\text{q}} + \hat{R}_{\text{int}}) |\chi\rangle \quad (3.31)$$

в чому легко переконатися елементарним обчисленням.

В наступному розділі розглянемо найпростіший випадок квантування стаціонарного зарядового кубіту без наявності класичного рівняння руху для того, щоб більше розібратися з процедурою квантування. Після цього розглянемо практично важливі випадки квантування подвійної квантової точки та одноелектронного транзистора.

РОЗДІЛ 4. ПРИКЛАДИ КВАНТУВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ЛАНЦЮГІВ

4.1. Стаціонарний зарядовий кубіт

В якості зарядового кубіта оберемо систему, що складається з переходу Джозефсона з енергією E_J та ємністю C_J [24] (див. рис. 4.1). На малюнках далі замість позначень фізичний електричних потенціалів будемо позначати узагальнені потенціали або фази згідно з (3.7). Після того як ми побачили схему електричного контуру слід записати кінетичні енергії конденсаторів

$$K = \frac{C_g}{2} \left(\frac{\hbar \dot{\phi}}{2e} - \frac{\hbar \dot{\phi}_g}{2e} \right)^2 + \frac{C_J}{2} \left(\frac{\hbar \dot{\phi}}{2e} \right)^2, \quad (4.1)$$

а також потенційну енергію елемента Джозефсона

$$U = -E_J \cos \phi. \quad (4.2)$$

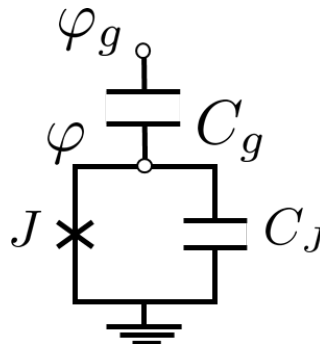


Рис. 4.1. Схематичне зображення зарядового кубіта, що складається з елемента Джозефсона J , ємності Джозефсона C_J та класичної ємності C_g .

Таким чином лагранжіан має вигляд

$$L = K - U = \frac{C_g}{2} \left(\frac{\hbar \dot{\phi}}{2e} - \frac{\hbar \dot{\phi}_g}{2e} \right)^2 + \frac{C_J}{2} \left(\frac{\hbar \dot{\phi}}{2e} \right)^2 + E_J \cos \phi. \quad (4.3)$$

Після того як функція Лагранжа відома, можемо знайти канонічно-спряжений імпульс та функцію Гамільтона:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 (C_g + C_J) \left(\dot{\phi} - \frac{C_g}{C_g + C_J} \dot{\phi}_g \right), \quad (4.4)$$

$$H(\phi, p) = \frac{2e^2}{\hbar^2 (C_g + C_J)} \left(p + \frac{\hbar^2}{4e^2} C_g \dot{\phi}_g \right)^2 - E_J \cos \phi, \quad (4.5)$$

де з гамільтоніану був відкинтий постійний доданок $-C_g \dot{\phi}_g^2 \hbar^2 / 8e^2$. Далі введемо характерну зарядову енергію $E_C = e^2 / 2C_\Sigma = e^2 / 2(C_g + C_J)$. Зрозуміло, що так як узагальнений потенціал ϕ безрозмірний, то спряжений імпульс має розмірність дії. Якщо обезрозмірити імпульс на зведену сталу Планка $\hbar$ то отримаємо

$$H(\phi, n) = 4E_C (n - n_g)^2 - E_J \cos \phi, \quad (4.6)$$

де $n = p/\hbar$, $n_g = -\frac{\hbar C_g \dot{\phi}_g}{4e^2} = -\frac{C_g V_g}{2e}$ безрозмірна затворна напруга. Так як спряженою величиною до напруги є заряд, то n відповідає кількості куперівських пар на острові. Далі квантуючи (4.6) отримаємо

$$\hat{H}(\phi, n) = 4E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\phi}. \quad (4.7)$$

Для того, щоб розглядати кубіт як зарядовий, перший доданок в гамільтоніані, що відповідає зарядовій енергії, має бути набагато більше за Джозефсонівську енергію: $E_C \gg E_J$. З цієї причини з зарядовим кубітом зручно працювати в зарядовому базисі і розглядати потенційну енергію як збурення. Так як в гамільтоніан фаза $\hat{\phi}$ входить періодичним чином, то рішення слід шукати також періодичне. Це теж є однією з причин чому виявляється зручним працювати в зарядовому базисі, де $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$. При цьому звісно $\hat{n} = \sum_n n|n\rangle\langle n|$. У координатному зображенні власні стани $|n\rangle$

мають вигляд $\langle \varphi | n \rangle = e^{in\varphi}$. Легко також визначити матричні елементи

операторів $\sin \hat{\varphi}$ та $\cos \hat{\varphi}$. Оскільки $\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$, то

$$\cos \hat{\varphi} |n\rangle = \frac{|n+1\rangle + |n-1\rangle}{2} \quad (4.8)$$

і матричні елементи $\langle m | \cos \hat{\varphi} | p \rangle$ не дадуть нуль, лише при $m - p = \pm 1$.

Таким чином маємо

$$\cos \hat{\varphi} = \sum_n \frac{|n+1\rangle \langle n| + |n-1\rangle \langle n|}{2}, \quad (4.9)$$

і аналогічно для $\sin \hat{\varphi}$

$$\sin \hat{\varphi} = \sum_n \frac{|n+1\rangle \langle n| - |n-1\rangle \langle n|}{2i}. \quad (4.10)$$

Після того як усі матричні елементи операторів в $\hat{H}$ відомі, отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{H}(\varphi, n) = \sum_n 4E_C (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - \\ - \frac{E_J}{2} (|n+1\rangle \langle n| + |n-1\rangle \langle n|). \end{aligned} \quad (4.11)$$

В дворівневому наближенні, базис утворений станами $|0\rangle$ та $|1\rangle$, тому в матричному вигляді гамільтоніан матиме вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} 4E_C n_g^2 & -E_J/2 \\ -E_J/2 & 4E_C (1 - 2n_g + n_g^2) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Як було зазначено в розділі (3.4) з гамільтоніану завжди можна відкинути доданок пропорційний одиничній матриці. Зробимо це так, щоб гамільтоніан став псевдоспіновим

$$H = -\frac{\Delta}{2} \sigma_x - \frac{\varepsilon}{2} \sigma_z. \quad (4.13)$$

Розрахунок показує, що для цього необхідно відкинути доданок $4E_C(n_g^2 - n_g + 1/2)$, при цьому

$$\Delta = E_J, \quad \varepsilon = 4E_C(1 - 2n_g). \quad (4.14)$$

Випишемо також в явному вигляді дворівневі наближення операторів $\sin \hat{\phi}$ та $\cos \hat{\phi}$, так як їх явний вигляд буде корисним надалі:

$$\cos \hat{\phi} = \frac{|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_x, \quad (4.15)$$

$$\sin \hat{\phi} = \frac{|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|}{2i} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2i \\ +1/2i & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\sigma_y. \quad (4.16)$$

Слід зазначити, що увесь розгляд проводився для $n_g = \text{const}$ що не залежить від часу, однак можна повторити викладки і для випадку, коли затворна напруга залежить від часу. Для розгляду нестационарної задачі отримаємо той самий вираз для багаторівневого гамільтоніану (4.11) та дворівневого наближення. Отримаємо ту саму відповідь, оскільки ми позбувались доданків пропорційних n_g двічі – один раз при побудові класичної функції Гамільтона (4.6), а інший раз – для отримання псевдоспінового гамільтоніану (4.13).

4.2. Подвійна квантова точка

Доволі часто [1; 11] в дослідженнях можна зустріти розгляд динаміки подвійної квантової точки. Подібно до попереднього підрозділу можемо розглянути стаціонарну подвійну квантову точку і отримати для неї псевдоспіновий гамільтоніан, але ми одразу «прив'яжемо» подвійну квантову точку до класичного коливального контуру і отримаємо у явному вигляді систему рівнянь для сумісної динаміки класичної та квантової підсистем.

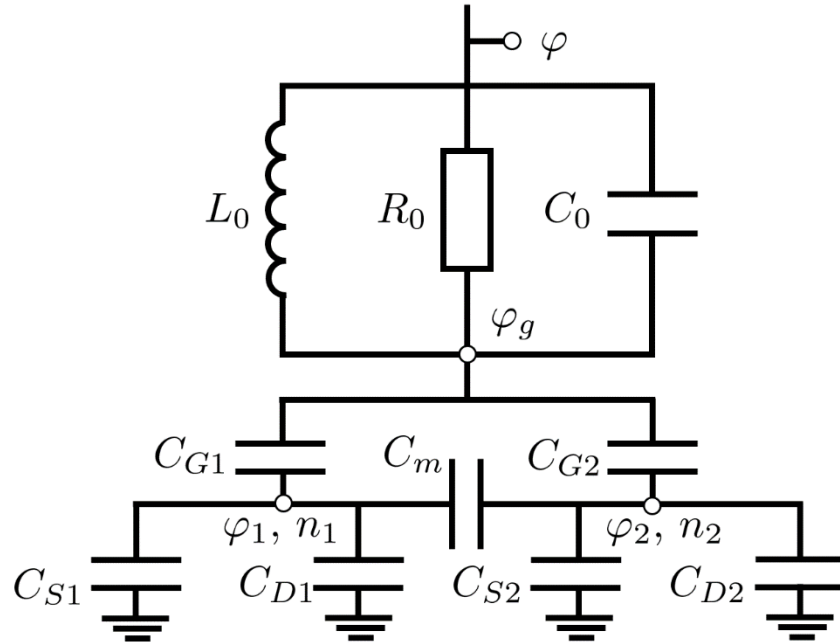


Рис. 4.2. Схематичне зображення подвійної квантової точки пов'язаної з класичним коливальним RLC контуром. Кванові островки з потенціалами $\varphi_{1,2}$ відповідають квантовим точкам, що взаємодіють між собою через мостову ємність C_m .

Розпочнемо дослідження з розгляду схеми на рис. 4.2. В лагранжіан системи також включимо наявність зовнішнього магнітного потоку крізь індуктивність L_0 , який може виступати в ролі контролюючого параметра класичних змінних. Лагранжіан системи має вигляд

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2e}{\hbar}\right)^2 L = & \frac{C_0}{2}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_g)^2 + \frac{C_{G1}}{2}(\dot{\varphi}_g - \dot{\varphi}_1)^2 + \\
 & + \frac{C_{G2}}{2}(\dot{\varphi}_g - \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{C_m}{2}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{C_{S1} + C_{D1}}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \\
 & + \frac{C_{S2} + C_{D2}}{2}\dot{\varphi}_2^2 - \frac{c^2}{2L_0} \left(\varphi - \varphi_g + 2\pi \frac{\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0} \right)^2,
 \end{aligned} \quad (4.17)$$

а дисипативна функція

$$F = \frac{1}{2R_0} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 (\dot{\phi} - \dot{\phi}_g)^2. \quad (4.18)$$

Лагранжіан, не дивлячись на кількість доданків, насправді має доволі просту структуру, оскільки подвійна квантова точка містить багато ємностей, особливо пов'язаних зі змінними $\varphi_{1,2}$, які будуть проквантовані.

Так як швидкість світла усюди входить лише в комбінації з індуктивністю, то зробимо заміну $L_0/c^2 \rightarrow L_0$ і будемо пам'ятати, що індуктивність перенормована на швидкість світла. Наступним кроком запишемо рівняння руху для класичних змінних

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0(\ddot{\phi} - \ddot{\phi}_g) + \frac{\dot{\phi} - \dot{\phi}_g}{R_0} + \frac{\varphi - \varphi_g}{L_0} = -2\pi \frac{\Phi_{\text{ext}}}{L_0 \Phi_0}, \\ (C_{g1} + C_{g2})\ddot{\phi}_g + C_0(\ddot{\phi}_g - \ddot{\phi}) + \frac{\dot{\phi}_g - \dot{\phi}}{R_0} + \frac{\varphi_g - \varphi}{L_0} = \\ = C_{G1}\ddot{\phi}_1 + C_{G2}\ddot{\phi}_2 + 2\pi \frac{\Phi_{\text{ext}}}{L_0 \Phi_0}. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Бачимо, що друге рівняння сильно спрощується, оскільки містить в собі повну копію лівої частини першого рівняння (4.19). Так як в друге рівняння (4.19) входять $\ddot{\phi}_{1,2}$ то вони мають бути замінені відповідними середніми. Але для початку випишемо канонічні імпульси $p_{1,2}$ до змінних $\varphi_{1,2}$

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 [C_{\Sigma 1}\dot{\phi}_1 - C_m\dot{\phi}_2 - C_{G1}\dot{\phi}_g], \\ p_2 &= \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 [-C_m\dot{\phi}_1 + C_{\Sigma 2}\dot{\phi}_2 - C_{G2}\dot{\phi}_g], \end{aligned} \quad (4.20)$$

де введено позначення $C_{\Sigma i} = C_{Di} + C_{Si} + C_{Gi} + C_m$ та $i = 1, 2$. Функція Рауса, яку далі для зручності будемо позначати літерою H і асоціювати з гамільтоніаном, має вигляд

$$H = \left(\frac{2e}{\hbar} \right)^2 \left(A_1 p_1^2 + 2B p_1 p_2 + A_2 p_2^2 \right) + (D_1 p_1 + D_2 p_2) \dot{\phi}_g +$$

$$+ \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \left[F \dot{\phi}_g^2 - \frac{C_0}{2} (\dot{\phi} - \dot{\phi}_g)^2 + \frac{1}{2L_0} \left(\varphi - \varphi_g + 2\pi \frac{\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0} \right)^2 \right], \quad (4.21)$$

де

$$A_1 = \frac{C_{\Sigma 2}}{2C_\xi}, \quad A_2 = \frac{C_{\Sigma 1}}{2C_\xi}, \quad B = \frac{C_m}{2C_\xi},$$

$$D_1 = \frac{C_{\Sigma 2} C_{G1} + C_{G2} C_m}{C_\xi}, \quad D_2 = \frac{C_{\Sigma 1} C_{G2} + C_{G1} C_m}{C_\xi},$$

$$F = - \frac{C_{G1} C_{\Sigma 1} (C_{D2} + C_{S2}) + C_{G2} C_{\Sigma 2} (C_{D1} + C_{S1})}{2C_\xi} -$$

$$- \frac{C_m (C_{D1} C_{G1} + C_{D2} C_{G2} + C_{D1} C_{S1} + C_{D2} C_{S2})}{2C_\xi}, \quad (4.22)$$

та

$$C_\xi = C_{\Sigma 1} C_{\Sigma 2} - C_m^2. \quad (4.23)$$

Можемо бачити, що останні 3 доданки в гамільтоніані (4.21) не залежать від квантових координат, отже при квантуванні стануть пропорційні одиничній матриці і їх можна буде відкинути. Тепер так само можемо ввести оператори кількості куперівських пар $\hat{n}_i = \hat{p}_i / \hbar$, тоді проквантований гамільтоніан має вигляд

$$\hat{H} = 4e^2 \left(A_1 \hat{n}_1^2 + 2B \hat{n}_1 \hat{n}_2 + A_2 \hat{n}_2^2 \right) + \hbar (D_1 \hat{n}_1 + D_2 \hat{n}_2) \dot{\phi}_g. \quad (4.24)$$

Тепер слід визначити оператори $\hat{\phi}_{1,2}$, які входять в праву частину класичного рівняння динаміки. Розглянемо для наочності $\hat{\phi}_1$. Підставляючи $\hat{\phi}_1$ замість $\hat{q}_q$ у (3.27) отримаємо:

$$\hat{\ddot{\phi}}_1 = \frac{i}{\hbar} \left[\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}, \hat{\phi}_1 \right] - \frac{1}{\hbar^2} \left[\hat{H}, \left[\hat{H}, \hat{\phi}_1 \right] \right]. \quad (4.25)$$

Так як $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = \hbar (D_1 \hat{n}_1 + D_2 \hat{n}_2) \ddot{\phi}_g$ та виконуються комутаційні співвідношення $[\hat{\phi}_1, \hat{n}_1] = i$ та $[\hat{\phi}_1, \hat{n}_1^2] = 2i\hat{n}_1$, то

$$\begin{aligned} \hat{\ddot{\phi}}_1 &= \frac{i}{\hbar} \left[\hbar D_1 \hat{n}_1 \ddot{\phi}_g, \hat{\phi}_1 \right] - \frac{1}{\hbar^2} \left[\hat{H}, \left[4e^2 (A_1 \hat{n}_1^2 + 2B\hat{n}_1 \hat{n}_2) + \hbar D_1 \hat{n}_1 \dot{\phi}_g, \hat{\phi}_1 \right] \right] = \\ &= D_1 \ddot{\phi}_g - \frac{1}{\hbar^2} \left[\hat{H}, -8ie^2 (A_1 \hat{n}_1 + B\hat{n}_2) - i\hbar D_1 \dot{\phi}_g \right] = D_1 \ddot{\phi}_g. \end{aligned}$$

Так як комутатор $[\hat{H}, \hat{\phi}_1]$ залежить лише від імпульсів, а гамільтоніан не містить оператора координати $\hat{\phi}_1$, то другий доданок в (4.25) дає нуль і остаточно маємо для $\hat{\ddot{\phi}}_1$ та $\hat{\ddot{\phi}}_2$

$$\hat{\ddot{\phi}}_i = D_i \ddot{\phi}_g. \quad (4.26)$$

Отже у загальному випадку ємнісної моделі подвійної квантової точки у рівняннях класичної динаміки (4.19) не виникає залежності від заселеностей квантових рівнів, класичні рівняння руху і квантові розпадаються. Класичні рівняння руху мають вигляд

$$\begin{cases} C_0 (\ddot{\phi} - \ddot{\phi}_g) + \frac{\dot{\phi} - \dot{\phi}_g}{R_0} + \frac{\varphi - \varphi_g}{L_0} = -2\pi \frac{\Phi_{\text{ext}}}{L_0 \Phi_0}, \\ (C_{G1}(1 - D_1) + C_{G2}(1 - D_2)) \ddot{\phi}_g = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Таким чином в цій моделі не вдається отримати поправку до ємності, частота класичного контуру не змінюється при прив'язці до ємнісної моделі подвійної квантової точки. Одним зі шляхів вирішення проблеми розділення динамік в цій моделі може бути розгляд додаткового нелінійного елементу, що паралельно з'єднаний з мостовою ємністю C_m . Іншим шляхом може бути додавання феноменологічних недіагональних членів до гамільтоніану (4.24).

4.3 Одноелектронний транзистор (послідовне з'єднання)

Так як ємнісна модель подвійної квантової точки призводить до розділення квантових і класичних змінних, то слід додати ненульовий потенціал в квантову підсистему. Розглянемо класичний резонансний контур, прив'язаний до одноелектронного транзистора (див. рис. 4.3) [15]. При цьому ми розглядаємо вже не паралельний, а послідовний RLC -контур. В якості квантової підсистеми виступає острів, що складено з двох переходів Джозефсона $J_{1,2}$ та затворної ємності C_g .

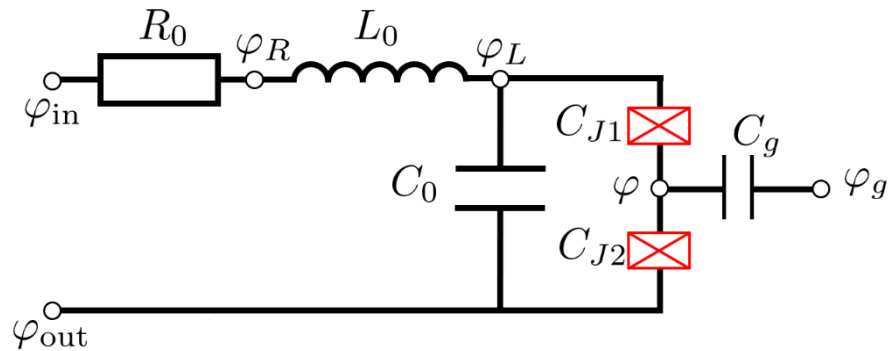


Рис. 4.3. Схематичне зображення одноелектронного транзистора, пов'язаного з послідовним класичним коливальним RLC контуром. Квантова підсистема формується з двох переходів Джозефсона $J_{1,2}$ та затворної ємності C_g і з'єднується паралельно з класичною ємністю C_0 .

Лагранжіан системи може бути записаний, аналогічно до (4.17):

$$\begin{aligned} \left(\frac{2e}{\hbar}\right)^2 L = & \frac{C_0}{2}(\dot{\varphi}_L - \dot{\varphi}_{out})^2 - \frac{1}{2L_0}(\varphi_L - \varphi_R)^2 + \\ & + \frac{C_{J1}}{2}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_L)^2 + \frac{C_{J2}}{2}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{out})^2 + \frac{C_g}{2}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_g)^2 + \\ & + \left(\frac{2e}{\hbar}\right)^2 [E_{J1} \cos(\varphi - \varphi_L) + E_{J2} \cos(\varphi - \varphi_{out})]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Так само дисипативна функція має доволі простий вигляд

$$F = \frac{1}{2R_0} \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 (\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_{\text{in}})^2. \quad (4.29)$$

Після цього можемо записати класичні рівняння руху для змінних φ_L , φ_R

та φ_{out} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_{\text{in}}}{R_0} + \frac{\varphi_R - \varphi_L}{L_0} = 0, \\ (C_0 + C_{J1})\ddot{\varphi}_L + \frac{\varphi_L}{L_0} = C_0\ddot{\varphi}_{\text{out}} + C_{J1}\ddot{\varphi} + \frac{\varphi_R}{L_0} + \frac{4e^2 E_{J1}}{\hbar^2} \sin(\varphi - \varphi_L), \\ (C_0 + C_{J2})\ddot{\varphi}_{\text{out}} = C_0\ddot{\varphi}_L + C_{J2}\ddot{\varphi} + \frac{4e^2 E_{J2}}{\hbar^2} \sin(\varphi - \varphi_{\text{out}}). \end{array} \right. \quad (4.30)$$

Перше рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку, отже може бути незалежно проінтегроване, тоді розв'язок можна підставити у друге рівняння системи.

Далі випишемо канонічний імпульс, спряжений до координати φ :

$$p = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \left[C_\Sigma \dot{\varphi} - C_g \dot{\varphi}_g - C_{J1} \dot{\varphi}_L - C_{J2} \dot{\varphi}_{\text{out}} \right], \quad (4.31)$$

де $C_\Sigma = C_g + C_{J1} + C_{J2}$. Запишемо тепер проквантований гамільтоніан, в якому знехтуємо залежністю від класичної діагональної частини:

$$\hat{H} = 4E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_{J1} \cos(\hat{\varphi} - \varphi_L) - E_{J2} \cos(\hat{\varphi} - \varphi_{\text{out}}). \quad (4.32)$$

Були введені наступні позначення для зарядової енергії $E_C = e^2/2C_\Sigma$, оператора заряду $\hat{n} = \hat{p}/\hbar$ та безрозмірної ефективної затворної напруги

$$n_g = -\frac{\hbar}{8E_C} \frac{C_g \dot{\varphi}_g + C_{J1} \dot{\varphi}_L + C_{J2} \dot{\varphi}_{\text{out}}}{C_\Sigma}. \quad (4.33)$$

Можемо розписати в гамільтоніані (4.32) різницю косинусів через $\sin \hat{\phi}$ та $\cos \hat{\phi}$, тоді матимемо

$$E_{J1} \cos(\hat{\phi} - \varphi_L) + E_{J2} \cos(\hat{\phi} - \varphi_{\text{out}}) = \cos \hat{\phi} [E_{J1} \cos \varphi_L + E_{J2} \cos \varphi_{\text{out}}] + \sin \hat{\phi} [E_{J1} \sin \varphi_L + E_{J2} \sin \varphi_{\text{out}}]. \quad (4.34)$$

Отже в дворівневому наближенні з урахуванням (4.15) та (4.16) гамільтоніан набуває наступного вигляду

$$H = -\frac{\Delta}{2} \sigma_x - \frac{\eta}{2} \sigma_y - \frac{\varepsilon}{2} \sigma_z, \quad (4.35)$$

де

$$\Delta = E_{J1} \cos \varphi_L + E_{J2} \cos \varphi_{\text{out}}, \eta = -E_{J1} \sin \varphi_L - E_{J2} \sin \varphi_{\text{out}}, \quad (4.36)$$

$$\varepsilon = 4E_C (1 - 2n_g).$$

Для того щоб записати самоузгоджену систему класичних і квантово-механічних рівнянь слід обрахувати середні від $\langle \hat{\phi} \rangle$ а також $\langle \sin \hat{\phi} \rangle$ та $\langle \cos \hat{\phi} \rangle$. Обрахуємо $\hat{\phi}$:

$$\hat{\phi} = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} [\hat{H}, \hat{\phi}] - \frac{1}{\hbar^2} [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{\phi}]], \quad (4.37)$$

але $[\hat{H}, \hat{\phi}] = -8iE_C (\hat{n} - n_g)$ тому

$$\hat{\phi} = \frac{C_g \ddot{\phi}_g + C_{J1} \ddot{\phi}_L + C_{J2} \ddot{\phi}_{\text{out}}}{C_\Sigma} - \frac{8E_C}{\hbar^2} (E_{J1} \sin(\hat{\phi} - \varphi_L) + E_{J2} \sin(\hat{\phi} - \varphi_{\text{out}})). \quad (4.38)$$

Остаточні класичні рівняння руху мають громіздку структуру

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_{\text{in}}}{R_0} + \frac{\varphi_R - \varphi_L}{L_0} = 0, \\ & \left(C_0 + \frac{C_{J1}(C_g + C_{J2})}{C_\Sigma} \right) \ddot{\varphi}_L + \frac{\varphi_L}{L_0} = \left(C_0 + \frac{C_{J1}C_{J2}}{C_\Sigma} \right) \ddot{\varphi}_{\text{out}} + \frac{C_g C_{J1}}{C_\Sigma} \ddot{\varphi}_g + \\ & + \frac{\varphi_R}{L_0} + \frac{8E_C}{\hbar^2} \left[(C_g + C_{J2}) E_{J1} \langle \sin(\hat{\varphi} - \varphi_L) \rangle - C_{J1} E_{J2} \langle \sin(\hat{\varphi} - \varphi_{\text{out}}) \rangle \right], \\ & \left(C_0 + \frac{C_{J2}(C_g + C_{J1})}{C_\Sigma} \right) \ddot{\varphi}_{\text{out}} = \left(C_0 + \frac{C_{J1}C_{J2}}{C_\Sigma} \right) \ddot{\varphi}_L + \frac{C_g C_{J2}}{C_\Sigma} \ddot{\varphi}_g + \\ & + \frac{8E_C}{\hbar^2} \left[-C_{J2} E_{J1} \langle \sin(\hat{\varphi} - \varphi_L) \rangle + (C_g + C_{J1}) E_{J2} \langle \sin(\hat{\varphi} - \varphi_{\text{out}}) \rangle \right], \end{aligned} \right. \quad (4.39)$$

і пов'язані з квантовими рівняннями руху

$$\left\{ \begin{aligned} i\hbar\dot{a}_0 &= -\frac{\varepsilon}{2}a_0 - \frac{\Delta - i\eta}{2}a_1, \\ i\hbar\dot{a}_1 &= -\frac{\Delta + i\eta}{2}a_0 + \frac{\varepsilon}{2}a_1. \end{aligned} \right. \quad (4.40)$$

А середні $\langle \sin \hat{\varphi} \rangle$, $\langle \cos \hat{\varphi} \rangle$ визначаються з рівностей

$$\begin{aligned} \langle \cos \hat{\varphi} \rangle &= \frac{1}{2} \langle \hat{\sigma}_x \rangle = \frac{a_0 a_1^* + a_0^* a_1}{2} = \text{Re}(a_0 a_1^*), \\ \langle \sin \hat{\varphi} \rangle &= -\frac{1}{2} \langle \hat{\sigma}_y \rangle = \frac{a_0 a_1^* - a_0^* a_1}{2i} = \text{Im}(a_0 a_1^*). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Далі можна чисельно досліджувати систему рівнянь (4.39) та (4.40) або намагатися застосовувати асимптотичні методи для малих нелінійних збурень. Однак значно простішим виявляється випадок не послідовного а паралельного з'єднання RLC -контур. Тому для повноти картини розглянемо і цей випадок, оскільки для нього можна буде застосувати підхід Крилова-Боголюбова в явному вигляді.

4.4 Одноелектронний транзистор (паралельне з'єднання)

У випадку паралельного з'єднання кількість невідомих класичних фаз для визначення зменшується від 3 до 1 (див. рис. 4.4). Тобто маємо лише одну класичну фазу φ_{out} та одну квантову фазу φ .

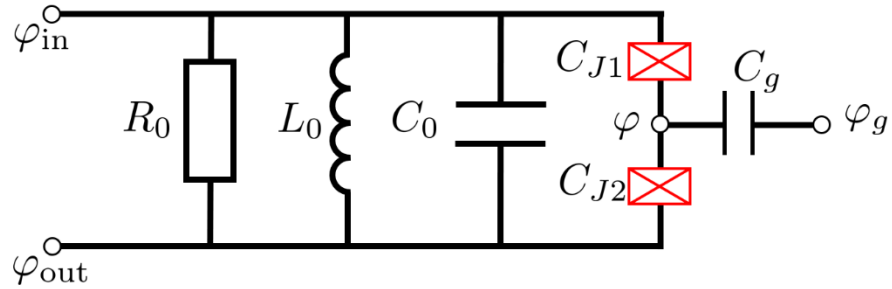


Рис. 4.4. Схематичне зображення одноелектронного транзистора, пов'язаного з паралельним класичним коливальним RLC контуром.

Квантова підсистема аналогічно до рис. 4.3 формується з двох переходів Джозефсона $J_{1,2}$ та затворної ємності C_g і з'єднується паралельно з трьома класичними елементами R_0, C_0, L_0 .

Здійснюємо усі процедури відповідно до алгоритму: спочатку аналогічно записуємо функцію Лагранжа

$$\begin{aligned} \left(\frac{2e}{\hbar}\right)^2 L = & \frac{C_0}{2}(\dot{\varphi}_{\text{in}} - \dot{\varphi}_{\text{out}})^2 - \frac{1}{2L_0}(\varphi_{\text{in}} - \varphi_{\text{out}})^2 \\ & + \frac{C_{J1}}{2}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{\text{in}})^2 + \frac{C_{J2}}{2}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_{\text{out}})^2 + \frac{C_g}{2}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_g)^2 + \\ & + \left(\frac{2e}{\hbar}\right)^2 [E_{J1} \cos(\varphi - \varphi_L) + E_{J2} \cos(\varphi - \varphi_{\text{out}})] \end{aligned} \quad (4.42)$$

та рівняння руху для класичної змінної φ_{out}

$$\begin{aligned} (C_0 + C_{J2})(\ddot{\varphi}_{\text{out}} - \ddot{\varphi}_{\text{in}}) + \frac{\dot{\varphi}_{\text{out}} - \dot{\varphi}_{\text{in}}}{R_0} + \frac{\varphi_{\text{out}} - \varphi_{\text{in}}}{L_0} = \\ = C_{J2}\ddot{\varphi} + \frac{4e^2}{\hbar^2} E_{J2} \sin(\varphi - \varphi_{\text{out}}). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Спряжений імпульс до φ

$$p = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 \left[C_{\Sigma} \dot{\varphi} - C_g \dot{\varphi}_g - C_{J1} \dot{\varphi}_{\text{in}} - C_{J2} \dot{\varphi}_{\text{out}} \right], \quad (4.44)$$

та квантовий гамільтоніан

$$\hat{H} = 4E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_{J1} \cos(\hat{\varphi} - \varphi_L) - E_{J2} \cos(\hat{\varphi} - \varphi_{\text{out}}), \quad (4.45)$$

де n_g визначається із співвідношення

$$n_g = -\frac{\hbar}{8E_C} \frac{C_g \dot{\varphi}_g + C_{J1} \dot{\varphi}_{\text{in}} + C_{J2} \dot{\varphi}_{\text{out}}}{C_{\Sigma}}. \quad (4.46)$$

Оператор другої похідної $\hat{\ddot{\varphi}}$:

$$\begin{aligned} \hat{\ddot{\varphi}} &= \frac{C_g \ddot{\varphi}_g + C_{J1} \ddot{\varphi}_{\text{in}} + C_{J2} \ddot{\varphi}_{\text{out}}}{C_{\Sigma}} - \\ &- \frac{8E_C}{\hbar^2} (E_{J1} \sin(\hat{\varphi} - \varphi_{\text{in}}) + E_{J2} \sin(\hat{\varphi} - \varphi_{\text{out}})). \end{aligned} \quad (4.47)$$

З урахуванням цього класичне рівняння руху має наступний вигляд

$$\begin{aligned} &\left(C_0 + \frac{C_{J2}(C_g + C_{J1})}{C_{\Sigma}} \right) (\ddot{\varphi}_{\text{out}} - \ddot{\varphi}_{\text{in}}) + \frac{\dot{\varphi}_{\text{out}} - \dot{\varphi}_{\text{in}}}{R_0} + \frac{\varphi_{\text{out}} - \varphi_{\text{in}}}{L_0} = \\ &= \frac{C_g C_{J2}}{C_{\Sigma}} \ddot{\varphi}_g + \frac{C_{J2}(C_{J1} + C_{J2})}{C_{\Sigma}} \ddot{\varphi}_{\text{in}} + \\ &+ \frac{8E_C}{\hbar^2} \left[-C_{J2} E_{J1} \langle \sin(\hat{\varphi} - \varphi_{\text{in}}) \rangle + (C_g + C_{J1}) E_{J2} \langle \sin(\hat{\varphi} - \varphi_{\text{out}}) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Рівняння (4.48) має розв'язуватись сумісно з системою (4.40) в якій усюди φ_L слід замінити на φ_{in} . Тепер повна система диференціальних рівнянь для еволюції складається не з 5, а лише 3 рівнянь — одного класичного і двох квантових. Таким чином і тут виявляється, що підхід Крилова-Боголюбова прямо застосувати неможливо. Лише якщо квантова підсистема еволюціонує

значно швидше за класичну, можна сподіватися розділити динаміку і досліджувати єдине класичне рівняння у формі Крилова-Боголюбова. Розглянемо в заключному підрозділі на прикладі одноелектронного транзистора з послідовним типом з'єднання динаміку системи чисельно.

4.5 Динаміка послідовного одноелектронного транзистора

Проаналізуємо тепер чисельно динаміку класичної та квантової підсистем на основі розділу 4.3 та наведених експериментальних даних у статті [15]. Розглянемо для спрощення схему одноелектронного транзистора без опору R_0 . В статті вказані наступні експериментальні параметри:

$$\begin{aligned} C_0 &= 440\text{fF}, & L_0 &= 490\text{nH}, & \omega_0 &= 2.15 \cdot 10^{-9} \text{s}^{-1}, \\ C_g &= C_{J1} = C_{J2} = 1\text{fF}, & E_{J1}/h &= E_{J2}/h = 2.9\text{GHz}, \\ V_{SD} &= 130\mu\text{V}, & V_0 &= 0.2\mu\text{V}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

а вхідна напруга змінюється за законом $V_{\text{in}} = V_{SD} + V_0 \sin \omega t$. Наприклад, для резонансної частоти $\omega = \omega_0$ і тоді за допомогою чисельного розрахунку можемо визначити залежність вихідної напруги $V_{\text{out}} = \frac{\hbar \dot{\phi}_{\text{out}}}{2e}$ від часу (див. рис. 4.5-4.7). Графіки будуються в одиницях безрозмірного часу $\tau = t/T_0$, де $T_0 = 2\pi/\omega_0$ — період класичних коливань ($T_0 \approx 2.9$ нс).

На рис. 4.5 зображена залежність V_{out} від часу на одному класичному періоді. Можна при цьому бачити, що вклад швидко осцилюючої квантової підсистеми в динаміку є значним. Це можна пояснити тим, що при заданих параметрах, в системі рівнянь (4.39) характерні величини $C_0 \ddot{\phi}_L$ та $\frac{8E_C C_g E_{J1}}{\hbar^2}$ одного порядку, що ми і можемо бачити на графіку. При цьому чисельний розрахунок проводився з кроком значно менше за швидкі квантові осциляції,

що можна бачити на рис. 4.6, де зображена та сама залежність але на двох інших часових масштабах.

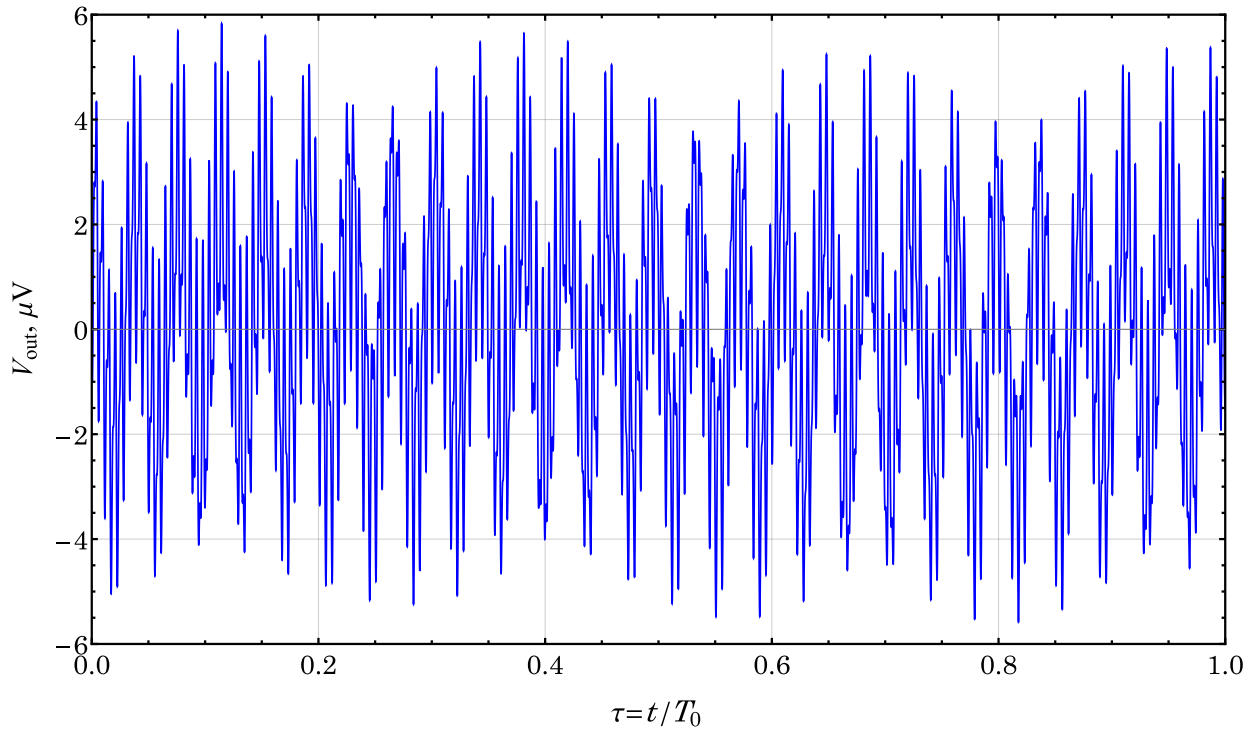


Рис. 4.5. Залежність вихідної напруги V_{out} від часу на масштабі класичного періоду коливань T_0 .

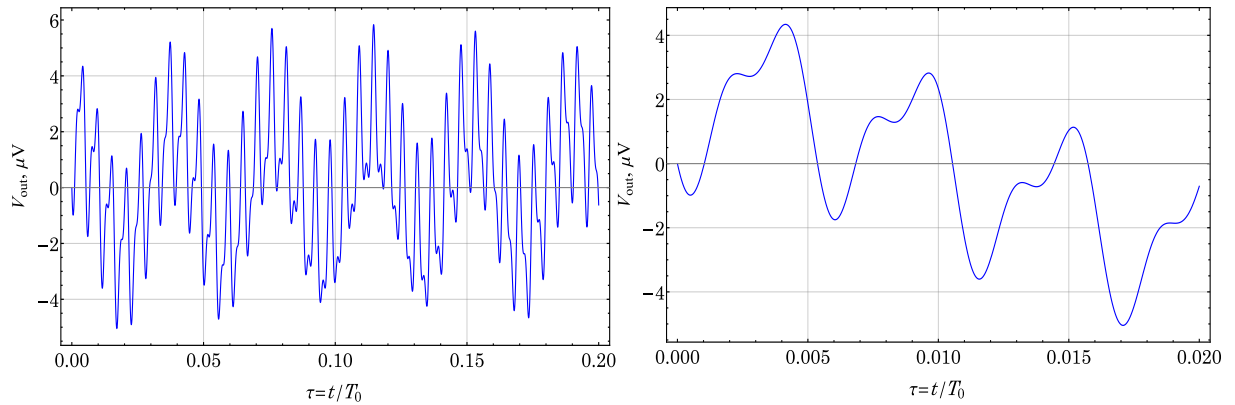


Рис. 4.6. Залежність вихідної напруги V_{out} від часу на масштабах $0.2T_0$ та $0.02T_0$ відповідно.

Крім того цікавою є залежність заселеностей квантових рівнів (див. рис. 4.7) від часу. Можемо бачити що величини заселеностей швидко і слабо

осцилюють біля відповідних початкових значень. Спостерігаються також незначні зміни в огинаючій заселеностей на масштабах часу T_0 .

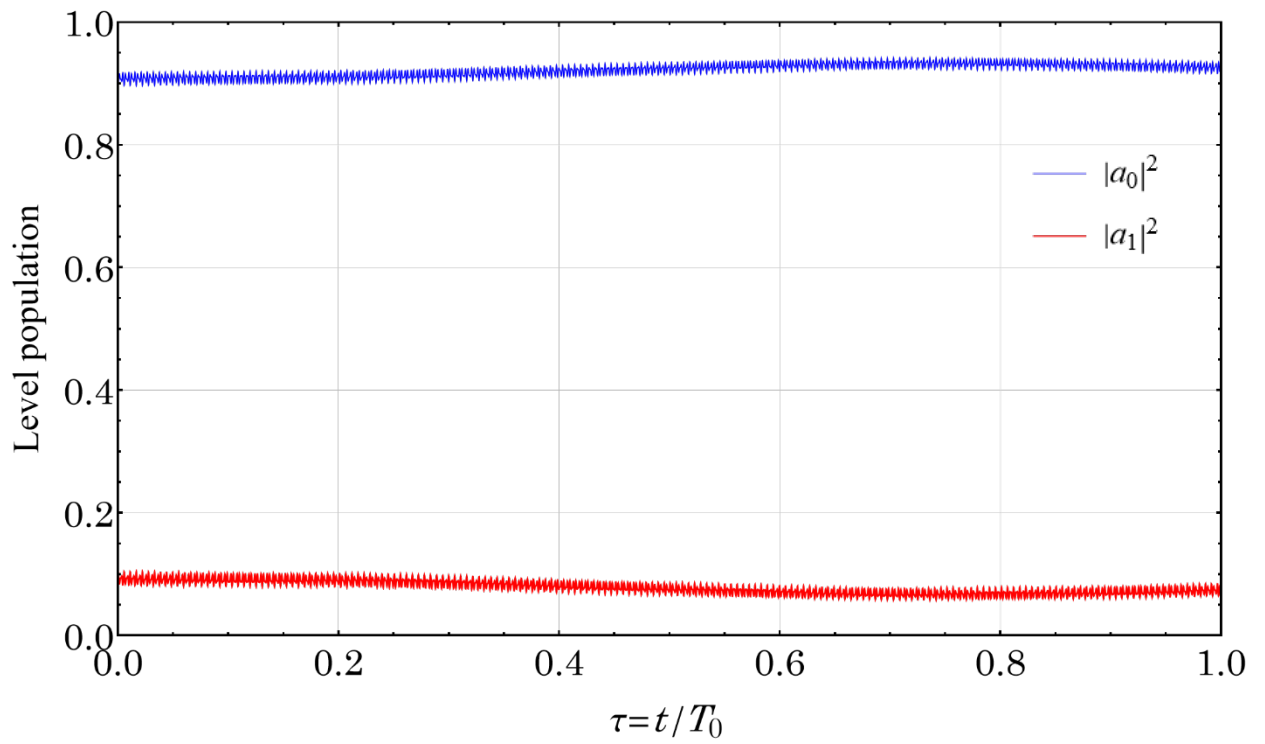


Рис. 4.7. Залежність заселеностей рівнів $|a_0|^2$, $|a_1|^2$ від часу на масштабі часу T_0 .

ВИСНОВКИ

Дана робота присвячено дослідження зв'язку між класичним резонансним контуром та квантовими системами на основі кубітів. Аналіз літератури демонструє низку питань, що виникають при тривіальному застосуванні визначення квантової ємності як другої похідної за напругою. У протиставлення цьому методу в другому розділі на основі асимптотичного методу Крилова-Боголюбова здобуті вирази для квантової індуктивності та опору індуктивно зв'язаних систем. Аналогічно теорія може бути побудована і для квантової ємності. Однак і у цьому підході виникають питання щодо аргументації розділення динамік квантової і класичної підсистем. Тому у третьому розділі було побудовано формалізм, за допомогою якого можливо отримати замкнену систему класичних і квантових рівнянь, що справедливі не лише для кубітів, а і в загальному випадку для багаторівневих систем. Четвертий розділ був присвячений прямому застосуванню побудованого формалізму на прикладі зарядового кубіту, ємнісної моделі подвійної квантової точки та двох конфігурацій одноелектронного транзистора: послідовної та паралельної. Були наведені результати чисельного розрахунку отриманої динаміки для одноелектронного транзистора.

Робота має багато принципових напрямків вдосконалення: перехід від опису в рамках рівняння Шредінгера до більш загального рівняння Ліндблада, врахування релаксації внаслідок ненульової температури та дефазування. На основі побудованого формалізму можна більш загально визначити не зсув фази і амплітуди, а і досліджувати динаміку в цьому, що може мати набагато більші можливості для подальшого застосування теорії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Quantum and tunneling capacitance in charge and spin qubits / R. Mizuta та ін. *Physical Review B*. 2017. Т. 95, № 4. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevb.95.045414>.
2. Readout methods and devices for Josephson-junction-based solid-state qubits / G. Johansson та ін. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2006. Т. 18, № 21. С. S901–S920. URL: <https://doi.org/10.1088/0953-8984/18/21/s14>.
3. Excess Dissipation in a Single-Electron Box: The Sisyphus Resistance / F. Persson та ін. *Nano Letters*. 2010. Т. 10, № 3. С. 953–957. URL: <https://doi.org/10.1021/nl903887x>.
4. Probing quantum devices with radio-frequency reflectometry / F. Vigneau та ін. *Applied Physics Reviews*. 2023. Т. 10, № 2. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0088229>.
5. Shevchenko S. N., Ashhab S., Nori F. Inverse Landau-Zener-Stückelberg problem for qubit-resonator systems. *Physical Review B*. 2012. Т. 85, № 9. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevb.85.094502>.
6. Shevchenko S. N. Impedance measurement technique for quantum systems. *The European Physical Journal B*. 2008. Т. 61, № 2. С. 187–191. URL: <https://doi.org/10.1140/epjb/e2008-00061-9>.
7. Shevchenko S. N., Omelyanchouk A. N., Il'ichev E. Multiphoton transitions in Josephson-junction qubits (Review Article). *Low Temperature Physics*. 2012. Т. 38, № 4. С. 283–300. URL: <https://doi.org/10.1063/1.3701717>.
8. Shevchenko S. N., Rubanov D. G., Nori F. Delayed-response quantum back action in nanoelectromechanical systems. *Physical Review B*. 2015. Т. 91, № 16. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevb.91.165422>.
9. F. Malinowski, R. Rupesh, L. Pavešić, Z. Guba, D. Jong, L. Han, C. Prosko, M. Chan, Y. Liu, P. Krogstrup, A. Pályi, R. Žitko и J. Koski, Quantum capacitance of a superconducting subgap state in an electrostatically floating dot-island, 2022. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.01519>.

10. Cattaneo M., Paraoanu G. S. Engineering Dissipation with Resistive Elements in Circuit Quantum Electrodynamics. *Advanced Quantum Technologies*. 2021. C. 2100054. URL: <https://doi.org/10.1002/qute.202100054>.
11. Gate-Sensing Coherent Charge Oscillations in a Silicon Field-Effect Transistor / M. F. Gonzalez-Zalba та ін. *Nano Letters*. 2016. Т. 16, № 3. С. 1614–1619. URL: <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.5b04356>.
12. Direct Observation of Josephson Capacitance / M. A. Sillanpää та ін. *Physical Review Letters*. 2005. Т. 95, № 20. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.95.206806>.
13. Multiphoton transitions between energy levels in a phase-biased Cooper-pair box / V. I. Shnyrkov та ін. *Physical Review B*. 2006. Т. 73, № 2. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevb.73.024506>.
14. Nanomechanical measurements of a superconducting qubit / M. D. LaHaye та ін. *Nature*. 2009. Т. 459, № 7249. С. 960–964. URL: <https://doi.org/10.1038/nature08093>.
15. Observation of Quantum Capacitance in the Cooper-Pair Transistor / T. Duty та ін. *Physical Review Letters*. 2005. Т. 95, № 20. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.95.206807>.
16. G. Wendin і V. S. Shumeiko, «Superconducting quantum circuits, qubits and computing,» *arXiv preprint cond-mat/0508729*, 2005. URL: <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0508729>.
17. Bogoliubov N. N., Mitropol'skii I. A. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. Glasgow : CRC Press, 1961. 548 с.
18. Jackson J. D. Classical electrodynamics. 3-тє вид. New York : Wiley, 1999. 808 с.
19. Landau L. D., Lifshitz E. M. Course of Theoretical Physics. 4-тє вид. Oxford : Butterworth-Heinemann, 1980. Т. 2 : Classical Theory of Fields. 444 с.
20. Zagoskin A. M. Quantum engineering: Theory and design of quantum coherent structures. Cambridge : Cambridge University Press, 2011. 332 с.

21. Landau L. D., Lifshitz E. M. Course of Theoretical Physics. 2-ге вид. Oxford : Butterworth-Heinemann, 1984. Т. 8 : Electrodynamics of Continuous Media. 480 с.
22. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики : навч. посіб. 2-ге вид. Київ : Техніка, 2006. Т. 2 : Електрика і магнетизм. 456 с.
23. Landau L. D., Lifshitz E. M. Course of Theoretical Physics. 3-тє вид. Oxford : Butterworth-Heinemann, 1976. Т. 1 : Mechanics. 200 с.
24. Shevchenko S. N. Mesoscopic Physics meets Quantum Engineering : конспект лекцій. Singapore : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2019. 176 с.
25. Landau L. D., Lifshitz E. M. Course of Theoretical Physics. 3-тє вид. Oxford : Butterworth-Heinemann, 1981. Т. 3 : Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. 689 с.