ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1949 Том XXI

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В. К. Балтага

(Харьков)

Настоящая работа посвящена обобщению известной формулы Шварца—Кристоффеля на случай бесконечносвязной области вне бесконечной решётки с двумя перьями.

При этом бесконечную решётку (в дальнейшем просто решётку) с n перьями мы определяем так:

Пусть в плоскости w дано n простых замкнутых кривых (кривые могут быть и вырожденными, и считаются тогда двухбереговыми разрезами), попарно не имеющих общих точек и образующих в своей совокупности границу n-связной области, для которой точка $w=\infty$ является внутренней точкой. Совокупность всех контуров, полученных из данных n параллельным переносом на всевозможные целые кратные некоторого вектора **P** той же плоскости, мы и назовём бесконечной решёткой с n перьями, а вектор **P**′ (и соответствующее ему комплексное число) — шагом решётки (конечно, предполагается, что никакие два контура из упомянутой совокупности не имеют общих точек).

Конформное отображение на верхнюю полуплоскость подобной решётки с одним пером рассмотрел в 1934 году Н. И. Ахиезер [1], дав соответствующее этому случаю обобщение формулы Шварца—Кристоффеля.

Как и в указанной работе Н. И. Ахиезера, мы в дальнейшем предположим, что перья решётки—многоугольники (вырожденные или нет), ограниченные отрезками прямых; в соответствии с характером связности отображаемой области будем искать функцию, отображающую область вне решётки на круговое кольцо.

§ 1. Пусть вершины решётки находятся в точках

$$A_1^{(k)},\ A_2^{(k)}, \ldots, A_m^{(k)};\ B_1^{(k)},\ B_2^{(k)}, \ldots, B_n^{(k)}$$

плоскости комплексного переменного $w=\xi+i\eta$, имеющих соответственно координаты

$$w_{11}^{(k)},\ w_{12}^{(k)}, \ldots, w_{1m}^{(k)} \text{ и } w_{21}^{(k)},\ w_{22}^{(k)}, \ldots, w_{2m}^{(k)}$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad \text{(См. рис. 1).}$$

Обозначим углы при этих вершинах (внешние по отношению к многоугольникам, образующим решётку) соответственно через

$$\alpha_1\pi,\ a_2\pi, \ldots, \alpha_m\pi;\ \beta_1\pi,\ \beta_2\pi, \ldots, \beta_n\pi.$$

Если шаг решётки равен $Le^{-i\lambda}$,

то
$$w_{1j}^{(k)} = w_{1j}^{(0)} + kLe^{-i\lambda}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

и точно так же
$$w_{2j}^{(k)} = w_{2j}^{(0)} + kLe^{-i\lambda}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Функция
$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{Le^{-i\lambda}} w} \tag{1}$$

отображает область вне решётки на бесконечнолистную поверхность над плоскостью ζ с логарифмическими точками разветвления в $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$, и на каждом листе этой поверхности находится по одному изображению многоугольников

$$A_1^{(k)} A_2^{(k)} \ldots A_m^{(k)} \quad \text{и} \quad B_1^{(k)} B_2^{(k)} \ldots B_n^{(k)}.$$

Каждая полоса периодичности (при подходящем её выборе) отображается при этом на один экземпляр плоскости ζ, надрезанный вдоль отрицательной части вещественной оси, на котором находится по одному изображению I_A и I_B многоугольников

$$A_1^{(k)} A_2^{(k)} \ldots A_m^{(k)} \quad \text{и} \quad B_1^{(k)} B_2^{(k)} \ldots B_n^{(k)}.$$

При этом бесконечно удалённой точке в полосе периодичности и в верхней полуплоскости отвечает точка $\zeta = 0$, и такая же точка, находящаяся в нижней полуплоскости, переходит в точку $\zeta = \infty$.

Пусть функция
$$\zeta = f(z) \tag{2}$$

отображает внутренность кольца
$$q < |z| < 1 \qquad (0 < q < 1)$$

на двухсвязную область плоскости ζ вне криволинейных многоугольников I_A и I_B так, что вершинам многоугольника I_A соответствуют точки a_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ окружности $|z| = q_1$, а точки b_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ окружности $|z| = 1$ служат изображениями вершин многоугольника I_B; тогда точки $\zeta = 0'$ и $\zeta = \infty$ будут соответственно изображениями некоторых точек A и B, лежащих внутри кольца; координаты этих последних точек обозначим через α и β (см. рис. 2).

Функция
$$w = w(z) = \frac{Le^{-i\lambda}}{2\pi i} \lg f(z) \tag{3}$$

отображает кольцо
$$q < |z| < 1$$

на область вне решётки; при этом точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ переходят соответственно в точки

$$A_1^{(k)}, \ldots, A_m^{(k)} \quad \text{и} \quad B_1^{(k)}, \ldots, B_n^{(k)};$$

кольцо же, надрезанное вдоль некоторой кривой AB, отображается функцией $w(z)$ на одну полосу периодичности, соответственно с выбранной ветвью логарифма.

Продолжая функцию $w = w(z)$ по принципу симметрии через дугу a_j, a_{j+1} и дугу b_i, b_{i+1}, мы на плоскости z получим строенное кольцо

$$q^2 < |z| < \frac{1}{q},$$

которому на плоскости w будет отвечать трёхлистная область, получаемая из области вне решётки зеркальным отражением в соответствующих сторонах многоугольников—перьев решётки.

Вторичная инверсия в дугах окружностей $|z| = q^2$ и $|z| = \frac{1}{q}$ приведёт на плоскости z к преобразованию вида $z^* = q^2 z$, или вида $z^* = q^{-2} z$, каждому из которых в плоскости w отвечает поворот и параллельный перенос полосы периодичности.

Чётному числу $2k$ инверсий в дугах свободных окружностей на плоскости z отвечает преобразование вида

$$z^* = q^{\pm 2k} z,$$

при котором отображающая функция $w = w(z)$ преобразуется по формуле

$$w^* = a_k^* w + b_k^*,$$

где a_k^* и b_k^* — некоторые постоянные.

Отсюда следует, что функция

$$\Phi(z) = \frac{w''}{w'}$$

есть однозначная аналитическая функция в плоскости z, удовлетворяющая соотношению

$$\Phi(q^2 z) \equiv q^{-2} \Phi(z).$$

Так как, кроме того, обход окружности $|z| = q$ по замкнутому контуру, лежащему внутри кольца, может изменить w лишь на аддитивную постоянную, то

$$\Phi(z e^{2\pi i}) \equiv \Phi(z)$$

и, значит, функция

$$\Psi(z) = z\Phi(z) \tag{4}$$

должна удовлетворять уравнениям:

$$\Psi(q^2 z) \equiv \Psi(z),$$

$$\Psi(e^{2\pi i} z) \equiv \Psi(z). \tag{5}$$

Возьмём чисто мнимое τ, $I\{\tau\} > 0$ так, чтобы

$$q = e^{i\pi\tau};$$

положим

$$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3{}^2 = \frac{\pi}{2} \ (1 + 2q + 2q^4 + \cdots)^2$$

и выберем K' согласно с формулой

$$iK' = K\tau.$$

Если ещё положить

$$u = \frac{K}{\pi i} \lg z, \quad z = e^{\frac{\pi i u}{K}},$$

то для функции

$$F(u) = \Psi\left(e^{\frac{\pi i u}{K}}\right) \tag{6}$$

соотношения (5) примут вид:

$$F(u + 2K) \equiv F(u),$$
$$F(u + 2iK') \equiv F(u),$$

т. е. функция $F(u)$, определённая равенством (6) во всей плоскости u, двоякопериодическая.

Мы сейчас убедимся в том, что $F(u)$ мероморфная функция.

Выберем параллелограмм периодов на плоскости u так, чтобы ему отвечало в плоскости z кольцо

$$q \leqslant |z| < \frac{1}{q}.$$

В этом кольце функция $\Phi(z) = \frac{w''}{w'}$ имеет особыми точками только полюсы первого порядка с координатами:

$$a_1, \ a_2, \ldots, a_m; \ b_1, b_2, \ldots, b_n; \ \alpha, \beta; \ \frac{1}{\alpha} \text{ и } \frac{1}{\beta},$$

и с соответствующими лорановскими разложениями:

$$\Phi(z) = \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + \text{пр. часть} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\Phi(z) = \frac{\beta_l - 1}{z - b_l} + \text{пр. часть} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{z - \alpha} + \text{пр. часть},$$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{z - \beta} + \text{пр. часть},$$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{z - \frac{1}{\alpha}} + \text{пр. часть},$$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{z - \frac{1}{\beta}} + \text{пр. часть}.$$

Поэтому функция $F(u)$, определённая формулами (4) и (6), имеет особенностями в параллелограмме периодов тоже только полюсы первого порядка в точках (см. рис. 3)

$$a_k' = \frac{K}{\pi i} \lg a_k = \frac{K\varphi_k}{\pi} + iK',$$

$$b_l' = \frac{K}{\pi i} \lg b_l = \frac{K}{\pi} \psi_l,$$

$$\alpha' = \frac{K}{\pi i} \lg \alpha, \quad \alpha_1' = \frac{K}{\pi i} \lg \frac{1}{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha'},$$

$$\beta' - \frac{K}{\pi i} \lg \beta, \quad \beta_1' = \frac{K}{\pi i} \lg \frac{1}{\overline{\beta}} = \overline{\beta'},$$

где положено:

$$a_k = qe^{i\varphi_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

$$b_l = e^{i\psi_l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Разлагая эллиптическую функцию $F(u)$ в окрестности каждого из этих полюсов в ряд Лорана, получим:

$$F(u) = \frac{K(\alpha_k - 1)}{\pi i \left(u - a_k'\right)} + \text{пр. часть},$$

$$F(u) = \frac{K(\beta_l - 1)}{\pi i \left(u - b_l'\right)} + \text{пр. часть},$$

$$F(u) = -\frac{K}{\pi i (u - \alpha')} + \text{пр. часть},$$

$$F(u) = -\frac{K}{\pi i (u - \beta')} + \text{пр. часть},$$

$$F(u) = -\frac{K}{\pi i (u - \overline{\alpha'})} + \text{пр. часть},$$

$$F(u) = -\frac{K}{\pi i (u - \overline{\beta'})} + \text{пр. часть}.$$

При этом условие равенства нулю суммы вычетов относительно всех этих полюсов:

$$\sum_{k=1}^{m} (\alpha_k - 1) + \sum_{l=1}^{n} (\beta_l - 1) - 4 = 0$$

выполняется (в силу известной теоремы о внешних углах многоугольника).

Из предшествующего следует, что функция F (u) имеет вид:

$$F(u)=C+\frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k-1)\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-a_k'}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-a_k'}{2K}\right)}+\sum_{l=1}^{m}(\beta_l-1)\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-b_l'}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-b_l'}{2K}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-\alpha'}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\alpha'}{2K}\right)}-\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-\beta'}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\beta'}{2K}\right)}-\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-\overline{\beta}'}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\overline{\beta}'}{2K}\right)}-\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u-\overline{\alpha}'}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\overline{\alpha}'}{2K}\right)}\right\}, \tag{7}$$

где C—постоянная, а $\vartheta_1(v)=\vartheta_1(v|\tau)$, $(e^{i\pi\tau}=q)$.

Для определения постоянной C заметим, что она не зависит от q; с другой стороны, при $q\to 0$ решётка с двумя перьями вырождается в решётку с одним пером (многоугольники $A_1^{(k)}$ $A_2^{(k)}\dots$ $A_m^{(k)}$ стягиваются в точки, а отображающая функция должна дать в пределе функцию Н. И. Ахиезера (см. [1], стр. 45).

Воспользовавшись формулами:

$$\lim_{q\to 0}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\lg z-\lg a}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\lg z-\lg a}{2\pi i}\right)}=\pi i\frac{z+a}{z-a}$$

и

$$\lim_{q\to 0}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\lg z-\lg qe^{i\varphi}}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\lg z-\lg qe^{i\varphi}}{2\pi i}\right)}=\pi i,$$

мы найдём, что

$$\lim_{q\to 0}\Phi(z)=\frac{C+2}{z}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\beta_l-1}{z-b_l}-\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}-\frac{1}{z-\frac{1}{\overline{\alpha}}}-\frac{1}{z-\frac{1}{\overline{\beta}}},$$

откуда следует, что $C=-2$.

Учитывая выражение функции $\Phi(z)$ через функцию F (u) [см. формулы (4) и (6)], мы получим теперь с помощью (7):

$$\Phi(z)=\frac{w''}{w'}=-\frac{2}{z}+\frac{1}{2\pi iz}\left\{\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k-1)\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\lg z-\lg a_k}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\lg z-\lg a_k}{2\pi i}\right)}+\right.$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\left\{(\beta_l-1)\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\lg z-\lg b_l}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\lg z-\lg b_l}{2\pi i}\right)}-\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\lg z-\lg \alpha}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\lg z-\lg \alpha}{2\pi i}\right)}-\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\lg z-\lg \beta}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\lg z-\lg \beta}{2\pi i}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\lg z+\lg \overline{\alpha}}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\lg z+\lg \overline{\alpha}}{2\pi i}\right)}-\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\lg z+\lg \overline{\beta}}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\lg z+\lg \overline{\beta}}{2\pi i}\right)}\right\},$$

что даёт после интегрирования:

$$Aw+B=$$

$$=\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}\left\{\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta-\lg a_k}{2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k-1}\prod\limits_{l=1}^{n}\left\{\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta-\lg b_l}{2\pi i}\right)\right\}^{\beta_l-1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta-\lg\alpha}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta+\lg\bar\alpha}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta-\lg\beta}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta+\lg\bar\beta}{2\pi i}\right)}\,\frac{d\zeta}{\zeta^2},\qquad(8)$$

где A и B—постоянные.

Таков вид функции, отображающей кольцо

$$q<|z|<1$$

на область плоскости w вне решётки с двумя перьями, имеющими форму многоугольников.

Формула (8) содержит $m+n+5$ параметров, подлежащих определению. Это величины: a_k $(k=1,2,\ldots,m)$, $b_l\,(l=1,2,\ldots,n)$, α,β, A, B и q. Полное же задание решётки равносильно заданию: вершин $w_{11}^{(0)}$, $w_{12}^{(0)}$, $w_{21}^{(0)}$, $w_{22}^{(0)}$, $m+n-2$ отношений длин сторон и шага решётки $Le^{-i\lambda}$, т. е. $m+n+3$ условий (величины углов входят в отображающую функцию непосредственно).

Таким образом, для определения $m+n+5$ параметров отображения нехватает двух соотношений, которые, однако, легко получить, исходя из того, что обходу точек $z=\alpha$ и $z=\beta$ в плоскости кольца по бесконечно малым окружностям в положительном направлении соответствуют в плоскости w соответственно сдвиги на векторы $Le^{-i\lambda}$ и $-Le^{-i\lambda}$. Эти соотношения имеют вид:

$$-\frac{4\pi^2}{\alpha\vartheta_1'(0)}\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}\left\{\vartheta_1\left(\frac{\lg\alpha-\lg a_k}{2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k-1}\prod\limits_{l=1}^{n}\left\{\vartheta_1\left(\frac{\lg\alpha-\lg b_l}{2\pi i}\right)\right\}^{\beta_l-1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg|\alpha|}{\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg\alpha-\lg\beta}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg\alpha+\lg\bar\beta}{2\pi i}\right)}=ALe^{-i\lambda},$$

$$-\frac{4\pi^2}{\beta\vartheta_1'(0)}\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}\left\{\vartheta_1\left(\frac{\lg\beta-\lg a_k}{2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k-1}\prod\limits_{l=1}^{n}\left\{\vartheta_1\left(\frac{\lg\beta-\lg b_l}{2\pi i}\right)\right\}^{\beta_l-1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg|\beta|}{\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg\alpha-\lg\beta}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg\bar\alpha+\lg\beta}{2\pi i}\right)}=ALe^{-i\lambda}.\qquad(9)$$

Замечание. Если бы вместо кольца

$$q<|z|<1,$$

мы взяли кольцо

$$q<|z|<\frac{1}{q},$$

то функция, отображающая последнее кольцо на область вне решётки, приняла бы вид:

$$Aw+B=$$

$$=\int\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}\left\{\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta-\lg a_k}{2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k-1}\prod\limits_{l=1}^{n}\left\{\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta-\lg b_l}{2\pi i}\right)\right\}^{\beta_l-1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta-\lg\alpha}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta+\lg q^2\bar{\alpha}}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta-\lg\beta}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta+\lg q^2\beta}{2\pi i}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta^2}, \tag{8 bis}$$

где $\vartheta_1(v)=\vartheta_1(v,\ q^2)$; $q^2=e^{i\pi\tau}$, $|a_k|=q$, $|b_l|=\frac{1}{q}$, $q<|\alpha|<\frac{1}{q}$, $q<|\beta|<\frac{1}{q}$.

§ 2. Пусть решётка с одним пером находится в верхней полуплоскости $I\{w\}>0$ (см. рис. 4).

Координаты вершин k-го пера обозначим через $w_j^{(k)}$ $(j=1,2,\ldots,m)$, $w_j^{(k)}=w_j^{(0)}+kL$, $(k=0,\ \pm 1,\pm 2,\ldots)$, где L — шаг решётки, а углы при вершинах пера, внешние по отношению к перу, положим равными $\alpha_1\pi,\ \alpha_2\pi,\ \ldots,\alpha_m\pi$.

Область верхней полуплоскости w вне решётки можно отобразить однозначно и конформно на внутренность кольца

$$q<|z|<1$$

так, чтобы вещественная ось перешла в окружность

$$|z|=1,$$

а контуру пера отвечала бы окружность

$$|z|=q.$$

Пусть вершины пера изображаются точками $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(a_k=qe^{i\varphi_k})$, а бесконечно удалённой точке „перед“ решёткой (т. е. в верхней полуплоскости) отвечает точка $z=\alpha$ $(q<|\alpha|<1)$.

Продолжая отображающую функцию сквозь вещественную ось в нижнюю полуплоскость, мы убедимся в том, что эта функция тождественна с функцией, осуществляющей отображение области вне решётки с двумя перьями, симметрично расположенными относительно вещественной оси, на кольцо

$$q<|z|<\frac{1}{q}.$$

При этом отображении бесконечно удалённой точке в верхней полуплоскости отвечает на кольце $q<|z|<\frac{1}{q}$ точка $z=\alpha$; бесконечно удалённая точка в нижней полуплоскости изображается на кольце точкой $z=\frac{1}{\bar{\alpha}}$.

Это позволяет, использовав формулу (8 bis) и положив в ней

$$\beta=\frac{1}{\bar{\alpha}},\ n=m,\ b_l=\frac{a_l}{q^2},\ \beta_l=\alpha_l\ \ (l=1,2,\ldots,m),$$

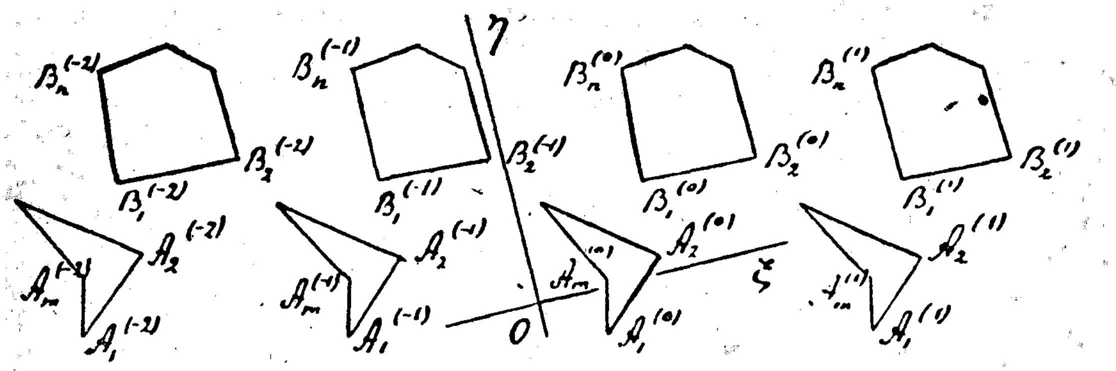

Рис. 1.

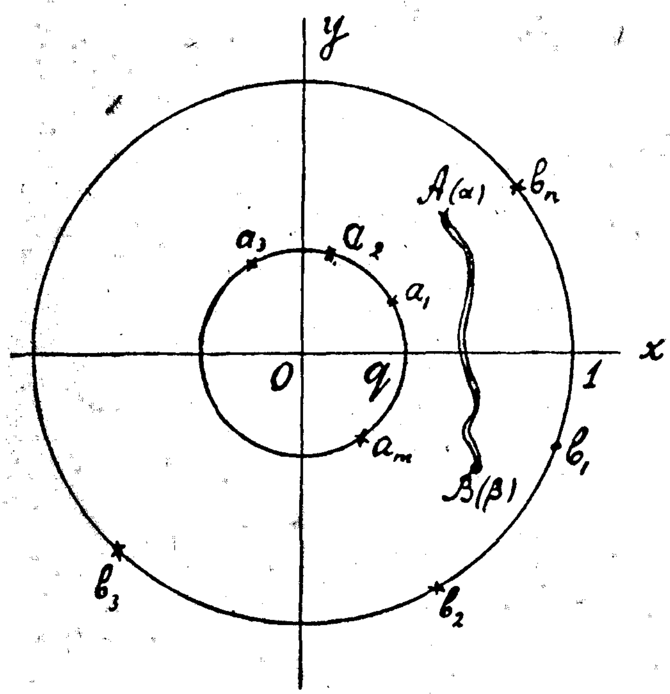

Рис. 2.

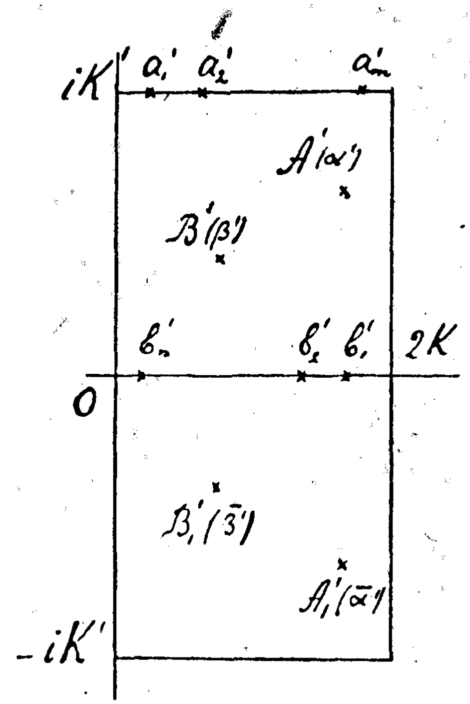

Рис. 3.

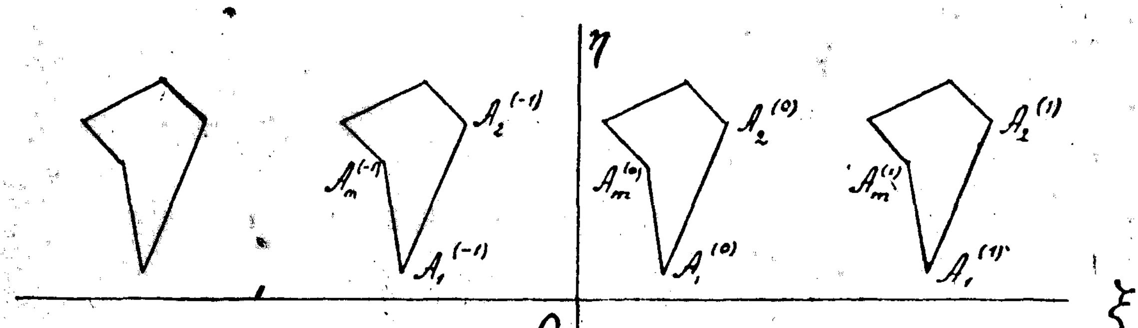

Рис. 4.

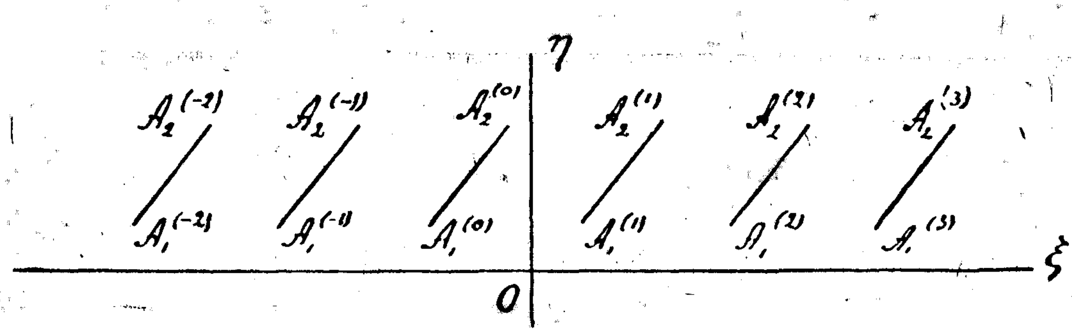

Рис. 5.

сразу же написать функцию, отображающую кольцо

$$q < |z| < 1$$

на бесконечносвязную область верхней полуплоскости w вне решётки. Именно:

$$Aw + B =$$

$$= \int \frac{\prod_{k=1}^{m} \left\{ \vartheta_1\left(\frac{\lg z - \lg a_k}{2\pi i}\right) \vartheta_1\left(\frac{\lg z - \lg a_k}{2\pi i} + \frac{\lg q^2}{2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k - 1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg z - \lg \alpha}{2\pi i}\right) \vartheta_1\left(\frac{\lg z + \lg \bar{\alpha}}{2\pi i} + \frac{\lg q^2}{2\pi i}\right) \vartheta_1\left(\frac{\lg z + \lg \bar{\alpha}}{2\pi i}\right) \vartheta_1\left(\frac{\lg z - \lg \alpha}{2\pi i} + \frac{\lg q^2}{2\pi i}\right)} \frac{dz}{z^2},$$

где $\vartheta_1(v) = \vartheta_1(v, q^2)$, $\quad q^2 = e^{i\pi\tau}$.

Так как

$$\vartheta_1(v|\tau)\,\vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\Big|\tau\right) = \frac{iq^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2\left(0\Big|\frac{\tau}{2}\right)}{2} e^{-i\pi v}\,\vartheta_1\left(v\Big|\frac{\tau}{2}\right),$$

то отображающую функцию можно привести к виду:

$$A_1 w + B_1 = \int \frac{\prod_{k=1}^{m} \left\{ \vartheta_1\left(\frac{\lg z - \lg a_k}{2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k - 1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg z - \lg \alpha}{2\pi i}\right) \vartheta_1\left(\frac{\lg z + \lg \bar{\alpha}}{2\pi i}\right)} \frac{dz}{z^2}, \tag{10}$$

где $\vartheta_1(v) = \vartheta_1(v, q)$, $\quad q = e^{i\pi\tau'}$, а A_1 и B_1—новые постоянные.

Между параметрами, входящими в последнюю формулу, имеют место соотношения

$$-\frac{4\pi^2}{\alpha\vartheta_1'(0)} \frac{\prod_{k=1}^{m} \left\{ \vartheta_1\left(\frac{\lg \alpha - \lg a_k}{2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k - 1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg|\alpha|}{\pi i}\right)} = LA_1 \tag{9 bis}$$

и

$$-\frac{4\pi^2\bar{\alpha}}{\vartheta_1'(0)} \frac{\prod_{k=1}^{m} \left\{ \vartheta_1\left(\frac{\lg \bar{\alpha} + \lg a_k}{2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k - 1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg|\alpha|}{\pi i}\right)} = LA_1,$$

которые получаются тем же путём, что и соотношения (9).

Второе из соотношений (9 bis) можно привести к виду:

$$-\frac{4\pi^2}{\alpha\,\vartheta_1'(0)} \frac{\prod_{k=1}^{m} \left\{ \vartheta_1\left(\frac{\lg \bar{\alpha} - \lg a_k}{-2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k - 1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg|\alpha|}{\pi i}\right)} e^{i\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k - 1)\varphi_k} = LA_1,$$

из чего следует его независимость от первого; исключением будут те случаи, когда параметры отображения имеют специальные значения.

Преобразовав функцию (10) по формуле $\zeta = qz$ и заменив затем q на $q^{\frac{1}{2}}$, получим функцию

$$Aw + B = \int \frac{\prod_{k=1}^{m} \left\{ \vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta - \lg a_k'}{2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k - 1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta - \lg\alpha'}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg\zeta + \lg\bar{\alpha}'}{2\pi i}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta^3}, \tag{10 bis}$$

где $\vartheta_1(v) = \vartheta_1(v, q^{\frac{1}{2}})$, $q^{\frac{1}{2}} = e^{i\pi\tau}$,

отображающую кольцо

$$q < |\zeta| < 1$$

на область плоскости w вне решётки, перья которой симметричны относительно оси $O\xi$.

В последней формуле $a_k' = qe^{i\varphi_k'}$, $q < |\alpha'| < q^{\frac{1}{2}}$, и точка α' соответствует бесконечно удалённой точке в верхней полуплоскости w. Бесконечно удалённой точке в нижней полуплоскости w отвечает на кольце точка $\frac{q}{\bar{\alpha}'}$.

Соотношения (9) между параметрами отображения в этом случае имеют вид:

$$-\frac{4\pi^2}{\alpha'^2\vartheta_1'(0)} \frac{\prod_{k=1}^{m}\left\{\vartheta_1\left(\frac{\lg\alpha' - \lg a_k'}{2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k - 1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg|\alpha'|}{\pi i}\right)} = AL,$$

$$-\frac{4\pi^2\bar{\alpha}'}{q\alpha'\vartheta_1'(0)} \frac{\prod_{k=1}^{m}\left\{\vartheta_1\left(\frac{\lg\frac{\bar{\alpha}'}{q} + \lg a_k'}{2\pi i}\right)\right\}^{\alpha_k - 1}}{\vartheta_1\left(\frac{\lg|\alpha'|}{\pi i}\right)} = AL.$$

§ 3. Рассмотрим в заключение пример.

Пусть перо решётки, расположенной у оси $O\xi$, представляет отрезок прямой (см. рис. 5).

Для этого случая $m = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, и мы возьмём α вещественным, $q < \alpha < 1$.

Отображающая функция, согласно с формулой (10), может быть написана так:

$$A_1 w + B_1 = \int \frac{\vartheta_1\left(\frac{\lg z - \lg a_1}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg z - \lg a_2}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\lg z - \lg\alpha}{2\pi i}\right)\vartheta_1\left(\frac{\lg z + \lg\alpha}{2\pi i}\right)} \frac{dz}{z^2},$$

где $\vartheta_1(v) = \vartheta_1(v, q)$.

Сделав в интеграле замену переменных по формуле

$$z = e^{2\pi i u}$$

и положив:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lg a_1}{2\pi i} &= \frac{\varphi_1}{2\pi} + \frac{\tau}{2} = m, \\ \frac{\lg a_2}{2\pi i} &= \frac{\varphi_2}{2\pi} + \frac{\tau}{2} = n, \\ \frac{\lg \alpha}{2\pi i} &= p, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

получим:

$$A_1 w + B_1 = 2\pi i \int e^{-2\pi i u} \frac{\vartheta_1(u-m)\,\vartheta_1(u-n)}{\vartheta_1(u+p)\;\vartheta_1(u-p)}\,du = 2\pi i \int F(u)\,du, \tag{12}$$

где $u = \dfrac{1}{2\pi i} \lg z.$

Очевидно, что функция $F(u)$, стоящая под знаком интеграла в последней формуле, удовлетворяет соотношениям:

$$F(u+1) = F(u),$$

$$F(u+\tau) = e^{2\pi i(m+n-\tau)} F(u);$$

второму соотношению, приняв во внимание (11), можно придать вид:

$$F(u+\tau) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} F(u),$$

и так как

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi l + 2\pi\psi,$$

где $l = 0$, или $l = 1$, а $0 \leqslant \psi < 1$,

то

$$F(u+\tau) = e^{2\pi i\psi} F(u).$$

Итак, $F(u)$—двоякопериодическая функция второго рода с множителями 1 и $e^{2\pi i\psi}$; при ψ рациональном она эллиптическая.

Как мы увидим, $2\pi\psi$ есть угол между пером решётки и положительным направлением оси $O\xi$.

А. Рассмотрим отдельно случай, когда $\psi = 0$.
Тогда

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi,$$

а функция

$$F(u) = e^{-2\pi i u} \frac{\vartheta_1(u-m)\,\vartheta_1(u-n)}{\vartheta_1(u+p)\,\vartheta_1(u-p)}$$

эллиптическая с периодами 1 и τ, и в параллелограмме $0, 1, 1+\tau, \tau$ имеет простые полюсы p и $\tau - p$.

Положив

$$\operatorname*{rés}_{u=p} F(u) = \frac{1}{\alpha\,\vartheta_1'(0)}\;\frac{\vartheta_1(p-m)\,\vartheta_1(p-n)}{\vartheta_1(2p)} = \mathbf{V},$$

найдём, что

$$\operatorname*{rés}_{u=\tau-p} F(u) = -\mathbf{V},$$

как и должно быть, согласно с теоремой о сумме вычетов эллиптической функции.

Отсюда получается, что

$$F(u) = \mathbf{V}\left\{\frac{\vartheta_1'(u-p)}{\vartheta_1(u-p)} - \frac{\vartheta_1'(u+p)}{\vartheta_1(u+p)} + C\right\},$$

где

$$C = 2\,\frac{\vartheta_1'(p)}{\vartheta_1(p)} - \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_1(2p)}{\vartheta_1(p-m)\,\vartheta_1(p+m)}\;\frac{\vartheta_1^2(m)}{\vartheta_1^2(p)}\,. \tag{13}$$

Теперь формула (12) даёт:

$$A_2 w + B_2 = \lg\frac{\vartheta_1(u-p)}{\vartheta_1(u+p)} + Cu; \tag{12 bis}$$

здесь A_2 и B_2—новые постоянные, а $u = \frac{1}{2\pi i}\lg z$.

Обходу точки $z=\alpha$ по бесконечно малой окружности в положительном направлении отвечает в плоскости u обход в положительном направлении точки $u=p$ по бесконечно близкому к ней контуру; в плоскости же w этому обходу соответствует переход из одной полосы периодичности в соседнюю; при этом w изменяется на L.

Отсюда получаем:

$$A_2 L = 2\pi i,$$

что позволяет переписать формулу (12 bis) в виде:

$$w + B = \frac{L}{2\pi i}\lg\frac{\vartheta_1(u-p)}{\vartheta_1(u+p)} + \frac{LC}{2\pi i}\,u,$$

где B—постоянная.

На окружности $|z|=q$, $u = \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{\tau}{2} = \Phi + \frac{\tau}{2}$; поэтому, пользуясь формулами приведения для тета-функций, найдём, что при $|z|=q$:

$$w + B = \frac{L}{2\pi i}\lg\frac{\vartheta_0(\Phi-p)}{\vartheta_0(\Phi+p)} + \frac{LC}{2\pi i}\left(\Phi + \frac{\tau}{2}\right) + Lp,$$

и так как w должно возвращаться к начальному значению, когда z описывает окружность $|z|=q$, т. е. когда Φ изменяется на 1, то $C=0$, откуда, принимая во внимание (13), получаем уравнение:

$$\frac{2\vartheta_1(p)\,\vartheta_1'(p)}{\vartheta_1(2p)} = \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_1^2(m)}{\vartheta_1(p-m)\,\vartheta_1(p+m)}\,, \tag{14}$$

связывающие параметры отображения p, m и q.

В силу того, что $C=0$, отображающая функция имеет вид:

$$w+B=\frac{L}{2\pi i}\lg\frac{\vartheta_1(u-p)}{\vartheta_1(u+p)}, \tag{15}$$

$$u=\frac{1}{2\pi i}\lg z, \qquad q<|z|<1.$$

Из последней формулы следует, что B—вещественное. Действительно, когда точка z описывает окружность $|z|=1$, то u—вещественное, а вместе с ним вещественна и правая часть равенства (15); справедливость нашего утверждения вытекает из того, что точка w должна при этом двигаться по вещественной оси.

Когда z убывает на сегменте $1\geqslant z\geqslant q$, то $\frac{\vartheta_1(u-p)}{\vartheta_1(u+p)}$ меняется непрерывно, монотонно возрастая и пробегая сегмент $[-1, \alpha]$ (и меняя знак при $u=p$, т. е. при $z=\alpha$).

Поэтому, когда точка z в плоскости кольца пробегает отрезок $1\geqslant z>\alpha$, то точка w, выходя в плоскости решётки из начального положения $w=\frac{L}{2}-B$, движется по лучу, перпендикулярному к вещественной оси, и уходит в бесконечность; обходу точки $z=\alpha$ по бесконечно малой полуокружности в верхней полуплоскости отвечает изменение вещественной части w на $\frac{L}{2}$, и после такого обхода

$$w=\frac{L}{2\pi i}\lg\frac{\vartheta_1(u-p)}{\vartheta_1(u+p)}+L-B;$$

при пробеге точкой z отрезка $\alpha>z\geqslant q$ в плоскости кольца, точка w описывает луч $(L-B+i\infty,\ L-B+Lp)$, где $L-B+Lp$—какая-то точка на одном из перьев; наконец, когда z описывает окружность $|z|=q$ в положительном направлении, то

$$u=\frac{\varphi}{2\pi}+\frac{\tau}{2}=\Phi+\frac{\tau}{2}, \qquad 0\leqslant\Phi<1;$$

из формул приведения тета-функций следует, что для точки w тогда имеем:

$$w=\frac{L}{2\pi i}\lg\frac{\vartheta_0(\Phi-p)}{\vartheta_0(\Phi+p)}+L-B+Lp, \tag{15 bis}$$

и так как три первых слагаемых правой части вещественны, когда Φ растёт от 0 до 1, то мнимая часть w остаётся постоянной и равной Lp.

Таким образом, перо решётки в случае $\psi=0$ параллельно вещественной оси.

Теперь мы можем найти все параметры отображения, остававшиеся до сих пор неопределёнными.

Пусть расстояние от пера решётки до вещественной оси равно h; обозначим абсциссу левого конца одного из перьев через u_0 и положим длину пера, равной δL $(0<\delta<1)$.

Как следует из предыдущего,

$$Lp=hi,$$

т. е.

$$p=\frac{hi}{L} \tag{16}$$

или

$$\alpha = e^{-\frac{2\pi h}{L}}.$$

Потребовав, чтобы точки $a_1 = qe^{i\varphi_1}$ и $a_2 = qe^{-i\varphi_1}$ переходили в концы пера, мы получим, пользуясь (15 bis), систему уравнений:

$$u_0 = \frac{L}{2\pi i} \lg \frac{\vartheta_0(\Phi_1 - p)}{\vartheta_0(\Phi_1 + p)} + L - B,$$

$$u_0 + \delta L = \frac{L}{2\pi i} \lg \frac{\vartheta_0(\Phi_1 + p)}{\vartheta_0(\Phi_1 - p)} + L - B,$$

из которой найдём, что

$$B = L\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) - u_0, \tag{17}$$

а также получим уравнение:

$$\frac{\vartheta_0(\Phi_1 - p)}{\vartheta_0(\Phi_1 + p)} = e^{-\pi i \delta}, \tag{18}$$

связывающее величины Φ_1 и q.

Итак, отображающая функция имеет вид:

$$w = \frac{L}{2\pi i} \lg \frac{\vartheta_1(u - p)}{\vartheta_1(u + p)} + u_0 - L\left(1 - \frac{\delta}{2}\right),$$

где $u = \frac{1}{2\pi i} \lg z$, $q < |z| < 1$; p определяется уравнением (16), а величины Φ_1 и q должны быть найдены из уравнений (18) и (14). Последнее уравнение, впрочем, можно привести к виду:

$$\frac{2\vartheta_1(p)\vartheta_1'(p)}{\vartheta_1(0)\vartheta_1(2p)} = -\frac{\vartheta_0^2(\Phi_1)}{\vartheta_0(\Phi_1 - p)\vartheta_0(\Phi_1 + p)}. \tag{14 bis}$$

В. Вернёмся теперь к общему случаю, когда $\psi \neq 0$.

Как было выше показано, в этом случае функция $F(u)$ двоякопериодическая второго рода с множителями 1 и $e^{2\pi i \psi}$ и в параллелограмме $0, 1, 1 + \tau, \tau$ имеет простые полюсы в точках p и $\tau - p$.

Разложив функцию $F(u)$ на простейшие, получим:

$$F(u) = M \frac{\vartheta_1(u - p - \psi)}{\vartheta_1(u - p)} + \overline{M} \frac{\vartheta_1(u + p - \psi)}{\vartheta_1(u + p)},$$

где

$$M = -\frac{1}{\alpha\vartheta_1(\psi)} \frac{\vartheta_1(p - m)\vartheta_1(p - n)}{\vartheta_1(2p)} = Re^{i\gamma},$$

а $\overline{M}$—число, сопряжённое с M.

Поэтому из формулы (12) следует, что

$$Aw = \int_0^u \left\{ e^{i\gamma} \frac{\vartheta_1(v - p - \psi)}{\vartheta_1(v - p)} + e^{-i\gamma} \frac{\vartheta_1(v + p - \psi)}{\vartheta_1(v + p)} \right\} dv; \tag{19}$$

как и прежде, $v = \frac{1}{2\pi i} \lg z$; A — новая постоянная, аддитивная же постоянная B подобрана так, чтобы точка $z = 1$ (т. е. $u = 0$) переходила в начало координат в плоскости решётки.

Когда точка $z = e^{i\varphi}$ описывает в положительном направлении окружность $|z| = 1$, то $v = \frac{\varphi}{2\pi} = \Phi$ — вещественное и меняется в интервале $0 \leqslant \Phi \leqslant u$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$; так как при этом сумма, стоящая под знаком интеграла (19), вещественная, а точка w должна пробегать отрезок вещественной оси, то A — вещественное и, очевидно, положительное.

Заставим точку z пробежать отрезок $1 \geqslant z \geqslant q$, обогнув точку α по бесконечно малой полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости; из формулы (19) следует, что Aw при этом принимает комплексные значения, и мы приходим в точку $z = q$ со значением w, определяемым формулой:

$$Aw_0 = -\pi i e^{i\gamma} \frac{\vartheta_1(\psi)}{\vartheta_1'(0)} + \text{v.p.}\int_0^{\frac{\tau}{2}} \left\{ e^{i\gamma} \frac{\vartheta_1(v-p-\psi)}{\vartheta_1(v-p)} + e^{-i\gamma}\frac{\vartheta_1(v+p-\psi)}{\vartheta_1(v+p)} \right\} dv,$$

где w_0 — координата некоторой точки, лежащей на одном из перьев; главное значение интеграла, стоящего в последней формуле, очевидно существует.

Если точка $z = qe^{i\varphi}$ описывает дугу окружности $|z| = q$ так, что φ меняется между 0 и φ_1 $(a_1 = qe^{i\varphi_1})$,

то

$$A(w-w_0) = e^{2\pi i\psi} \int_0^{\Phi} \left\{ e^{i\gamma} \frac{\vartheta_1(u-p-\psi)}{\vartheta_1(u-p)} + e^{-i\gamma} \frac{\vartheta_1(u+p-\psi)}{\vartheta_1(u+p)} \right\} du,$$

где $\Phi = \frac{\varphi}{2\pi}$; интеграл, стоящий в правой части последней формулы, сохраняет при таком изменении вещественное значение, и, следовательно, вектор $w - w_0$, оба конца которого находятся на одном и том же пере, не меняет направления; очевидно, как и указывалось ранее, что перо решётки образует с вещественной осью угол $2\pi\psi$.

При $\psi = \frac{r}{s}$ (где r и s — целые и взаимнопростые) $F(u)$ эллиптическая с примитивными периодами 1 и $s\tau$; как и в случае $\psi = 0$, интегрирование может быть доведено до конца в тета-функциях, на чем, однако, мы останавливаться не будем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, О плоскопараллельном потоке через бесконечную решётку. Научные записки ХАИ, выпуск 2 (1934).