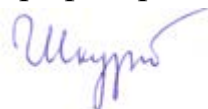


Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра астрономії та космічної інформатики

«Допущено до захисту»
Зав. кафедри астрономії та
космічної інформатики
проф. Юрій ШКУРАТОВ



16.05.2025 р.

Оцінка « Відмінно »
Голова ЕК
проф. Олександра ІВАНОВА



22.05.2025 р.

Одинець Дмитро Володимирович

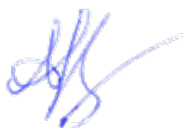
Формули Боттлінгера для оцінки відстані до центру Галактики

Кваліфікаційна робота на здобуття
освітньо-кваліфікаційного рівня
«Магістр» спеціальність
104 – «фізика та астрономія»
освітньо-професійна програма
«астрономія»



(підпис студента)

Науковий керівник – провідний
науковий співробітник НДІ астрономії
В. С. Ахметов



(підпис керівника)

Харків 2025

Анотація

Одинець Д.В. Формули Боттлінгера для оцінки відстані до центру Галактики. – Рукопис.

Дипломна робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня “Магістр” за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія». – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2025. – 37 с. – Табл. 2. Іл. 10.

Дипломна робота присвячена оцінці відстані до центру Галактики використовуючи вдосконаленні формули Боттінгера за даними каталогу Gaia DR3. Написано програмне забезпечення на мові C++ для вирішення систем нелінійних рівнянь методом найменших квадратів з використанням оптимізації Левенберга-Марквардта. Отримано кінематичні параметри Галактики з найкращою оцінкою відстані до її центру $R_0 = 8.3231 \pm 0.0091$ крс. Також отримані кутова швидкість обертання Галактики для навколо сонячної околиці, її перша та друга похідна від галактоцентричної відстані та товщини диску, величина локальної деформації поля швидкостей в галактичній площині, а також компоненти швидкості Сонця відносно центру Галактики. Виконано аналіз всіх отриманих кінематичних параметрів та проведено порівняння їх величин з сучасними значеннями, що отримані іншими дослідниками. Встановлено, що використання формул Боттлігера дозволяє з високою точністю по даним Gaia DR3 отримати оцінки кінематичних параметрів Галактики, а також галактоцентричну відстань.

Ключові слова: Галактика, Gaia DR3, формули Боттінгера, відстань до центру Галактики.

Abstracts

Odynets D.V. Bottlinger's formulas for estimating the distance to the Galaxy Center - Manuscript

Dissertation for the degree of Master's Degree in specialty 104 – “physics and astronomy” – V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2025 – 37 p. – Table 2. Ill. 10.

The thesis is focused on the estimation of the distance to the center of the Galaxy using the improved Bottlinger formulas based on the Gaia DR3 catalog data. C++ software was written for solving systems of nonlinear equations by the least squares method using the Levenberg-Marquardt optimization. The kinematic parameters of the Galaxy were obtained with the best estimate of the distance to its center $R_0 = 8.3231 \pm 0.0091 \text{ kpc}$. We also obtained the angular velocity of the Galaxy around the solar neighborhood, its first and second derivatives from the galactocentric distance and disk thickness, the value of the local deformation of the velocity field in the galactic plane, and the components of the Sun's velocity relative to the center of the Galaxy. All the obtained kinematic parameters are analyzed and their values are compared with the current values obtained by other researchers. It is found that the use of Bottlinger's formulas allows us to obtain estimates of the kinematic parameters of the Galaxy, as well as the galactocentric distance, with high accuracy from the Gaia DR3 data.

Keywords: Galaxy, Gaia DR3, Bottlinger's formulas, distance to the Galactic Center.

Зміст

Вступ	6
Розділ 1. Огляд літератури	9
Розділ 2. Обробка даних	15
2.1. Відбір зір	15
2.2. Перетворення положень та власних рухів в галактичну систему координат	17
2.3. Коригування паралаксів Gaia DR3	17
2.4. geometric та photogeometric відстані	18
2.5. Бінінг	18
Розділ 4. Рівняння Боттлінгера	21
Розділ 5. Алгоритм рішення нелінійних систем рівнянь	24
Розділ 6. Аналіз отриманих результатів	25
6.1. Критерії вибору кращого результату	25
6.2. Найкращий результат	29
Висновки	33
Список використаних джерел	35

Умовні позначення

ESA – (англ. European Space Agency) Європейське космічне агентство (ЄКА)

Gaia – (англ. Global Astrometric Interferometer for Astrophysics) Глобальний астрометричний інтерферометр для астрофізики

Gaia DR3 – (англ. Gaia Data Release 3) 3-й випуск даних Gaia

GRAVITY – інтерферометричний інструмент, розроблений для VLTI

IAU – (англ. International Astronomical Union) Міжнародна Астрономічна Спільнота (МАС)

ICRS – (англ. International Celestial Reference System) Міжнародна небесна система відліку

kpc – (англ. kiloparsec) кілопарсек

pc – (англ. parsec) парсек

μ as – (англ. microarcsecond) мікросекунда дуги

R_0 – відстань до центру Галактики

Sgr A* – (лат. Sagittarius A*) Стрілець A*

VERA – (англ. VLBI Exploration of Radio Astrometry) Дослідження радіоастрометрії за допомогою VLBI

VLBI – (англ. Very Long Baseline Interferometry) Інтерферометрія з наддовгою базою

VLT – (англ. Very Large Telescope) Дуже великий телескоп

Вступ

Актуальність роботи. Галактика – це комплексна система, складна як з точки зору своєї структури, так і з точки зору взаємодії різних її складових частин. Одним з найважливіших та фундаментальних параметрів який необхідний для вивчення будови та еволюції Галактики є відстань від Сонця до її центру R_0 , яку при кінематичному аналізі зазвичай приймають як відому константу. Однак, завдяки розвитку космічних технологій та спостережних інструментів, таких як космічні телескопи Hubble та Gaia, визначення відстані до Галактичного центру стає все більш точним та надійним, зокрема з останнім релізом Gaia DR3. Але, це все ще досить складне завдання через те, що значна частина Галактики є недоступною для спостереження.

Більшість оцінок мас та світностей масштабуються як відстань у квадраті, тоді як маси, засновані на загальній густині або орбітальному моделюванні, масштабуються як відстань у кубі. Крім того, високоточне визначення відстані до центру Галактики дозволяє надійно відкалібрувати нульові точки численних вторинних стандартів відстані, таких як цефеїди, RR Ліри та змінні зорі Міра, що удосконалить достовірність шкали позагалактичної відстані. Також, уточнення оцінок R_0 дозволить уточнити оцінки відстаней, мас та світностей багатьох галактичних та позагалактичних об'єктів, а також оцінки швидкості обертання Галактики та розміру Чумацького Шляху. Це, в свою чергу, дозволить краще оцінити вік кульових скупчень, постійну Хаббла та нижню межу віку Всесвіту, а також накласти жорсткіші обмеження на низку космологічних сценаріїв. [1]

Мета дослідження. Метою цієї роботи є оцінки відстані до центру Галактики R_0 використовуючи формули Боттлінгера та дані з каталогу Gaia DR3 та порівняти отриманих результатів з дослідженнями інших авторів.

Об'єкт дослідження: зорі що належать Галактиці та сама галактика Чумацький Шлях.

Предмет дослідження: методи визначення відстані від Сонця до центру Галактики з використанням різноманітних джерел даних; координати та

швидкості зір; відстань до центру Галактики R_0 ; астрометричні та астрофізичні дані Gaia DR3.

Для досягнення поставленої цілі було виконано наступні завдання:

1. Огляд та аналіз літератури: перш за все, було проведено аналіз літератури з питань кінематики та будови Галактики. Дослідження літератури дало змогу ознайомитись зі станом справ у цьому напрямку науки та дізнатися про різноманітні методи оцінки R_0 , зокрема, формули Боттлінгера. Це створило вагоме підґрунтя для подальших досліджень.
2. Відбір зір з каталогу Gaia DR3 та трансформація даних в галактичну систему координат: відбір найбільш високоточних, з точки зору астрометрії зір та формування вибірок за різними критеріями; перетворення даних Gaia DR3 з екваторіальної системи ICRS в галактичну систему координат.
3. Коригування паралаксів, geometric та photogeometric відстані за методом Бойлера-Джонса: врахування систематичних похибок в паралаксах та застосування відповідних коригувань за методом Ліндегрена, отримання geometric та photogeometric відстані за методом Бойлера-Джонса. [2][3]
4. Просторова пікселізація даних: групування зір в біни по координатам та усереднення власних рухів та положень зір.
5. Удосконалення формул Боттлінгера: до класичних формул Боттлінгера включено компоненти, які враховують вертикальну залежність кінематичних параметрів, тобто залежність від координати z .
6. Реалізація нелінійного методу найменших квадратів Левенберга-Марквардта: для отримання найточнішого значення відстані до центру галактики було використано нелінійний метод найменших квадратів Левенберга-Марквардта.
7. Критерій відбору найкращого значення: було створено критерій відбору оптимального значення R_0 .
8. Інтерпретація отриманих результатів та висновки: результати розрахунків було перевірено на основі порівняння з даними,

отриманими іншими методами, а також із значеннями, отриманими іншими авторами.

Наукова цінність отриманих результатів. Отримані результати мають наукову цінність. По-перше, оцінка галактичної відстані R_0 є ключовим параметром для багатьох галактичних досліджень. Тому точне визначення цієї величини має важливе значення для вивчення будови та еволюції Галактики. По-друге, результати порівняння отриманої галактичної відстані з даними інших авторів дозволяють уточнити попередні оцінки та виявити можливі розбіжності в методології. Це може допомогти покращити розуміння галактичної структури та її фізичних параметрів.

Практичне значення отриманих результатів. Розрахунки багатьох фізичних параметрів, включаючи відстані, маси та світність галактичних об'єктів, а також інтегральну масу та світність Галактики, безпосередньо залежать від R_0 . Фактично, більшість світностей та велика кількість оцінок маси масштабуються як відстань у квадраті, тоді як маси, засновані на загальній густині або орбітальному моделюванні, масштабуються як відстань у кубі.

Розділ 1. Огляд літератури

Точна відстань до центру Галактики досі залишається невідомою. Рекомендована ІУА відстань до галактичного центру становить $R_0^{IUA} = 8.5$ крс. [4] Проте згідно з Рис. 1.2 ця відстань потребує коригування в бік зменшення. Згідно лінії тренду вона має бути близько $R_0 = 8.07$ крс.

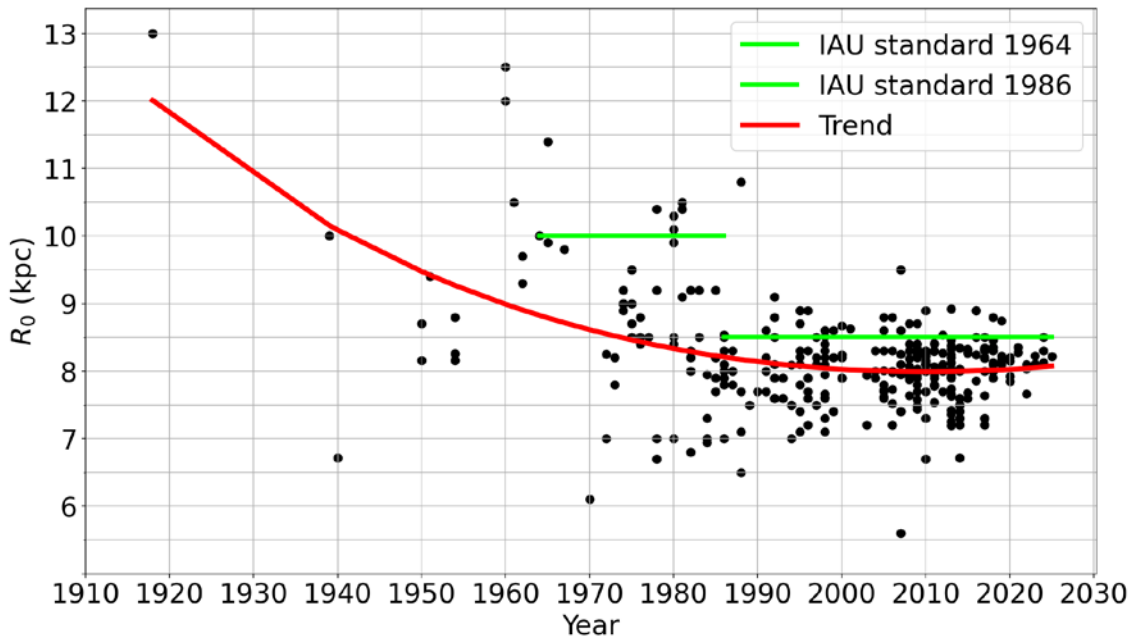


Рисунок. 1.2 – Оцінка відстані R_0 по рокам за статтями. Частина даних для побудови графіку взята зі статті "Clustering of Local Group Distances: Publication Bias or Correlated Measurements? IV. The Galactic Center" [1] та доповнена власними даними до 2025 року [5].

Взагалом, першу спробу оцінити відстань до центру Галактики зробив Харлоу Шеплі в 1914–1918 роках. Стаття "The Distances, Distribution in Space, and Dimensions of 69 Globular Clusters" [6], стала революційною роботою для свого часу. На основі спостережень, проведених з 1914 року, Шеплі використав криві блиску i , отже, залежність період-світність змінних цефеїд у 69 галактичних кулястих скупченнях для візуалізації просторового розподілу системи галактичних кулястих скупчень. Згодом він розширив свій аналіз, включивши в нього всі 93 відомі на той час кулясті скупчення Галактики.

Згодом він визначив центроїд тривимірного розподілу кулястих скупчень, щоб визначити першу в історії відстань до Галактичного Центру, $13 \text{ kpc} \leq R_0 \leq 25 \text{ kpc}$. Хоча визначення відстані до Галактичного Центру Шеплі зараз здається просто історичним цікавинкою, факт залишається фактом: це була перша реальна спроба оцінювання відстані до Галактичного Центру. Після Шеплі багато авторів намагалися визначити R_0 на основі центроїдів розподілу різноманітних індикаторів, включаючи кульові скупчення; змінні цефеїди, RR Ліри та Міри; червоних гігантів; і навіть зорі дельти Щита та планетарні туманності. [1]

Проте, давайте поглянемо на різні варіації сучасних оцінок відстаней до центру галактики Рис. 1.2. [7]

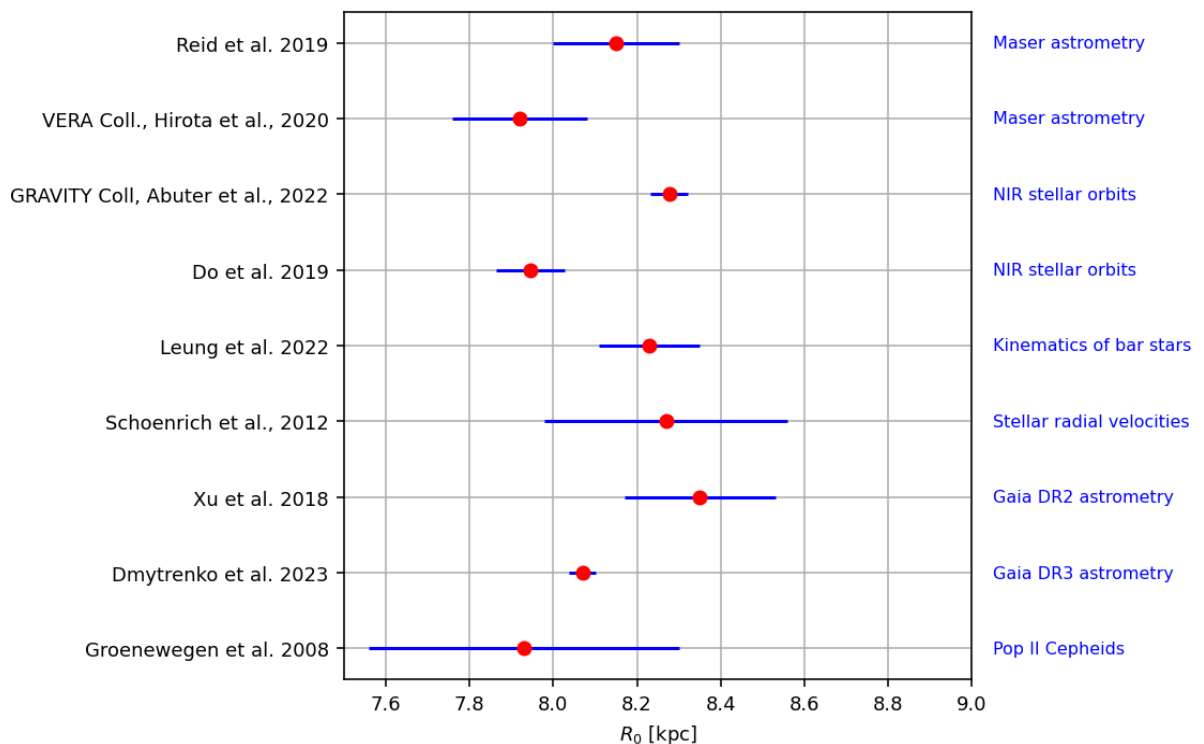


Рисунок 1.2 – Відстань до Центру Галактики, виміряна різними методами. [7]

Мезерна астрометрія:

В статті “Trigonometric Parallaxes of High-mass Star-forming Regions: Our View of the Milky Way” автор М. Рід та ін. зібрали та проаналізували приблизно 200 тригонометричних паралаксів і власних рухів молекулярних мазерів, пов'язаних з дуже молодими зорями великої маси. Більшість вимірювань отримано з огляду BeSSeL за допомогою VLBA та японського проекту VERA. Вони представили оновлену модель спіральної структури Галактики і включаємо її програму оцінки відстаней на основі паралаксів, пов'язаних зі спіральними рукавами. Моделювання тривимірних просторових рухів дає оцінки відстані до центру Галактики $8.15 \pm 0.15 \text{ kpc}$. [8]

VERA collaboration представили перший астрометричний каталог з японського проекту VERA, що реалізується на базі VLBI інтерферометра з дуже довгою базою в статті “The First VERA Astrometry Catalog”. Вони зібрали всі астрометричні результати з VERA, надаючи точні тригонометричні вимірювання річного паралаксу і власних рухів. Загалом у каталозі VERA перелічено 99 мазерних джерел. У поєднанні з результатами BeSSeL група оцінила $R_0 = 7.92 \pm 0.16 \text{ kpc}$. [9]

Кінематика зір Галактичного бару:

Найточніші на сьогоднішній день вимірювання припускають, що Sgr A* перебуває у стані спокою в центрі Галактики, що може бути не так. У статті “A measurement of the distance to the Galactic centre using the kinematics of bar stars” автори Г. В. Люн, Джо Бові та ін. використовують карти кінематики зір у галактичному барі, отримані за даними APOGEE DR17 і Gaia EDR3, доповнені спектрофотометричними відстанями за допомогою нейромережевого методу astroNN. На цих картах чітко видно мінімум у швидкості обертання v_T і квадрулярну сигнатуру в радіальній швидкості v_R , очікувану для зір, що обертаються в барі. З мінімуму в v_T отримується оцінка $R_0 = 8.23 \pm 0.12 \text{ kpc}$. [10]

Радіальні швидкості зір:

Ральф Шонріх представляє три методи визначення відстані до Галактичного Центру R_0 , азимутальної швидкості Сонця в системі відліку Галактики V_g , а отже, і місцевої колової швидкості V_c при R_0 в роботі “Galactic rotation and solar motion from stellar kinematics”. Ці прості, незалежні від моделі, стратегії зводять набір припущень до близько осьової симетрії диска і призначені для кінематично гарячих зір, на які менше впливають спіральні рукави та інші ефекти. Перші два методи використовують залежний від положення обертальний потік у геліоцентричних радіальних швидкостях (U). Отримана оцінка обертання θ від швидкостей U не залежить від V_g . Перший підхід порівнює це з обертанням від галактичних азимутальних швидкостей, щоб обмежити V_g , при припущенні R_0 . Обидва V_g , і R_0 можна визначити, використовуючи власний рух Sgr A* як друге обмеження. Друга стратегія використовує θ , який приблизно пропорційний до R_0 . Тому неправильне значення R_0 можна визначити за не фізичним трендом V_g , з внутрішнім обертанням різних популяцій. З цих двох стратегій автор оцінює $R_0 = 8.27 \pm 0.29$ kpc. для зоряної вибірки з Sloan Extension for Galactic Understanding and Exploration (Розширення Слоуна для Галактичного Розуміння та Дослідження). [11]

Астрометрія зір OB-типу за даними Gaia DR2:

На основі вимірювань паралаксів мазера VLBI і Gaia для OB-типу зір Є Суюй, Лі-Ган Хоу, Ю.В. Ву визначають спіральні структури рукавів Персея, Місцевої, Стрільця і Щита в своїй роботі “The spiral structure of the Milky Way”. При цьому оцінено відстань до центру Галактики $R_0 = 8.35 \pm 0.18$ kpc. [12]

Астрометрія червоних гігантів і субгігантів за даними Gaia DR3:

У статті "The vertex coordinates of the Galaxy's stellar systems according to the Gaia DR3 catalogue" автори відділу астрометрії НДІ астрономії ХНУ ім. Каразіна дослідили напрямки вершини (vertex deviation) еліпсоїдів швидкостей червоних гігантів і субгігантів за даними Gaia DR3. Вони виявили складну просторову структуру цих напрямків, що не збігаються з напрямом на

центр Галактики, і свідчать про порушення її осьової симетрії. При цьому оцінено відстань до центру Галактики $R_0 = 8.07 \pm 0.032 \text{ kpc}$. [13]

Орбіти зір навколо над масивної чорної діри:

Загальна теорія відносності передбачає, що світло, випромінюване об'єктом у сильному гравітаційному полі, як-от поблизу чорної діри, має зміщуватися в бік більшої довжини хвилі (гравітаційне червоне зміщення). Таун До та інші спостерігали положення і спектр зорі S0-2, коли вона проходила повз надмасивну чорну діру Стрілець A* у центрі Чумацького Шляху. На найближчій ділянці її 16-річної орбіти вони виявили гравітаційне червоне зміщення в спектрі зорі, що узгоджується із загальною теорією відносності на рівні 5σ , але не з ньютонівською гравітацією. Використовуючи адаптивну оптику телескопів Keck та VLT, було отримано значення відстані до Галактичного центру $R_0 = 7.946 \pm 0.050 \text{ kpc}$. Результати опубліковані в статті “Relativistic redshift of the star S0-2 orbiting the Galactic Center supermassive black hole”. [14]

Зорі, що обертаються навколо компактного радіоджерела Sgr A* у Галактичному Центрі, слугують точними зондами гравітаційного поля біля найближчої масивної чорної діри. Протягом трьох десятиліть спостережень з використанням адаптивної оптики (NACO/VLT) і спектроскопії (SINFONI/VLT, NIRC2/Keck, GNIRS/Gemini), а з 2017 року – астрометричних даних від GRAVITY/VLTI з точністю 30-100 μas , команда GRAVITY Collaboration у роботі “Mass distribution in the Galactic Center based on interferometric astrometry of multiple stellar orbits” представила нові дані для зір S2, S29, S38 і S55. Ці дані показують значні прискорення під час проходження перицентрів їхніх орбіт між 2018 і 2023 роками, що дозволяє з високою точністю визначити гравітаційний потенціал навколо Sgr A*. Об'єднання астрометричних даних і даних про радіальну швидкість зірок S2, S29, S38 і S55 покращує точність визначення властивостей центральної чорної діри. Це призводить до 14% точності вимірювання прецесії Шварцшильда, що повністю узгоджується з передбаченням загальної теорії відносності.

Найкраще узгодження дає значення відстані до Галактичного центру $R_0 = 8.277 \pm 0.009$ крс. [15]

Отже, визначення відстані до центру Галактики є актуальним і важливим дослідженням, яке триває до цього дня. Хоча перші спроби оцінки відстані до центру Галактики були зроблені ще у ХХ столітті, зараз існує безліч методів, що дозволяють її вимірювати з високою точністю. З розвитком технологій та методів вимірювання параметрів об'єктів у Галактиці, точність визначення відстані до її центру постійно зростає. Проте, наразі деякі методи, які використовувалися у минулому, можуть бути цікавими лише з точки зору історії, а більш точні методи замінюють їх.

Розділ 2. Обробка даних

2.1. Відбір зір

У цьому дослідженні було використано декілька вибірок, отриманих із каталогу Gaia DR3 та інших оглядів. Для формування вибірок застосовувались різні критерії, які наведено нижче. [16]

Критерії відбору:

$$(\underline{ruve} < 1.4)$$

Перенормована Похибка Питомої Ваги (Renormalized Unit Weight Error, RUWE) є показником того, наскільки добре астрометричні спостереження відповідають моделі одинарної зорі, що наведений для кожного об'єкта у каталозі Gaia DR3. Значення RUWE близько 1.0 вказує на те, що модель добре узгоджується з даними, тоді як значення, значно більше за 1.0, може свідчити про проблеми з астрометричним розв'язком для цього джерела. У вибірці даних з каталогу Gaia DR3 було обрано лише ті джерела, для яких значення RUWE менше 1.4, що вказує на те, що ці джерела мають добру астрометричну точність і їх можна вважати достовірними.

$$(\underline{non_single_star} = 0)$$

Non-single-star визначає кратність зоряної системи, тобто вона належить до двох або більше зіркових систем. Цей критерій вибірки вказує на те, що нами були відібрані лише дані про зорі, які є одиночними, тобто не є частинами кратних систем. Такі зорі зазвичай мають більш точні астрометричні дані, оскільки практично не підлягають впливу гравітаційних сил інших зір у системі і мають простішу траєкторію руху.

$$(\underline{((parallax/parallax_error) > 5)}$$

Ця умова означає, що відстань до зорі визначена досить точно, оскільки відношення паралаксу до його похибки дорівнює п'яти або більше.

$$\underline{(phot_g_mean_mag+5+5*\log_{10}((parallax+2.32*parallax_error)/1000)-ag_gspphot) < 4)}$$

Ця умова була використана для відбору зір з високою світністю, тобто абсолютна зоряна величина повинна бути менше 4. Давайте розберемо кожен параметр окремо:

- `phot_g_mean_mag` - це видима яскравість зорі.
- `parallax` - тригонометричний паралакс зорі.
- `ag_gspphot` - це екстинкція (поглинання) в напрямку до зорі.

(ecc < 0.2)

Згідно зі статтею П. А. Палісіо та ін. "Spiral-like features in the disc revealed by Gaia DR3 radial actions" було зіставлено дані з каталогу Gaia DR3 за відповідними `source_id`. До даних була додана колонка з оцінкою ексцентриситетів орбіт `ecc`, визначених через гравітаційні потенціали. В результаті відібрано зорі, ексцентриситет орбіт яких відносно центру Галактики не перевищує 0.2, що вказує на їхню майже кругову орбіту. Це було зроблено з метою врахування того, що формули Боттлінгера описують вплив саме кругового диференціального обертання на променеві швидкості та власні рухи. [17]

(radial_velocity ≠ 0)

Відібрані лише об'єкти, для яких у каталозі Gaia DR3 вказано ненульове значення променевої швидкості. Це необхідно для розрахунку просторових швидкостей зір у прямокутній Галактичній системі координат.

В таблиці 2.1 представлено 4 основних вибірки, що створені на основі даних каталогу Gaia DR3 з різними критеріями відбору описаних вище.

Таблиця 2.1 – Вибірки даних з Gaia DR3.

Критерій / Вибірка	Gaia DR3			
	1	2	3	4
$ruve < 1.4$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$non_single_star = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\square/\square > 5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$radial_velocity \neq 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$M_G < 4$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$ecc < 0.2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
К-сть зір	17 976 651	14 091 350	25 881 940	301 041 745
К-сть бінів	989 409	730 681	969 903	1 602 923

2.2. Перетворення положень та власних рухів в галактичну систему координат

Положення і власні рухи зір, отримані зі спостережень Gaia, виражені в Міжнародній Небесній Системі Відліку (ICRS) яка є екваторіальною системою координат. Проте для цілей галактичних досліджень доцільніше використовувати галактичну систему координат.

Перетворення координат здійснювалося за допомогою бібліотеки Astropy мовою програмування Python. [18] У деяких випадках також використовувалися аналітичні формули, наведені в офіційній документації Gaia. [19]

2.3. Коригування паралаксів Gaia DR3

Як показано в статті Ліндгрена та ін. “Gaia Early Data Release 3. Parallax bias versus magnitude, color, and position”, паралакси в Gaia DR3 містять

систематичну похибку – їхнє середнє значення відхиляється від очікуваного нуля на кілька десятків мікродугових секунд. Це відхилення має складну залежність від зоряної величини, кольору та екліптичної широти об'єкта.

Автори надають рекомендації щодо того, як врахувати цей ефект і як його виправити. У нашій роботі ми врахували ці рекомендації, розділивши діапазон зоряних величин на дві підгрупи, а потім ввели відповідні правки до значень паралаксу кожної з них: [2][13]

$$m \in (6, 13], \varpi = \varpi + 30 \mu\text{as}$$

$$m > 13, \varpi = \varpi + 40 \mu\text{as}$$

2.4. **geometric** та **photogeometric** відстані

У роботі Бейлер-Джонса та ін. “Estimating Distances from Parallaxes. V. Geometric and Photogeometric Distances to 1.47 Billion Stars in Gaia Early Data Release 3” authors використали імовірнісний підхід до оцінки зоряних відстаней, побудований на основі тривимірної моделі Галактики. Автори виводять два типи відстаней: [20]

geometric: використовує паралакс разом із залежною від напрямку попередньою відстанню;

photogeometric: додатково використовує колір і видиму зоряну величину зорі, використовуючи той факт, що зорі певного кольору мають обмежений діапазон ймовірних абсолютних величин (плюс згасання).

2.5. Бінінг

Для забезпечення більш коректної роботи методу найменших квадратів (МНК) та зменшення часу розрахунків, дані можна підготувати за допомогою процедури бінінгу. Бінінг – це процес групування даних у відповідні біни або інтервали на основі певної характеристики. [16]

Процес бінінгу

Перетворення координат.

Спершу, координати зір переводяться з галактичної системи координат у прямокутну галактичну систему координат за наступними формулами:

$$X_{Gal} = r \cos l \cos b$$

$$Y_{Gal} = r \sin l \cos b$$

$$Z_{Gal} = r \sin b$$

де l і b – галактична довгота і широта відповідно,

r – відстань до зорі.

Створення бінів.

Після перетворення координат, дані групуються у біни по прямокутних координатах з кроком у 50 pc . Діапазони для координат визначаються таким чином:

- Для координати X : від -5.0 до 5.0 kpc ;
- Для координати Y : від -5.0 до 5.0 kpc ;
- Для координати Z : від -3.0 до 3.0 kpc .

Підрахунок кількості об'єктів.

Підраховуємо кількість зір в біні `star_count` та вибираємо лише ті де об'єктів більше або дорівнює 3.

Групування та усереднення.

Після створення сітки бінів, дані групуються відповідно до бінів. У кожному біні обчислюються середні значення координат та швидкостей.

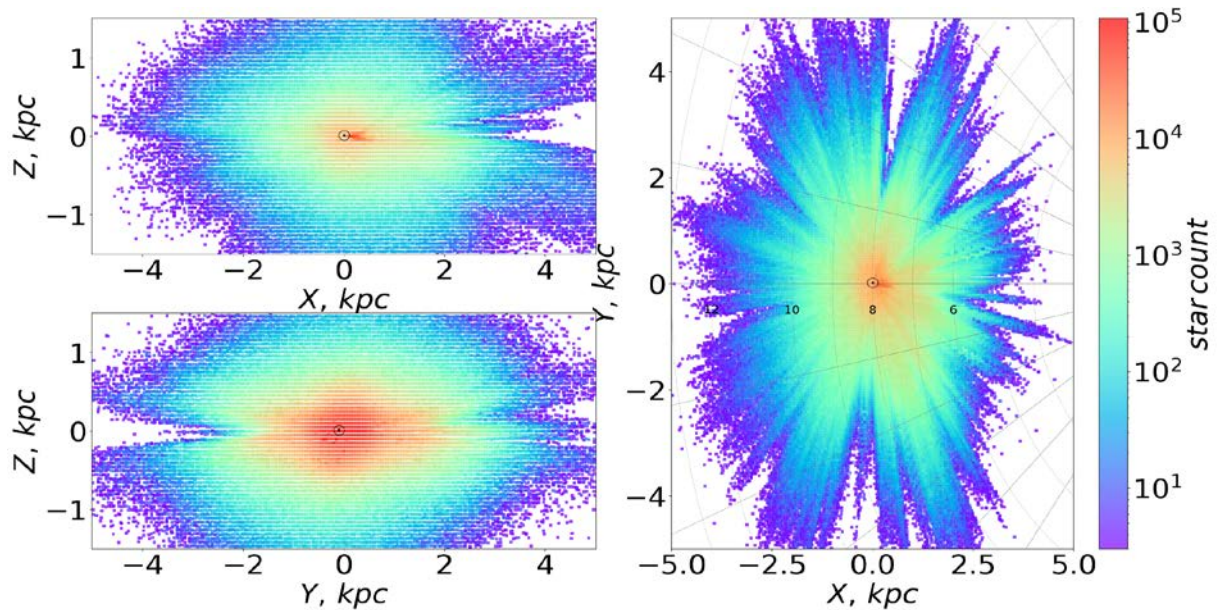


Рисунок 2.1 – Розподіл бінів за координатами (для вибірки (4) наведеної в Табл. 2.1).

Переваги бінінгу

Зменшення кількості даних. Біннінг значно зменшує кількість елементів у вибірці, що знижує обчислювальні витрати і прискорює подальший аналіз. Це особливо актуально при роботі з великими каталогами, такими як Gaia.

Зменшення впливу шуму та аномалій. Усреднення значень у межах бінів зменшує вплив одиничних відхилень, статистичних флуктуацій і помилок спостережень, що підвищує надійність результатів.

Вирівнювання щільності вибірки. Біннінг зменшує вплив нерівномірності просторового розподілу зірок, що дозволяє уникнути штучних викривлень щільності даних, спричинених неоднорідністю спостережень.

Оптимізація методу найменших квадратів. Рівномірний розподіл аргументів після бінінгу знижує ймовірність потрапляння в локальні мінімуми функції відхилень, що покращує ефективність застосування методу найменших квадратів для оцінки параметрів моделі.

Розділ 4. Рівняння Боттлінгера

Формули Боттлінгера, що описують вплив суто кругового диференціального обертання на променеві швидкості та власні рухи, у цих позначеннях мають вигляд: [21]

$$\Delta V_{r_0} = u_0 \cos b \cos l + v_0 \cos b \sin l + w_0 \sin b$$

$$\Delta V_{l_0} = v_0 \cos l - u_0 \sin l$$

$$\Delta V_{b_0} = w_0 \cos b - u_0 \cos l \sin b - v_0 \sin l \sin b$$

$$V_r + \Delta V_{r_0} = R_0(\omega - \omega_0 + V\omega_0) \sin l \cos b + \delta_{V_r}$$

$$kr\mu_l + \Delta V_{l_0} = (R_0 \cos l - r \cos b)(\omega - \omega_0 + V\omega) - r\omega_0 \cos b + kr\delta_{\mu_l}$$

$$kr\mu_b + \Delta V_{b_0} = -R_0(\omega - \omega_0 + V\omega) \sin l \sin b + kr\delta_{\mu_b}$$

де ΔV_{r_0} , ΔV_{l_0} , ΔV_{b_0} виражають вклад руху Сонця в променеві та тангенціальні швидкості;

δ_{V_r} , δ_{μ_l} , δ_{μ_b} – залишкові значення відповідно променевої швидкості і компонентів власного руху.

Для розв'язання МНК два останні рівняння слід розділити на kr , оскільки випадковими величинами є саме залишкові відхилення власних рухів. Якщо ставиться задача обчислення (u_0, v_0, w_0) , у наведених вище формулах слід покласти $\Delta\omega_0 \equiv 0$; якщо ж ми задаємо рух Сонця до деякого апокексу (u_0, v_0, w_0) , то $\Delta\omega_0$ також буде одним із невідомих параметрів задачі.

Для розв'язання зазвичай розкладають різницю кутових швидкостей у ряд Тейлора:

$$(\omega - \omega_0) \approx \omega'_0(R - R_0) + \frac{1}{2!}\omega''_0(R - R_0)^2 + \frac{1}{3!}\omega'''_0(R - R_0)^3 + \dots$$

обмежуючись, як правило, другим порядком.

Аналогічно ми розкладаємо по z , щоб врахувати вертикальну складову руху зорі:

$$\omega_0 \approx \omega_0 + z\omega'_{0z} + \frac{1}{2!}z^2\omega''_{0z} + \frac{1}{3!}z^3\omega'''_{0z} + \dots$$

і також обмежуються другим порядком точності.

Розглядаючи трикутник (Сонце – центр Галактики – об'єкт) Рис. 4.1 і застосувавши до відстаней теорему косинусів, легко обчислимо R за відомими геліоцентричними відстанями об'єктів та їхніми галактичними координатами за формулою:

$$R^2 = R_0^2 + r^2 \cos^2 b - 2rR_0 \cos b \cos l$$

де $r \cos b$ – відстань до зорі у проекції на галактичну площину;

R – відстань від зорі (S) до галактичного центру (GC);

R_0 – відстань від Сонця до GC.

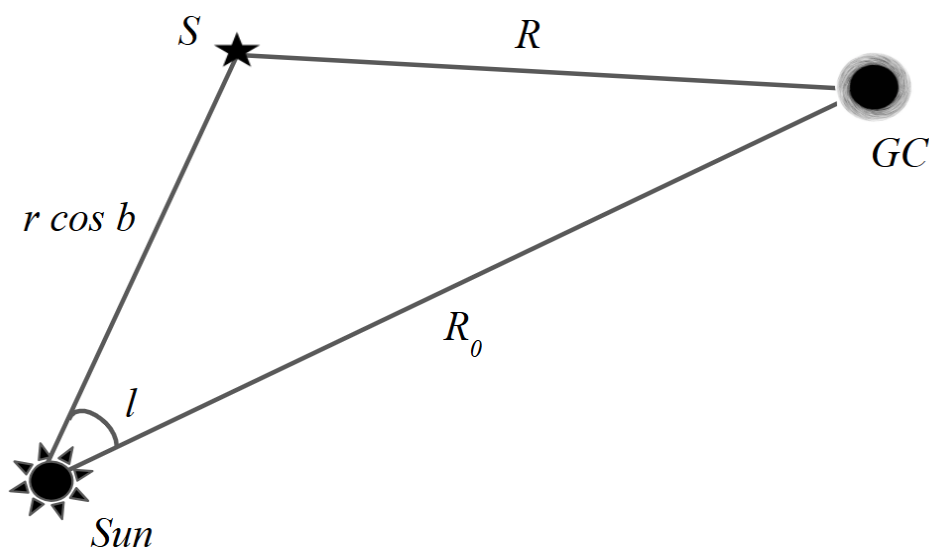


Рисунок 4.1 – Трикутник (Сонце – центр Галактики – об'єкт).

Отже, невідомими величинами, що підлягають визначенню, є або (u_0, v_0, w_0) , ω_0 , ω_0' , ω_0'' , $(\Delta\omega_0 \equiv 0)$, або ω_0 , ω_0' , ω_0'' , $\Delta\omega_0$. Вони входять в умовні рівняння лінійно. Отже, для розв'язання задачі можуть бути використані будь-які модифікації лінійного МНК.

В роботі були використані модифіковані формули у вигляді:

$$V_r = -(u_0 \cos b \cos l + v_0 \cos b \sin l + w_0 \sin b) \\ + R_0(R - R_0) \sin l \cos b \omega_0' + \frac{1}{2} R_0(R - R_0)^2 \sin l \cos b \omega_0'' + rK \cos^2 b$$

$$V_l = -(v_0 \cos l - u_0 \sin l) + (R - R_0)(R_0 \cos l - r \cos b) \omega_0' \\ + \frac{1}{2}(R - R_0)^2(R_0 \cos l - r \cos b) \omega_0'' - r(\omega_0 + z\omega_{0z}' + \frac{1}{2}z^2\omega_{0z}'') \cos b$$

$$V_b = -(w_0 \cos b - u_0 \cos l \sin b - v_0 \sin l \sin b) \\ - R_0(R - R_0) \sin l \sin b \omega_0' - \frac{1}{2} R_0(R - R_0)^2 \sin l \sin b \omega_0'' + rK \cos b \sin b$$

В отриманих формулах змінна K має розмірність кутової швидкості поділеної на одиницю відстані і є, по суті, коефіцієнтом радіального розширення-стиснення зоряної системи відносно її центру, де розташований спостерігача (Сонце).

Розділ 5. Алгоритм рішення нелінійних систем рівнянь

Задача найменших квадратів виникає в контексті підбору параметризованої математичної моделі до набору точок даних шляхом мінімізації суми квадратів відхилень між функцією моделі та набором точок даних. Одним з найбільш ефективних методів для розв'язання цієї задачі є алгоритм Левенберга-Марквардта, який поєднує в собі два чисельні алгоритми мінімізації: метод градієнтного спуску та метод Гаусса-Ньютона.

У методі градієнтного спуску зменшення суми квадратів похибок досягається шляхом корекції параметрів у напрямку найкрутішого спуску. У свою чергу, метод Гаусса-Ньютона передбачає, що функція найменших квадратів є локально квадратичною щодо параметрів, що дозволяє звести задачу до знаходження мінімуму квадратичної функції.

Алгоритм Левенберга-Марквардта комбінує ці два методи. Він діє подібно до методу градієнтного спуску, коли параметри далекі від оптимального значення, та більше схожий на метод Гаусса-Ньютона, коли параметри близькі до оптимуму. [22]

В роботі було використано спеціальну бібліотеку Eigen на мові програмування C++ для реалізації методу Левенберга-Марквардта. [23]

Розділ 6. Аналіз отриманих результатів

В результаті розв'язання систем рівнянь, заданих формулами Боттлінгера, ми отримали оцінки значень наступних параметрів Галактики: просторові компоненти сонячного руху (u_0, v_0, w_0); кутова швидкість обертання Галактики ω_0 та її похідні – вздовж галактоцентричної відстані ($\omega'_{OR}, \omega''_{OR}$) та висоти над площиною ($\omega'_{Oz}, \omega''_{Oz}$); коефіцієнтом радіального розширення-стиснення зоряної системи К; а також відстань до центру Галактики R_0 .

Ці параметри були визначені в залежності від радіусу вибірки R_s і товщина Галактики $|z|$. Розрахунки виконано окремо для кожної підвибірки, наведеної в Табл. 2.1, і для різних оцінок відстаней: з використанням виправлених паралаксів Gaia, а також geometric і photogeometric відстаней за Бойлером-Джонсом та ін.

6.1. Критерії вибору кращого результату

Для визначення найоптимальнішого розв'язку серед усіх отриманих результатів, що залежать від граничного радіусу вибірки R_s та товщини Галактики $|z|$ були застосовані наступні критерії:

По-перше, орієнтиром слугували еталонні значення компонент сонячного руху відносно локального стандарту спокою та кутової швидкості обертання диска: [\[24\]](#)[\[25\]](#)

$$U = 11.1, \quad V = 12.24, \quad W = 7.25, \quad \Omega = 27.12.$$

Відхилення отриманих оцінок від цих значень враховувалося через квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{(U - u_0)^2 + (V - v_0)^2 + (W - w_0)^2 + (\Omega - \omega_0)^2}.$$

Додатково враховувалась сумарна похибка оцінених параметрів:

$$E = e_{R_0} + e_{v_0} + e_{u_0} + e_{w_0} + e_{W_0},$$

де \square_{\square} — стандартна похибка відповідного параметра.

Окремо оцінювався вплив коефіцієнта радіального розширення-стиснення зоряної системи K . Далі всі показники нормалізувались:

$$K_n = \frac{|K| - \min(|K|)}{\max(|K|) - \min(|K|)};$$

$$E_n = \frac{E - \min(E)}{\max(E) - \min(E)};$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma - \min(\sigma)}{\max(\sigma) - \min(\sigma)}.$$

Загальний критерій оптимальності був визначений як сума нормалізованих складових:

$$\text{Criteria} = K_n + E_n + \sigma_n$$

Мінімізація цієї величини дозволяє обрати розв'язок, що є найкращим компромісом між точністю, наближеністю до еталонних значень та стабільністю параметрів моделі.

Найкращі розв'язки зображені в Табл. 6.1, де d – це відстань отримана з коригованих паралаксів а d_g та d_{pg} – geometric та photogeomric відстані за Бойлером-Джонсом відповідно.

Таблиця. 6.1 – Обрані результати.

Парам	Вибірка							
	1	2			3			4
	Відстань							
	d	d	d _g	d _{pg}	d	d _g	d _{pg}	d
R_s	5.0	5.0	5.0	5.0	4.5	4.5	5.0	5.0
$ z/ $	0.3	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.3	0.3
σ	7.263	6.219	6.241	6.188	6.634	6.609	6.598	7.156
R_0	8.025	8.690	8.707	8.571	8.246	8.241	8.093	8.033
e_{R_0}	0.046	0.032	0.030	0.023	0.029	0.027	0.023	0.007
u_0	10.658	10.130	10.263	10.182	10.708	10.841	10.684	10.271
e_{u_0}	0.019	0.014	0.014	0.014	0.016	0.016	0.017	0.018
v_0	18.201	16.050	16.097	15.818	19.711	19.761	18.975	18.933
e_{v_0}	0.037	0.028	0.028	0.028	0.031	0.030	0.034	0.037
w_0	7.099	7.068	7.127	7.066	7.105	7.171	7.049	7.685
e_{w_0}	0.014	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011	0.013	0.016
K	-0.256	0.055	-0.004	0.083	-0.208	-0.305	-0.247	-0.459
e_K	0.078	0.045	0.045	0.045	0.049	0.049	0.072	0.096
ω_0	27.696	28.367	28.411	28.466	27.784	27.833	27.941	27.627
e_{ω_0}	0.009	0.007	0.007	0.007	0.008	0.008	0.009	0.009

Поглянемо на різні оцінок R_0 відносно вибірки Таб. 2.1 та виду відстані Рис. 6.1. Тут чітко спостерігається зменшення похибок визначення R_0 зі збільшенням кількості зір у вибірці. Також слід відзначити, що оптимальні оцінки Галактон Центричної відстані лежать в межах $8.0 - 8.7$ *kpc*, що цілком відповідає очікуваним результатам.

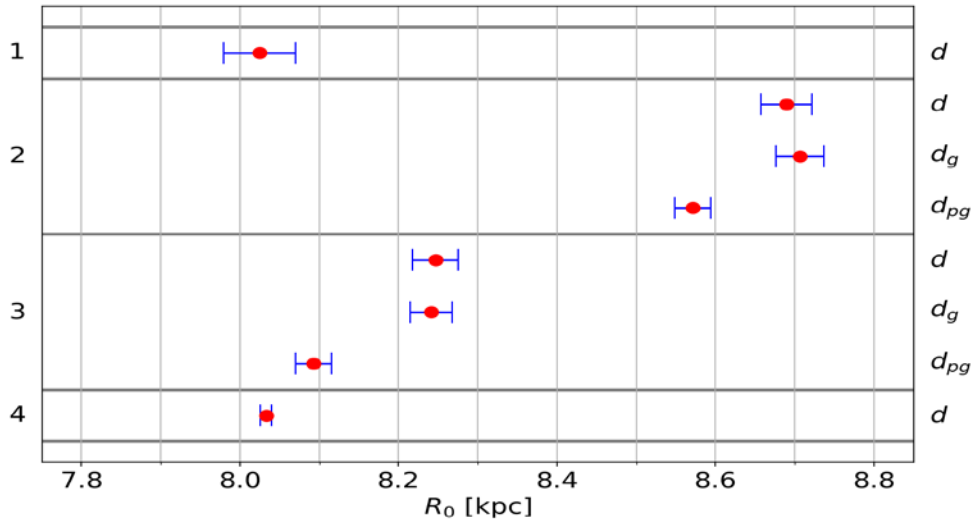


Рисунок 6.1 – Оцінка R_0 відносно вибірки Таб. 2.1 та виду відстані.

Розподіл різних оцінок R_0 показано на Рис. 6.2. Тут можна подивитися до якого значення тяжіють оцінки відстані до центру Галактики, та яке саме значення обирається за нашим критерієм відбору кращого значення. Майже завжди максимум розподілу R_0 збігається з оптимальним значенням, що свідчить про те що в цілому формули Боттлінгера в залежності від вхідних даних, дають узгоджені результати.

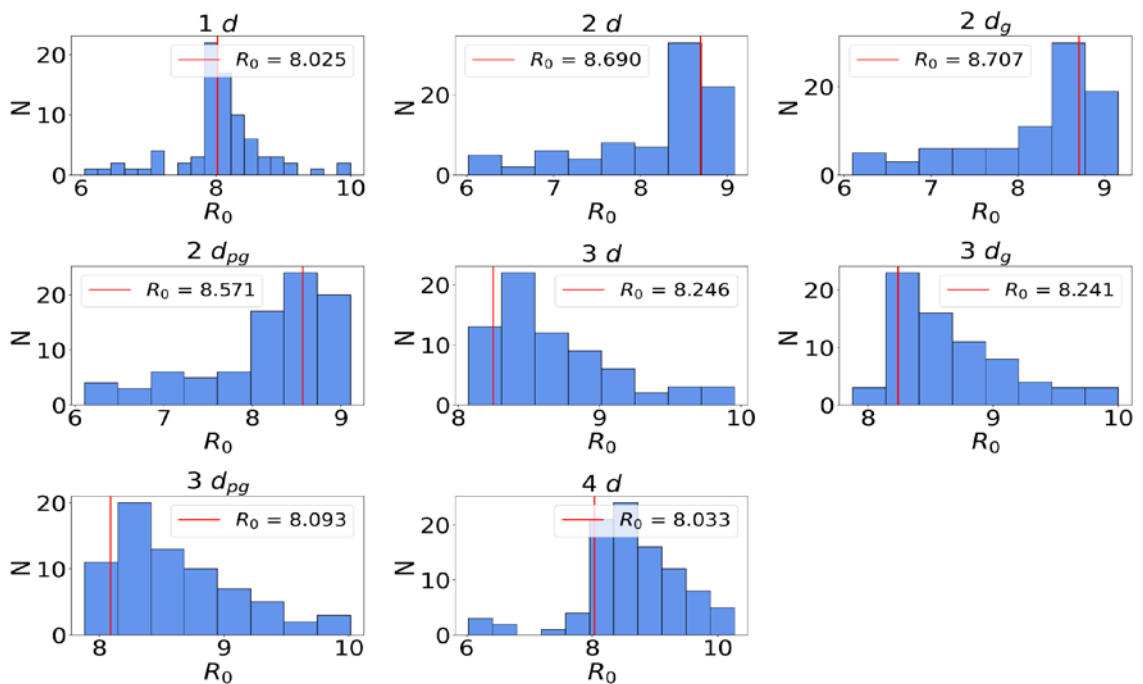


Рисунок 6.2 – Розподіл оцінок відстані від Сонця до центру Галактики.

6.2. Найкращий результат

На наш погляд найкращим результатом з усіх підвбірок є підвбірка (4) Табл. 2.1 де не враховувалися радіальні швидкості зір. Адже саме для нього отримана найменша похибка визначення R_0 .

$$R_s = 5.0 \text{ крс}, \quad |z| = 0.3 \text{ крс}$$

$$R_0 = 8.0330 \pm 0.0070 \text{ крс}$$

$$u_0 = 10.2711 \pm 0.0184 \text{ км/с}$$

$$v_0 = 18.9328 \pm 0.0373 \text{ км/с}$$

$$w_0 = 7.6849 \pm 0.0165 \text{ км/с}$$

$$K = -0.4594 \pm 0.0964 \text{ км/с/крс}$$

$$\omega_0 = 27.6271 \pm 0.0089 \text{ км/с/крс}$$

$$\omega'_0 R = -3.4806 \pm 0.0045 \text{ км/с/крс}^2$$

$$\omega''_0 R = 0.5271 \pm 0.0016 \text{ км/с/крс}^3$$

$$\omega'_0 z = 0.2436 \pm 0.0232 \text{ км/с/крс}^2$$

$$\omega''_0 z = 16.0893 \pm 0.3167 \text{ км/с/крс}^3$$

Давайте розглянемо деякі параметри окремо.

Перш за все потрібно проаналізувати R_0 . Як видно з Рис. 6.3 оцінка відстані до центру Галактики сильно спотворена локальними кінематичними особливостями, які не враховані в формулах Боттлінгера для вибірки близьких зір. Але для зір на відстані 3-4 крс цей вплив нівелюється а визначення R_0 майже не залежить від розміру вибірки R_s та $|z|$.

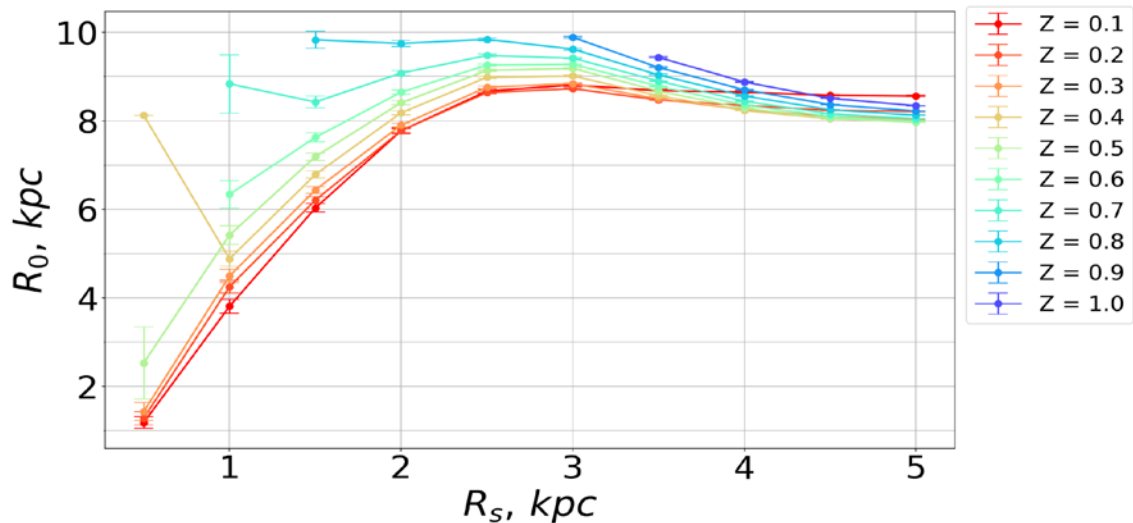


Рисунок 6.3 – Відстань від Сонця до центру Галактики.

Компоненти швидкості Сонця відносно вибраного центроїда також мають певну систематичну залежність як відносно товщини вибірки так і відносно її радіусу Рис. 6.4. Видно що компоненти u_0 та w_0 Рис. 6.4 (а) та (в) обтяжені впливом певних локальних кінематичних процесів при радіусі $R_s < 1.0$ kpc. Тобто поле швидкостей для вибраної області є значно складним, яке важко описати звичайним диференціальним обертанням. З Рис. 6.4 (б) добре видно що об'єкти обертаються швидше в галактичній площині ніж ті що віддалені від неї.

Знову спостерігається обтяжування розв'язку для близьких об'єктів для визначення кутової швидкості Рис. 6.5. Видно що цей вплив стає значно меншим уже для вибірок розмір яких більший 1.5 kpc, а практично нівелюється для вибірок розміром 4 kpc. Отже саме для таких великих розмірів вибірок зір відбувається усереднення всіх локальних кінематичних збурень, в результаті отримане поле швидкостей зір добре описується простим диференціальним обертанням, а визначення кінематичних параметрів носять глобальний характер. В такому випадку, оцінки отриманих кінематичних параметрів найбільш точні.

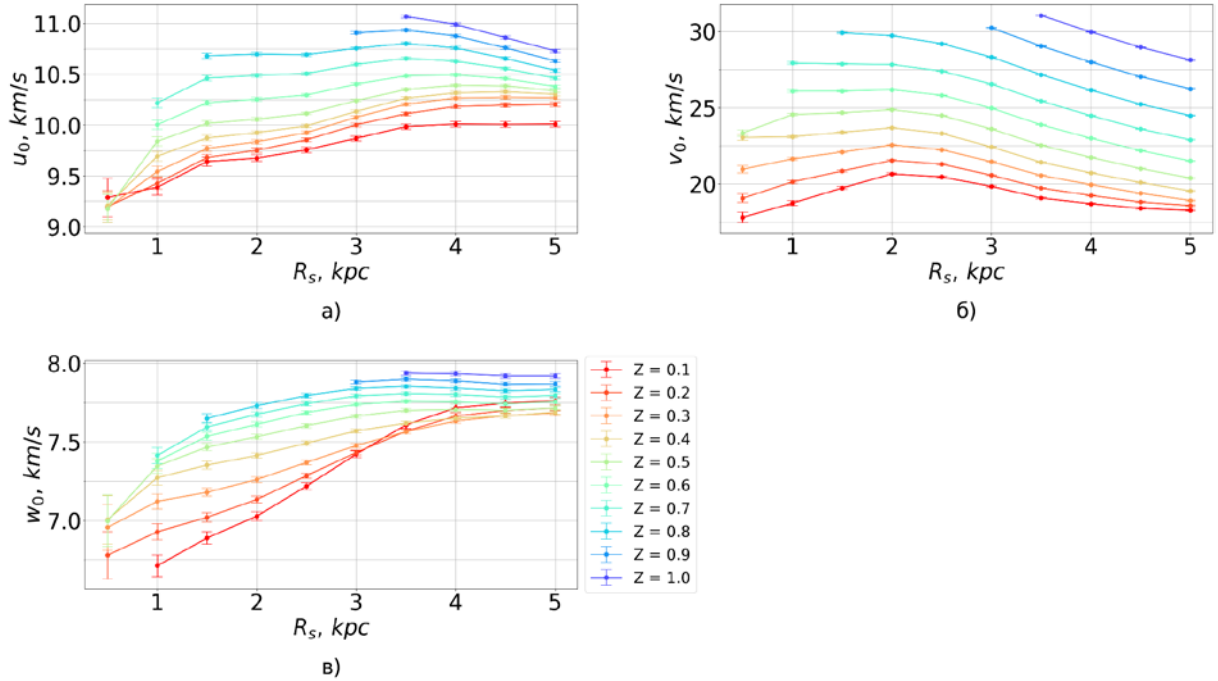


Рисунок 6.4 – Компоненти швидкості Сонця:

- а) u_0 – у напрямку до Галактичного центру;
- б) v_0 – у напрямку обертання Галактики у її площині;
- в) w_0 – вертикальний рух, перпендикулярно до площини Галактики .

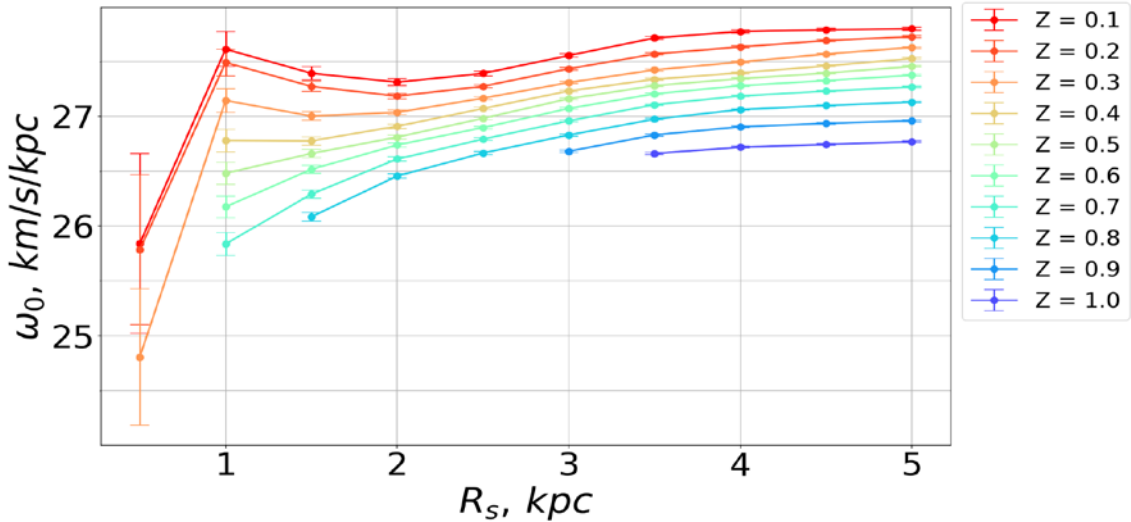


Рисунок 6.5 – Кутова швидкість відносно центру Галактики.

Також на Рис. 6.5 чітко спостерігається систематична залежність кругової швидкості обертання від товщини вибірки по $|z|$. Це підтверджує наявність вертикального градієнту кругової швидкості обертання Галактики.

Тобто, найбільшу кутову швидкість мають зорі, що знаходяться в галактичній площині, далі, з збільшенням z (галактичної товщини), до складу вибірок входять все більш повільніші зірки на високих z , що призводить до систематичного зменшення оцінок кутової швидкості обертання.

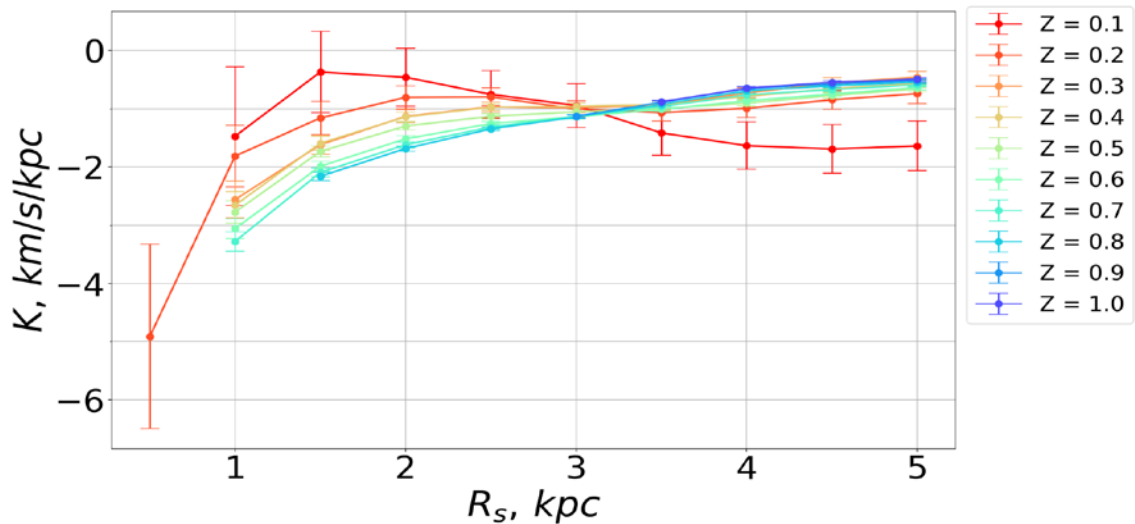


Рисунок 6.6 – Коефіцієнт радіального розширення – стиснення відносно центру Галактики K .

Коефіцієнт K – розширення-стиснення зоряної системи в галактичній площині в залежності від розмірів вибірки представлено на Рис. 6.6. Область від'ємним значенням K вказує на те, що або зоряна система стискається, або зірки переходять в область більшої щільності. У будь-якому випадку коефіцієнт K є чітким сигналом порушення рівноваги в галактичному диску. Це може бути проявом локальних збурень від галактичних рукавів, хвилі Редкліфа тощо. Проте саме для вибірок з розміром 5 kpc , тобто розглядаються зорі на відстані $\pm 5 \text{ kpc}$, величина коефіцієнт K наближається до нульового значення.

Висновки

У цій роботі було реалізовано кінематичний підхід до оцінки параметрів Галактики, зокрема відстані від Сонця до її центру R_0 , на основі формул Боттлінгера та даних Gaia DR3.

Найкраща оцінка відстані до центру галактики, отримана в даній роботі, становить:

$$R_0 = 8.0330 \pm 0.0070 \text{ kpc}$$

Цей результат було отримано для вибірки з найбільшою кількістю зір, понад 300 мільйонів, де не використовувалися променеві компоненти швидкості. Саме така стратегія, як виявилось, дає найкращий результат з огляду на критерій розглянутий в розділі 6.1.

Отримане значення узгоджується з високоточними оцінками, отриманими незалежно від кінематичних моделей, наприклад:

- GRAVITY Collaboration: $R_0 = 8.277 \pm 0.009 \text{ kpc}$;
- VERA+BeSSeL: $R_0 = 7.92 \pm 0.16 \text{ kpc}$.

У нашій роботі досягнута похибка $\pm 0.007 \text{ kpc}$, яка навіть нижча, ніж в оцінці GRAVITY – одного з найбільш точних і дорогих інструментальних експериментів. Це свідчить про надзвичайну ефективність кінематичного підходу, що базується виключно на спостережних даних великого високоточного каталогу Gaia DR3.

Під час чисельних експериментів, було протестовано різні варіанти вибірки:

- зміна параметрів відбору об'єктів з каталогу Табл. 2.1;
- комбінування граничного радіусу R_s та товщини $|z|$.

Виявлено, що обтяження вибірки додатковими параметрами фільтрації зір, не дає приросту в точності оцінки параметрів Галактики Табл. 6.1. Це на перший погляд суперечить фізичній інтуїції, адже додаткові обмеження повинні були б покращити точність, відбираючи “якісніші” об'єкти.

Натомість, при розширенні вибірки, зокрема при включенні більшої кількості зір на відстанях понад $3-5 \text{ kpc}$ – локальні кінематичні особливості згладжуються, і поле швидкостей краще відповідає моделі диференціального обертання, яка закладена в основу формул Боттлінгера.

В результаті нашого дослідження ми дійшли наступних висновків:

1. Формули Боттлінгера можна ефективно використовувати для оцінки відстані від Сонця до центру Галактики.

2. Дані Gaia DR3, за умов правильної обробки та корекції систематичних зсувів, дозволяють досягти точності, яка конкурує з найкращими прямими інструментальними методами.

3. Розширення вибірки, як за рахунок зменшення критеріїв фільтрації даних, так і по просторових розмірах – важливіше за посилення фільтрації – з погляду точності оцінки кінематичних параметрів.

Результати дослідження були представлені на двох наукових заходах:

- XXIV Gamow International Astronomical Conference – “Astronomy and beyond: Astrophysics, Cosmology and Gravitation, Astroparticle Physics, Radioastronomy, Astrobiology and Genetics” [26]
- XIX Барабашовські обласні наукові читання з астрономії учнів та студентів [27]

Список використаних джерел

1. de Grijs R., Bono G. Clustering of Local Group Distances: Publication Bias or Correlated Measurements? IV. The Galactic Center. *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 2016. Vol. 227, no. 1. P. 5. URL: <https://doi.org/10.3847/0067-0049/227/1/5> (date of access: 07.05.2025).
2. Lindegren L., al. e. Gaia Early Data Release 3. Parallax Bias versus Magnitude, Colour, and Position. *Astronomy & Astrophysics*. 2020. URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039653> (date of access: 07.05.2025).
3. Bailer-Jones C. A. L., al. e. Estimating Distances from Parallaxes. V. Geometric and Photogeometric Distances to 1.47 Billion Stars in Gaia Early Data Release 3. *The Astronomical Journal*. 2021. Vol. 161, no. 3. P. 147. URL: <https://doi.org/10.3847/1538-3881/abd806> (date of access: 07.05.2025).
4. Kerr F. J., Lynden-Bell D. Review of Galactic Constants. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1986. Vol. 221, no. 4. P. 1023–1038. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/221.4.1023> (date of access: 07.05.2025).
5. Odynets D. GCdistbyyear. *Site not found · GitHub Pages*. URL: https://dmytroodynets.github.io/GC_distance_by_year/ (date of access: 12.05.2025).
6. Shapley H. Studies Based on the Colors and Magnitudes in Stellar Clusters. VII. The Distances, Distribution in Space, and Dimensions of 69 Globular Clusters. *The Astrophysical Journal*. 1918. Vol. 48. P. 154. URL: <https://doi.org/10.1086/142423> (date of access: 07.05.2025).
7. Rygl K. L. J. Galactic Astrometry with VLBI. *Proceedings of the International Astronomical Union*. 2022. P. 69–81. URL: <https://doi.org/10.1017/s1743921323002545> (date of access: 07.05.2025).
8. Reid M. J., al. e. Trigonometric Parallaxes of High-mass Star-forming Regions: Our View of the Milky Way. *The Astrophysical Journal*. 2019. Vol. 885, no. 2. P. 131. URL: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab4a11> (date of access: 07.05.2025).
9. Hirota T., al. e. The First VERA Astrometry Catalog. *Publications of the Astronomical Society of Japan*. 2020. Vol. 72, no. 4. URL: <https://doi.org/10.1093/pasj/psaa018> (date of access: 07.05.2025).
10. Leung H. W., al. e. A measurement of the distance to the Galactic centre using the kinematics of bar stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2022. Vol. 519, no. 1. P. 948–960. URL: <https://academic.oup.com/mnras/article/519/1/948/6880164> (date of access: 07.05.2025).
11. Schönrich R. Galactic rotation and solar motion from stellar kinematics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2012. Vol. 427, no. 1. P. 274–287. URL: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21631.x> (date of access: 07.05.2025).

12. Xu Y., Hou L.-G., Wu Y.-W. The spiral structure of the Milky Way. *Research in Astronomy and Astrophysics*. 2018. Vol. 18, no. 12. P. 146. URL: <https://doi.org/10.1088/1674-4527/18/12/146> (date of access: 07.05.2025).
13. Dmytrenko A. M., others. The vertex coordinates of the Galaxy's stellar systems according to the Gaia DR3 catalogue. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2023. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stad823> (date of access: 07.05.2025).
14. Do T., al. e. Relativistic redshift of the star S0-2 orbiting the Galactic Center supermassive black hole. *Science*. 2019. Vol. 365, no. 6454. P. 664–668. URL: <https://doi.org/10.1126/science.aav8137> (date of access: 07.05.2025).
15. Abuter R., al. e. Mass distribution in the Galactic Center based on interferometric astrometry of multiple stellar orbits. *Astronomy & Astrophysics*. 2022. Vol. 657. P. L12. URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202142465> (date of access: 07.05.2025).
16. Akhmetov V. S., al. e. A new kinematic model of the Galaxy: analysis of the stellar velocity field from Gaia Data Release 3. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2024. Vol. 1, no. 530. P. 710–729. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stae772> (date of access: 07.05.2025).
17. Palicio P. A., al. e. Spiral-like features in the disc revealed by Gaia DR3 radial actions. *Astronomy & Astrophysics*. 2023. URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202245026> (date of access: 07.05.2025).
18. Astropy. *Astropy*. URL: <https://www.astropy.org/> (date of access: 12.05.2025).
19. Gaia Archive. Gaia Early Data Release 3 Documentation release 1.1. URL: https://gea.esac.esa.int/archive/documentation/GEDR3/Data_processing/chap_cu3ast/sec_cu3ast_intro/ssec_cu3ast_intro_tansforms.html (date of access: 07.05.2025).
20. Bailer-Jones C. A. L., others. Estimating Distances from Parallaxes. V. Geometric and Photogeometric Distances to 1.47 Billion Stars in Gaia Early Data Release 3. *The Astronomical Journal*. 2021. Vol. 161, no. 3. P. 147. URL: <https://doi.org/10.3847/1538-3881/abd806> (date of access: 07.05.2025).
21. Ogorodnikov K. F. Dynamics of stellar systems. New York : Macmillan, 1965. 359 p.
22. Marquardt D. W. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1963. Vol. 11, no. 2. P. 431–441. URL: <https://doi.org/10.1137/0111030> (date of access: 07.05.2025).
23. Eigen-unsupported: Non linear optimization module. *Eigen*. URL: https://eigen.tuxfamily.org/dox/unsupported/group_NonLinearOptimization_Module.html (date of access: 12.05.2025).
24. Schönrich R., Binney J., Dehnen W. Local kinematics and the local standard of rest. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2010. Vol. 403, no. 4.

- P. 1829–1833. URL: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.16253.x> (date of access: 07.05.2025).
25. de Grijs R., Bono G. Clustering of Local Group Distances: Publication Bias or Correlated Measurements? V. Galactic Rotation Constants. *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 2017. Vol. 232, no. 2. P. 22. URL: <https://doi.org/10.3847/1538-4365/aa8b71> (date of access: 07.05.2025).
26. Odynets D., Akhmetov V., Fedorov P. Bottlinger's formulas for estimating the distance from the Sun to the Galactic centre. *XXIV Gamow International Astronomical Conference "ASTRONOMY AND BEYOND: ASTROPHYSICS, COSMOLOGY AND GRAVITATION, ASTROPARTICLE PHYSICS, RADIO ASTRONOMY, ASTROBIOLOGY AND GENETICS"*, Odesa, 19–23 August 2024. P. 30. URL: https://gamow.odessa.ua/wp-content/uploads/2024/09/Abstracts-2024_and_Program.pdf#page=30 (date of access: 12.05.2025).
27. Про підсумки проведення XIX Барабашовських обласних наукових читань з астрономії учнів та студентів - Комунальний заклад "Харківська обласна Мала академія наук Харківської обласної ради". *Комунальний заклад "Харківська обласна Мала академія наук Харківської обласної ради"*. URL: <https://khom.org.ua/про-підсумки-проведення-хіх-барабашо/> (date of access: 12.05.2025).