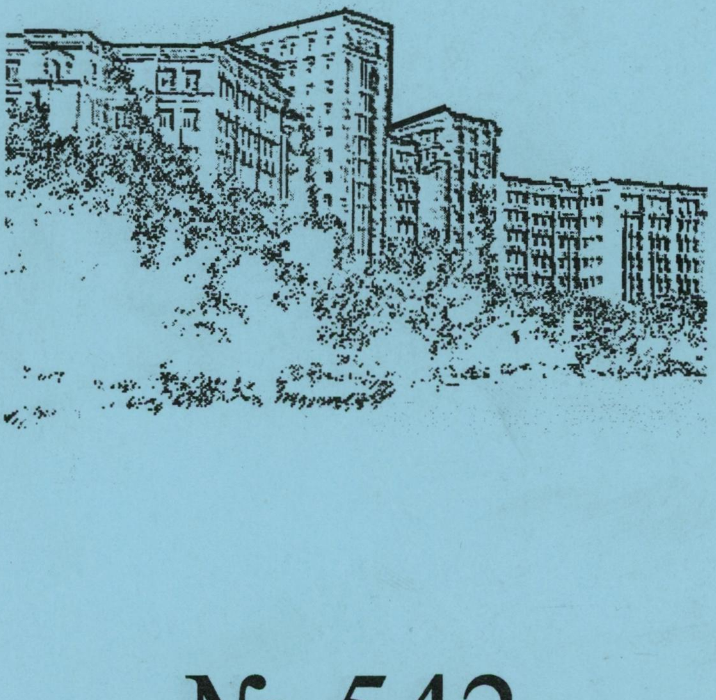
ISSN 0453–8048

ВІСНИК

Харківського національного університету



№ 542

Харків
2002

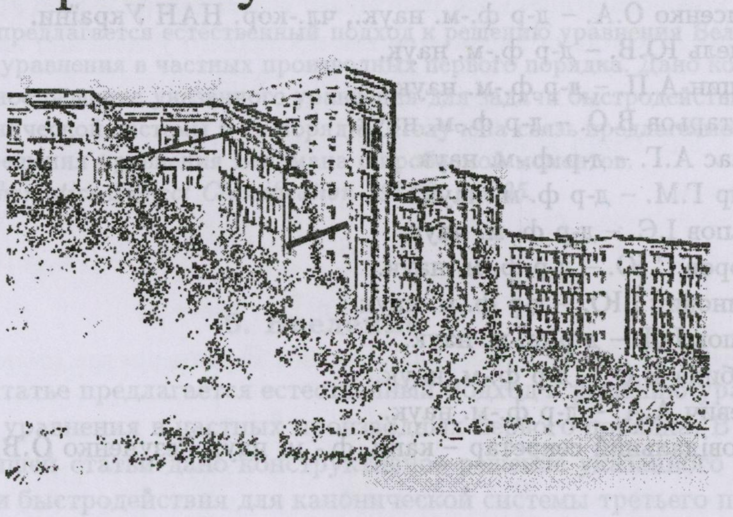
Зас

Міністерство освіти та науки України
ISSN 0453–8048

Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського національного університету



№ 542

Серія
«Математика, прикладна математика і механіка»

Випуск 51

Харків
2002

УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Адреса редакційної колегії: 61077, Харків, м. Свободи, 4,
ХНУ, механіко-математичний факультет, к.7-29.
Тел. 45-75-18, Email: vestnik@univer.kharkov.ua
Интернет:
http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/

Друкуеться за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету (протокол № 1 від 25 січня 2002 р.).

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 4063 від 02.03.2000 р.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977 № 542, 2002, с. 3–12

Решение уравнения Беллмана для задачи быстродействия для канонической системы и его связь с проблемой моментов

В. И. Коробов, Т. И. Сморцова
Харьковский национальный университет, Украина
Szczecin University, Poland

В статье предлагается естественный подход к решению уравнения Беллмана как уравнения в частных производных первого порядка. Дано конструктивное решение указанного уравнения для задачи быстродействия для канонической системы n-го порядка. Получена связь предлагаемого способа решения уравнения Беллмана с проблемой моментов.
2000 Mathematics Subject Classification 49L20, 93C05.

0. Введение

В данной статье предлагается естественный подход к решению уравнения Беллмана как уравнения в частных производных первого порядка. В первом разделе настоящей статьи дано конструктивное решение указанного уравнения для задачи быстродействия для канонической системы третьего порядка. Во втором разделе статьи дано конструктивное решение уравнения Беллмана для задачи быстродействия для канонической системы n-го порядка. В этом же разделе мы получим связь предлагаемого способа решения уравнения Беллмана с проблемой моментов [1], на основе которой в [1] дано аналитическое решение задачи быстродействия для канонической системы n-го порядка.

1. Решение уравнения Беллмана для системы третьего порядка

Рассмотрим каноническую управляемую систему третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2 \end{cases} \tag{1}$$

при ограничениях на управление $|u| \leq 1$.

Время быстродействия будем искать как функцию начальной точки $\theta(x_1, x_2, x_3)$. Уравнение Беллмана для функции $\theta(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид [2]

$$\min_{|\nu| \le 1} \frac{\partial\theta(x)}{\partial x} f(x,\nu) = -1 \ ,$$

где $f(x,\nu)$ – правая часть системы. Это уравнение можно записать в виде

$$\pm\,\theta_{x_1} + \theta_{x_2} x_1 + \theta_{x_3} x_2 = -1 \ . \qquad (2)$$

Решать уравнение будем отдельно при $u = +1$ и при $u = -1$, но для сокращения записи вместо $\pm$ будем писать u. Рассмотрим уравнение

$$u g_{x_1} + g_{x_2} x_1 + g_{x_3} x_2 + (-1) g_\theta = 0 \ ,$$

решение которого $g(x,\theta): \ \frac{\partial g}{\partial \theta} \ne 0$ задаёт в неявном виде $g(x,\theta) = 0$ решение уравнения (2). Система характеристик последнего уравнения имеет вид

$$\frac{dx_1}{u} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_2} = \frac{d\theta}{-1} \ ,$$

откуда имеем

$$\begin{cases} x_1 \ = \ -u\theta + p_1 \ , \\ x_2 \ = \ u\frac{\theta^2}{2} - p_1\theta + p_2 \ , \\ x_3 \ = \ -u\frac{\theta^3}{3!} + p_1\frac{\theta^2}{2!} - p_2\theta + p_3 \ . \end{cases} \qquad (3)$$

Следовательно, первые интегралы системы характеристик имеют вид

$$\begin{cases} p_1(x,\theta) \ = \ u\theta + x_1 \ , \\ p_2(x,\theta) \ = \ -u\frac{\theta^2}{2} + p_1\theta + x_2 = u\frac{\theta^2}{2} + \theta x_1 + x_2 \ , \\ p_3(x,\theta) \ = \ u\frac{\theta^3}{3!} - p_1\frac{\theta^2}{2!} + p_2\theta + x_3 = u\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^2}{2!} x_1 + \theta x_2 + x_3 \ . \end{cases}$$

Общее решение рассматриваемого однородного уравнения имеет вид $g(x,\theta) = \varphi(p_1(x,\theta), p_2(x,\theta), p_3(x,\theta))$. Тогда $\theta(x)$ – решение уравнения (2) задаётся неявно в виде $\varphi(p_1(x,\theta), p_2(x,\theta), p_3(x,\theta)) = 0$. Сделав необходимые предположения на функцию $\varphi(z_1, z_2, z_3)$, получим, что $p_1(x,\theta) = x_1 + u\theta = \tilde{F}(p_2(x,\theta), p_3(x,\theta))$, откуда

$$\theta = -\frac{x_1}{u} + F(p_2(x,\theta), p_3(x,\theta)) \ .$$

Следовательно,

$$\theta = \begin{cases} -x_1 + F_1(C_2(x,\theta), C_3(x,\theta)) \ , \\ x_1 + F_2(D_2(x,\theta), D_3(x,\theta)) \ . \end{cases} \qquad (4)$$

Очевидны соотношения

$$F_1(0,0) = 0 \ , \ F_2(0,0) = 0 \ . \qquad (5)$$

Из (3) следует, что при $u = +1$ в 0 ведет траектория S_1^+

$$\begin{cases} x_1 &= -\theta , \\ x_2 &= \frac{1}{2}\theta^2 , \\ x_3 &= -\frac{1}{3!}\theta^3 . \end{cases}$$

На этой траектории функции $C_k(x,\theta)$ постоянны и равны, с учётом первого из соотношений (5), нулю. Функции $D_k(x,\theta)$ отличны от 0 и имеют вид $D_2(x,\theta) = -\theta^2$; $D_3(x,\theta) = -\frac{1}{3}\theta^3$. Функция θ непрерывна на S_1^+ , следовательно, с учетом (4), $-x_1 + F_1(0,0) = x_1 + F_2(-\theta^2, -\frac{1}{3}\theta^3)$, откуда

$$F_2(-\theta^2, -\frac{1}{3}\theta^3) = -2x_1 = 2\theta .$$

Обозначим θ через z . Тогда $F_2(-z^2, -\frac{1}{3}z^3) = 2z$.

Аналогично, на линии S_1^- ведущей в начало координат при $u = -1$, получим, что

$$F_1(\theta^2, \frac{1}{3}\theta^3) = 2\theta .$$

Согласно [1], поверхность переключения управления имеет вид $S^- \cup S^+$, где

$$S^- = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : \begin{array}{rcl} x_2 &=& \frac{1}{4}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta x_1 - \frac{1}{4}x_1^2 , \\ x_3 &=& -\frac{1}{8}\theta^3 + \frac{1}{8}\theta^2 x_1 + \frac{1}{8}\theta x_1^2 + \frac{1}{24}x_1^3 \end{array} \right\} , \qquad (6)$$

$$S^+ = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : \begin{array}{rcl} x_2 &=& -\frac{1}{4}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta x_1 + \frac{1}{4}x_1^2 , \\ x_3 &=& \frac{1}{8}\theta^3 + \frac{1}{8}\theta^2 x_1 - \frac{1}{8}\theta x_1^2 + \frac{1}{24}x_1^3 \end{array} \right\} , \qquad (7)$$

Воспользуемся теперь условием непрерывности функции $\theta(x_1, x_2, x_3)$ на поверхности S^- . Из (4) получим, что

$$F_1\Big(\theta^2 - \frac{(\theta - x_1)^2}{4}, \frac{1}{3}(\theta^3 - \frac{(\theta - x_1)^3}{8})\Big) = 2x_1 + F_2\Big(-\frac{(\theta - x_1)^2}{4}, -\frac{(\theta - x_1)^3}{24}\Big) .$$

Используя найденное выражение для функции $F_2(-z^2, -\frac{1}{3}z^3)$, получим, что

$$F_1\Big(\theta^2 - \frac{(\theta - x_1)^2}{4}, \frac{1}{3}(\theta^3 - \frac{(\theta - x_1)^3}{8})\Big) = 2x_1 + \theta - x_1 = \theta + x_1 .$$

С помощью аналогичных рассуждений на поверхности S^+ получим

$$F_2\Big(-\theta^2 + \frac{(\theta - x_1)^2}{4}, \frac{1}{3}(-\theta^3 + \frac{(\theta - x_1)^3}{8})\Big) = \theta - x_1 .$$

Рассмотрим функцию F_2 . Обозначим θ через T_1, а $\frac{\theta - x_1}{2}$ – через T_2 . Введём переменные $b_1 = T_1 - T_2$; $b_2 = T_1^2 - T_2^2$; $b_3 = T_1^3 - T_2^3$. Тогда

$$F_1(b_2, \frac{1}{3}b_3) = 2b_1 .$$

Зависимость между введёнными переменными задаёт зависимость между аргументами рассматриваемой функции и её значениями. Уравнение, связывающее эти переменные имеет вид

$$-\frac{1}{12}b_1^4-\frac{1}{4}b_2^2+\frac{1}{3}b_1b_3=0\ .$$

Т.к. b_2, b_3 функционально независимы, то, подставляя в предыдущее уравнение $b_1=\frac{C_1}{2}=\frac{\theta+x_1}{2}$, $b_2=C_2=\frac{1}{2}\theta^2+\theta x_1+x_2$, $b_3=3C_3=3(\frac{1}{6}\theta^3+\frac{1}{2}\theta^2x_1+\theta x_2+x_3)$, получим уравнение для времени быстродействия $\theta(x_1,x_2,x_3)$ для случая, когда в начальный момент времени управление принимает значение $u=+1$. В данном случае это уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{1}{64}\theta^4+\frac{1}{16}\theta^3x_1-\frac{1}{32}\theta^2x_1^2-\frac{1}{48}\theta x_1^3+\frac{1}{4}\theta^2x_2+\frac{1}{2}\theta x_3-\frac{1}{192}x_1^4+\frac{1}{2}x_1x_3-\frac{1}{4}x_2^2=0\ .$$

С помощью тех же рассуждений получаем уравнение для времени быстродействия, когда в начальный момент времени управление $u=-1$.

Эти уравнения являются теми же, которые были получены в [1].

2. Решение уравнения Беллмана для системы n-го порядка

Рассмотрим каноническую систему произвольного порядка n

$$\begin{cases}\dot{x}_1 &= u\ ,\ |u|\le 1\ ,\\ \dot{x_k} &= x_{k-1}\ ,\ k=\overline{2,n}\ .\end{cases}$$

Как и в предыдущем примере время быстродействия будем искать как функцию начальной точки $\theta(x_1,...,x_n)$. Уравнение Беллмана для функции $\theta(x_1,...,x_n)$ имеет вид [2]

$$\min_{|\nu|\le 1}\frac{\partial\theta(x)}{\partial x}f(x,\nu)=-1\ ,$$

где $f(x,\nu)$ – правая часть системы. Т. к. $u=\pm1$, то уравнение можно записать в виде

$$\pm\,\theta_{x_1}+\theta_{x_2}x_1+...+\theta_{x_n}x_{n-1}=-1\ . \qquad (8)$$

Решать уравнение будем отдельно при $u=+1$ и при $u=-1$, но для сокращения записи вместо $\pm$ будем писать u . Как и в предыдущем разделе, рассмотрим уравнение

$$ug_{x_1}+g_{x_2}x_1+...+g_{x_n}x_{n-1}+(-1)g_\theta=0\ ,$$

решение которого $g(x,\theta):\ \frac{\partial g}{\partial\theta}\ne0$ задаёт в неявном виде $g(x,\theta)=0$ решение уравнения (1). Система характеристик последнего уравнения имеет вид

$$\frac{dx_1}{u}=\frac{dx_2}{x_1}=...=\frac{dx_n}{x_{n-1}}=\frac{d\theta}{-1}\ .$$

откуда имеем

$$\begin{cases} x_1 &= -u\theta + p_1 \ , \\ x_2 &= \frac{u}{2}\theta^2 - p_1\theta + p_2 \ , \\ x_3 &= -\frac{u}{3!}\theta^3 + \frac{1}{2!}p_1\theta^2 - p_2\theta + p_3 \ , \\ \dots & \dots \quad \dots\dots\dots\dots \ , \\ x_n &= (-1)^n\Big(\frac{u}{n!}\theta^n + \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{(n-i)!}p_i\theta^{n-i}\Big) \ . \end{cases} \tag{9}$$

Следовательно, первые интегралы системы характеристик имеют вид

$$\begin{cases} p_1(x,\theta) &= u\theta + x_1 \ , \\ p_2(x,\theta) &= -\frac{u}{2}\theta^2 + p_1\theta + x_2 = \frac{u}{2}\theta^2 + \theta x_1 + x_2 \ , \\ p_3(x,\theta) &= \frac{u}{3!}\theta^3 - \frac{1}{2!}p_1\theta^2 + p_2\theta + x_3 = \frac{u}{3!}\theta^3 + \frac{1}{2!}\theta^2 x_1 + \theta x_2 + x_3 \ , \\ \dots & \dots \quad \dots\dots\dots\dots \ , \\ p_n(x,\theta) &= -(-1)^n\Big(\frac{u}{n!}\theta^n + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(n-i)!}p_i(x,\theta)\theta^{n-i}\Big) + x_n \ . \end{cases}$$

По индукции можно показать, что $p_k(x,\theta) = \frac{u}{k!}\theta^k + \sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{(k-i)!}\theta^{k-i}x_i,\ k = \overline{1,n}$. Очевидны также соотношения

$$p_k(0,...,0) = 0 \ , i = \overline{1,n} \ . \tag{10}$$

Обозначим $p_k(x,\theta)$ при $u = +1$ через $C_k(x,\theta)$, при $u = -1$ через $D_k(x,\theta)$. Тогда $C_k(x,\theta) = \frac{1}{k!}\theta^k + \sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{(k-i)!}\theta^{k-i}x_i,\ D_k(x,\theta) = -\frac{1}{k!}\theta^k + \sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{(k-i)!}\theta^{k-i}x_i$, $k = \overline{1,n}$. Если рассматривать эти функции на одной поверхности, то очевидно, что

$$C_k(x,\theta) - D_k(x,\theta) = \frac{2}{k!}\theta^k \ . \tag{11}$$

Общее решение рассматриваемого однородного уравнения имеет вид $g(x,\theta) = \varphi(p_1(x,\theta),p_2(x,\theta),...,p_n(x,\theta))$. Тогда $\theta(x)$ – решение уравнения (1) задаётся неявно в виде $\varphi(p_1(x,\theta),p_2(x,\theta),...,p_n(x,\theta)) = 0$. Сделав необходимые предположения на функцию $\varphi(z_1,...,z_n)$, получим, что $p_1(x,\theta) = x_1 + u\theta = \tilde{F}(p_2(x,\theta),...,p_n(x,\theta))$, откуда

$$\theta = -\frac{x_1}{u} + F(p_2(x,\theta),...,p_n(x,\theta)) \ .$$

Следовательно,

$$\theta = \begin{cases} -x_1 + F_1(C_2(x,\theta),...,C_n(x,\theta)) \ , \\ x_1 + F_2(D_2(x,\theta),...,D_n(x,\theta)) \ . \end{cases} \tag{12}$$

Очевидны соотношения

$$F_1(0,...,0) = 0 \ , \ F_2(0,...,0) = 0 \ , \tag{13}$$

$$F_1(C_2(x,\theta),...,C_n(x,\theta)) = \theta + x_1 = C_1(x,\theta) \ ,$$

$$F_2(D_2(x,\theta),...,D_n(x,\theta)) = \theta - x_1 = -D_1(x,\theta)\ .$$

Из (9) следует, что при $u = +1$ в 0 ведет траектория S_1^+

$$\begin{cases} x_1 &= -\theta\,, \\ x_2 &= \frac{1}{2}\theta^2\,, \\ ... & ... \quad ...\,, \\ x_n &= (-1)^n\frac{1}{n!}\theta^n\ . \end{cases}$$

На этой траектории функции $C_k(x,\theta)$ постоянны и равны, с учётом (10), нулю. Функции $D_k(x,\theta)$ отличны от 0 и, с учетом (11) $D_k(x,\theta) = -\frac{2}{k!}\theta^k$. Функция θ непрерывна на S_1^+, следовательно из (12) получаем, что $-x_1 + F_1(0,...,0) = x_1 + F_2(-\theta^2, -\frac{2}{3!}\theta^3, ..., -\frac{2}{n!}\theta^n)$, откуда

$$F_2(-\theta^2, -\frac{2}{3!}\theta^3, ..., -\frac{2}{n!}\theta^n) = -2x_1 = 2\theta\ .$$

Аналогично, на линии S_1^- ведущей в 0 при $u = -1$ получим, что

$$F_1(\theta^2, \frac{2}{3!}\theta^3, ..., \frac{2}{n!}\theta^n) = 2x_1 = 2\theta \tag{14}$$

Обозначим θ через $T_{1,1}$. Тогда предыдущее равенство перепишется в виде:

$$F_1(T_{1,1}^2, \frac{2}{3!}T_{1,1}^3, ..., \frac{2}{n!}T_{1,1}^n) = 2T_{1,1}\ . \tag{15}$$

Поверхность S_2^+ состоит из траекторий, соответствующих управлению $u = +1$ и оканчивающихся на траектории S_1^-. На таких траекториях $C_k(x,\theta) = C_k$ (постоянны). Из (10), (11) следует, что на линии S_1^- $D_k(x) = 0$, а $C_k = \frac{2}{k!}\theta^k$. Следовательно, $\frac{C_k}{C_1{}^k} = \frac{2\theta^k}{k!}\frac{1}{(2\theta)^k} = \frac{2}{k!2^k}$. Таким образом, на поверхности S_2^+ сохраняется та же аналитическая связь между функциями $C_i(x,\theta)$, что и на поверхности S_1^-, и поэтому $C_k(x,\theta) = \frac{2}{k!}(\frac{C_1(x,\theta)}{2})^k$, $k = \overline{1,n}$, $C_1(x,\theta) = x_1+\theta$. С учётом (11) на S_2^+ функции $D_k(x,\theta) = -\frac{2}{k!}(\theta^k - (\frac{C_1(\theta)}{2})^k)$, $k = \overline{1,n}$.

Функция θ непрерывна на S_2^+, следовательно, с учётом (12)

$$-x_1 + F_1\Big(\frac{2}{2!}(\frac{\theta + x_1}{2})^2, \frac{2}{3!}(\frac{\theta + x_1}{2})^3, ..., \frac{2}{n!}(\frac{\theta + x_1}{2})^n\Big) =$$

$$= x_1 + F_2\Big(-\frac{2}{2!}(\theta^2 - (\frac{\theta + x_1}{2})^2), -\frac{2}{3!}(\theta^3 - (\frac{\theta + x_1}{2})^3), ..., -\frac{2}{n!}(\theta^n - (\frac{\theta + x_1}{2})^n)\Big)\ .$$

Обозначим $\frac{c_1(x,\theta)}{2} = \frac{\theta + x_1}{2}$ через $T_{1,2}$. Тогда $C_k(x,\theta) = \frac{2}{k!}T_{1,2}^k$, $k = \overline{1,n}$ и предыдущее равенство перепишется в виде:

$$-x_1 + F_1\Big(\frac{2}{2!}T_{1,2}^2, \frac{2}{3!}T_{1,2}^3, ..., \frac{2}{n!}T_{1,2}^n\Big) =$$

$$= x_1 + F_2\Big(-\frac{2}{2!}(\theta^2 - T_{1,2}^2), -\frac{2}{3!}(\theta^3 - T_{1,2}^3), ..., -\frac{2}{n!}(\theta^n - T_{1,2}^n)\Big)\ .$$

Заметим, что $T_{1,2}(x_1,\theta)|_{x\in S_1^-} = T_{1,1}(\theta)$ и $T_{1,2}(x_1,\theta)$ постоянны вдоль траекторий, образующих поверхность S_2^+. Поэтому равенство (7) справедливо и на поверхности S_2^+, т. е.

$$F_1\left(\frac{2}{2!}T_{1,2}^2, \frac{2}{3!}T_{1,2}^3, ..., \frac{2}{n!}T_{1,2}^n\right) = 2T_{1,2} .$$

Тогда

$$F_2\left(-\frac{2}{2!}(\theta^2 - T_{1,2}^2), -\frac{2}{3!}(\theta^3 - T_{1,2}^3), ..., -\frac{2}{n!}(\theta^n - T_{1,2}^n)\right) = -2x_1 + 2T_{1,2} =$$

$$= -2(C_1(x,\theta) - \theta) + 2T_{1,2} = -2(2T_{1,2} - \theta) + 2T_{1,2} = 2(\theta - T_{1,2}) .$$

Обозначим θ через $\tilde{T}_{1,2}$, а $T_{1,2}$ - через $\tilde{T}_{2,2}$. Тогда предыдущее равенство примет вид:

$$F_2\left(-\frac{2}{2!}(\tilde{T}_{1,2}^2 - \tilde{T}_{2,2}^2), -\frac{2}{3!}(\tilde{T}_{1,2}^3 - \tilde{T}_{2,2}^3), ..., -\frac{2}{n!}(\tilde{T}_{1,2}^n - \tilde{T}_{2,2}^n)\right) = 2(\tilde{T}_{1,2} - \tilde{T}_{1,2}) .$$

Аналогично, на поверхности S_2^- получаем, что

$$F_1\left(\frac{2}{2!}(T_{1,2}^2 - T_{2,2}^2), \frac{2}{3!}(T_{1,2}^3 - T_{2,2}^3), ..., \frac{2}{n!}(T_{1,2}^n - T_{2,2}^n)\right) = 2(T_{1,2} - T_{2,2}) ,$$

где $T_{1,2} = \theta$, $T_{2,2} = \frac{\theta - x_1}{2} = -\frac{D_1(x,\theta)}{2}$.

Пусть теперь найдено, что на поверхности S_k^-

$$F_1\left(\frac{2}{2!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k}^2, ..., \frac{2}{n!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k}^n\right) = 2\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k} , \qquad (16)$$

где $\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k}^j = C_j(x,\theta)$. Здесь $T_{i,k} = T_{i,k}(\theta, x_1, ..., x_{k-1})$, и любые $(k+1)$ функции из набора $\{C_m(x,\theta)\}_{m=1}^n$ функционально зависимы. Т. к. первые k функций функционально независимы, то $C_j(x,\theta) = f_j(C_1(x,\theta), ..., C_k(x,\theta))$, $j = \overline{k+1, n}$, или

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k}^j = f_j(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k}, ... \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k}^k) . \qquad (17)$$

Поверхность S_{k+1}^+ состоит из траекторий, соответствующих управлению $u = +1$ и оканчивающихся в точках поверхности S_k^- . На таких траекториях функции $C_k(x,\theta)$ постоянны и между ними существует та же аналитическая связь, что и в соответствующих точках поверхности S_k^- , поэтому эти функции допускают аналогичное представление, т. е. $C_j(x,\theta) = \frac{2}{j!}\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^j$, $j = \overline{1,n}$, где $T_{i,k+1}$ - решение системы уравнений

$$C_m(x,\theta) = \frac{2}{m!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}t_i^m , \; m = \overline{1,k} .$$

Такая система имеет, вообще говоря, неединственное решение. Однако, решение, которое подходит по смыслу задачи, единственно [1]. Обозначим это решение $T_{i,k+1}(\theta, x_1, ..., x_k)$, причём $T_{i,k+1} \neq T_{j,k+1}$ при $i \neq j$ и $x \notin S_k$. Кроме того, $T_{i,k+1}(\theta, x_1, ..., x_k)|_{x \in S_k^-} = T_{i,k}(\theta, x_1, ..., x_{k-1})$, т. к. решение единственно и на траекториях, образующих поверхность S_{k+1}^+ функции $C_j(x,\theta)$ принимают те же значения, что и в соответствующих точках поверхности S_k^-. Ввиду соотношения (17) необходимое представление через $T_{i,k+1}$ имеет место и для функций $C_j(x,\theta)$, $j = \overline{k+1, n}$.

Так как на S_{k+1}^+ сохраняется аналитическая связь между $C_i(x,\theta)$, то на этой поверхности справедливо соотношение (16) , т. е.

$$F_1\Big(\frac{2}{2!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^2, ..., \frac{2}{n!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^n\Big) = 2\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}\,.$$

На поверхности S_{k+1}^+, с учётом (11), имеем, что функции $D_j(x,\theta) = \frac{2}{j!}(\theta^j - \sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^j)$, $j = \overline{1, n}$.

Функция $\theta(x_1, ..., x_n)$ непрерывна на этой поверхности, поэтому из (12) с учётом вышесказанного следует равенство

$$-x_1 + F_1\Big(\frac{2}{2!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^2, ..., \frac{2}{n!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^n\Big) =$$

$$= x_1 + F_2\Big(-\frac{2}{2!}(\theta^2 - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^2), ..., -\frac{2}{n!}(\theta^n - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^n)\Big)\,,$$

откуда

$$F_2\Big(-\frac{2}{2!}(\theta^2 - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^2), ..., -\frac{2}{n!}(\theta^n - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^n)\Big) =$$

$$= -2x_1 + F_1\Big(\frac{2}{2!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^2, ..., \frac{2}{n!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^n\Big) = -2(C_1(x,\theta) - \theta) +$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}T_{i,k+1} = 2\theta - 2\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}\,.$$

Заметим, что полученный набор $T_{i,k+1}$ и θ дают решение системы уравнений

$$\frac{2}{m!}(\theta^m \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}t_i^m) = -D_m(x,\theta)\,,\ m = \overline{1, k+1}\,.$$

Обозначим $T_0 = \theta$. Тогда $\forall j = \overline{1, n}$ имеем $\theta^j - \sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^j = -(-T_0^j + \sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^j) = -\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^j$. Обозначим $T_{i,k+1} = \tilde{T}_{i+1,k+1}$, $i = \overline{0, k}$. Тогда $\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{i+1}T_{i,k+1}^j = \sum\limits_{m=1}^{k+1}(-1)^m\tilde{T}_{m,k+1}^j$.

Тогда $\theta^j - \sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}T^j_{i,k+1} = -\sum\limits_{i=1}^{k+1}(-1)^i\tilde{T}^j_{i,k+1}$. Следовательно,

$$F_2\Big(-\frac{2}{2!}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\tilde{T}^2_{i,k+1},\dots,-\frac{2}{n!}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\tilde{T}^n_{i,k+1}\Big) = 2\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\tilde{T}_{i,k+1} .$$

Аналогично, на поверхности S^-_{k+1} получаем, что

$$F_1\Big(\frac{2}{2!}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}T^2_{i,k+1},\dots,\frac{2}{n!}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}T^n_{i,k+1}\Big) = 2\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^iT_{i,k+1} .$$

Таким образом, на поверхности S^+_{n-1} получаем

$$F_2\Big(-\frac{2}{2!}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\tilde{T}^2_{i,n-1},\dots,-\frac{2}{n!}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\tilde{T}^n_{i,n-1}\Big) = 2\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\tilde{T}_{i,n-1} .$$

а на поверхности S^-_{n-1} получаем

$$F_1\Big(\frac{2}{2!}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}T^2_{i,n-1},\dots,\frac{2}{n!}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}T^n_{i,n-1}\Big) = 2\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^iT_{i,n-1} .$$

Введём переменные $b^u_k = \sum\limits_{i=1}^{n-1}(-1)^iT^k_i$, $k = 1,\dots,n$, где $\forall i = 1, n$

$$T_i = \begin{cases} \tilde{T}_{i,n-1} \text{ , при } u = -1 \text{ ,} \\ T_{i,n-1} \text{ , при } u = +1 \text{ .} \end{cases}$$

Зависимость между этими переменными, которая устанавливается с помощью техники, используемой в проблеме моментов, задаёт связь между аргументами функций $F_1(z_1,\dots,z_{n-1})$ и $F_2(z_1,\dots,z_{n-1})$ и их значениями . Искомую зависимость получим, если рассмотрим при больших z логарифм функции $R(z) = \prod\limits_{j=1}^{p}\frac{1-\frac{t_{2j}}{z}}{1-\frac{t_{2j-1}}{z}}$, где p : $n = 2p+1$. Более подробно эта техника описана в [1], а мы дадим лишь схему получения этой зависимости. С одной стороны, $lnR(z) = ln(1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{z^k}) = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{z^k})^m$. С другой стороны, $lnR(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kz^k}b^u_k$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим, что γ_k выражаются через b^u_k следующим образом,

$$b^u_1 = \gamma_1 \text{ ; } b^u_2 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & 2\gamma_2 \\ -1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \text{ ; } b^u_3 = \begin{vmatrix} \gamma_1 & 2\gamma_2 & 3\gamma_3 \\ -1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & -1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \text{ ; } \dots\dots$$

При этом, т.к. определены лишь b_k^u , $k = \overline{1,n}$, то

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p+1} & \gamma_{p+2} & \cdots & \gamma_{2p+1} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

При $n = 2p$ такая зависимость имеет вид

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{p+1} \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \cdots & \gamma_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{p+1} & \gamma_{p+2} & \cdots & \gamma_{2p} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Заметим, что введённые переменные $b_2^u, ..., b_n^u$ функционально независимы. Подставляя в полученную зависимость $b_k^u = \frac{k!}{2} p_k(x,\theta)$, $p_k(x,\theta) = \frac{u}{k!}\theta^k + \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{(k-i)!}\theta^{k-i} x_i$, получаем алгебраическое уравнение для времени быстродействия $\theta(x_1, ..., x_n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов. // Матем. сборник. – 1987. – Т. 134(176), N2(10). – С. 186-206.

2. Понтрягин Л.С. и др. Математические методы оптимального управления. – Москва: Наука, 1984.

3. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – Москва: Наука, 1973.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 532.542 : 612.133 № 542, 2002, с. 13–18

Применение метода интегральных соотношений для изучения движения вязкой жидкости по деформирующимся трубам.

И. П. Бойчук, И. Е. Тарапов

Харьковский национальный университет, Украина

Рассмотрено применения метода интегральных соотношений для исследования нестационарного движения вязкой жидкости по трубам переменного сечения, для которых характерный размер поперечного сечения значительно меньше длины трубы. Показано, что этот прием в ряде случаев можно эффективно использовать для изучения движения крови по тонким сосудам. *2000 Mathematics Subject Classification* 92C10.

Как известно, метод интегральных соотношений широко используется для решения задач пограничного слоя. В гидродинамической теории смазки этот метод [1] позволяет эффективно учесть влияние инерционных членов, что особенно важно в задачах газодинамической смазки.

Рассмотрим нестационарное движение вязкой несжимаемой жидкости по длинной трубе (тонкому сосуду) переменного сечения, которое меняется как вдоль трубы, так и со временем. При этом предполагается, что характерный поперечный размер трубы остается всегда значительно меньшим характерного продольного масштаба, а поперечная скорость в такой же степени меньше продольной. Эти предположения характерны как для теории пограничного слоя, так и для теории смазки.

Пусть r_0, u_0, L, v_o - характерные масштабы длины и скорости поперек и вдоль потока соответственно,причем $r_0/L = u_0/v_0$; t_0-масштаб времени; $p_0 = \varrho v_0^2$ - масштаб давления; $r = R(\phi, z, t)$ - безразмерное уравнение контура поперечного сечения сосуда в цилиндрических координатах r, ϕ, z (z - ось вдоль сосуда).

Тогда безразмерная система уравнений неразрывности и движения несжимаемой жидкости по цилиндрической трубе может быть записана в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + r\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} = \mathcal{O}\Big(\frac{r_0^2}{L^2}\Big); \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \mathcal{O}\Big(\frac{r_0^2}{L^2}\Big); \qquad (1)$$

$$\frac{1}{St}\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+$$
$$+\frac{1}{Re}\Big(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2}+(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2})\frac{r_0^2}{L^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\Big);$$

где

$$St=\frac{v_0 t_0}{L}, Re=\frac{v_0 r_0^2}{\nu L}.$$

В соответствии с вышесказанным принимается $r_0^2/L^2 \ll 1$ при $St\sim 1$, $Re\sim 1$. В этом приближении из (1), отбрасывая члены порядка r_0^2/L^2, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+r\frac{\partial v_z}{\partial z}=0;$$

$$p=p(z,t);$$

$$\frac{1}{St}\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\phi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{Re}\Big(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2}\Big).$$

Кинематические условия на границе (стенке деформируемой трубы):

$$v_z\mid_{r=R(t,\phi,z)}=U_z,\quad v_\phi\mid_{r=R(t,\phi,z)}=U_\phi,\quad v_r\mid_{r=R(t,\phi,z)}=U_r=\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Во всех внутренних точках потока скорости конечны.

Из уравнения изменения количества движения в дивергентной форме

$$\frac{1}{St}r\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(rv_rv_z)+\frac{\partial}{\partial \phi}(v_zv_\phi)+r\frac{\partial}{\partial z}(v_z^2)=$$
$$=-r\frac{\partial p(z,t)}{\partial z}+\frac{1}{Re}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2}\Big) \tag{2}$$

и уравнения непрерывности путем интегрирования по r от 0 до R и ряда очевидных преобразований получено следующее интегральное соотношение

$$\frac{1}{St}\Big\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R rv_zdr-RU_z\frac{\partial R}{\partial t}\Big\}+\frac{\partial}{\partial \phi}\int_0^R v_zv_\phi dr-$$
$$-U_z\frac{\partial}{\partial \phi}\int_0^R v_\phi dr+\frac{\partial}{\partial z}\int_0^R rv_z^2dr-U_z\frac{\partial}{\partial z}\int_0^R rv_zdr=$$
$$=-\frac{R^2}{2}\frac{\partial p(z,t)}{\partial z}+\frac{1}{Re}\Big(\Big(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\Big)_{r=R(\phi,z,t)}+\int_0^R\frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2}\frac{dr}{r}\Big). \tag{3}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая осесимметричного течения без "закрутки", т.е. когда $v_\phi=0$, при исключительно радиальной деформации непроницаемых стенок: $U_z=0$, $U_r=\partial R(t,\phi,z)/\partial t$.

В этом случае расход жидкости $Q(t,z)$ через поперечное сечение равен

$$Q(t,z)=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{R(t,\phi,z)}rv_z(r,\phi,z,t)dr. \tag{4}$$

Тогда интегрируя (3) по ϕ от 0 до 2π и учитывая, что площадь поперечного сечения сосуда $S(t,z)$ равна $S(t,z) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2(t,\phi,z)d\phi$, получаем

$$\frac{\partial p(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{St * S(t,z)}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{Re * S(t,z)}\left(\int_0^{2\pi} R(t,z,\phi)\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{r=R(t,\phi,z)} d\phi - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \phi}\right)_{r=R(t,\phi,z)} \frac{\partial}{\partial \phi} lnR d\phi\right) - \frac{1}{S(t,z)}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R(t,\phi,z)} r v_z^2 dr.$$

Отсюда, интегрируя по z, имеем:

$$p(z,t) - p(0,t) + \frac{1}{St}\int_0^z \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{dz}{S(t,z)} = \frac{1}{Re}\int_0^z \frac{dz}{S(t,z)}\left(\int_0^{2\pi} R(t,z,\phi)\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{r=R} d\phi - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \phi}\right)_{r=R} \frac{\partial}{\partial \phi} lnR d\phi\right) - \int_0^z \frac{dz}{S(t,z)}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{R(t,\phi,z)} r v_z^2 dr. \quad (5)$$

Интегрируя первое уравнение (1) по сечению сосуда, получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) суть основные интегральные соотношения в теории движения вязкой жидкости по тонким трубам, связывающие функцию давления $p(z,t)$ с функцией расхода $Q(z,t)$ через поперечное сечение сосуда. При этом функция $R = R(t,z,\phi)$ считается заданной условием задачи, а относительно $v_z = v_z(r,\phi,z,t)$ предполагается известной ее зависимость от аргументов r и ϕ, исходя из основных характеристик течения.

Вообще говоря, использование (5) и (6) для приближенного решения задачи течения вязкой жидкости по деформируемым трубам требует либо некоторых "замыкающих" гипотез относительно вида $v_z = v_z(r,\phi,z,t)$ (см. [2],[3]), либо выбора последовательности функций, приближающих v_z к точному решению. Сходимость этой последовательности, где каждый член удовлетворяет граничному условию, к какому-то решению, и проверка, удовлетворяет ли эта последовательность исходным дифференциальным уравнениям, может быть проведена, по-видимому, при помощи численного эксперимента.

В случае кругового поперечного сечения, когда $R = R(t,z)$ и $S = \pi R^2$,уравнение (5) принимает вид

$$p(z,t) - p(0,t) + \frac{1}{\pi * St}\int_0^z \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{dz}{R^2(z,t)} =$$

$$= \frac{2}{Re}\int_0^z \frac{dz}{R(t,z)}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{r=R(t,z)} - 2\int_0^z \frac{dz}{R^2(t,z)}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{R(t,z)} r v_z^2 dr. \quad (7)$$

Для стационарного движения ($R = R(z)$) это соотношение имеет вид

$$p(z) - p(0) = \frac{2}{Re}\int_0^z \frac{dz}{R(z)}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{r=R(z)} - 2\int_0^z \frac{dz}{R^2(z)}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{R(z)} r v_z^2 dr. \quad (8)$$

Об эффективности применения полученных интегральных соотношений можно в какой-то мере судить из следующих примеров.

Пример 1. Рассматривается стационарное движение по круглому сосуду переменного сечения. В этом случае из (6) следует

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \text{т.е.} \quad Q = const.$$

Предполагая, что зависимость v_z от r такая же, как и при Пуазейлевском течении, т.е. $v_z = C(z)\left(R^2(z) - r^2\right)$, из (4) функция C(z) выражается через $R(z)$ и постоянную Q, так что

$$v_z = \frac{2Q}{\pi R^4(z)}\left(R^2(z) - r^2\right).$$

Используя это выражение, из уравнение (8) имеем

$$p(z) - p(0) = -\frac{2Q^2}{3\pi^2}\left(\frac{1}{R^4(z)} - \frac{1}{R^4(0)}\right) - \frac{8Q}{\pi * Re}\int_0^z \frac{dz}{R^4(z)}. \tag{9}$$

Эта формула дает распределение давления по сосуду, для которого известно $R(z)$ и расход Q .

В том случае, когда известен лишь перепад давления $\delta p_L = p(L) - p(0)$ на некоторой длине сосуда L, из (9) получаем значение Q через δp_L, решая квадратное уравнение

$$a_1 Q^2 + a_2 Q + \delta p_L = 0, \tag{10}$$

где

$$a_1 = \frac{2}{3\pi^2}\left(\frac{1}{R^4(L)} - \frac{1}{R^4(0)}\right); \quad a_2 = \frac{8}{\pi Re}\int_0^L \frac{dz}{R^4(z)}.$$

Это уравнение, как нетрудно видеть, всегда имеет действительный корень, знак которого можно установить по знаку δp_L .

Воспользуемся имеющимися экспериментальными данными о сосудистой системе собаки. Для аорты собаки из [4] и [5] имеем: $Re = 1670$, перепад давления равен $-0,05 * 10^5$ (дин/см^2) при длине $L = 40$(см). В [4] дана экспериментальная формула $S(z) = S_0 e^{-Bz/\sqrt{S_0/\pi}}$, где S_0 - площадь восходящей аорты ($S_0 = 2$ см^2), B - коэффициент конусности (B=0,05). На основании этих данных получено $a_1 = 12,997$, $a_2 = 2,341$. Причем уравнение (10) дает значение расхода $Q = 34,25$ см^3/с. По экспериментальным данным [6] - $Q = 35 \pm 5$ см^3/с, что хорошо согласуется с расчетным значением.

После определения Q формула (9) позволяет найти распределение давления по аорте.

Пример 2. Для нестационарного движения по сосуду кругового сечения выбирая в качестве $v_z(t, z)$ функцию

$$v_z = \frac{2Q(t, z)}{\pi R^4(z, t)}\left(R^2(z, t) - r^2\right)$$

и подставляя ее в (7), имеем

$$p(z,t) - p(0,t) = -\frac{2Q^2(t,z)}{3\pi^2}\left(\frac{1}{R^4(z,t)} - \frac{1}{R^4(0,t)}\right) -$$

$$-\frac{8}{\pi Re}\int_0^z \frac{Q(t,z)dz}{R^4(z,t)} - \frac{1}{\pi St}\int_0^z \frac{\partial Q}{\partial t}\frac{dz}{R^2(z,t)}. \tag{11}$$

Из (6) получаем

$$Q(t,z) = Q(t,0) - \int_0^z \frac{\partial S}{\partial t}dz = Q(t,0) - \int_0^z R\frac{\partial R}{\partial t}dz. \tag{12}$$

Будем считать, как и ранее, известной зависимость $R = R(t,z)$, определяющую деформацию круглого сосуда. Тогда, подставляя (12) в (11) (взятое для $z = L$), получаем связь между перепадом давления $\delta p_L(t) = p(L,t) - p(0,t)$ и функцией $Q(t,0)$ - расходом на одном из концов выбранного участка сосуда $(0, L)$.

Если известно (скажем, из эксперимента) $Q(t,0)$, то уравнение (11) позволяет найти зависимость $\delta p_L = \delta p_L(t) = F(Q(t,0))$ и тогда формула (11) дает распределение давления в зависимости от значения расхода в каком-то сечении сосуда:

$$p(z,t) = p(L,t) - F(Q(t,0)).$$

Если же известна функция $\delta p_L(t)$, то по ней функция $Q(t,0) \equiv A(t)$ находится из дифференциального уравнения

$$\frac{dA}{dt} = f(t)A^2 + g(t)A + h(t), \tag{13}$$

где

$$f(t) = \frac{2St}{3\pi}\left(\frac{1}{R^4(L,t)} - \frac{1}{R^4(0,t)}\right)\left(\int_0^L \frac{dz}{R^2(z,t)}\right)^{-1};$$

$$g(t) = \left(\frac{4St}{3\pi}\left(\frac{1}{R^4(L,t)} - \frac{1}{R^4(0,t)}\right) - \frac{8St}{Re}\left(\int_0^L \frac{dz}{R^4(z,t)}\right)\left(\int_0^L \frac{dz}{R^2(z,t)}\right)^{-1};\right.$$

$$h(t) = \left(-\delta p_L(t)\pi St + \frac{8St}{Re}\int_0^L \frac{dz}{R^4(z,t)}\right)\left(\int_0^L \frac{dz}{R^2(z,t)}\right)^{-1} -$$

$$-\frac{2St}{3\pi}\left(\frac{1}{R^4(L,t)} - \frac{1}{R^4(0,t)}\right)\left(\int_0^L \frac{dz}{R^2(z,t)}\right)^{-1} B^2(t,L) + \frac{\partial B(t,L)}{\partial t};$$

$$B(z,t) = \int_0^z \frac{\partial S}{\partial t}dz.$$

Выражая отсюда $A(t)$ и затем $Q(t,z)$ и подставляя в (11), получаем зависимость $p(z,t)$ в конечном счете от $Q(t,0)$, т.е. распределение давления по деформируемому сосуду при заданном расходе в каком-то сечении.

Общее уравнение Риккати (13) имеет решение конечного вида в весьма частных случаях. При $St \ll 1$ имеем простое решение

$$A(t) = \int_0^L \frac{\partial S}{\partial t} dz + const.$$

При $St \ll 1$ и $St/Re \sim 1$ уравнение (13) становится линейным. В остальных случаях оно может быть при необходимости проинтегрировано численным методом.

В заключении следует заметить, что полученное интегральное соотношение (5) играет в рассматриваемом движении вязкой жидкости такую же роль, как основное соотношение Кармана в теории пограничного слоя. Из дифференциального уравнения (2) можно получить столько интегральных соотношений, сколько необходимо для того, чтобы в выбираемой зависимости $v_z(r, \phi, z, t)$ определить все параметры, которые нельзя получить из граничных и начальных условий. Эти, так называемые обобщенные интегральные соотношения, могут быть получены путем осреднения по сечении сосуда уравнения (2) с весом вида $F(v_z)$, который при выводе (5) был принят равным единице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарапов И.Е. Вопросы газодинамической теории смазки и метод интегральных соотношений: Дис. ...канд. физ. - мат. наук: – Х., – 1953. – 139 с.

2. Регирер С.А. Квазиодномерная теория перистальтических течений. // Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа. – 1984. – 5. – С. 89-97.

3. Регирер С.А., Руткевич И.М. Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Инерционные эффекты. // Некоторые вопросы механики сплошной среды, – М. – 1978. – С. 244-263.

4. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. – М.: Мир, – 1981. – 624 с.

5. Левтов В.А., Регирер С.А., Шадрина Н.Х. Реология крови. – М.: Медицина, – 1982. – 272 с.

6. Физиология кровообращения: Физиология сосудистой системы. Под ред. Ткаченко Б.И. – Л.: Наука, – 1984. – 652 с.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.968+517.956 № 542, 2002, с. 19–27

Граничные уравнения в задачах динамики кусочно-однородных пластин

Ю. С. Гассан
Харьковский национальный университет, Украина

В работе рассмотрена контактная задача динамики тонких упругих пластин. С помощью теории потенциалов задача сводится к системам граничных уравнений, однозначная разрешимость которых доказывается в однопараметрической шкале пространств соболевского типа.
2000 Mathematics Subject Classification 42A70, 35M05.

1. Введение. Проблемы динамики тонких упругих пластин присутствуют во многих задачах физики и механики. Поэтому весьма актуальной является задача расчета напряжений, возникающих в процессе их колебаний. Разрешимость соответствующих начально-краевых задач доказана, например, в [3], целью работы является построение теории потенциалов, позволяющих свести исходную задачу к системам нестационарных интегральных уравнений на граничном контуре. Такой подход имеет ряд преимуществ по сравнению со стандартными методами приближенного решения (различными вариантами сеточных методов, методов конечных элементов). эти преимущества состоят во-первых в уменьшении на единицу геометрической размерности задачи и во-вторых в единообразном рассмотрении внутренних и внешних начально-краевых задач. В работе предложен вариант метода теории потенциалов, позволяющий свести поставленную задачу к решению систем нестационарных граничных уравнений. Метод исследования основан на схеме, развитой в [1–2] в задачах динамической теории упругости и в задачах существенно нестационарной дифракции акустических и электромагнитных волн.

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^2$ имеется замкнутая кривая Γ класса C^2, разделяющая плоскость на области Ω^+ и Ω^- – внутреннюю и внешнюю соответственно, и пусть две тонкие упругие пластины с разными упругими характеристиками и толщинами h_1, h_2 занимают области $\Omega^+ \times [-\frac{h_1}{2}, \frac{h_1}{2}]$, $\Omega^- \times [-\frac{h_2}{2}, \frac{h_2}{2}]$ соответственно. Вектор смещения точки (x, x_3) пластины, где $x = (x_1, x_2)$, имеет вид $(-x_3\partial_1 u(x,t), -x_3\partial_2 u(x,t), u(x,t))$, где $u(x,t) = \{u_1(x,t), u_2(x,t)\}$ — смещение точки x срединной плоскости пластины в направлении, перпендикулярном этой плоскости в недеформированном состоянии, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, 2$.

Функция $u(x,t)$ является решением смешанной задачи [3]

$$\partial_t^2 u_1(x,t) + D_1\Delta^2 u_1(x,t) = q_1(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega^+\times\mathbf{R}_+,$$
$$\partial_t^2 u_2(x,t) + D_2\Delta^2 u_2(x,t) = q_2(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega^-\times\mathbf{R}_+,$$
$$u(x,0)=\partial_t u(x,0)=0, \qquad x\in\mathbf{R}^2,$$
$$\begin{cases} u_1(x,t)=u_2(x,t) & \partial_n u_1(x,t)=\partial_n u_2(x,t), \\ Q_1u_1(x,t)=Q_2u_2(x,t) & M_1u_1(x,t)=M_2u_2(x,t), \end{cases} \qquad (x,t)\in\Gamma\times\mathbf{R}_+,$$

где

$$Q_iu_i = -D_i(\partial_n\Delta u_i + (1-\nu)\partial_\tau[n_1n_2(\partial_2^2u_i-\partial_1^2u_i)+(n_1^2-n_2^2)\partial_1\partial_2u_i]),$$

$$M_iu_i = -D_i(\Delta u_i + (1-\nu)(2n_1n_2\partial_1\partial_2u_i - n_2^2\partial_1^2u_i - n_1^2\partial_2^2u_i)),$$

операции обобщенной перерезывающей силы и изгибающего момента, $D_i = \frac{\hat{D}_i}{\rho_ih_i}$, ρ_i — поверхностная плотность пластин, $\hat{D}_i$ — их цилиндрическая жесткость, $q_i = \frac{\hat{q}_i}{\rho_ih_i}$, $\hat{q}_i(x,t)$ — плотность внешних сил, действующих на пластины, $i=1,2$. Здесь и далее условимся индексами 1 и 2 помечать все величины относящиеся к областям Ω^+ и Ω^- соответственно. $\mathbf{R}_+=(0,\infty)$, $\partial_t=\partial/\partial_t$, ∂_n — производная по внешней нормали $n(x)$ к контуру Γ, $\partial\tau$ — производная в направлении касательного к Γ орта τ, полученного из n поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Отметим, что задача поставлена формально. Корректная постановка этой задачи будет приведена после введения необходимых функциональных пространств.

2.Функциональные пространства. Для любых $p\in\mathbf{C}, m\in\mathbf{R}$ пространства $H_{m,p}(\mathbf{R}^2)$ [4] совпадают как множества с пространствами Соболева $H_m(\mathbf{R}^2)$ [3]. Норма в этих пространствах определена формулой

$$\|u\|^2_{m,p} = \int_{\mathbf{R}^2}(1+|\xi|^2+|p|)^m|\tilde{u}(\xi)|^2d\xi,$$

где $\tilde{u}(\xi)$ — обобщенное преобразование Фурье $u(x)$. Пространства $H_{m,p}(\Gamma)$ вводятся по стандартной схеме, использующей разложение единицы и переход к локальным координатам [3].

Выберем и зафиксируем $\kappa>0$. Обозначим $C_\kappa=\{p\in C:\Re ep>\kappa\}$. Пусть $H_{L;m,k,\kappa}(\mathbf{R}^2)$ — пространства функций $U(p)=u(x,p)$, $x\in\mathbf{R}^2$, $p\in\mathbf{C}_\kappa$, которые голоморфно отображают $\mathbf{C}_\kappa$ в стандартные пространства Соболева $H_m(\mathbf{R}^2)$ и обладают конечными нормами, определенными формулами $\|u\|^2_{m,k,\kappa;\Omega}=\sup_{\sigma>\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|p|)^{2k}\|u\|^2_{m,p;\Omega}d\tau$, $p=\sigma+i\tau$. Пусть L — оператор преобразования Лапласа. Пространства $H_{r;m,k,\kappa}(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}_+)$ состоят из обратных преобразований Лапласа $u(x,t)=L^{-1}u(x,p)$ элементов $u(x,p)\in H_{L;m,k,\kappa}(\mathbf{R}^2)$. Нормы в этих пространствах вводятся формулами $\|u\|_{m,k,\kappa;G}=\|Lu\|_{m,k,\kappa;\Omega}$. Аналогично вводятся пространства $H_{r;m,k,\kappa}(\Sigma_+)$, $\Sigma_+=\Gamma\times\mathbf{R}_+$. Положим $G^\pm=\Omega^\pm\times\mathbf{R}_+$. Обозначим через $\vec{\gamma}^\pm$ операторы следов, непрерывно при $m>3/2$, $k\in R$ отображающие пространства $H_{r;m,k,\kappa}(G^\pm)$ на $H_{r;m-3/2,k,\kappa}(\Sigma_+)\times H_{r;m-1/2,k,\kappa}(\Sigma_+)$, сопоставляя функции

$u(x,t)$ пару $\{u, \partial_n u\}$, состоящую из следа на Σ_+ функции u и ее нормальной производной.

Решением задач назовем функцию $u = \{u_1, u_2\} \in H_{r;2,0,\kappa}(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+)$, удовлетворяющую вариационному уравнению

$$\int_0^\infty (a_+(u_1,v_1) + a_-(u_2,v_2))\,dt - \int_{G^+} \partial_t u_1 \overline{\partial_t v_1} dx dt - \int_{G^-} \partial_t u_2 \overline{\partial_t v_2} dx dt =$$
$$= \int_0^\infty \left(\int_{\Omega^+} dx q_1 \overline{v_1} + \int_{\Omega^-} dx q_2 \overline{v_2} \right) dt, \qquad (1)$$

для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $v = \{v_1, v_2\}$ с носителем $\operatorname{supp} v \in \mathbf{R}^2 \times \overline{\mathbf{R}^+}$. В (1)

$$a_\pm(u_i,v_i) = D \int_{\Omega^\pm} \Big(\partial_1^2 u_i \overline{\partial_1^2 v_i} + \partial_2^2 u_i \overline{\partial_2^2 v_i} + \nu(\partial_1^2 u_i \overline{\partial_2^2 v_i} + \partial_2^2 u_i \overline{\partial_1^2 v_i}) +$$
$$+ 2(1-\nu)\partial_1\partial_2 u_i \overline{\partial_1\partial_2 v_i} \Big) dx$$

где ν — коэффициент Пуассона материала, из которого изготовлена пластина.

Теорема 1. *Пусть* $q(x,t) = \{q_1(x,t), q_2(x,t)\} \in \mathbf{H}_{r;-2,k,\kappa}(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+)$, $k \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$, *задача* I *имеет единственное решение* $u(x,t) = \{u_1, u_2\} \in \mathbf{H}_{r,2,k-1;\kappa}(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+)$ *при всех* $k \geq 1$, $\kappa > 0$.
Оценка $\|u\|_{2,k-1,\kappa;\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}_+} \leq c\|q\|_{-2,k,\kappa;\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}_+}$ *справедлива с некоторой положительной постоянной* c.

Доказательство теоремы проводится с помощью перехода к преобразованиям Лапласа, подобно тому как это было сделано в [5] для случая колебаний пластин модели поперечного сдвига. После перехода к преобразованиям Лапласа мы получаем эллиптическую задачу

$$\begin{aligned}
p^2 u_1(x,p) + D_1 \triangle^2 u_1(x,p) &= q_1(x,p), \qquad x \in \Omega^+ \\
p^2 u_2(x,p) + D_2 \triangle^2 u_2(x,p) &= q_2(x,p), \qquad x \in \Omega^- \\
u_1(x,p) = u_2(x,p), \quad M_1 u_1(x,p) &= M_2 u_2(x,p), \\
\partial_n u_1(x,p) = \partial_n u_2(x,p), \quad Q_1 u_1(x,p) &= Q_2 u_2(x,p),
\end{aligned} \quad x \in \Gamma, \qquad (2)$$

где для операций обобщенной перерезывающей силы и изгибающего момента, непрерывно (равномерно по p) отображающего пространство $H_{2,p}(\Omega^\pm)$ на $H_{-3/2,p}(\Gamma) \times H_{-1/2,p}(\Gamma)$, сохранено обозначение M_i и Q_i, $i = 1, 2$. Для решения задачи (2) несложно получить оценку $\|u\|_{2,p} \leq c|p|\|q\|_{-2,p}$.

Здесь и далее мы обозначаем одной и той же буквой c все постоянные, возникающие в оценках, не зависящие от функций, содержащихся в них, а также от параметра преобразования Лапласа $p \in C_\kappa$. Отметим, что постоянные c зависят от κ.

Можно показать, что если $Q(p) = \{q_1(x,p), q_2(x,p)\}$ голоморфно отображает C_κ в $H_{-2}(\mathbf{R}^2)$, то решение задачи (2) $U(p) = u(x,p)$ голоморфно отображает C_κ в пространство $H_2(\Omega^\pm)$. Вернувшись в пространство оригиналов, получаем утверждение теоремы.

3. Динамические потенциалы простого и двойного слоев. Пусть $\Phi(x,t) = \theta(t)\phi(x,t)$ — фундаментальное решение уравнения колебаний пластины, удовлетворяющее уравнениям

$$\begin{aligned}&\partial_t^2\Phi(x,t) + D\Delta^2\Phi(x,t) = \delta(x,t),\\&\Phi(x,t) = 0, \qquad t < 0,\end{aligned}$$

в которых $\delta(x,t)$ — функция Дирака, $\theta(t)$ — характеристическая функция полуоси $(0,\infty)$, а функция $\phi(x,t)$ является решением задачи:

$$\begin{aligned}&\partial_t^2\phi(x,t) + D\Delta^2\phi(x,t) = 0, \qquad t > 0,\\&\phi(x,0) = 0, \partial_t\phi(x,0) = \delta(x).\end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что $\phi(x,t) = \frac{1}{4\pi\sqrt{D}} si\left(\frac{|x|^2}{4\sqrt{D}t}\right)$, где $si(z) = -\int_z^\infty \frac{\sin\mu}{\mu}d\mu$ — интегральный синус [6].

Динамическим потенциалом простого слоя с определенной на $\Sigma = \Gamma \times \mathbf{R}$ двухкомпонентной плотностью $\vec{\alpha}(x,t)$ назовем функцию

$$(V\vec{\alpha})(x,t) = \int_\Sigma \{\Phi(x-y,t-\tau)\alpha_1(y,\tau) + \partial_{n,y}\Phi(x-y,t-\tau)\alpha_2(y,\tau)\}ds_y d\tau,$$

где $\partial_{n,y}$ – операция нормальной производной, действующая по переменной y. Динамический потенциал двойного слоя с определенной на Σ двухкомпонентной плотностью $\vec{\beta}(x,t)$ введем формулой

$$(W\vec{\beta})(x,t) = \int_\Sigma \{Q_y\Phi(x-y,t-\tau)\beta_1(y,\tau) - M_y\Phi(x-y,t-\tau)\beta_2(y,\tau)\}ds_y d\tau,$$

в которой Q_y и M_y — действующие по переменной y операции обобщенной перерезывающей силы и изгибающего момента.

Очевидно, по крайней мере, для гладких на Σ финитных плотностей оба потенциала удовлетворяют в $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ однородному уравнению колебаний пластины. Если же плотности равны нулю при $t < 0$, то оба потенциала удовлетворяют нулевым начальным условиям. Потенциал простого слоя и его первые производные непрерывны при переходе точки через граничную поверхность. Воспользовавшись известными формулами скачков для аналогов поверхностных потенциалов в двумерном случае [7], приходим к следующим утверждениям

$$\begin{aligned}&(W\vec{\beta})^\pm(x,t) = \mp\tfrac{1}{2}\beta_1(x,t) + (W\vec{\beta})^0(x,t),\\&(\partial_n W\vec{\beta})^\pm(x,t) = \mp\tfrac{1}{2}\beta_2(x,t) + (\partial_n W\vec{\beta})^0(x,t),\\&(QV\vec{\alpha})^\pm(x,t) = \pm\tfrac{1}{2}\alpha_1(x,t) + (QV\vec{\alpha})^0(x,t),\\&(-MV\vec{\alpha})^\pm(x,t) = \pm\tfrac{1}{2}\alpha_2(x,t) + (-MV\vec{\alpha})^0(x,t),\end{aligned} \qquad (x,t) \in \Sigma_+,$$

где верхние индексы "$\pm$" обозначают предельные значения функций при переходе точки (x,t) на Σ_+ из $G^\pm$ соответственно, верхний индекс "0" обозначает прямое значение соответствующего интеграла. Далее, без ограничения общности, будем рассматривать задачу для однородного уравнения колебаний пластины, т.к. имеющуюся неоднородность с помощью объемного потенциала можно перенести в краевые условия.

Представление решений полученной задачи потенциалами простого и двойного слоя, приводит к следующим системам граничных уравнений:

$$\mathbf{1} \qquad u(x,t) = \{(V_1\vec{\alpha}_1)(x,t), (V_2\vec{\alpha}_2)(x,t)\}$$

$$\begin{cases} (V_1\vec{\alpha}_1)(x,t) = (V_2\vec{\alpha}_2)(x,t) + f_1, \\ \partial_n(V_1\vec{\alpha}_1)(x,t) = \partial_n(V_2\vec{\alpha}_2)(x,t) + f_2, \\ Q_1(V_1^+\vec{\alpha}_1)(x,t) = Q_2(V_2^-\vec{\alpha}_2)(x,t) + g_1, \\ M_1(V_1^+\vec{\alpha}_1)(x,t) = M_2(V_2^-\vec{\alpha}_2)(x,t) - g_2, \end{cases} \quad (x,t) \in \Sigma_+.$$

$$\mathbf{2} \qquad u(x,t) = \{(W_1\vec{\beta}_1)(x,t), (V_2\vec{\alpha}_2)(x,t)\}$$

$$\begin{cases} (W_1^+\vec{\beta}_1)(x,t) = (V_2\vec{\alpha}_2)(x,t) + f_1, \\ \partial_n(W_1^+\vec{\beta}_1)(x,t) = \partial_n(V_2\vec{\alpha}_2)(x,t) + f_2, \\ Q_1(W_1\vec{\beta}_1)(x,t) = Q_2(V_2^-\vec{\alpha}_2)(x,t) + g_1, \\ M_1(W_1\vec{\beta}_1)(x,t) = M_2(V_2^-\vec{\alpha}_2)(x,t) - g_2, \end{cases} \quad (x,t) \in \Sigma_+.$$

$$\mathbf{3} \qquad u(x,t) = \{(V_1\vec{\alpha}_1)(x,t), (W_2\vec{\beta}_2)(x,t)\}$$

$$\begin{cases} (V_1\vec{\alpha}_1)(x,t) = (W_2^-\vec{\beta}_2)(x,t) + f_1, \\ \partial_n(V_1\vec{\alpha}_1)(x,t) = \partial_n(W_2^-\vec{\beta}_2)(x,t) + f_2, \\ Q_1(V_1^+\vec{\alpha}_1)(x,t) = Q_2(W_2\vec{\beta}_2)(x,t) + g_1, \\ M_1(V_1^+\vec{\alpha}_1)(x,t) = M_2(W_2\vec{\beta}_2)(x,t) - g_2, \end{cases} \quad (x,t) \in \Sigma_+.$$

$$\mathbf{4} \qquad u(x,t) = \{(W_1\vec{\beta}_1)(x,t), (W_2\vec{\beta}_2)(x,t)\}$$

$$\begin{cases} (W_1^+\vec{\beta}_1)(x,t) = (W_2^-\vec{\beta}_2)(x,t) + f_1, \\ \partial_n(W_1^+\vec{\beta}_1)(x,t) = \partial_n(W_2^-\vec{\beta}_2)(x,t) + f_2, \\ Q_1(W_1\vec{\beta}_1)(x,t) = Q_2(W_2\vec{\beta}_2)(x,t) + g_1, \\ M_1(W_1\vec{\beta}_1)(x,t) = M_2(W_2\vec{\beta}_2)(x,t) - g_2, \end{cases} \quad (x,t) \in \Sigma_+,$$

где $(f_1, f_2) \in H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$, $(g_1, g_2) \in H_{-3/2,p}(\Gamma) \times H_{-1/2,p}(\Gamma)$ функции, полученные из исходной функции $q(x,t) = \{q_1(x,t), q_2(x,t)\} \in \mathbf{H}_{r;-2,k,\kappa}(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+)$ при переходе к однородным уравнениям с помощью объемных потенциалов.

Отметим, что после перехода к преобразованиям Лапласа потенциалы простого и двойного слоев принимают вид

$$(V_p\vec{\alpha})(x,p) = \int_\Gamma (\Phi(x-y,p)\alpha_1(y,p) + \partial_{n,y}\Phi(x-y,p)\alpha_2(y,p))\,ds_y,$$

$$(W_p\vec{\beta})(x,p) = \int_\Gamma (Q_y\Phi(x-y,p)\beta_1(y,p) - M_y\Phi(x-y,p)\beta_2(y,p))\,ds_y,$$

где $\Phi(x,p) = -\frac{1}{2\pi p\sqrt{D}}\mathrm{kei}_0\left(\frac{\sqrt{p}}{D^{1/4}}|x|\right)$ — фундаментальное решение для оператора $p^2 I + \Delta^2$, $kei_0(t) = \Im m K_0(\sqrt{i}t)$, $K_0(t)$ — функция Макдональда.

4. Свойства граничных операторов в пространствах с параметром. Пусть $\vec{f} = (f_1, f_2) = \vec{\gamma}^{\pm}u \in H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$, где $u(x,p)$ — решение

$p^2 u + D\Delta^2 u = 0$ в $\Omega^\pm$, а $\vec{g} = (g_1, g_2) \in H_{-3/2,p}(\Gamma) \times H_{-1/2,p}(\Gamma)$. Введем аналоги операторов Пуанкаре – Стеклова $\vec{N}^\pm_{p,i}$ равенствами $\vec{g} = \vec{N}^\pm_{p,i}\vec{f}$, $i = 1, 2$, их действие на любой элемент $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$ определяется формулой

$$\langle \vec{N}^\pm_{p,i}\vec{f}, \vec{\varphi}\rangle_{0,\Gamma} = \pm\left\{p^2(u_i, v_i)_{0,\Omega^\pm} + a_\pm(u_i, v_i)\right\}, \tag{3}$$

где элемент $\vec{v}(x,p)$ пространства $H_{2,p}(\mathbf{R}^2)$, такой что $\vec{\gamma}^\pm\vec{v} = \vec{\varphi}$; $\langle\cdot,\cdot\rangle_{0,\Gamma} = (\cdot,\cdot)_{0,\Gamma} + (\cdot,\cdot)_{0,\Gamma}$, символы $(\cdot,\cdot)_{0,\Omega^\pm}$ и $(\cdot,\cdot)_{0,\Gamma}$ обозначают скалярные произведения в пространствах $L^2(\Omega^\pm)$ и $L^2(\Gamma)$ соответственно. Легко убедиться в том, что определение (3) не зависит от выбора продолжения v_i элемента φ. Обозначим норму пространства $H_{m,p}(\Gamma) \times H_{l,p}(\Gamma)$ через $\|\cdot\|_{m,l,p;\Gamma}$.

Теорема 2. *При всех $p \in C_\kappa$, $\kappa > 0$ операторы $\vec{N}^\pm_{p,i}$, $i = 1, 2$ осуществляют биективные отображения $\vec{N}^\pm_{p,i} : H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma) \to H_{-3/2,p}(\Gamma) \times H_{-1/2,p}(\Gamma)$. Справедливы оценки:*

$$\|\vec{N}^\pm_{p,i}\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma} \leq c|p|\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}, \|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \leq c|p|\|\vec{N}^\pm_{p,i}\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}.$$

Доказательство. Из (3) вытекает $\langle \vec{N}^\pm_p\vec{f}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma} = \pm\{p^2(u,u)_{0,\Omega^\pm} + a_\pm(u,u)\}$, отделив в полученных равенствах вещественную и мнимую части, придем к соотношению

$$|p|^2\|u\|^2_{0,\Omega^\pm} + a_\pm(u,u) = \pm\sigma^{-1}\Re e\{\bar{p}\langle \vec{N}^\pm_p\vec{f}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma}\}, \qquad p = \sigma + i\tau, \tag{4}$$

откуда следует оценка $\|u\|^2_{2,p;\Omega^\pm} \leq c|p||\langle \vec{N}^\pm_p\vec{f}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma}|$. С другой стороны из (3) следует, что $|\langle \vec{N}^\pm_p\vec{f}, \vec{\varphi}\rangle_{0,\Gamma}| \leq c\|u\|_{2,p;\Omega^\pm}\|v\|_{2,p;\Omega^\pm} \leq c\|u\|_{2,p;\Omega^\pm}\|\vec{\varphi}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}$. Отсюда $\vec{N}^\pm_p\vec{f} \in H_{-3/2,p}(\Gamma) \times H_{-1/2,p}(\Gamma)$, $\|\vec{N}^\pm_p\vec{f}\|^2_{-3/2,-1/2,p;\Gamma} \leq \|u\|^2_{2,p;\Omega^\pm} \leq c|p||\langle \vec{N}^\pm_p\vec{f}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma}|$. Следовательно, $\|\vec{N}^\pm_p\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma} \leq c|p|\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}$. С другой стороны, по теореме о следах

$$\|\vec{f}\|^2_{3/2,1/2,p;\Gamma} \leq c\|u_i\|^2_{2,p;\Omega^\pm} \leq c|p|\|\vec{N}^\pm_p\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}.$$

Отсюда $\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \leq c|p|\|\vec{N}^\pm_p\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}$.

Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться в плотности областей значений операторов $\vec{N}^\pm_p$ в пространстве $H_{-3/2,p}(\Gamma) \times H_{-1/2,p}(\Gamma)$. Предположив противное, найдем ненулевой элемент $\vec{f} \in H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$, такой что $\langle \vec{N}^\pm_p\vec{\varphi}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma} = 0$ для всех $\vec{\varphi} \in H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$. Взяв в этом равенстве $\vec{\varphi} = \vec{f}$, получим $\langle \vec{N}^\pm_{p,i}\vec{f}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma} = 0$, откуда следует, что $\vec{f} = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Перейдем к рассмотрению граничного оператора, порожденного потенциалом простого слоя, определенного на гладких плотностях $\vec{\alpha}$ равенством $\vec{V}_p\vec{\alpha} = \vec{\gamma}^\pm V_p\vec{\alpha}$.

Теорема 3. *Оператор $\vec{V}_p$ может быть продолжен по непрерывности до оператора, осуществляющего для всех $p \in C_\kappa$, $\kappa > 0$, биективные отображения $\vec{V}_p : H_{-3/2,p}(\Gamma) \times H_{-1/2,p}(\Gamma) \to H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$. Справедливы* *оценки:*

$$\|\vec{V}_p\vec{\alpha}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}, \qquad \|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{V}_p\vec{\alpha}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}.$$

Доказательство. Пусть $u(x,p) = (V_p\vec{\alpha})(x,p)$, $x \in R^2$. По теореме о следах, а также, учитывая формулы скачков $(\vec{N}_p^+ - \vec{N}_p^-)\vec{V}_p\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$, получаем $\|\vec{V}_p\vec{\alpha}\|^2_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c\left(\|u\|^2_{2,p;\Omega^+} + \|u\|^2_{2,p;\Omega^-}\right) \le c|p||\langle(\vec{N}_p^+ - \vec{N}_p^-)\vec{V}_p\vec{\alpha}, \vec{V}_p\alpha\rangle_{0,\Gamma}| \le$ $\le c|p||\langle(\vec{\alpha}, \vec{V}_p\alpha\rangle_{0,\Gamma}|$. Таким образом $\|\vec{V}_p^{\pm}\vec{\alpha}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}$. Неравенство $\|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{V}_p^{\pm}\vec{\alpha}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}$ следует из формулы $\vec{V}_p^{-1} = \vec{N}_p^+ - \vec{N}_p^-$ и из утверждений предыдущей теоремы. Плотность области значений оператора $\vec{V}_p$ в пространстве $H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$ доказывается с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 2.

Теперь рассмотрим граничный оператор, порожденный потенциалом двойного слоя, определенный на гладких плотностях $\vec{\beta}$ равенством $\vec{W}_p\vec{\beta} = \vec{\gamma}^{\pm}W_p\vec{\beta}$.

Теорема 4. *Операторы $\vec{W}_p^{\pm}$ могут быть продолжены по непрерывности до операторов, осуществляющих для всех $p \in \mathbf{C}_\kappa$, $\kappa > 0$ биективные отображения $\vec{W}_p^{\pm} : H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma) \to H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$. Справедливы оценки:*

$$\|\vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c|p|^2\|\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}, \qquad \|\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c|p|^2\|\vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}.$$

Доказательство теоремы следует из легко проверяемых формул $\vec{W}_p^{\pm}\vec{\beta} = \vec{V}_p\vec{N}_p^{\mp}\vec{\beta}$ и из утверждений теорем 2 и 3.

5. Разрешимость систем граничных уравнений. Используя введенные операторы перепишем граничные условия в терминах преобразований Лапласа:

$$\begin{cases} \vec{\gamma}^+u_1 = \vec{\gamma}^-u_2 + \vec{f}, & \vec{f} \in \mathbf{H}_{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \vec{N}_{p,1}^+(\gamma^+u_1) = \vec{N}_{p,2}^-(\vec{\gamma}^-u_2) + \vec{g}, & \vec{g} \in \mathbf{H}_{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \mathbf{H}_{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases}$$

Обозначим $v_i = \vec{\gamma}^{\pm}u_i$, $i = 1, 2$.

$$\begin{cases} (\vec{N}_{p,1}^+ - \vec{N}_{p,2}^-)v_1 = \vec{g} - \vec{N}_{p,2}^+\vec{f} \\ (\vec{N}_{p,1}^+ - \vec{N}_{p,2}^-)v_2 = \vec{g} - \vec{N}_{p,1}^+\vec{f} \end{cases} \tag{5}$$

Чтобы доказать существование оператора $(\vec{N}_{p,1}^+ - \vec{N}_{p,2}^-)^{-1}$, рассмотрим функцию $u(x,t) = \{u_1, u_2\} \in H(\mathbf{R}^2)$ такую, что $\vec{\gamma}^+u_1 = \vec{\gamma}^-u_2 = v_1$, тогда $\|(\vec{N}_{p,2}^- - \vec{N}_{p,1}^+)v_1\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\Gamma,p} \le \|\vec{N}_{p,2}^-v_1\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\Gamma,p} + \|\vec{N}_{p,1}^+v_1\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\Gamma,p} \le$ $\le c|p|\|v_1\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},\Gamma,p}$

Учитывая (4), $\|v_1\|^2_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} \le \|u_1\|^2_{2,p;\Omega^+} + \|u_2\|^2_{2,p,\Omega^-} \le c(p(u_1,u_1)+$ $+a_+(u_1,u_1) + p(u_2,u_2) + a_-(u_2,u_2)) \le \Re e(p(\vec{N}_{p,1}^+ - \vec{N}_{p,2}^-)v_1, v_1)) \le$ $\le c|p|\|(\vec{N}_{p,1}^+ - \vec{N}_{p,2}^-)v_1\|_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma}\|v_1\|_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma}.$

Имеем, подставляя (5), $||v_1||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} \leq c|p|||(\vec{N}^+_{p,1} - \vec{N}^-_{p,2})v_2||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\Gamma,p} \leq$
$\leq c|p|||\vec{g} - \vec{N}^-_{p,2})f||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\Gamma,p} \leq |p|||\vec{g}||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\Gamma,p} + |p|^2||\vec{f}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},\Gamma,p}$.
Аналогично $||v_2||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} \leq |p|||\vec{g}||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\Gamma,p} + |p|^2||\vec{f}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},\Gamma,p}$.

Учитывая теоремы 3 и 4, возвращаясь в пространство оригиналов, мы получим существование разрешающих операторов систем граничных уравнений вместе с оценками решений

1. $$\begin{aligned} ||\alpha_1||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma} &\leq c|p|(|p|^2||\vec{f}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} + |p|||\vec{g}||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma}) \\ ||\alpha_2||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma} &\leq c|p|(|p|^2||\vec{f}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} + |p|||\vec{g}||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma}) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} ||\beta_1||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} &\leq c|p|^2(|p|^2||\vec{f}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} + |p|||\vec{g}||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma}) \\ ||\alpha_2||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma} &\leq c|p|(|p|^2||\vec{f}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} + |p|||\vec{g}||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma}) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} ||\alpha_1||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma} &\leq c|p|(|p|^2||\vec{f}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} + |p|||\vec{g}||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\Gamma}) \\ ||\beta_2||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} &\leq c|p|^2(|p|^2||\vec{f}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} + |p|||\vec{g}||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma}) \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} ||\beta_1||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} &\leq c|p|^2(|p|^2||\vec{f}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} + |p|||\vec{g}||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma}) \\ ||\beta_2||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} &\leq c|p|^2(|p|^2||\vec{f}||_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},p,\Gamma} + |p|||\vec{g}||_{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},p,\Gamma}) \end{aligned}$$

Несложно проверить, что $\vec{\alpha}(x,p)$ и $\vec{\beta}(x,p)$ осуществляют голоморфные отображения C_κ в пространства $H_{-3/2}(\Gamma) \times H_{-1/2}(\Gamma)$ и $H_{3/2}(\Gamma) \times H_{1/2}(\Gamma)$ соответственно, если $\vec{f}(x,p)$ голоморфно отображает C_κ в пространство $H_{3/2}(\Gamma) \times H_{1/2}(\Gamma)$, а $\vec{g}(x,p)$ — в $H_{-3/2}(\Gamma) \times H_{-1/2}(\Gamma)$ (голоморфность $\vec{f}(x,p)$ и $\vec{g}(x,p)$, в свою очередь, следует из голоморфности отображения $\vec{q}(x,p)$ из C_κ в пространство $H_{-2}(\mathbf{R}^2)$).

Теорема 5. *Для любых элементов* $\vec{f} = \{f_1, f_2\} \in H_{r;3/2,k,\kappa}(\Sigma_+) \times H_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma_+)$ и $\vec{g} = \{g_1, g_2\} \in H_{r;-3/2,k,\kappa}(\Sigma_+) \times H_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma_+)$, $\kappa > 0$, $k \in R$ *разрешающие операторы систем граничных уравнений 1-4 ограничены в указанных ниже пространсивах, обратимы и обладают плотными областями значений в*

1.$\mathbf{H}_{f,g} \mapsto \mathbf{H}_{r,-\frac{3}{2},k-2;\kappa}(\Sigma_+) \times$
$\times \mathbf{H}_{r,-\frac{1}{2},k-2;\kappa}(\Sigma_+) \times \mathbf{H}_{r,-\frac{3}{2},k-2;\kappa}(\Sigma_+) \times \mathbf{H}_{r,-\frac{1}{2},k-2;\kappa}(\Sigma_+)$,
2.$\mathbf{H}_{f,g} \mapsto \mathbf{H}_{r,\frac{3}{2},k-3;\kappa}(\Sigma_+) \times$
$\times \mathbf{H}_{r,\frac{1}{2},k-3;\kappa}(\Sigma_+) \times \mathbf{H}_{r,-\frac{3}{2},k-2;\kappa}(\Sigma_+) \times \mathbf{H}_{r,-\frac{1}{2},k-2;\kappa}(\Sigma_+)$,
3.$\mathbf{H}_{f,g} \mapsto \mathbf{H}_{r,-\frac{3}{2},k-2;\kappa}(\Sigma_+) \times$
$\times \mathbf{H}_{r,-\frac{1}{2},k-2;\kappa}(\Sigma_+) \times \mathbf{H}_{r,\frac{3}{2},k-3;\kappa}(\Sigma_+) \times \mathbf{H}_{r,\frac{1}{2},k-3;\kappa}(\Sigma_+)$,
4.$\mathbf{H}_{f,g} \mapsto \mathbf{H}_{r,\frac{3}{2},k-3;\kappa}(\Sigma_+) \times$
$\times \mathbf{H}_{r,\frac{1}{2},k-3;\kappa}(\Sigma_+) \times \mathbf{H}_{r,\frac{3}{2},k-3;\kappa}(\Sigma_+) \times \mathbf{H}_{r,\frac{1}{2},k-3;\kappa}(\Sigma_+)$,
где $\mathbf{H}_{f,g} = \mathbf{H}_{r,\frac{3}{2},k+1;\kappa}(\Sigma_+) \times \mathbf{H}_{r,\frac{1}{2},k+1;\kappa}(\Sigma_+) \times \mathbf{H}_{r,-\frac{3}{2},k;\kappa}(\Sigma_+) \times \mathbf{H}_{r,-\frac{1}{2},k;\kappa}(\Sigma_+)$

Таким образом, решив системы граничных уравнений мы однозначно находим плотности $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ для каждой задачи и по ним строим соответствующие потенциалы и их комбинацидля каждой системы граничных уравнений.

Теорема 6. *Для любого элемента* $\vec{q} \in H_{r;-2,k,\kappa}(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+)$, $\kappa > 0$, $k \geq 1$ *комбинации потенциалов* $(V\vec{\alpha})(x,t)$, $(W\vec{\beta})(x,t)$*с плотностями* $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, *являющимися решениями систем граничных уравнений (1-4), в сумме с объемным потенциалом дают решения* $u(x,t) = \{u_1, u_2\} \in H_{r;2,k-1,\kappa}(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+)$ *исходной контактной задачи.*

Доказательство этого утверждения следует из теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chudinovich I. Methods of potential theory in the dynamics of elastic media. // Russ.J.Math.Phys. – 1993. – 1. – P. 427-446.

2. Чудинович И.Ю. К решению граничных уравнений в задачах дифракции упругих волн. // Дифференциальные уравнения. – 1993. – 1. – С. 1648-1651.

3. Дюво Г., Лион Ж.–Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, – 1980. – 384 с.

4. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. // Успехи матем. наук. – 1964. – 19, вып.3. – С. 53-161.

5. Chudinovich I., Constanda Ch. Solvability of initial-boundary value problems in bending of plates. // Z. angew. Math. Phys. – 2000. – **51**. – P. 449-466.

6. Олвер Ф. Введение в асимтотические методы и специальные функции. – М.: Наука, – 1978. – 375 с.

7. Chudinovich I., Constanda Ch. Variational and potentional Methods in the Theory of Bending of Plates with Transverse Shear Deformation. Monography and surveys in Pure and Applied mathematics. **115**. -Chpman & Hall/CRC.: Boca Raton London New York Washington, D.C.–2000. –235 p.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.15 № 542, 2002, с. 28–34

The integrals with kernels including logarithms

A. F. Grishin and I. V. Poedintseva
Kharkov National University, Ukraine

There are derived asymptotic formulas for integrals of two types. The first integral has a special kernel being a linear- fractional function of $r^{\pi\alpha}$ in variable r. We obtain an n-terms asymptotic expansion in powers of $\frac{1}{r}$, where n depends of α. An asymptotic formula for the second type of integrals is deduced by nonstandard integration by parts.
2000 Mathematics Subject Classification 30E15.

The third-volume monograph of E. Riekstynsh has complete list of references in asymptotic analysis. The expansions of the note are nonstandard. Our first result is following.

Theorem 1. *Let $g(v)$ be analytic at zero, bounded and integrated on the half-axis $[0,\infty)$ function and let λ be real, $e^{i\pi\lambda}\neq 1$. If $\pi\alpha > n+2$, then*

$$\int_0^\infty g(v)\cot\frac{\pi}{2}\left(\lambda - i\alpha\ln(rv)\right)dv = \sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{r^k} + O\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right), \qquad r\to\infty, \tag{1}$$

where

$$c_0 = i\int_0^\infty g(v)dv,$$

$$c_k = -2ig_{k-1}\left(\frac{1}{k} + \int_0^1 \frac{u^{\pi\alpha+k-1}}{e^{-i\pi\lambda}-u^{\pi\alpha}}du - e^{-i\pi\lambda}\int_1^\infty \frac{u^{k-1}}{u^{\pi\alpha}-e^{-i\pi\lambda}}du\right),$$

$$g(v) = \sum_{m=0}^\infty g_m v^m.$$

Proof. We have

$$I = \int_0^\infty g(v)\cot\frac{\pi}{2}\left(\lambda - i\alpha\ln(rv)\right)dv = i\int_0^\infty g(v)\frac{e^{i\pi\lambda}+e^{-\pi\alpha\ln(rv)}}{e^{i\pi\lambda}-e^{\pi\alpha\ln(rv)}}dv$$

$$= i\int_0^{\frac{1}{r}} g(v)\left(-1+\frac{2e^{i\pi\lambda}}{e^{i\pi\lambda}-e^{-\pi\alpha\ln(rv)}}\right)dv + i\int_{\frac{1}{r}}^{\infty} g(v)\left(1+\frac{2e^{-\pi\alpha\ln(rv)}}{e^{i\pi\lambda}-e^{-\pi\alpha\ln(rv)}}\right)dv$$

$$= -i\int_0^{\frac{1}{r}} g(v)dv + i\int_{\frac{1}{r}}^{\infty} g(v)dv + \frac{2i}{r}\int_0^1 g\left(\frac{u}{r}\right)\frac{u^{\pi\alpha}}{u^{\pi\alpha}-e^{-i\pi\lambda}}du$$

$$+\frac{2i}{r}e^{-i\pi\lambda}\int_1^{\infty} g\left(\frac{u}{r}\right)\frac{1}{u^{\pi\alpha}-e^{-i\pi\lambda}}du.$$

If we put through the formal substitution $g(v) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m v^m$, we obtain

$$I = i\int_0^{\infty} g(v)dv - 2i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g_m}{(m+1)r^{m+1}} + 2i\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g_m}{r^{m+1}}\int_0^1\frac{u^{\pi\alpha+m}}{u^{\pi\alpha}\quad e^{-i\pi\lambda}}du$$

$$+2ie^{-i\pi\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g_m}{r^{m+1}}\int_1^{\infty}\frac{u^m}{u^{\pi\alpha}-e^{-i\pi\lambda}}du.$$

Thus we find the terms of asymptotic formula (1). To finish we have to estimate the remaining term. In turn, it is reduced to estimating of integrals

$$R_1 = \int_0^1\left(g\left(\frac{u}{r}\right)-\sum_{m=0}^{n} g_m\frac{u^m}{r^m}\right)\frac{u^{\pi\alpha}}{e^{-i\pi\lambda}-u^{\pi\alpha}}du,$$

$$R_2 = \int_1^{\infty}\left(g\left(\frac{u}{r}\right)-\sum_{m=0}^{n} g_m\frac{u^m}{r^m}\right)\frac{1}{u^{\pi\alpha}-e^{-i\pi\lambda}}du.$$

Let g be holomorphic for $|v| < 2\varepsilon, \varepsilon > 0$. Then for $u \in [0, r\varepsilon]$

$$\left|g\left(\frac{u}{r}\right)-\sum_{m=0}^{n} g_m\frac{u^m}{r^m}\right| \le M_{1,n}\frac{u^{n+1}}{r^{n+1}},$$

where

$$M_{1,n} = \max_{t\in[0,\varepsilon]}\frac{\left|g^{(n+1)}(t)\right|}{(n+1)!}.$$

Denote

$$M_{2,n} = \sup\left\{\frac{r^{n+1}}{u^{n+1}}\left|g\left(\frac{u}{r}\right)-\sum_{m=0}^{n} g_m\frac{u^m}{r^m}\right| : r > 0, u \ge \varepsilon r\right\}.$$

Since function g is bounded,the value $M_{2,n}$ is finite.

It gives

$$\left| g\left(\frac{u}{r}\right) - \sum_{m=0}^{n} g_m \frac{u^m}{r^m} \right| \le M_{2,n} \frac{u^{n+1}}{r^{n+1}}, \qquad u \ge \varepsilon r.$$

We can assume that $\varepsilon \in (0,1)$. Then for $r \ge \frac{1}{\varepsilon}$ the following estimations are valid:

$$|R_1| \le \frac{M_{1,n}}{r^{n+1}} \int_0^1 \frac{u^{\pi\alpha+n+1}}{|e^{-i\pi\lambda} - u^{\pi\alpha}|} du,$$

$$|R_2| \le \frac{M_{1,n} + M_{2,n}}{r^{n+1}} \int_1^\infty \frac{u^{n+1}}{|u^{\alpha\pi} - e^{-i\pi\lambda}|} du.$$

The theorem is proved.

Corollary 1. *Only value c_0 depends on g globally. Other values c_k depend on a local behavior of g at zero.*

Corollary 2. *Despite the integrand of the integral in theorem 1 is a linear-fractional function in $r^{\pi\alpha}$, the integral has asymptotic expansion in powers of $\frac{1}{r}$, $r \longrightarrow \infty$.*

Consider an example. Let

$$g(v) = \frac{\sin\theta}{\pi} \frac{1}{v^2 - 2v\cos\theta + 1}, \qquad \theta \in (0, 2\pi).$$

Then

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \int_0^\infty g(v) \cot\frac{\pi}{2}(\lambda - i\alpha\ln(rv))\, dv = \frac{r\sin\theta}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cot\frac{\pi}{2}(\lambda - i\alpha\ln t)}{t^2 - 2tr\cos\theta + r^2} dt.$$

Theorem 1 gives

$$u\left(re^{i\theta}\right) = i\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{r^k} + O\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)$$

if $n + 2 < \pi\alpha$.

If $\pi\alpha$ is a rational number, then one can fined an explicit formula for $u(re^{i\theta})$ and compare it with asymptotic formula.

Repeating our steps in a different situation we get the following.

Theorem 2. *Let $g(v)$ be a measurable on $[0,\infty)$, analytic at zero, bounded function with convergent improper integrals $\int_0^\infty g(v)dv$, $\int_0^\infty g(v)\ln v dv$, and let λ be real, $e^{i\pi\lambda} \neq 1$. If $\pi\alpha > n+2$, then*

$$\int_0^\infty g(v)\ln(rv)\cot\left(\frac{\pi}{2}(\lambda - i\alpha\ln(rv))\right) dv = i\ln r \int_0^\infty g(v)dv + \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{r^k} + O\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right),$$

$$r \to +\infty,$$

where

$$d_0 = -i \int_0^\infty g(v) \ln v dv,$$

$$d_k = -2ig_{k-1} \left(\frac{1}{k^2} + \int_0^1 \frac{u^{\pi\alpha+k-1}}{e^{-i\pi\alpha} - u^{\pi\alpha}} \ln u du - e^{-i\pi\lambda} \int_1^\infty \frac{u^{k-1} \ln u}{u^{\pi\alpha} - e^{-i\pi\lambda}} du \right).$$

Corollary. *More general case*

$$\int_0^\infty g(v) f(rv) \cot\left(\frac{\pi}{2}(\lambda - i\alpha \ln(rv))\right) dv,$$

where f is a regularly varying in the sense of Karamata function under correspondent assumptions for g,f can be investigated as well.

Before going to other integrals we introduce and investigate special sequences of functions. Let $g(v) \in L_{1,loc}(0,\infty)$ and the improper integrals $\int\limits_0^\infty g(v) \ln^k v dv$, $k = 0, 1, ...$ are convergent. Then we construct two sequences of functions

$$F_1(v) = \int_0^v g(u)du,$$
$$F_{n+1}(v) = -\sum_{k=1}^n \frac{\ln^k v}{k!} F_{n+1-k}(v) + \frac{1}{n!} \int_0^v g(u) \ln^n u du, n \geq 1. \tag{2}$$

$$G_1(v) = \int_v^\infty g(u)du,$$
$$G_{n+1}(v) = -\sum_{k=1}^n \frac{\ln^k v}{k!} G_{n+1-k}(v) + \frac{1}{n!} \int_v^\infty g(u) \ln^n u du, n \geq 1 \tag{3}$$

It is easy to check by induction on n that

$$F'_{n+1}(v) = -\frac{F_n(v)}{v}, \qquad G'_{n+1}(v) = -\frac{G_n(v)}{v}.$$

We write

$$\widetilde{g}_k(v) = \int_0^v g(u) \ln^k u du.$$

Since the integral converges, $\lim\limits_{v \to +0} \widetilde{g}_k(v) = 0$. If $v \in (0,1)$, then the following relations are fulfilled:

$$|\ln^m v F_1(v)| = \left| \ln^m v \int_0^v \frac{d\widetilde{g}_m(u)}{\ln^m u} \right| = \left| \widetilde{g}_m(v) + m \ln^m v \int_0^v \frac{\widetilde{g}_m(u) du}{u \ln^{m+1} u} \right|$$

$$\leq |\widetilde{g}_m(v)| + \max_{u\in[0,v]} |\widetilde{g}_m(u)|\, m \ln^m \frac{1}{v} \int\limits_0^v \frac{du}{u \ln^{m+1} \frac{1}{u}} = |\widetilde{g}_m(v)| + \max_{u\in[0,v]} |\widetilde{g}_m(u)|.$$

It gives $\lim\limits_{v\to+0} \ln^m vF_1(v) = 0$ for every $m = 0, 1, \ldots$. Further using induction on n and the identity $F'_{n+1}(v) = -\frac{F_n(v)}{v}$ we get $\lim\limits_{v\to+0} \ln^m vF_{n+1}(v) = 0, n, m \geq 0$. Analogously, $\lim\limits_{v\to+\infty} \ln^m vG_{n+1}(v) = 0$. Now it easy to verify the identiteis

$$F_{n+1}(v) = -\int\limits_0^v \frac{F_n(u)}{u} du, \quad G_{n+1}(v) = \int\limits_v^\infty \frac{G_n(u)}{u} du.$$

The properties of sequences F_n and G_n are used to prove the following.

Theorem 3. *Let $g(v) \in L_{1,loc}(0,\infty)$ and improper integrals $\int\limits_0^\infty g(v)\ln^k v dv$, $k = 0,1,\ldots$ are convergent. Let $\alpha, \alpha \neq 0$, is real,$\gamma \geq 0$ and let $a(z)$ is a holomorpfic function on the line $\Re z = \gamma$. If for every $r > 0$ and for k=0,1,...the relations*

$$\lim_{v\to+0} F_{k+1}(v)a^{(k)}(\gamma + i\alpha\ln(rv)) = 0,$$

$$\lim_{v\to+\infty} G_{k+1}(v)a^{(k)}(\gamma + i\alpha\ln(rv)) = 0$$

are true, then

$$\int\limits_0^\infty g(v)a(\gamma + i\alpha\ln(rv))\,dv = \sum_{k=0}^n A_k(i\alpha)^r a^{(k)}(\gamma + i\alpha\ln r) +$$

$$(i\alpha)^{n+1} \int\limits_0^1 a^{(n+1)}(\gamma + i\alpha\ln(rv))\,dF_{n+2}(v) -$$

$$(i\alpha)^{n+1} \int\limits_1^\infty a^{(n+1)}(\gamma + i\alpha\ln(rv))\,dG_{n+2}(v), \tag{4}$$

where

$$A_k = \frac{1}{k!}\int\limits_0^\infty g(v)(\ln v)^k dv. \tag{5}$$

Proof. We have

$$\int\limits_0^\infty g(v)a(\gamma + i\alpha\ln(rv))\,dv = \int\limits_0^1 a(\gamma + i\alpha\ln(rv))\,dF_1(v)$$

$$-\int\limits_1^\infty a(\gamma + i\alpha\ln(rv))\,dG_1(v) = (F_1(1) + G_1(1))\,a(\gamma + i\alpha\ln r)$$

$$-i\alpha\int_0^1 \frac{F_1(v)}{v}a'(\gamma+i\alpha\ln(rv))\,dv+i\alpha\int_1^\infty \frac{G_1(v)}{v}a'(\gamma+i\alpha\ln(rv))\,dv$$

$$=(F_1(1)+G_1(1))\,a(\gamma+i\alpha\ln r)+i\alpha\int_0^1 a'(\gamma+i\alpha\ln(rv))\,dF_2(v)$$

$$-i\alpha\int_1^\infty a'(\gamma+i\alpha\ln(rv))\,dG_1(v).$$

Continuing in such a way, we get

$$\int_0^\infty g(v)a(\gamma+i\alpha\ln(rv))\,dv=\sum_{k=0}^{n}(F_{k+1}(1)+G_{k+1}(1))(i\alpha)^k a^{(k)}(\gamma+i\alpha\ln(rv))$$

$$+(i\alpha)^{(n+1)}\int_0^1 a^{(n+1)}(\gamma+i\alpha\ln(rv))\,dF_{n+2}(v)$$

$$-(i\alpha)^{(n+1)}\int_1^\infty a^{(n+1)}(\gamma+i\alpha\ln(rv))\,dG_{n+2}(v).$$

Identities (2) and (3) give $F_{k+1}(1)+G_{k+1}(1)=A_k$. The theorem is proved.

Corollary. *Often the identity (4) is a n-terms asymptotic formula. This identity is obtained by nonstandard integrating by parts. Underline that the coefficients A_k have the simple form giving by formula (5). They depend on g globally in opposite to the case of standard integrating by parts.*

As an example we consider the case

$$g(v)=\frac{1}{v}\ln\left|\frac{ve^{i\theta}-e^{i\varphi}}{ve^{i\theta}-e^{i\psi}}\right|.$$

Then we have

$$u\left(r^{i\theta}\right)=\int_0^\infty g(v)a(\gamma+i\alpha\ln(rv))\,dv=\int_0^\infty \frac{1}{t}\ln\left|\frac{te^{i\theta}-re^{i\varphi}}{te^{i\theta}-re^{i\psi}}\right|a(\gamma+i\alpha\ln t)\,dt.$$

In this case there exist constants P_n and Q_n such that

$$|F_n(v)|\le P_n v,\quad v\in[0,1],\quad |G_n(v)|\le Q_n\frac{1}{v},\quad v\in[1,\infty),\quad n=1,2,\dots.$$

In addition for the coefficients

$$A_k=\frac{1}{k!}\int_0^\infty \frac{\ln^k v}{v}\ln\left|\frac{ve^{i\theta}-e^{i\varphi}}{ve^{i\theta}-e^{i\psi}}\right|dv$$

one can fined a recursion relation.

Indeed, after integration by parts we come to problem 29.03, [4]. As a(z) we can choose $\ln z$, z^β, $z^\beta \ln z$, $\ln \Gamma(z)$, $\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln \Gamma(z)$. Under such choice of g(v) and a(z) relation (4) is the asymptotic formula.

Acknowledgement. We are grateful to S.Merenkov for the helpful suggestions. The investigations of the authors partially supported by INTAS, Ref. No. INTAS 99 - 00089.

REFERENCES

1. Riekstynsh E. Asymptotic expansions of integrals (Russian), v.1.- Zinatne – Riga: – 1974. – 390 p.

2. Riekstynsh E. Asymptotic expansions of integrals (Russian), v.2.- Zinatne,– Riga: – 1977. – 463 p.

3. Riekstynsh E. Asymptotic expansions of integrals (Russian), v.3.- Zinatne – Riga: – 1981. – 370p.

4. Evgrafov M.A., Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I., Bezhanov K.A. Problems in the theory of analitic functions (Russian). – Mockow: Nauka, – 1969. – 387 p.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 542, 2002, с. 35–41

Принцип максимума для стилтьесовских пар аналитических матриц-функций

Ю. М. Дюкарев
Харьковский национальный университет, Украина

Решения многих интерполяционных задач для стилтьесовских матриц-функций могут быть описаны с помощью дробно-линейных преобразований над стилтьесовскими парами. Основным результатам этой статьи является принцип максимума для стилтьесовских пар. Этот принцип максимума может быть применен для изучения канонических, N-экстремальных и главных решений интерполяционных задач для стилтьесовских матриц-функций.
2000 Mathematics Subject Classification 47A57, 42A82.

1. Введение

Решения многих интерполяционных задач для неванлинновских и стилтьесовских матриц-функций могут быть описаны дробно-линейными преобразованиями следующего вида (см. [1-3])

$$s(z) = \{\gamma(z)p(z) + \delta(z)q(z)\} \cdot \{\alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z)\}^{-1} .$$

Матрица коэффициентов этого преобразования

$$U(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha(z) & \beta(z) \\ \hline \gamma(z) & \delta(z) \end{array}\right]$$

определенным образом строится по данным интерполяционной задачи, а свободный параметр – пара матриц-функций $[p(z)\, q(z)]$ – пробегает множество всех неванлинновских (стилтьесовских) пар.

Основным результатом этой работы является принцип максимума для стилтьесовских пар (теорема 3). С его помощью можно провести детальное исследование канонических, N-экстремальных и главных решений (см.[4-5]) интерполяционных задач для неванлинновских и стилтьесовских матриц-функций, причем, что существенно, такое исследование можно проводить сразу для обобщенных интерполяционных задач (см. [2-3]). Отметим, что утверждение 2 теоремы 3 справедливо только для стилтьесовских пар и не имеет аналога в классе неванлинновских пар.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 542, 2002, с. 35–41

Принцип максимума для стилтьесовских пар аналитических матриц-функций

Ю. М. Дюкарев

Харьковский национальный университет, Украина

Решения многих интерполяционных задач для стилтьесовских матриц-функций могут быть описаны с помощью дробно-линейных преобразований над стилтьесовскими парами. Основным результатам этой статьи является принцип максимума для стилтьесовских пар. Этот принцип максимума может быть применен для изучения канонических, N-экстремальных и главных решений интерполяционных задач для стилтьесовских матриц-функций.

2000 Mathematics Subject Classification 47A57, 42A82.

1. Введение

Решения многих интерполяционных задач для неванлинновских и стилтьесовских матриц-функций могут быть описаны дробно-линейными преобразованиями следующего вида (см. [1-3])

$$s(z) = \{\gamma(z)p(z) + \delta(z)q(z)\} \cdot \{\alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z)\}^{-1} .$$

Матрица коэффициентов этого преобразования

$$U(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha(z) & \beta(z) \\ \hline \gamma(z) & \delta(z) \end{array}\right]$$

определенным образом строится по данным интерполяционной задачи, а свободный параметр – пара матриц-функций $[p(z)\, q(z)]$ – пробегает множество всех неванлинновских (стилтьесовских) пар.

Основным результатом этой работы является принцип максимума для стилтьесовских пар (теорема 3). С его помощью можно провести детальное исследование канонических, N-экстремальных и главных решений (см.[4-5]) интерполяционных задач для неванлинновских и стилтьесовских матриц-функций, причем, что существенно, такое исследование можно проводить сразу для обобщенных интерполяционных задач (см. [2-3]). Отметим, что утверждение 2 теоремы 3 справедливо только для стилтьесовских пар и не имеет аналога в классе неванлинновских пар.

2. Принцип максимума (неванлинновские пары)

Пусть задано целое число $m \geq 1$ и пусть, далее, I и 0 обозначают соответственно единичную и нулевую $m \times m$ матрицы. Введем матрицу

$$J = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -iI \\ \hline iI & 0 \end{array}\right].$$

Символом $\mathbf{C}_+$ обозначим верхнюю полуплоскость в комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Пара $m \times m$ матриц-функций $\left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right]$ (такие пары будем обозначать еще и символом $\operatorname{col}[p(z)\ q(z)]$), мероморфных в $\mathbf{C}_+$ называется неванлинновской, если для нее существует дискретное в $\mathbf{C}_+$ множество точек $\mathcal{D}_{pq}$ такое, что

1. $p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z) > 0,\ z \in \mathbf{C}_+ \setminus \mathcal{D}_{pq}$.

2. $[p^*(z), q^*(z)] \dfrac{J}{i(\bar{z}-z)} \left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right] \geq 0,\ z \in \mathbf{C}_+ \setminus \mathcal{D}_{pq}$.

На множестве неванлинновских пар введем отношение эквивалентности: пары $\operatorname{col}[p_1(z)\ q_1(z)]$ и $\operatorname{col}[p_2(z)\ q_2(z)]$ называются эквивалентными, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbf{C}_+$ матрица-функция $Q(z)$ такая, что $p_1(z) = p_2(z)Q(z)$ и $q_1(z) = q_2(z)Q(z)$. Множество классов эквивалентности неванлинновских пар обозначим $\mathcal{R}$.

Символом $\mathbf{S}$ обозначим класс голоморфных в $\mathbf{C}_+$ матриц-функций $\omega(z)$ таких, что

$$I - \omega^*(z)\omega(z) \geq 0. \tag{1}$$

Теорема 1. *Между множеством $\mathcal{R}$ и множеством $\mathbf{S}$ существует биективное соответствие. Отображение из $\mathcal{R}$ в $\mathbf{S}$ задается формулой*

$$\omega(z) = [p(z) + iq(z)] \cdot [p(z) - iq(z)]^{-1}. \tag{2}$$

Обратное отображение из $\mathbf{S}$ в $\mathcal{R}$ задается формулами

$$p(z) = [I + \omega(z)]Q(z), \quad q(z) = i[I - \omega(z)]Q(z). \tag{3}$$

Здесь $Q(z)$ – произвольная мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbf{C}_+$ матрица-функция.

Доказательство. Доказательство этой теоремы проведем по шагам.

Шаг 1. Покажем. что дробно-линейное преобразование (2) задает мероморфную в $\mathbf{C}_+$ матрицу-функцию.

Действительно, для любой неванлинновской пары $\operatorname{col}[p(z)\ q(z)]$ и для любого $z \in \mathbf{C}_+ \setminus \mathcal{D}_{pq}$ имеем

$$[p(z)-iq(z)]^* \cdot [p(z)-iq(z)] = [p^*(z)p(z)+q^*(z)q(z)] + [p^*(z)\,q^*(z)]J \left[\begin{array}{c} p(z) \\ q(z) \end{array}\right] > 0.$$

Отсюда следует, что $\det[p(z) - iq(z)] \not\equiv 0$.

Шаг 2. Покажем, что все особенности $\omega(z)$ в $\mathbf{C}_+$ устранимы и, после устранения особенностей, $\omega(z) \in \mathbf{S}$.

Простые вычисления показывают, что $\forall z \in \mathbf{C}_+ \setminus \mathcal{D}_{pq}$

$$I - \omega^*(z)\omega(z) = 2[p(z) - iq(z)]^{-1^*}[p^*(z)\, q^*(z)]J \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} [p(z) - iq(z)]^{-1} \geq 0.$$

Отсюда следует, что $\|\omega(z)\| \leq 1$ для всех $z \in \mathbf{C}_+ \setminus \mathcal{D}_{pq}$. Поэтому все особенности $\omega(z)$ устранимы и после устранения особенностей $\omega(z) \in \mathbf{S}$.

Шаг 3. Покажем, что формула (2) задает отображение $\mathcal{R} \to \mathbf{S}$, а формула (3) задает отображение $\mathbf{S} \to \mathcal{R}$.

При доказательстве шага 2 было показано, что (2) переводит произвольную неванлинновскую пару в матрицу-функцию класса $\omega(z) \in \mathbf{S}$. Очевидно, что при этом эквивалентные неванлинновские пары переводятся в одну и ту же $\omega(z) \in \mathbf{S}$. Таким образом, формула (2) задает отображение $\mathcal{R} \to \mathbf{S}$.

Далее покажем, что формула (3) задает отображение $\mathbf{S} \to \mathcal{R}$. Действительно, пусть $\omega(z) \in \mathbf{S}$ и $Q(z)$ мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbf{C}_+$ матрица-функция. Символом $\mathcal{D}$ обозначим дискретное в $\mathbf{C}_+$ множество всех особенностей матриц-функций $Q(z)$ и $Q^{-1}(z)$. Для всех $z \in \mathbf{C}_+ \setminus \mathcal{D}$ имеем

$$p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z) = 2Q^*(z)[I + \omega^*(z)\omega(z)]Q(z) > 0.$$

И далее

$$[p^*(z)\, q^*(z)]J \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} = 2Q^*(z)[I - \omega^*(z)\omega(z)]Q(z) \geq 0.$$

Отсюда следует, что (3) задает неванлинновскую пару $\operatorname{col}[p(z)\; q(z)]$. Если в формуле (3) $\omega(z)$ фиксирована, а $Q(z)$ пробегает множество всех мероморфных и мероморфно обратимых в $\mathbf{C}_+$ матриц-функций, то задаваемая формулой (3) пара пробегает некоторый класс эквивалентности неванлинновских пар. Мы показали, что формула (3) задает отображение $\mathbf{S} \to \mathcal{R}$.

Шаг 4. Покажем, что формулы (2) и (3) устанавливают биективное соответствие между $\mathbf{S}$ и $\mathcal{R}$.

Убедимся в том, что (3) задает иньективное отображение. Пусть $\omega_1(z)$ и $\omega_2(z)$ при отображении (3) приводят к эквивалентным неванлинновским парам, т.е. существуют мероморфные и мероморфно обратимые в $\mathbf{C}_+$ матрицы-функции $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$ такие, что $\forall z \in \mathbf{C}_+ \setminus \{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2\}$ (здесь $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ – особенности в $\mathbf{C}_+$ матриц-функций $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$) выполняются равенства

$$[I + \omega_1(z)]Q_1(z) = [I + \omega_2(z)]Q_2(z),\ i[I - \omega_1(z)]Q_1(z) = i[I - \omega_2(z)]Q_2(z).$$

Умножим эти равенства справа на $Q_1^{-1}(z)$ и обозначим $Q(z) = Q_2(z)Q_1^{-1}(z)$. Получим

$$[I + \omega_1(z)] = [I + \omega_2(z)]Q(z), \quad i[I - \omega_1(z)] = i[I - \omega_2(z)]Q(z).$$

Складывая эти равенства (предварительно сократив второе из равенств на i), получим $Q(z) \equiv I$. Но тогда и $\omega_1(z) \equiv \omega_2(z)$ т.е. (3) задает инективное отображение.

Осталось показать, что формулы (2) и (3) задают взаимно обратные отображения.

Пусть $\omega(z) \in \mathbf{S}$. Применим к $\omega(z)$ преобразование (3), а затем к полученной неванлинновской паре применим преобразование (2). Получим

$$[I+\omega(z)-I+\omega(z)]Q(z)Q^{-1}(z)[I+\omega(z)+I-\omega(z)]^{-1}=\omega(z).$$

Наоборот, пусть задана произвольная неванлинновская пара $\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}$. Применим к ней преобразование (2) и полученную матрицу-функцию $\omega(z)$ подставим в (3). Получим

$$\begin{aligned}&[I+\omega(z)]Q(z)\\ &=\{I+[p(z)+iq(z)]\cdot[p(z)-iq(z)]^{-1}\}Q(z)=2p(z)[p(z)-iq(z)]^{-1}Q(z),\\ &i[I-\omega(z)]Q(z)\\ &=i\{I-[p(z)+iq(z)]\cdot[p(z)-iq(z)]^{-1}\}Q(z)=2q(z)[p(z)-iq(z)]^{-1}Q(z).\end{aligned}$$

Мы получили пару $\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} 2[p(z)-iq(z)]^{-1}Q(z)$, которая эквивалентна исходной паре $\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}$.

Теорема 1 доказана.

Пусть постоянные $m \times m$ матрицы p и q таковы, что

$$p^*p+q^*q>0, \qquad [p^*\ q^*]J\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}=0. \tag{4}$$

Тогда при любой мероморфной и мероморфно обратимой в $\mathbb{C}_+$ матрице-функции $Q(z)$ пара

$$col\,[p(z)\ q(z)]=col\,[p\ q]\cdot Q(z) \tag{5}$$

является неванлинновской.

Неванлинновские пары вида (5) называются каноническими. Если в классе эквивалентности хотя бы одна пара оказалась канонической, то все пары из этого класса будут каноническими.

Теорема 2. (Принцип максимума для неванлинновских пар) *Пусть дана неванлинновская пара* $col\,[p(z)\ q(z)]$ *и в некоторой точке* $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{D}_{pq}$ *выполнено условие*

$$[p^*(z_0), q^*(z_0)]J\begin{bmatrix} p(z_0) \\ q(z_0) \end{bmatrix}=0. \tag{6}$$

Тогда пара $col[p(z)\ q(z)]$ *является канонической парой вида (5).*

Доказательство. Рассмотрим параметризацию нашей пары с помощью $\omega(z) \in \mathbf{S}$ (см. 3)

$$p(z) = [I + \omega(z)]Q(z),\ q(z) = i[I - \omega(z)]Q(z). \qquad (7)$$

По условию точка $z_0 \notin \mathcal{D}_{pq}$. Поэтому матрица $Q(z_0)$ невырождена. Из (6) и (7) получим

$$0 = [p^*(z_0), q^*(z_0)]J \begin{bmatrix} p(z_0) \\ q(z_0) \end{bmatrix}$$

$$= Q^*(z_0)[I + \omega^*(z_0), -i(I - \omega^*(z_0))]J \begin{bmatrix} I + \omega(z_0) \\ i(I - \omega(z_0)) \end{bmatrix} Q(z_0)$$

$$= 2Q^*(z_0)[I - \omega^*(z_0)\omega(z_0)]Q(z_0).$$

Отсюда $I - \omega^*(z_0)\omega(z_0) = 0$. По принципу максимума для матриц-функций класса $\mathbf{S}$ имеем

$$\omega(z) = \omega(z_0),\ \forall z \in \mathbf{C}_+.$$

Теперь параметризация (7) принимает вид

$$\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + \omega(z_0) \\ i(I - \omega(z_0)) \end{bmatrix} Q(z) = \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} Q(z).$$

Ясно, что матрицы p_0 и q_0 удовлетворяют условиям (4).

Теорема 2 доказана.

3. Принцип максимума (стилтьесовские пары)

Пара $m \times m$ матриц-функций $\mathrm{col}\,[p(z)\ q(z)]$, мероморфных в $\mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$, называется стилтьесовской, если для нее существует дискретное в $\mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$ множество точек $\mathcal{D}_{pq}$ такое, что

1. $p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z) > 0,\ z \in \mathbf{C} \setminus \{[0, +\infty) \cup \mathcal{D}_{pq}\}$.

2. $[p^*(z), q^*(z)] \dfrac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0,\ z \in \mathbf{C} \setminus \{\mathbf{R} \cup \mathcal{D}_{pq}\}$.

3. $[p^*(z), \bar{z}q^*(z)] \dfrac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ zq(z) \end{bmatrix} \geq 0,\ z \in \mathbf{C} \setminus \{\mathbf{R} \cup \mathcal{D}_{pq}\}$.

На множестве стилтьесовских пар введем отношение эквивалентности: пары $\mathrm{col}\,[p_1(z)\ q_1(z)]$ и $\mathrm{col}\,[p_2(z)\ q_2(z)]$ называются эквивалентными, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$ матрица-функция $Q(z)$ такая, что $p_1(z) = p_2(z)Q(z)$ и $q_1(z) = q_2(z)Q(z)$. Множество классов эквивалентности стилтьесовских пар обозначим $\mathcal{S}$.

Пусть постоянные $m \times m$ матрицы p_1 и q_1 таковы, что

$$p_1^* p_1 + q_1^* q_1 > 0, \quad p_1^* q_1 = q_1^* p_1 \geq 0. \tag{8}$$

При любой мероморфной и мероморфно обратимой в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ матрице-функции $Q_1(z)$ пара

$$col[p(z)\ q(z)] = col[p_1\ q_1] Q_1(z), \tag{9}$$

является стилтьесовской. Пары вида (9) называются каноническими стилтьесовскими парами первого рода.

Пусть постоянные $m \times m$ матрицы p_2 и q_2 таковы, что

$$p_2^* p_2 + q_2^* q_2 > 0, \quad p_2^* q_2 = q_2^* p_2 \leq 0. \tag{10}$$

При любой мероморфной и мероморфно обратимой в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ матрице-функции $Q_2(z)$ пара

$$col[p(z)\ q(z)] = col[p_2\ z^{-1} q_2] Q_2(z), \tag{11}$$

является стилтьесовской. Пары вида (11) называются каноническими стилтьесовскими парами второго рода.

Если в классе эквивалентности стилтьесовских пар хотя бы одна пара оказалась канонической первого (соотв. второго) рода, то все пары из этого класса будут каноническими первого (соотв. второго) рода.

Теорема 3. (Принцип максимума для стилтьесовских пар) *1. Пусть дана стилтьесовская пара $col[p_1(z)\ q_1(z)]$ и в некоторой невещественной точке $z_0 \notin \mathcal{D}_{p_1 q_1}$ выполнено условие*

$$[p_1^*(z_0), q_1^*(z_0)] J \begin{bmatrix} p_1(z_0) \\ q_1(z_0) \end{bmatrix} = 0. \tag{12}$$

Тогда пара $col[p_1(z)\ q_1(z)]$ является канонической стилтьесовской парой первого рода вида (9).

2. Пусть дана стилтьесовская пара $col[p_2(z)\ q_2(z)]$ и в некоторой невещественной точке $z_0 \notin \mathcal{D}_{p_2 q_2}$ выполнено условие

$$[p_2^*(z_0), \bar{z}_0 q_2^*(z_0)] J \begin{bmatrix} p_2(z_0) \\ z_0 q_2(z_0) \end{bmatrix} = 0. \tag{13}$$

Тогда пара $col[p_2(z)\ q_2(z)]$ является канонической стилтьесовской парой второго рода вида (11).

Доказательство. Докажем, например, утверждение 2 теоремы. Пусть, для определенности, $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathcal{D}_{p_2 q_2}$. Сужение пары $\mathrm{col}\,[p_2(z)\ z q_2(z)]$ на полуплоскость $\mathbb{C}_+$ является неванлинновской парой. Рассмотрим параметризацию этой пары с помощью $\omega(z) \in \mathbf{S}$ (см. 3)

$$p_2(z) = [I + \omega(z)] Q_2(z), \quad z q_2(z) = i[I - \omega(z)] Q_2(z). \tag{14}$$

По условию точка $z_0 \notin \mathcal{D}_{p_2q_2}$. Поэтому матрица $Q_2(z_0)$ невырождена. Из (13) и (14) получим

$$0 = [p_2^*(z_0), \bar{z}_0 q_2^*(z_0)] J \begin{bmatrix} p_2(z_0) \\ z_0 q_2(z_0) \end{bmatrix}$$

$$= Q_2^*(z_0)[I + \omega^*(z_0), -i(I - \omega^*(z_0))] J \begin{bmatrix} I + \omega(z_0) \\ i(I - \omega(z_0)) \end{bmatrix} Q_2(z_0)$$

$$= 2Q_2^*(z_0)[I - \omega^*(z_0)\omega(z_0)]Q_2(z_0).$$

Отсюда $I - \omega^*(z_0)\omega(z_0) = 0$. По принципу максимума для матриц-функций класса $\mathbf{S}$ имеем $\omega(z) = \omega(z_0)$, $\forall z \in \mathbf{C}_+$. Теперь параметризация (14) принимает вид

$$\begin{bmatrix} p_2(z) \\ zq_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + \omega(z_0) \\ i(I - \omega(z_0)) \end{bmatrix} Q_2(z) = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} Q_2(z). \tag{15}$$

Ясно, что матрицы p_2 и q_2 удовлетворяют условиям (10). Равенство (15) доказано для всех точек голоморфности в верхней полуплоскости. Умножим (15) слева на $(p_2^*p_2 + q_2^*q_2)^{-1}[p_2^* \ q_2^*]$. Получим $Q_2(z) = [p_2^*p_2 + q_2^*q_2]^{-1}[p_2^*p_2(z) + zq_2^*q_2(z)]$. Отсюда следует, что $Q_2(z)$ продолжима как мероморфная матрица-функция в $\mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$. Итак, левая и правая части в (15) определены и мероморфны в $\forall z \in \mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$. Поэтому равенство (15) имеет место во всех точках $z \in \mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$ за исключением, быть может, некоторого дискретного множества точек. Таким образом, $col[p(z)\ q(z)] = col[p_2\ z^{-1}q_2]Q_2(z)$.

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач. // Изв. АН СССР. Сер.матем. – 1983. – Т.47,**3**. – С. 455-497.
2. Ivanchenko T.S., Sakhnovich L.A. An operator approach to the Potapov scheme for the solution of interpolation problems. // Operator Theory: Advances and Applications. – 1994. – Vol. 72. – P. 48-86.
3. Дюкарев Ю.М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. 1. // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т.6,**1/2**. – С. 30-54.
4. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, – 1973. – 552 с.
5. Кац И.С., Нудельман А.А. // Сильная проблема моментов Стилтьеса. – Алгебра и анализ. – 1996. – Т.8,**6**. – С. 26-56.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.956.225 № 542, 2002, с. 42–51

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве с цилиндрической полостью

В. С. Проценко, Н. А. Попова

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского (ХАИ), Харьков, Украина

С помощью обобщенного метода Фурье решена задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве с цилиндрической полостью. Использование теорем сложения для решений уравнения Лапласа в декартовой и цилиндрической системах координат позволило свести задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с вполне непрерывным оператором. Система решена методом редукции. Проведены расчеты для конкретных значений параметров и заданных на границе функций.

2000 Mathematics Subject Classification 35J25.

Широкий класс практически важных задач физики и механики сводится к решению уравнения Лапласа: задачи гидродинамики и теплопроводности, расчет электрических и магнитных полей и многие другие. Для решения пространственных задач чаще всего используются методы конечных разностей или конечных элементов, которые требуют большого объема оперативной памяти и затрат машинного времени современных персональных компьютеров. В настоящей работе используется метод переразложения [1], который позволяет с высокой точностью вычислять гармоническую функцию в трехмерной области посредством решения относительно небольшого числа линейных алгебраических уравнений. Достоинством данного метода является также возможность его обобщения на другие уравнения эллиптического типа, например на уравнения Ляме, которые описывают напряженно-деформированное состояние линейно-упругого твердого тела.

Рассмотрим полупространство с цилиндрической полостью. Введем две системы координат: цилиндрическую $\{\rho, \varphi, z\}$, ось z которой совпадает с осью цилиндра и параллельна границе полупространства, а центр O расположен на расстоянии h от нее, и декартову систему $\{x, y, z\}$ с началом в точке O. Уравнение плоскости, ограничивающей полупространство, $\Sigma_1 : y = h$, уравнение поверхности цилиндра $\Sigma_2 : \rho = a$.

Будем искать решение краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в полупространстве $y < h$ $(h > a)$ вне цилиндра, удовлетворяющее на указанных поверхностях граничным условиям:

$$u|_{\Sigma_1} = u_{01}(x,z), \quad u|_{\Sigma_2} = u_{02}(\varphi, z), \tag{1}$$

где $u_{01}(x,z)$, $u_{02}(\varphi,z)$– заданные непрерывные функции. Предположим, что эти функции представляются соответственно в виде абсолютно сходящихся интегралов и ряда:

$$u_{01}(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} C(\lambda,\mu) d\mu d\lambda,$$

$$u_{02}(\varphi,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} A_m(\lambda) d\lambda, \tag{2}$$

причем функция $C(\lambda,\mu)$ ограничена, а ряд $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} A_m(\lambda)$ абсолютно сходится при $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Частные решения уравнения Лапласа в цилиндрической и декартовой системах координат имеют вид:

$$R_m(\rho,z,\varphi;\lambda) = e^{i\lambda z + im\varphi} I_m(\lambda\rho),$$

$$S_m(\rho,z,\varphi;\lambda) = e^{i\lambda z + im\varphi} K_m(|\lambda|\rho), \tag{3}$$

$$u^{(\pm)}(x,y,z;\lambda,\mu) = e^{i\lambda z \pm \gamma y + i\mu x},$$

где $\gamma = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}$; $I_m(x), K_m(x)$– модифицированные функции Бесселя соответственно первого и третьего рода; функции R_m (S_m), регулярные в области $\{\rho < R\}$ $(\{\rho > R\})$, где $R > 0$, - внутренние (внешние) решения уравнения Лапласа для цилиндра; функции $u^{(-)}(u^{(+)})$, регулярные в области $\{y > h\}$ $(\{y < h\})$, - решения уравнения Лапласа для полупространства.

В дальнейшем нам понадобятся теоремы сложения гармонических функций [2].

Теорема 1. *При $y > 0$ справедливо интегральное представление внешних решений уравнения Лапласа для цилиндра через решения для полупространства*

$$S_m(\rho,z,\varphi;\lambda) = \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2^m(\lambda,\mu) u^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu) \frac{d\mu}{\gamma}, \tag{4}$$

где $\gamma = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, $\omega_2(\lambda,\mu) = (\mu-\gamma)/|\lambda|$, $m = 0, \pm1, \pm2, ...$

Теорема 2. *Для произвольного комплексного λ справедливо разложение решений уравнения Лапласа для полупространства по внутренним решениям для цилиндра*

$$u^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i\omega_1(\lambda,\mu))^m R_m(\rho,z,\varphi;\lambda), \tag{5}$$

где $\omega_1(\lambda,\mu)=(\mu-\gamma)/\lambda$.

Решение задачи представим в виде линейной комбинации внешних решений уравнения Лапласа для цилиндра и полупространства:

$$u=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}B_m(\lambda)S_m(\rho,z,\varphi;\lambda)d\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda,\mu)u^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)d\mu d\lambda,\tag{6}$$

где функции $S_m(\rho,z,\varphi;\lambda)$, $u^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ заданы формулами (3), а $B_m(\lambda)$, $H(\lambda,\mu)$– неизвестные интегральные плотности, определяемые из краевых условий.

Чтобы удовлетворить краевым условиям на цилиндре, второе слагаемое в выражении (6) запишем в цилиндрической системе координат, используя формулу переразложения решений для полупространства через внутренние решения для цилиндра (5):

$$u=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda z}\Big[B_m(\lambda)K_m(|\lambda|\rho)+I_m(\lambda\rho)\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda,\mu)(i\omega_1(\lambda,\mu))^m d\mu\Big]d\lambda.$$

Удовлетворяя на поверхности цидиндра Σ_2 краевому условию, получим систему уравнений:

$$B_m(\lambda)=\frac{1}{K_m(|\lambda|a)}\Big[A_m(\lambda)-I_m(\lambda a)\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda,\mu)(i\omega_1(\lambda,\mu))^m d\mu\Big],\ m=0,\pm1,\pm2,...\tag{7}$$

Чтобы удовлетворить краевым условиям на границе полупространства, перепишем первое слагаемое в (6) с помощью формул переразложения внешних решений для цилиндра через решения для полупространства (4):

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda z}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\mu x}\Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty}B_m(\lambda)\frac{(-i)^m\omega_2^m(\lambda,\mu)}{2\gamma}e^{-\gamma y}+H(\lambda,\mu)e^{\gamma y}\Big]d\mu d\lambda.\tag{8}$$

Удовлетворяя краевому условию на поверхности полупространства Σ_1 и изменяя индексы суммирования m и n, приходим к соотношению:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n(\lambda)\frac{(-i)^n\omega_2^n(\lambda,\mu)}{2\gamma}e^{-\gamma h}+H(\lambda,\mu)e^{\gamma h}=C(\lambda,\mu).$$

Отсюда

$$H(\lambda,\mu)=e^{-\gamma h}C(\lambda,\mu)-\frac{e^{-2\gamma h}}{2\gamma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n(\lambda)(-i)^n\omega_2^n(\lambda,\mu).\tag{9}$$

Подстановка (9) в выражение (7) приводит к системе уравнений:

$$B_m(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{mn}(\lambda)B_n(\lambda) + Q_m(\lambda), \quad m = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{10}$$

Здесь

$$G_{mn}(\lambda) = w_{mn}(\lambda a)\int_{-\infty}^{\infty} F_{mn}(\lambda,\mu)d\mu,\ Q_m(\lambda) = \nu_{1m}(\lambda a) +$$

$$+\nu_{2m}(\lambda a)\int_{-\infty}^{\infty} L_m(\lambda,\mu)d\mu,\ w_{mn}(\lambda a) = \frac{I_m(\lambda a)}{2K_m(|\lambda|a)} i^m(-i)^n,$$

$$\nu_{1m}(\lambda a) = \frac{A_m(\lambda)}{K_m(|\lambda|a)},\ \nu_{2m}(\lambda a) = -\frac{I_m(\lambda a)}{K_m(|\lambda|a)} i^m,$$

$$F_{mn}(\lambda,\mu) = \frac{e^{-2\gamma h}}{\gamma}\omega_1^m(\lambda,\mu)\omega_2^n(\lambda,\mu),\quad L_m(\lambda,\mu) = C(\lambda,\mu)\omega_1^m(\lambda,\mu)e^{-\gamma h}.$$

Преобразуем коэффициенты $G_{mn}(\lambda)$ и правые части $Q_m(\lambda)$ системы (10). Сделаем замену: $\mu = \lambda sht = \lambda(\xi - 1/\xi)/2$, $\gamma = |\lambda| cht = |\lambda|(\xi + 1/\xi)/2$. Интеграл в $G_{mn}(\lambda)$ приводится к интегралу Лапласа:

$$\int_0^{\infty} e^{-p\xi} f_{mn}(\xi)d\xi = 2(-1)^{m+n}(sgn\lambda)^{m+1}K_\nu(2p),$$

где $f_{mn}(\xi) = \xi^{\nu-1}e^{-p/\xi}$, $p = |\lambda|h$, $\nu = \pm(m+n)$, $m, n = 0, \pm1, \pm2, ..$; $\xi \in R$.

Считая, что функция $C(\lambda,\mu)$ ограничена: $|C(\lambda,\mu)| \leq R_1 (= const)$, для интеграла в $Q_m(\lambda)$ получим оценку, которая понадобится нам в дальнейшем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |L_m(\lambda,\mu)|d\mu \leq R_1 \int_0^{\infty} e^{-r\xi} g_m(\xi)d\xi, \tag{11}$$

где $g_m(\xi) = (\xi^{-m} + \xi^{-m-2})e^{-r/\xi}$, $r = |\lambda|h/2$, $m = 0, \pm1, \pm2, ...$; $\xi \in R$. Последний интеграл в (11) также является интегралом Лапласа и равен

$$-\lambda(-sgn\lambda)^{m+1}(K_{m-1}(2r) + K_{m+1}(2r)),$$

где $m = 0, \pm1, \pm2, ...$

В системе (10) положим

$$B_m(\lambda) = (m^2+1)I_m(\lambda a)b_m(\lambda), \quad m = 0,\ \pm1, \pm2, ...$$

Тогда

$$b_m(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{mn}(\lambda)b_n(\lambda) + \tilde{Q}_m(\lambda), \tag{12}$$

где

$$\tilde{G}_{mn}(\lambda) = \frac{(n^2+1)I_n(\lambda a)}{(m^2+1)I_m(\lambda a)}G_{mn}(\lambda) = \frac{i^m(-i)^n}{2}\frac{(n^2+1)I_n(\lambda a)I_m(\lambda a)}{(m^2+1)I_m(\lambda a)K_m(|\lambda|a)}\times$$

$$\times K_{m+n}(2|\lambda|h) = \frac{i^m(-i)^n}{2}\frac{(n^2+1)I_n(\lambda a)}{(m^2+1)K_m(|\lambda|a)}K_{m+n}(2|\lambda|h),$$

$$\tilde{Q}_m(\lambda) = \frac{Q_m(\lambda)}{(m^2+1)I_m(\lambda a)} = \frac{A_m(\lambda)}{(m^2+1)I_m(\lambda a)K_m(|\lambda|a)} -$$

$$-\frac{i^m}{(m^2+1)K_m(|\lambda|a)}\int_{-\infty}^{\infty} L_m(\lambda,\mu)d\mu.$$

Запишем уравнения (12) в операторной форме

$$(I+G)b = q,$$

где G– оператор, определяемый матрицей системы (12), I– единичный оператор, b и q - столбцы неизвестных и правых частей соответственно.

Справедлива

Теорема 3. *Оператор G является вполне непрерывным в пространстве l_2.*

Доказательство. Покажем, что ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\tilde{G}_{mn}(\lambda)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(n^2+1)I_n(\lambda a)}{(m^2+1)K_m(|\lambda|a)}K_{m+n}(2|\lambda|h) \qquad (13)$$

сходится. Представим его в виде суммы двух рядов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m^2+1)K_m(|\lambda|a)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}K_{m+n}(2|\lambda|h)I_n(\lambda a)+$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m^2+1)K_m(|\lambda|a)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2K_{m+n}(2|\lambda|h)I_n(\lambda a). \qquad (14)$$

Используем теорему сложения [3]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}K_{m+n}(\lambda y)I_n(\lambda x)\cos n\varphi = K_m(\lambda z)\cos m\phi, \qquad (15)$$

где $z = \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}$.

Для $\lambda > 0$ положим $\varphi = 0$ и $\phi = 0$. В этом случае формула (15) примет вид $K_m(\lambda z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} K_{m+n}(\lambda y)I_n(\lambda x)$, где $z = |x-y|$, а первый из двойных рядов в (14) преобразуется в ряд

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{K_m(\lambda(2h-a))}{(m^2+1)K_m(\lambda a)}.$$

Рассмотрим второе слагаемое в (14). Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n^2 K_{m+n}(2\lambda h) I_n(\lambda a)$ суммируется. Покажем это. Воспользуемся теоремой сложения для $K_m(\lambda z)$. Два раза продифференцировав равенство (15) по φ, а затем положив $\varphi = 0$, $\phi = 0$, $x = a$, $y = 2h$, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 K_{n+m}(2\lambda h) I_n(\lambda a) = \lambda \frac{ah}{2h-a}[K_{m-1}(\lambda(2h-a)) + K_{m+1}(\lambda(2h-a))]. \tag{16}$$

Окончательно выражение (14) преобразуется в сумму рядов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_m(\lambda(2h-a))}{(m^2+1)K_m(\lambda a)} + \lambda \frac{ah}{2h-a}\Bigg[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_{m+1}(\lambda(2h-a))}{(m^2+1)K_m(\lambda a)} + \\ + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_{m-1}(\lambda(2h-a))}{(m^2+1)K_m(\lambda a)}\Bigg]. \tag{17}$$

Обозначим эту сумму через $L(\lambda, a, h)$. Используя при $|m| \geq 1$ неравенство [4]

$$\frac{1}{K_m(z)} \leq \omega m^2 I_m(z), \quad \omega = 4\sqrt{\pi} e(1+z), \quad z > 0, \tag{18}$$

для $L(\lambda, a, h)$ получим

$$L(\lambda, a, h) \leq \frac{K_0(\lambda(2h-a))}{K_0(\lambda a)} + \omega K_0(2\lambda(h-a)) - \omega I_0(\lambda a) K_0(\lambda(2h-a)) + \\ + 2\lambda \frac{ah}{2h-a}\left[\frac{K_1(\lambda(2h-a))}{K_0(\lambda a)} + \omega K_1(2\lambda(h-a)) - \omega K_1(\lambda(2h-a)) I_0(\lambda a)\right]. \tag{19}$$

Правая часть последнего неравенства есть ограниченная функция параметра λ. Действительно, учитывая поведение модифицированных функций Бесселя в нуле и на бесконечности, можно показать, что при $\lambda \to 0$ она принимает вид

$$1 + 4\sqrt{\pi} e\left[\frac{1}{h-a} + \frac{2}{2h-a} + \ln \frac{2h-a}{4(h-a)}\right],$$

а при $\lambda \to \infty$ все ее слагаемые стремятся к нулю. Поэтому для всех $\lambda \in [0, \infty)$ при выполнении условия $h > a$ $L(\lambda, a, h)$– положительная ограниченная функция и $L(\lambda, a, h) \leq \max\limits_{\lambda \in [0,\infty)} L(\lambda, a, h) = L = const$. Из сходимости ряда (13) следует сходимость ряда из квадратов модулей коэффициентов $\tilde{G}_{mn}(\lambda)$.

При $\lambda < 0$ положим $\lambda = -\kappa$, $\kappa > 0$, тогда $I_n(\lambda) = I_n(-\kappa) = (-1)^n I_n(\kappa)$. Отсюда $|I_n(\lambda)| = I_n(\kappa)$ и доказательство сходимости сводится к предыдущему случаю. Поэтому ряд $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{G}_{mn}(\lambda)|^2$ сходится при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$, откуда следует, что оператор G при выполнении условия $h > a$ является вполне непрерывным в пространстве l_2 для всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается сходимость ряда из модулей правых частей системы (12). Используя (11) и (18), запишем неравенство треугольника:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\tilde{Q}_m(\lambda)| \le \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{|A_m(\lambda)|}{(m^2+1)I_m(\lambda a)K_m(|\lambda| a)} +$$

$$+R_1|\lambda| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_{m-1}(|\lambda| h)+K_{m+1}(|\lambda| h)}{(m^2+1)K_m(|\lambda| a)} \le \omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} |A_m(\lambda)| +$$

$$+R_1|\lambda|\omega \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' (K_{m-1}(|\lambda| h)+K_{m+1}(|\lambda| h))I_m(\lambda a) + \frac{2R_1|\lambda| K_1(|\lambda| h)}{K_0(|\lambda| a)} =$$

$$= \omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} |A_m(\lambda)| + 2R_1|\lambda|\omega K_1(|\lambda|(h-a)) - 2R_1|\lambda|\omega K_1(|\lambda| h)I_0(\lambda a) +$$

$$+ \frac{2R_1|\lambda| K_1(|\lambda| h)}{K_0(|\lambda| a)}. \tag{20}$$

Здесь штрих в сумме означает, что пропущено слагаемое с номером $m = 0$. По предположению последний ряд в (20) сходится абсолютно, а сумма трех последних слагаемых является ограниченной функцией при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Отсюда следует, что при выполнении условия $h > a$ $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} |\tilde{Q}_m(\lambda)| < \infty$ при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Значит при этих же условиях сходится ряд $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} |\tilde{Q}_m(\lambda)|^2$.

Для системы уравнений с вполне непрерывным в l_2 оператором и свободными членами, принадлежащими l_2, имеет место альтернатива Гильберта о том, что система (12) либо имеет единственное решение в l_2, либо имеет отличное от нуля решение соответствующая однородная система. Из альтернативы Гильберта и однозначной разрешимости исходной краевой задачи в классе функций $C(\overline{\Omega}) \cap C_\infty(\Omega)$ следует однозначная разрешимость бесконечной системы уравнений (12). Приближенное решение системы может быть получено методом редукции [5].

Теорема 4. *Если $A_m(\lambda)$ и $C(\lambda, \mu)$ такие, что интегралы и ряд (2) сходятся абсолютно, причем функция $C(\lambda, \mu)$ ограничена, то формула (6) представляет непрерывную в области $\overline{\Omega} : \{y \le h, \rho \ge a\}$ гармоническую функцию, удовлетворяющую краевым условиям (1) и имеющую производные любого порядка по x, y, z в области $\Omega : \{y < h, \rho > a\}$.*

Доказательство. Докажем дифференцируемость функции $u(x, y, z)$ по x, y и z. Для этого необходимо показать, что производные функции u по соответствующим переменным при $\rho > a$ и $y < h$ можно вычислить при помощи дифференцирования под знаком интегралов и ряда, т.е. нужно убедиться в равномерной сходимости интегралов и ряда, полученных после дифференцирования подынтегральных выражений.

Рассмотрим первое слагаемое в формуле (6). Продифференцируем соответствующее подынтегральное выражение по переменной x, принимая во внимание, что $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = arctg(y/x)$. Используя рекуррентные соотношения для функции Бесселя $K_m(|\lambda|\rho)$ и ее производной, получим:

$$|B_m(\lambda)e^{i\lambda z}\frac{\partial}{\partial x}(e^{im\varphi}K_m(|\lambda|\rho))| \le |B_m(\lambda)|\Big(\frac{|m|}{\rho}K_m(|\lambda|\rho)+$$

$$+|\lambda|\Big|\frac{\partial K_m(|\lambda|\rho)}{\partial(|\lambda|\rho)}\Big|\Big) \le |B_m(\lambda)|\Big(\frac{m^2}{a}+|\lambda|\Big)K_m(|\lambda|\rho). \qquad (21)$$

Из условия $b_m(\lambda) \in l_2$ следует, что решение системы (12) ограничено: $|b_m(\lambda)| \le R_2(=const)$. Поэтому

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|B_m(\lambda)|\Big(\frac{m^2}{a}+|\lambda|\Big)K_m(|\lambda|\rho)d\lambda \le$$

$$\le R_2\sum_{m=-\infty}^{\infty}(m^2+1)\int_{-\infty}^{\infty}I_m(\lambda a)\Big(\frac{m^2}{a}+|\lambda|\Big)K_m(|\lambda|\rho)d\lambda. \qquad (22)$$

Изменяя порядок суммирования и интегрирования и используя теоремы сложения, найдем мажоранту для подынтегрального выражения в (22):

$$U(\lambda) = |\lambda|K_o(\chi)+|\lambda|\Big(\frac{1}{a}+|\lambda|\Big)\frac{a\rho}{\rho-a}K_1(\chi)+$$

$$+|\lambda|\frac{\rho}{2(\rho-a)}\Big[2\Big(1+\frac{3a\rho}{(\rho-a)^2}\Big)K_1(\chi)+|\lambda|\frac{3a\rho}{\rho-a}\Big(K_0(\chi)+K_2(\chi)\Big)\Big], \qquad (23)$$

где $\chi = |\lambda|(\rho-a)$.

Функция $K_0(\chi)$ при $\lambda = 0$ имеет логарифмическую особенность и экспоненциально убывает при $|\lambda| \to \infty$. Поэтому интеграл от нее сходится при всех $\lambda \in (-\infty,\infty)$ и $\rho > a$. Сходящимися являются также интегралы от остальных слагаемых в (23), если $\rho > a$, т.к. при $|x| \to \infty$ функция $K_j(|x|), j = 1,2$ имеет порядок малости $O(e^{-|x|})$, а при $x \to 0: |x|^j K_j(|x|) = j$.

После дифференцирования второго слагаемого выражения (6) по переменной x в подынтегральном выражении появится множитель $i\mu$. Используя соотношение (9) и ограниченность функции $C(\lambda,\mu)$, получим:

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H(\lambda,\mu)\frac{\partial}{\partial x}(e^{i\lambda z+\gamma y+i\mu x})d\mu d\lambda\Big| \le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\lambda,\mu)||\mu|e^{\gamma y}d\mu d\lambda \le$$

$$\le R_1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\mu|e^{-\gamma(h-y)}d\mu d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\mu|}{2|\gamma|}e^{-\gamma(2h-y)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\omega_2(\lambda,\mu)|^n|B_n(\lambda)|d\mu d\lambda.$$

(24)

Выполняя в первом слагаемом замену переменных $\lambda = \alpha cos\theta$, $\mu = \alpha sin\theta$, оценим его сверху интегралом $R_1 \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha(h-y)} \alpha d\alpha$, сходящимся при $y < h$, $h > a$.

Изменяя во втором слагаемом (24) порядок суммирования и интегрирования, вычисляя интеграл по переменной μ и учитывая, что $|b_m(\lambda)| \leq R_2$, получим оценку для абсолютной величины подынтегрального выражения

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |B_n(\lambda)||K_{n-1}(2\varsigma) - K_{n+1}(2\varsigma)|d\lambda \leq$$

$$\leq \frac{R_2}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda| \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^2+1) I_n(\lambda a)(|K_{n-1}(2\varsigma)| + |K_{n+1}(2\varsigma)|) d\lambda, \qquad (25)$$

где $\varsigma = 2h - y - a$.

Суммируя ряд в (25) по n, придем к интегралу, содержащему функции $|\lambda|^j K_j(|\lambda|\varsigma)$, $j = 0, 1, 2$. Он сходится при $y < h$, $h > a$ и $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Следовательно функция u является дифференцируемой по переменной x в области Ω. Таким же способом можно доказать существование производных любого порядка по x в этой области, а также непрерывность функции u при $\rho \geq a$, $y \geq h$. Дифференцируемость функции u по переменным y и z доказывается аналогично.

Так как $S_m(\rho, z, \varphi; \lambda)$ и $u^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$– базисные решения уравнения Лапласа, а функция $u(x, y, z)$ сколь угодно раз дифференцируема по своим агрументам, то, очевидно, она является гармонической в области Ω и удовлетворяет краевым условиям (1). Теорема доказана.

В качестве иллюстрации метода проводились расчеты для функций $u_{01}(x, z) = \cos(\lambda z) d/(d^2 + x^2)$, $u_{02}(\varphi, z) = 0$, параметров $a = 1$, $d = 1$ и различных значений $\varepsilon = a/h : 0.2, 0.3, 0.5$ и $0, 7$.

Для оценки скорости сходимости метода редукции функция u вычислялась на плоскости Σ_1 и на поверхности цилиндра Σ_2 при $n = 2, 3, 5, 10, 15$ и 25. Для $n = 25$ и $\varepsilon = 0.7$ получено $|u(x, h, z) - u_{01}(x, z)|_{\Sigma_1} < 10^{-15}$ и $|u(\varphi, a, z)|_{\Sigma_2} < 10^{-6}$. На рис. представлена зависимость u от координаты φ при $z = 0$, $\varepsilon = 0.7$, $\lambda = 1$ и $\rho = a + k(h-a)/3$, $k = 1, 2, 3$ (кривые 1, 2, 3 соответственно).

В заключение следует отметить, что предложенным методом могут быть исследованы и другие задачи теории потенциала: задача Неймана, для которой на границах Σ_1 и Σ_2 задана нормальная производная $\partial u/\partial n$; смешанная задача, для которой на одной из граничных поверхностей задана функция u, а на другой - производная $\partial u/\partial n$; третья основная задача с условием $\alpha u + \beta \partial u/\partial n = f$ на граничных поверхностях, а также задача для случая, когда в полость вставлена цилиндрическая неоднородность.

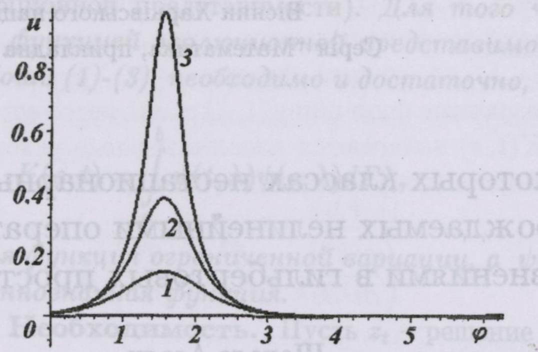


Рис. 1:

ЛИТЕРАТУРА

1. Проценко В.С., Соловьев А.М. О некоторых формулах разложения в теории гармонических функций и их применение к решению краевых задач. // Мат.методы анализа динамических систем. Сб.науч.тр. ХАИ. – 1986. – 8. – С. 50-77.

2. Ерофеенко В.Т. Теоремы сложения. – Минск: Наука и техника, – 1989. – 255 с.

3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.-Л.: Физматгиз, – 1963. – 376 с.

4. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, –1980. – 608 с.

5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, – 1977. – 742 с.