УДК 517.9+517.4

О. А. АНОЩЕНКО

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ, ИМЕЮЩИМ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ АСИМПТОТИКУ

Ранее в [1] была доказана теорема разложения по собственным функциям оператора $H = -\frac{d^2}{dx^2} + q_0(x)$ с вещественным потенциалом $q_0(x)$, таким, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\,|q_0(x)-p(x)|\,dx<\infty, \quad p(x+1)=p(x),$$
$$p(x)\in L^2(0,\,1).$$

Рассмотрим обобщение этой теоремы для оператора $L = -d^2/dx^2 + q(x)$, где $q(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{\pm\infty} (1+|x|^2)\,|q(x)-q_{\pm}(x)|\,dx<\infty. \tag{1}$$

Здесь $q_{\pm}(x)$ — вещественные потенциалы для уравнений Хилла

$$-y''+q_{\pm}(x)y=\lambda y,\ -\infty<x<\infty, \tag{2}$$
$$q_{\pm}(x+a_{\pm})=q_{\pm}(x),\ a_{\pm}>0.$$

Эта теорема используется при решении обратной задачи рассеяния для соответствующего уравнения Шредингера:

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\ -\infty<x<\infty. \tag{3}$$

Пусть $\theta_{\pm}(x,\lambda)$, $\varphi_{\pm}(x,\lambda)$ — фундаментальные системы решений уравнений (2), определенные начальными условиями:

$$\theta_{\pm}(0,\lambda)=\varphi'_{\pm}(0,\lambda)=1,\ \theta'_{\pm}(0,\lambda)=\varphi_{\pm}(0,\lambda)=0.$$

Обозначим $\varphi_{\pm}(\lambda)=\varphi_{\pm}(a_{\pm},\lambda)$, $\varphi'_{\pm}(\lambda)=\varphi'_{\pm}(a_{\pm},\lambda)$, $\theta_{\pm}(\lambda)=\theta_{\pm}(a_{\pm},\lambda)$; $F_{\pm}(\lambda)$ — дискриминант Хилла:

$$F_{\pm}(\lambda)=(\varphi'_{\pm}(\lambda)+\theta_{\pm}(\lambda))/2;$$

$\tilde{\psi}_{1,2}(x,y)$ — функции Флоке для уравнения (2) с потенциалом $q_-(x)$:

$$\tilde{\psi}_{1,2}(x,\lambda)=\theta_-(x,\lambda)+m^-_{1,2}(\lambda)\varphi_-(x,\lambda), \tag{4}$$
$$m^-_{1,2}(\lambda)=(\varphi'_-(\lambda)-\theta_-(\lambda))/2\varphi_-(\lambda)\pm\sqrt{F^2_-(\lambda)-1}\,/\varphi_-(\lambda);$$

$\tilde{\varphi}_{1,2}(x,\lambda)$ — функции Флоке для уравнения (2) с потенциалом $q_+(x)$:

$$\tilde{\varphi}_{1,2}(x,\lambda)=\theta_+(x,\lambda)+m^+_{1,2}(\lambda)\varphi_+(x,\lambda), \tag{5}$$

$m_{1,2}^{+}(\lambda)=(\varphi_{+}'(\lambda)-\theta_{+}(\lambda))/2\varphi_{+}(\lambda)\pm\sqrt{F_{+}^{2}(\lambda)-1}/\varphi_{+}(\lambda)$ (верхний знак в формулах (4), (5) соответствует индексу 1, нижний — индексу 2).

Известно [2], что спектр $\sigma^{\pm}=\sigma^{\pm}(q_{\pm})$ оператора

$$L_{\pm}=-\frac{d^{2}}{dx^{2}}+q_{\pm}(x)\quad \sigma^{\pm}=\{\lambda:\operatorname{Im}\lambda=0,\,|F_{\pm}(\lambda)|\leqslant 1\}$$

есть объединение отрезков (зон) $S_{n}^{\pm}=[S_{n1}^{\pm},\ S_{n2}^{\pm}]$, $n=0,\ 1,\ \ldots$. Интервалы $\Delta_{0}^{\pm}=(-\infty,\ S_{01}^{\pm})$, $\Delta_{n}^{\pm}=(S_{(n-1)2}^{\pm},\ S_{n1}^{\pm})$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, разделяющие зоны, называются лакунами. Будем называть зоны (лакуны) спектров σ^{+} и σ^{-} положительными и отрицательными зонами (лакунами) соответственно. Обозначим $\Delta_{k}^{\pm}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$ ($\Delta_{k}^{\mp}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$) интервалы, которые получаются в результате пересечения положительных (отрицательных) лакун с отрицательными (положительными) зонами; $\Delta^{\pm}=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\Delta_{n}^{\pm}$.

Ветвь радикала в формулах (4), (5) выбрана из условия $\sqrt{F_{\pm}^{2}(\lambda)-1}>0$ при $\lambda\in\Delta_{0}^{\pm}$.

При $\lambda\in\operatorname{Int}\sigma^{-}$ фундаментальную систему решений уравнения (3) образуют функции [3]:

$$\Psi_{1,2}(x,\ \lambda)=\tilde{\Psi}_{1,2}(x,\ \lambda)+\int\limits_{-\infty}^{x}K^{-}(x,\ y)\ \tilde{\Psi}_{1,2}(y,\ \lambda)\,dy, \tag{6}$$

а при $\lambda\in\operatorname{Int}\sigma^{+}$ уравнение (3) имеет линейно независимые решения, представимые в виде

$$\varphi_{1,2}(x,\ \lambda)=\tilde{\varphi}_{1,2}(x,\ \lambda)+\int\limits_{x}^{\infty}K^{+}(x,\ y)\ \tilde{\varphi}_{1,2}(y,\ \lambda)\,dy. \tag{7}$$

Из представлений (6), (7) следует, что функция $\Psi_{1}(x,\ \lambda)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную λ плоскость с разрезами по спектру σ^{-}, а функция $\varphi_{2}(x,\lambda)$ — в комплексную плоскость λ с разрезами по спектру σ^{+}. При $\lambda\bar{\in}\sigma^{-}$ $\tilde{\Psi}_{1}(x,\ \lambda)\in L^{2}(-\infty,\ 0)$, а при $\lambda\bar{\in}\sigma^{+}$ $\tilde{\varphi}_{2}(x,\ \lambda)\in L^{2}(0,\ +\infty)$ (см. [2]), поэтому теми же свойствами обладают и функции $\Psi_{1}(x,\ \lambda)$, $\varphi_{2}(x,\ \lambda)$.

Так как функции $\varphi_{1,2}$, $\Psi_{1,2}$ образуют фундаментальные системы решений уравнения (3), то они связаны равенствами

$$\Psi_{1}(x,\ \lambda)=c_{12}(\lambda)\,\varphi_{1}(x,\ \lambda)+c_{11}(\lambda)\,\varphi_{2}(x,\ \lambda),\ \ \lambda\in\operatorname{Int}\sigma^{+}; \tag{8}$$

$$\varphi_{2}(x,\ \lambda)=c_{22}(\lambda)\,\Psi_{1}(x,\ \lambda)+c_{21}(\lambda)\,\Psi_{2}(x,\ \lambda),\ \ \lambda\in\operatorname{Int}\sigma^{-}. \tag{9}$$

Таблица коэффициентов $C=\|c_{ij}(\lambda)\|_{i,j=1,2}$ называется матрицей перехода уравнения (3).

Использовав равенства (8), (9), выразим коэффициенты через вронскианы:

$$c_{11}(\lambda) = \frac{W\{\Psi_1, \varphi_1\}}{W\{\varphi_2, \varphi_1\}} = \frac{\Psi'_1(x, \lambda)\,\varphi_1(x, \lambda) - \Psi_1(x, \lambda)\,\varphi'_1(x, \lambda)}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)};$$

$$c_{12}(\lambda) = \frac{W\{\varphi_2, \Psi_1\}}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)}, \quad \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+;$$

$$c_{21}(\lambda) = \frac{W\{\varphi_2, \Psi_1\}}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)}; \tag{10}$$

$$c_{22}(\lambda) = \frac{W\{\Psi_2, \varphi_2\}}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)}, \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^-.$$

Заметим, что из формул (4), (5) следует при $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^\pm$

$$M^\pm(\lambda^b) = \overline{M^\pm(\lambda^н)} = -M^\pm(\lambda^н), \tag{11}$$

где $M^\pm(\lambda) = m_2^\pm(\lambda) - m_1^\pm(\lambda)$, а из представлений (6), (7) устанавливаем, что

$$\varphi_2(x, \lambda^b) = \overline{\varphi_1(x, \lambda^b)} = \overline{\varphi_2(x, \lambda^н)}, \ \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+, \tag{12}$$

$$\Psi_1(x, \lambda^b) = \overline{\Psi_2(x, \lambda^b)} = \overline{\Psi_1(x, \lambda^н)}, \ \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^-. \tag{13}$$

Здесь и далее λ^b и $\lambda^н$ — точки верхнего и нижнего берегов разрезов соответственно.

Из формул (6) — (13) непосредственной проверкой устанавливаются следующие свойства элементов $c_{ij}(\lambda)$ матрицы C:

1. При $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+ \cap \operatorname{Int} \sigma^-$

$$c_{21}(\lambda) = c_{12}(\lambda) \frac{M^+(\lambda)}{M^-(\lambda)},$$

$$c_{11}(\lambda) = -\overline{c_{22}(\lambda)} \frac{M^-(\lambda)}{M^+(\lambda)},$$

$$|c_{12}(\lambda)|^2 - |c_{11}(\lambda)|^2 = \frac{M^-(\lambda)}{M^+(\lambda)},$$

$$|c_{21}(\lambda)|^2 - |c_{22}(\lambda)|^2 = \frac{M^-(\lambda)}{M^+(\lambda)};$$

$$c_{12}(\lambda) = \overline{c_{11}(\lambda)} \quad \text{при } \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+ \cap \Delta^-,$$

$$c_{21}(\lambda) = \overline{c_{22}(\lambda)} \quad \text{при } \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^- \cap \Delta^+.$$

2. Функции $c_{12}(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda)$ являются предельными значениями функций мероморфных в комплексной плоскости λ с разрезами по спектрам σ^+ и σ^-, причем $c_{12}(\lambda^b) = \overline{c_{12}(\lambda^н)}$, $c_{11}(\lambda^b) = \overline{c_{11}(\lambda^н)}$ при $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+$; $c_{21}(\lambda^b) = \overline{c_{21}(\lambda^н)}$ при $\lambda \in \operatorname{In} \sigma^-$.

3. Функции $\frac{\varphi_2(x, \lambda)}{c_{21}(\lambda)}$ и $\frac{\Psi_1(x, \lambda)}{c_{12}(\lambda)}$ (x фиксировано) ограничены на σ^- и $(\sigma^+ \cap \Delta^-) \cup \{S_{nj}^+\}_{n=0,\, j=1,2}^{\infty}$ соответственно.

4. Оператор L имеет собственные значения λ_n ($n = 1, 2, \ldots$), лежащие в пересечении лакун спектров σ^+ и σ^-.

Как известно [4], ядро $R_\lambda(x, y)$ интегрального оператора резольвенты, соответствующего оператору L, имеет вид

$$R_\lambda(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_2(x, \lambda)\, \psi_1(y, \lambda)}{W\{\varphi_2, \psi_1\}}, & y \leqslant x; \\ \dfrac{\Psi_1(x, \lambda)\, \varphi_2(y, \lambda)}{W\{\varphi_2, \Psi_1\}}, & y > x, \end{cases} \tag{14}$$

где с учетом (10) $W\{\varphi_2, \Psi_1\} = c_{12}(\lambda) M^+(\lambda) = c_{21}(\lambda) M^-(\lambda)$. Найдем ядро спектрального проектора оператора L, сосчитав скачок ядра резольвенты $R_\lambda(x, y)$ через разрез по зоне непрерывного спектра. При этом будем пользоваться формулами (8), (9), (11)—(13) и свойствами 1, 2 матрицы перехода.

Пусть для определенности $y \leqslant x$, тогда при $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^- \cap \operatorname{Int} \sigma^+$

$$\begin{gathered} R_{\lambda^b}(x, y) - R_{\lambda^{\text{н}}}(x, y) = \frac{\varphi_2(x, \lambda^b)\, \Psi_1(y, \lambda^b)}{c_{12}(\lambda^b) M^+(\lambda^b)} - \\ - \frac{\varphi_2(x, \lambda^{\text{н}})\, \Psi_1(y, \lambda^{\text{н}})}{c_{12}(\lambda^{\text{н}}) M^+(\lambda^{\text{н}})} = \frac{|c_{12}(\lambda)|^{-2}}{M^+(\lambda^b)} \times [\varphi_2(x, \lambda^b) \times \\ \times (|c_{12}(\lambda)|^2 \varphi_1(y, \lambda^b) + c_{12}(\lambda^{\text{н}}) c_{11}(\lambda^b) \varphi_2(y, \lambda^b)) + \\ + \Psi_1(y, \lambda^{\text{н}}) (c_{12}(\lambda^b)\, c_{22}(\lambda^{\text{н}}) \Psi_1(x, \lambda^{\text{н}}) + \\ + c_{12}(\lambda^b) c_{21}(\lambda^{\text{н}}) \Psi_2(x, \lambda^{\text{н}}))] = \frac{|c_{12}(\lambda)|^{-2}}{M^+(\lambda^b)} \times \\ \times \left[\frac{\varphi_2(x, \lambda^b)\, \overline{\varphi_2(y, \lambda^b)}\, M^-(\lambda^b)}{M^+(\lambda^b)} + \varphi_2(x, \lambda^b) \times \right. \\ \times (|c_{11}(\lambda)|^2 \varphi_1(y, \lambda^b) + c_{12}(\lambda^{\text{н}}) c_{11}(\lambda^b) \varphi_2(y, \lambda^b)) + \\ + \frac{\overline{\Psi_1(y, \lambda^b)}\, \Psi_1(x, \lambda^b)\, |c_{21}(\lambda)|^2 M^-(\lambda^b)}{M^+(\lambda^b)} + \\ + c_{12}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^{\text{н}}) \Psi_1(y, \lambda^{\text{н}}) \Psi_1(x, \lambda^{\text{н}})] = \\ = \frac{\varphi_2(x, \lambda^b)\, \overline{\varphi_2(y, \lambda^b)}}{|c_{21}(\lambda)|^2 M^-(\lambda^b)} + \frac{|c_{12}(\lambda)|^{-2}}{M^+(\lambda^b)} \times \\ \times [c_{11}(\lambda^b) \varphi_2(x, \lambda^b)\, \psi_1(y, \lambda^{\text{н}}) + \psi_1(x, \lambda^b) \times \\ \times \overline{\Psi_1(y, \lambda^b)} - c_{11}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^b) \Psi_1(x, \lambda^b) \overline{\Psi_1(y, \lambda^b)} + \\ + c_{12}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^{\text{н}}) \Psi_1(y, \lambda^{\text{н}}) \Psi_1(x, \lambda^{\text{н}})]. \end{gathered} \tag{15}$$

Последнее равенство мы получили, используя соотношение

$$|c_{21}(\lambda)|^2 \frac{M^-(\lambda^b)}{M^+(\lambda^b)} = 1 - c_{11}(\lambda^b) c_{22}(\lambda^b),$$

которое является следствием свойства 1 матрицы C.

Так как $c_{12}(\lambda^b)\, c_{22}(\lambda^н) = -c_{11}(\lambda^b)\, c_{21}(\lambda^b)$, а значит,

$$c_{11}(\lambda^b)\, c_{22}(\lambda^b)\, \psi_1(x, \lambda^b) - c_{12}(\lambda^b)\, c_{22}(\lambda^н) \times \times \Psi_1(x, \lambda^н) = c_{11}(\lambda^b)\, \varphi_2(x, \lambda^b),$$

то сумма последних двух слагаемых в (15) равна

$$-\frac{\Psi_1(y, \lambda^н)}{|c_{12}(\lambda)|^2}\, c_{11}(\lambda^b)\, \varphi_2(x, \lambda^b)$$

и поэтому

$$R_{\lambda^b}(x, y) - R_{\lambda^н}(x, y) = \frac{\Psi_1(x, \lambda^b)\, \overline{\Psi_1(y, \lambda^b)}}{|c_{12}(\lambda)|^2\, M^+(\lambda^b)} + \frac{\varphi_2(x, \lambda^b)\, \overline{\varphi_2(y, \lambda^b)}}{|c_{21}(\lambda)|^2\, M^-(\lambda^b)}$$

при $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^- \cap \operatorname{Int} \sigma^+$. (16)

Если $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+ \cap \Delta^-$, то

$$R_{\lambda^b}(x, y) - R_{\lambda^н}(x, y) = \frac{\Psi_1(x, \lambda^b)}{M^+(\lambda^b)} \times \left[\frac{\varphi_2(y, \lambda^b)}{c_{12}(\lambda^b)} + \frac{\varphi_2(y, \lambda^н)}{c_{12}(\lambda^н)}\right] = \frac{\Psi_1(x, \lambda^b)\, c_{12}(\lambda^н)\, \varphi_1(y, \lambda^b)}{M^+(\lambda^b)\, |c_{12}(\lambda)|^2} + \frac{\Psi_1(x, \lambda^b)\, c_{11}(\lambda^н)\, \varphi_2(y, \lambda^н)}{M^+(\lambda^b)\, |c_{12}(\lambda)|^2} = \frac{\Psi_1(x, \lambda^b)\, \Psi_1(y, \lambda^н)}{|c_{12}(\lambda)|^2\, M^+(\lambda^b)} = \frac{\Psi_1(x, \lambda)\Psi_1(y, \lambda)}{|c_{12}(\lambda)|^2\, M^+(\lambda^b)}. \tag{17}$$

Аналогично при $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^- \cap \Delta^+$ получаем

$$R_{\lambda^b}(x, y) - R_{\lambda^н}(x, y) = \frac{\varphi_2(x, \lambda)\, \varphi_2(y, \lambda)}{|c_{21}(\lambda)|^2\, M^-(\lambda^b)}. \tag{18}$$

Непрерывный спектр оператора L состоит из объединения спектров σ^+ и σ^-. В силу спектральной теоремы оператор

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^+ + \sum_{k=0}^{\infty} P_k^-,$$

где $P_n^\pm$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — спектральные проекторы оператора L, отвечающие зонам $S_n^\pm$ спектров $\sigma^\pm$, вместе с аналогичной суммой, отвечающей дискретному спектру, дает единичный оператор. Из соотношений (16) — (18) следует, что проекторы $P_n^\pm$ $(n = 0, 1, \ldots)$ имеют ядра

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S_{n1}^+}^{S_{n2}^+} \frac{\Psi_1(x, \lambda)\, \overline{\Psi_1(y, \lambda)}}{|c_{12}(\lambda)|^2\, M^+(\lambda)}\, d\lambda$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{n_1}^{+}}^{S_{n2}^{-}}\frac{\varphi_2(x,\lambda)\overline{\varphi_2(y,\lambda)}}{|c_{21}(\lambda)|^2 M^{-}(\lambda)}\,d\lambda$$

соответственно.

Теорема. *Для функции* $f\in C_0^\infty(R)$ *имеем*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\Bigg[\int\limits_{\sigma^-}\frac{\varphi_2(x,\lambda)}{c_{21}(\lambda)}\,f_-(\lambda)\,\rho_-(\lambda)\,d\lambda+$$

$$+\int\limits_{\sigma^+}\frac{\Psi_1(x,\lambda)}{c_{12}(\lambda)}\,f_+(\lambda)\,\rho_+(\lambda)\,d\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}f_k\,g_k(x), \qquad (19)$$

где $g_k(x)$ — *ортонормированные собственные функции дискретного спектра оператора* L;

$$\rho_\pm(\lambda)=-i\,[M^\pm(\lambda)]^{-1};\; f_-(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y)\,\frac{\overline{\varphi_2(y,\lambda)}}{\overline{c_{21}(\lambda)}}\,dy;$$

$$f_+(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y)\,\frac{\overline{\Psi_1(y,\lambda)}}{\overline{c_{12}(\lambda)}}\,dy;\; f_k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y)\,\overline{g_k(y)}\,dy,\; k=1,2,\ldots \qquad (20)$$

Интегралы и ряд в (19) сходятся в $L^2(R)$. Соответствующее равенство Парсеваля имеет вид

$$\|f\|^2=\frac{1}{2\pi}\Bigg[\int\limits_{\sigma^-}|f_-(\lambda)|^2\,d\lambda+\int\limits_{\sigma^+}|f_+(\lambda)|^2\,d\lambda\Bigg]+\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^2$$

и справедливо уже для любых $f\in L^2(R)$, причем интегралы в (20) теперь также надо считать сходящимися в смысле $L^2(R)$.

Список литературы: 1. *Фирсова Н. Е.* Риманова поверхность квазиимпульса и теория рассеяния для возмущенного оператора Хилла //Мат. вопр. теории распространения волн.— 1974.— Вып. 7. — С. 51—62. 2. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. II. — М.: Иностр. лит., 1961.— 555 с. 3. *Фирсова Н. Е.* Обратная задача рассеяния для возмущенного оператора Хилла // Мат. заметки.— 1975.— 18:6.— С. 831—843. 4. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию.— М.: Наука, 1970. — 672 с.

Поступила в редколлегию 31.03.86