

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Иевлев И.И.

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,
г. Харьков, Украина

Рассматривается приближенное решение операторного уравнения

$$Ax = y^* \quad (1)$$

с линейным оператором A , область определения которого $D(A)$ лежит в нормированном пространстве X , а заданная правая часть y^* принадлежит области его значений $R(A)$ другого нормированного пространства Y . В случае корректно поставленной задачи требуется выполнения трех условий (классическая корректная постановка задачи) [1]:

- 1) решение уравнения (1) существует ($y^* \in R(A)$),
- 2) решение единственное ($Ax = 0 \Rightarrow x = \theta$),
- 3) $\|x\| \leq k \|Ax\| \quad \forall x \in D(A)$.

Последнее свойство эквивалентно ограниченности обратного оператора $\|A^{-1}\| \leq k$, что позволяет говорить об устойчивости решения уравнения (1) по отношению к малым погрешностям Δy^* правых частей при условии $y^* + \Delta y^* \in R(A)$. Однако имеются практически важные задачи математической физики, для которых условие 3) не выполняется. Такие задачи носят название некорректно поставленных задач. К их числу относится задача Коши для уравнения Лапласа (пример Адамара), интегральные уравнения Фредгольма первого рода, обратные задачи гравиметрии [2-4]. Необходимость численного решения некорректно поставленных задач привела к появлению понятия корректности по Тихонову А.Н., опирающегося на известную лемму [3, стр.40]:

если для точной правой части y^ уравнения (1) существует единственный элемент x^* , принадлежащий компакту $M \subset D(A) \subset X$, то обратный оператор A^{-1} непрерывен на множестве $N = AM$, и, если $y^* + \Delta y^* \in N$, то решение уравнения $A\tilde{x} = y^* + \Delta y^*$ стремится к решению точного уравнения (1) при $\|\Delta y^*\| \rightarrow 0$.*

Для решения задач корректных по Тихонову А.Н. разработаны методы регуляризации [2-5]. В настоящей работе предлагается другой подход к решению таких задач, использующий общую теорию приближенных методов Канторовича Л.В, Гавурина М.К. [6,7]. Он заключается в построении и решении приближенного уравнения

$$A_n x_n = y_n^* \quad (2)$$

с оператором A_n , действующим из некоторого нормированного пространства X_n в нормируемое пространство Y_n . Уравнение (2) в определенном смысле аппроксимирует уравнение (1). Поэтому между пространствами X, X_n и Y, Y_n устанавливается связь посредством линейных ограниченных операторов $\varphi_n : X \rightarrow X_n, \psi_n : Y \rightarrow Y_n$.

Предполагается:

- 1) X_n, Y_n - конечномерные
- 2) $D(A_n) = X_n, R(A_n) \subseteq Y_n$
- 3) существуют $A_n^{-1} : \|A_n^{-1}\| = K_n < \infty$ (однако, возможно $K_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$)
- 4) $D(\varphi_n) = X, R(\varphi_n) = X_n, D(\psi_n) = Y, R(\psi_n) \subseteq Y_n$, существуют линейные операторы $\bar{\varphi}_n : x^{(n)} = \bar{\varphi}_n x_n \in X \forall x_n \in X_n, \bar{\psi}_n : y^{(n)} = \bar{\psi}_n y_n \in R(A) \forall y_n \in Y_n$.

Вводятся понятия:

мера аппроксимации

$$\gamma_n(x) = \|A_n \varphi_n x - \psi_n Ax\|_{Y_n}, \forall x \in D(A) \quad (3)$$

условие аппроксимации

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x) = 0 \quad \forall x \in D(A) \quad (4)$$

порядок аппроксимации (p-й порядок)

$$\gamma(x) = O\left(\frac{1}{n^p}\right) \quad (5)$$

каркас приближенного решения x_n^* - решение уравнения (2) с правой частью $y_n^* = \psi_n y^*$,

приближенное решение $x^{(n)} = \bar{\varphi}_n x_n^*$.

Известны теоремы о сходимости каркасов приближенных решений

$$\tau_n \equiv \|\varphi_n x^* - x_n^*\|_{X_n} \leq \|A_n^{-1}\| \gamma_n(x^*) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (6)$$

и приближенных решений ([7], стр.13)

$$\sigma_n \equiv \|x^{(n)} - x^*\|_X \leq \|\bar{\varphi}_n\| \|A_n^{-1}\| \gamma_n(x^*) + \|\bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - x^*\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (7)$$

В случае неограниченного обратного оператора A^{-1} (условие корректности оператора A не выполнено!) норма оператора A_n^{-1} с увеличением n растет. В этом случае для сходимости каркасов приближенных решений необходимо увеличивать порядок аппроксимации.

При составлении приближенного уравнения (2) и дальнейшем его решении в нем допускаются искажения как правой части Δy_n^* , так и оператора ΔA_n . Фактически вместо уравнения (2) решается «искаженное» уравнение

$$(A_n + \Delta A_n)(x_n^* + \Delta x_n^*) = y_n^* + \Delta y_n^* \quad (8)$$

В этом случае возникает вопрос об устойчивости метода по отношению к малым возмущениям оператора ΔA_n и правых частей Δy_n^* . Следующее неравенство позволяет дать ответ на вопрос об устойчивости алгоритма ([7], стр.28, (8))

$$\frac{\|\Delta x_n^*\|}{\|x_n^*\|} \leq \frac{\mu(A_n)}{1 - \mu(A_n) \frac{\|\Delta A_n\|}{\|A_n\|}} \left[\frac{\|\Delta A_n\|}{\|A_n\|} + \frac{\|\Delta y_n^*\|}{\|y_n^*\|} \right] \quad (9)$$

где $\mu(A_n) = \|A_n\| \|A_n^{-1}\|$ - аналог H -чисел обусловленности матриц [9].

Уравнения (1) с вполне непрерывным оператором A относят к уравнениям первого рода. Для них обратный оператор не является ограниченным, следовательно, задача (1) является некорректно поставленной, последовательность $\mu_n = \mu(A_n)$ оказывается возрастающей. Гавурин М.К. вводит понятие (α, β) -устойчивости процесса нахождения каркасов приближенных решений ([7], стр.32):

процесса нахождения каркасов приближенных решений (α, β) -устойчив, если из условия

$$\frac{1}{\alpha_n} \frac{\|\Delta A_n\|}{\|A_n\|} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\beta_n} \frac{\|\Delta y_n^*\|}{\|y_n^*\|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

следует сходимость каркасов приближенных решений и стремление к нулю относительной погрешности приближенных решений

$$\frac{\|\Delta x_n^*\|}{\|x_n^*\|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Здесь $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\beta = \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ - невозрастающие последовательности чисел.

Из неравенства (9) следует, что (α, β) -устойчивость нахождения каркасов приближенных решений будет иметь место тогда, когда $\alpha_n \mu_n$, $\beta_n \mu_n$ ограничены при $n \rightarrow \infty$.

Т.о. для устойчивого процесса определения каркасов приближенных решений уравнения (1) с вполне непрерывным оператором требуется согласовывать скорость аппроксимации исходных данных задачи со скоростью роста нормы обратного оператора A_n^{-1} .

Пример. Уравнение Фредгольма первого рода.

Рассмотрим краевую задачу для функции одной переменной $y(s)$, $s \in [0,1]$, обращающейся в нуль на концах интервала и удовлетворяющей уравнению

$$-\frac{d^2 y}{ds^2} = x(s)$$

Этой задаче соответствует операторное уравнение

$$By \equiv -\frac{d^2 y(s)}{ds^2} = x(s), \quad D(B) = \{y(s) \in C^2([0,1]): y(0) = y(1) = 0\} \quad (10)$$

Для данной краевой задачи можно указать функцию Грина

$$G(s,t) = \frac{1}{2} \begin{cases} t(1-s), & (0 \leq t \leq s) \\ s(1-t), & (s \leq t \leq 1) \end{cases} \quad (11)$$

и обратный оператор $A = B^{-1}$

$$Ax(s) \equiv \int_0^1 G(s,t)x(t)dt = y(s) \quad (12)$$

Оператор B является положительно определенным оператором с собственными значениями, равными

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 \quad (13)$$

В качестве пространств X, Y выберем пространство непрерывных функций, заданных на интервале $[0,1]$: $X = Y = C([0,1])$. Тогда $D(A) = X$, $R(A) = \{y(s) \in C^{(2)}([0,1]): y(0) = y(1) = 0\} \subset Y$.

На интервале $[0,1]$ выберем две последовательности узлов

$$s_i = \frac{i}{n+1} \quad (i = \overline{0, n+1}), \quad t_k = \frac{k-1}{n-1} \quad (k = \overline{1, n})$$

Пусть операторы φ_n переводит непрерывные функции в n -мерные вектора пространства m_n

$$x_n = \{x_k \equiv x(t_k)\}_{k=1}^n$$

а оператор ψ_n - непрерывные функции в n -мерные вектора

$$y_n = \{y_i \equiv y(s_i)\}_{i=1}^n$$

Операторы восполнения $\bar{\varphi}_n, \bar{\psi}_n$ определим, используя линейную интерполяцию

$$x^{(n)}(t) = \bar{\varphi}_n x_n = \sum_{k=2}^n \left\{ x_{k-1} \frac{t-t_k}{t_{k-1}-t_k} + x_k \frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} \right\} \quad (14)$$

и многочлены Бернштейна С.Н.

$$y^{(n)}(s) = \bar{\psi}_n y_n = \sum_{i=0}^{n+1} \left\{ y_i C_{n+1}^i s^i (1-s)^{n+1-i} \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ y_i C_{n+1}^i s^i (1-s)^{n+1-i} \right\} \quad (15)$$

$\forall y_n = \{y_i\}_{i=1}^n$, дополненного вначале и в конце последовательности нулями.

Таким образом, $D(A_n) = X_n = m_n$, $Y_n = m_n$, $X^{(n)} = \bar{\varphi}_n X_n$ - множество кусочно-линейных функций, $Y^{(n)} = \bar{\psi}_n Y_n$ - множество многочленов степени $n+1$, обращающихся в нуль на концах интервала $[0,1]$.

Оператор приближенного уравнения построим так. Запишем выражение

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n x_n &= \left\{ \int_0^1 G(s_i t) x^{(n)}(t) dt \right\}_{i=1}^n = \left\{ \sum_{k=2}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} G(s_i t) x^{(n)}(t) dt \right\}_{i=1}^n = \\ &= \left\{ \sum_{k=2}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} G(s_i t) \left[x_{k-1} \frac{t-t_k}{t_{k-1}-t_k} + x_k \frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} \right] dt \right\}_{i=1}^n \end{aligned}$$

Затем интегралы здесь заменим квадратурными формулами, разбивая интервал $[t_{k-1}, t_k]$ на N подинтервалов одинаковой длины и на каждом из них применяя квадратурную формулу Гаусса с тремя узлами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и коэффициентами d_1, d_2, d_3 , дающую точное значение интеграла для многочленов пятой степени

$$\int_a^b F(t) dt \approx \sum_{m=1}^N \frac{b-a}{2N} \sum_{j=1}^3 d_j F \left[a + (b-a) \frac{2m-1}{2N} \theta_j \right]$$

Обозначим

$$J_N(F, a, b) = \sum_{m=1}^N \frac{b-a}{2N} \sum_{j=1}^3 d_j F \left[a + (b-a) \frac{2m-1}{2N} \theta_j \right]$$

Тогда левую часть приближенного уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_n x_n = & \left\{ x_1 J'_N \left(G(s_i, t) \frac{t-t_2}{t_1-t_2}, t_1, t_2 \right) + \right. \\ & + \sum_{k=2}^{n-1} x_k \left[J'_N \left(G(s_i, t) \frac{t-t_k}{t_{k-1}-t_k}, t_{k-1}, t_k \right) + J'_N \left(G(s_i, t) \frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}}, t_k, t_{k+1} \right) \right] + \\ & \left. + x_n J'_N \left(G(s_i, t) \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}, t_{n-1}, t_n \right) \right\}_{i=1}^n \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь штрих (J'_N) означает, что при попадании значения s_i в интервал $[t_{k-1}, t_k]$ ($k=2, \dots, n$) соответствующий интервал необходимо разбить на два подинтервала $[t_{k-1}, s_i]$ и $[s_i, t_k]$, и применив к каждому из них указанную квадратурную формулу. В силу того, что функция Грина на интервалах $[0, s_i]$, $[s_i, 1]$ является линейной функцией переменной t , то квадратурные формулы применяются к функциям в виде многочленов второй степени, а, следовательно, является точной. Тогда будет верным равенство

$$A_n x_n = \psi_n A \bar{\varphi}_n x_n$$

Мера аппроксимации в этом случае равна

$$\gamma_n(x^*) = \left\| \psi_n A \bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - \psi_n A x^* \right\| \leq \left\| \psi_n \right\| \left\| A \right\| \left\| \bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - x^* \right\| \quad (17)$$

Таким образом, приближенное уравнение (2) представлено системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n B_{ik} x_k = b_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (18)$$

с матрицей, коэффициенты которой определяются выражениями, стоящими в фигурных скобках соотношения (16), а правые части равны $b_i = y_i^* = y^*(s_i)$. В целях проверки устойчивости метода в правые части уравнений (18) вносились возмущения $\Delta y_n^* = \left\{ (-1)^i \delta n^{-p} \right\}_{i=1}^n$, где δ малая постоянная, p - целое, определяющее скорость убывания погрешности.

Уравнение (12) при $y^* = y(s) = \sin(2\pi s)$ имеет точное решение $x^* = x(t) = 4\pi^2 \sin(2\pi t)$, являющейся аналитической функцией на интервале $[0,1]$, Можно воспользоваться оценкой быстроты сходимости интерполирующей функции [8]

$$\|\bar{\varphi}_n \varphi_n x^* - x^*\| = O(n^{-1})$$

Откуда следует

$$\gamma_n(x^*) = O(n^{-1})$$

Таким образом, сходимость каркасов приближенных решений к каркасу точного решения зависит от поведения произведения $\|A_n^{-1}\| \gamma(x^*)$. Если $\|A_n^{-1}\| \gamma(x^*) \rightarrow 0$ с увеличением n , то $\tau_n \rightarrow 0$. Вопрос устойчивости метода также связан с поведением $\|A_n^{-1}\|$, а, следовательно, и поведением $\mu(A_n)$. Характер поведения указанных величин с изменением n можно определить в процессе вычислений. Так в рассматриваемом примере приближенное уравнение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, $\mu(A_n)$ является H - числом обусловленности этой системы. Характер изменения $\mu(A_n)$ изображен на рис.3. С увеличением n $\mu(A_n)$ сильно возрастает, система алгебраических уравнений становится плохо обусловленной.

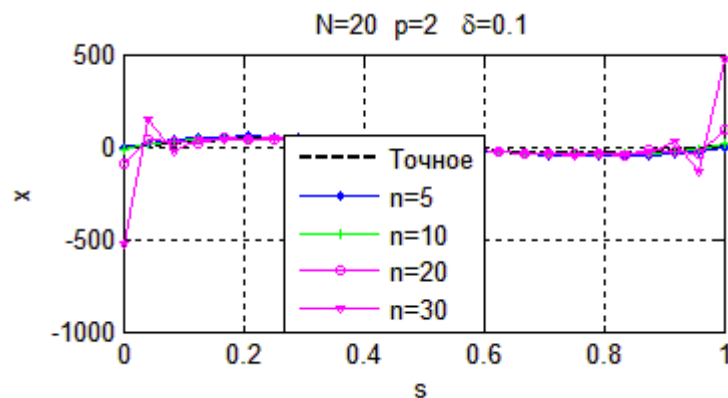


Рис.1

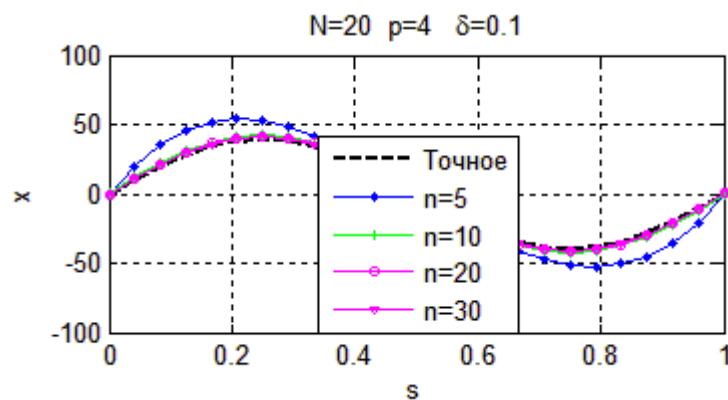


Рис.2

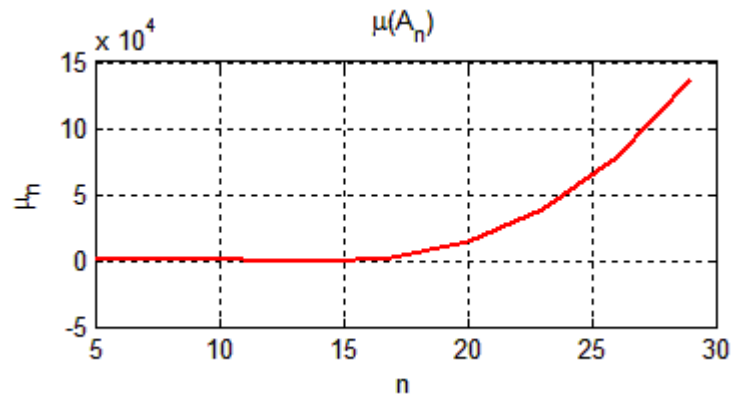


Рис.3

На рис.1,2 изображены графики точного и приближенных решений для $n = 5, 10, 20, 30$. Рис.1 соответствует случаю, когда скорость убывания погрешностей правых частей незначительна $p = 2$. С увеличением n происходит раскочка приближенного решения. Если скорость убывания погрешности увеличить (рис.2, $p > 3$), приближенные решения сходятся к точному. Здесь можно говорить о $(\alpha \beta)$ -устойчивости алгоритма, где $\alpha_n = \beta_n = O(n^{-p})$ ($p > 3$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. - 576 с.
2. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, Физматгиз, 1962. - 210 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. - 223 с.
4. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах. Матем. сб., 1963, 61, №2, с. 211-223.
5. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. ДАН СССР, 1963, 151, №3, с. 501-504.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977, 742 с.
7. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука. - 1971.-248 с.
8. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.-Л.: Гостехиздат. - 1949. - 688 с.
9. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Госиздат, М.: ФМЛ.-1960.-656 с.