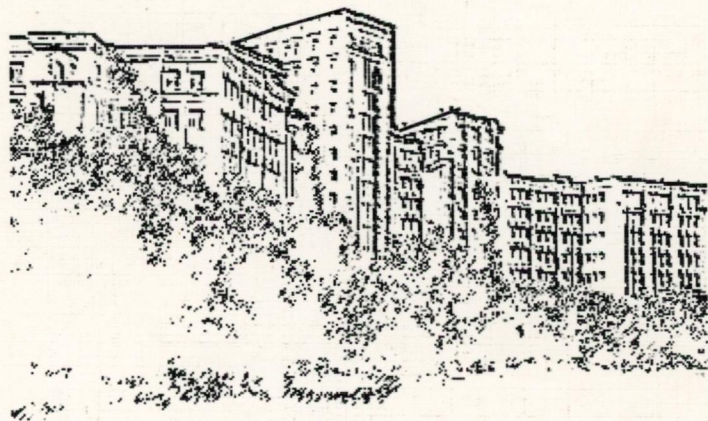


Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна



№ 977

Харків
2011

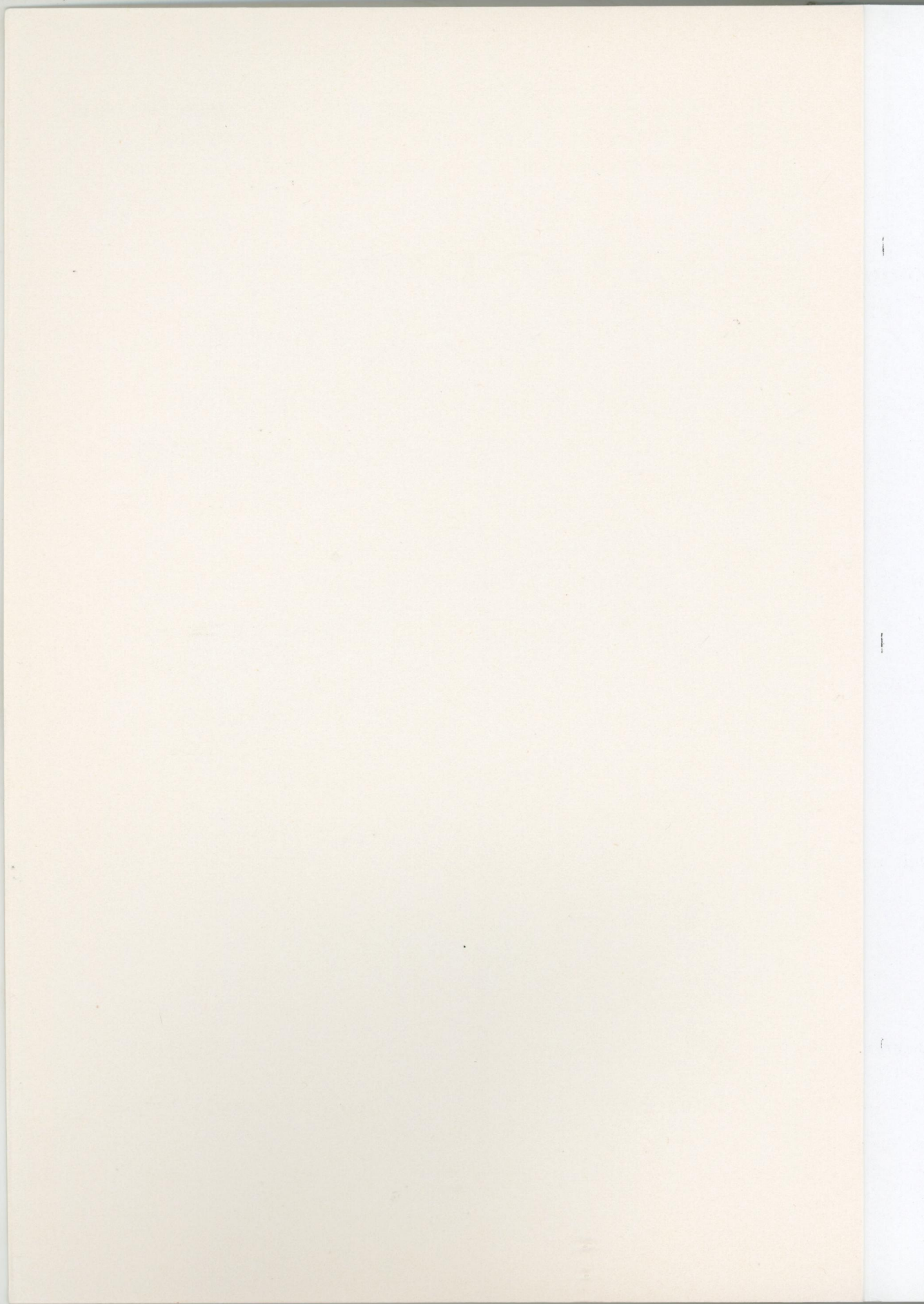
K-14038

П335199

V.N. Karazin Kharkiv National University



00992641 3



ISSN 0453-8048

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

ВІСНИК

Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна



№ 977

Серія

«Математичне моделювання.

Інформаційні технології.

Автоматизовані системи управління»

Випуск 17

Серія заснована у 2003 р.

Харків
2011

До випуску увійшли статті, присвячені дослідженням у галузі математичного моделювання та обчислювальних методів, інформаційних технологій, захисту інформації, висвітлюються нові математичні методи дослідження та керування фізичними, технічними та інформаційними процесами, дослідження з програмування та комп'ютерного моделювання в наукоємних технологіях.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках.

Затверджено до друку рішенням Вченої ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 11 від 11.11.2011 р.)

Редакційна колегія:

Азаренков М.О. (гол. редактор), д.ф.-м.н., член-кор. НАН України, проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Гандель Ю.В., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Жолткевич Г.М., (заст. гол. редактора), д.т.н., проф. ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Золотарьов В.О., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Куклін В.М., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Лазурик В.Т., д.ф.-м.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Мацевитий Ю.М., д.т.н., академік НАН України, проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Міщенко В.О. (відпов. секретар), к.ф.-м.н., доц., ММФ і ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Раскін Л.Г., д.т.н., проф., Національний технічний університет "ХПІ"

Стрельникова О.О., д.т.н., проф. Ін-т проблем машинобудування НАН України

Руткас А.Г., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В. Н. Каразіна

Соколов О.Ю., д.т.н., проф., Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського "ХАІ"

Сорока Л.С., д.т.н., проф., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Стервєєдов М.Г., к.т.н., доц., ФКН ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Целуйко О.Ф., к.ф.-м.н., проф., ІВТ ХНУ імені В.Н. Каразіна

Черваньов І.Г., д.т.н., проф., геолого-географічний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Шейко Т.І., д.т.н., проф., фізико-енергетичний ф-т ХНУ імені В.Н. Каразіна

Щербина В.А., д.ф.-м.н., проф., ММФ ХНУ імені В.Н. Каразіна

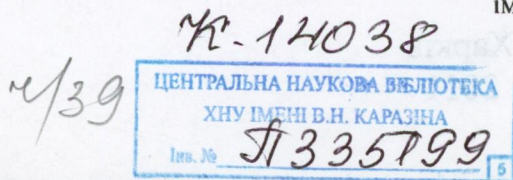
Адреса редакційної колегії: 61022, м. Харків, пл. Свободи, 6, ХНУ імені В. Н. Каразіна, к. 538.

Тел. +380 (57) 707-55-35, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua .

Статті прорецензовано.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 11825-696 ПР від 04.10.2006.

© Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, оформлення, 2011

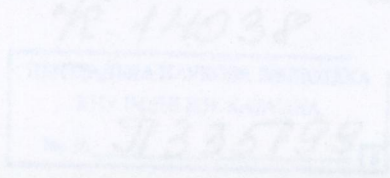


ЗМІСТ

▪ А. А. Артюх, Г. А. Поляков, Е. Г. Толстолужская.	5
Метод формального синтеза мажорированных Си-программ	
▪ А. Ю. Баев.	14
Обучение нейронной сети для параметрического восстановления спектра пучка электронов	
▪ И. А. Баранов.	25
Базис краевых задач с граничными условиями широкого класса для использования вариационных методов	
▪ Т. А. Баранова, О. М. Литвин, К. В. Носов.	35
Обчислювальна схема методу скінчених елементів з вибором оптимальних координатних функцій для еліптичних крайових задач	
▪ А. Я. Бомба, Є. В. Савюк, А. В. Теребус.	50
Метод квазіконформних відображень моделювання процесів руху рідин у водоймах з урахуванням просторових збурень	
▪ А. И. Брунеткин, М. В. Максимов.	60
Определение собственной частоты колебаний жидкости с помощью метода интегральных коэффициентов	
▪ С. В. Волкотруб.	66
Об одном подходе к построению модели управления активами и обязательствами (ALM)	
▪ Л. С. Глоба, Д. С. Лисенко.	74
Складання розкладів для мультипроцесорних систем в оперативному й автономному режимі роботи	
▪ Л. С. Глоба, Р. Л. Новогрудская.	95
Систематизация информационных ресурсов Интернет-портала «Прочность материалов»	
▪ І. М. Глушко.	106
До питання про створення мов запитів: узагальнена таблична алгебра, узагальнені реляційні числення	
▪ В. И. Гнидько, У. Е. Марченко, Е. А. Стрельникова.	115
Метод дискретных особенностей в задачах о вынужденных колебаниях цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью	
▪ М. Б. Головін, О. І. Сомик.	127
Вивчення інформатики в контексті конструювання понятійних ієрархічних структур	

- **А. В. Грибовский, О. А. Елисеев** 135
Алгоритм расчета электродинамических характеристик рассеяния трехмерных гауссовых волновых пучков на плоских экранах
- **И. В. Гушин** 148
Об анализе степени упорядоченности динамической пространственной структуры
- **А. Л. Данченко** 155
Разработка архитектуры информационной технологи мониторинга качества электронных образовательных ресурсов
- **A. G. Zhytaruk, G. N. Zholtkevych** 164
About language for data structures modeling
- **CONTENTS** 174

(Faint, mostly illegible text from the reverse side of the page is visible through the paper, including names and titles of other articles.)



УДК 681.3.06

Метод формального синтеза мажорированных Си-программ

А. А. Артюх¹, Г. А. Поляков², Е. Г. Толстолужская¹¹ Харьковський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків² Академія наук прикладної радіоелектроніки, Москва, Росія

В статье рассмотрены основные этапы синтеза мажорированных Си-программ на основе аппарата структур семантико-числовой спецификации (СЧС). Основные этапы проиллюстрированы на примере разветвляющейся задачи, представленной текстом Си-программы и структурами СЧС.

Ключевые слова: мажорирование, структура программы, граф программы, семантико-числовая спецификация, Си-граф.

У статті розглянуті основні етапи синтезу мажорированих Сі-програм на основі апарату структур семантико-числової специфікації (СЧС). Основні етапи проілюстровані на прикладі розгалуженого завдання, представленого текстом Сі-програми і структурами СЧС.

Ключові слова: мажорировання, структура програми, граф програми, семантико-числова специфікація, Сі-граф.

The article describes the main steps of the synthesis of C-majorized programs based on semantic-unit structures numeric specification (SUS). The main stages are illustrated by a branching problem presented by the text of C programs and structures of SUS.

Key words: majorization, program structure, the graph of the program, the structure of semantic and numeric specification, the C-graph.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Проблема надежности аппаратно-программного обеспечения не нова, но актуальность ее решения не только не уменьшилась, а возросла. Это обусловлено следующими причинами:

- быстрым ростом потенциальной опасности критических технологий и объектов;
- значительным усложнением проблемы обеспечения надежности с расширением состава учитываемых факторов, увеличением сложности алгоритмов и ростом жесткости требований и ограничений, предъявляемых к системам управления (АСУ) критическими технологиями и системами (КТС);
- появлением новых, пока почти не исследованных, возможностей решения проблемы надежности/безопасности и одновременно удовлетворения жестких временных требований и ограничений на основе использования различных методов параллельной обработки информации;
- необходимостью разработки методов и средств автоматического проектирования параллельных аппаратных и программных средств, вызванной практической невозможностью решения рассматриваемой задачи вручную;
- отсутствием полного решения проблемы проектирования высоконадежного программного обеспечения даже для случая традиционных последовательных программ [1-3].

2. Истоки исследования авторов

Настоящая работа опирается на использование мажоритарной логики в параллельных вычислительных процессах как основы повышения достоверности аппаратного и программного обеспечения АСУ [2,4].

3. Цель работы и постановка задачи

В статье рассматриваются основные этапы синтеза параллельных Си-программ, реализующих принцип мажорирования с целью увеличения достоверности полученных результатов.

Исходные данные:

- Си-программа задачи и ее графическое представление в виде Си-графа [5];
- ранжированный по вероятности безотказной работы состав типов операторов Си-программы;
- необходимая величина коэффициентов мажорирования каждого из (или некоторой части) операторов.

Выходные результаты: текст Си-программы, реализующей мажоритарный принцип и представленной структурами семантико-числовой спецификации и мажорированным Си-графом.

4. Результаты исследования

Обобщенный алгоритм формального синтеза мажорированных Си - программ представлен на рис.1.

Поясним содержание основных этапов формального синтеза мажорированных Си - программ на примере конкретной задачи, Си - программа которой представлена текстом 1.

Текст 1 – Исходный текст Си-программы

```
#include <stdio.h>
void main(void) {
    int a,b, z,s;
    scanf("%d %d %d %d",&a);
    scanf("%d %d %d %d",&b);
    if(a == b) {
        z = a * b ;
        printf("%4d\n",z);
    }
    else {
        s = b / a ;
        printf("%4d\n",s);
    } }
}
```

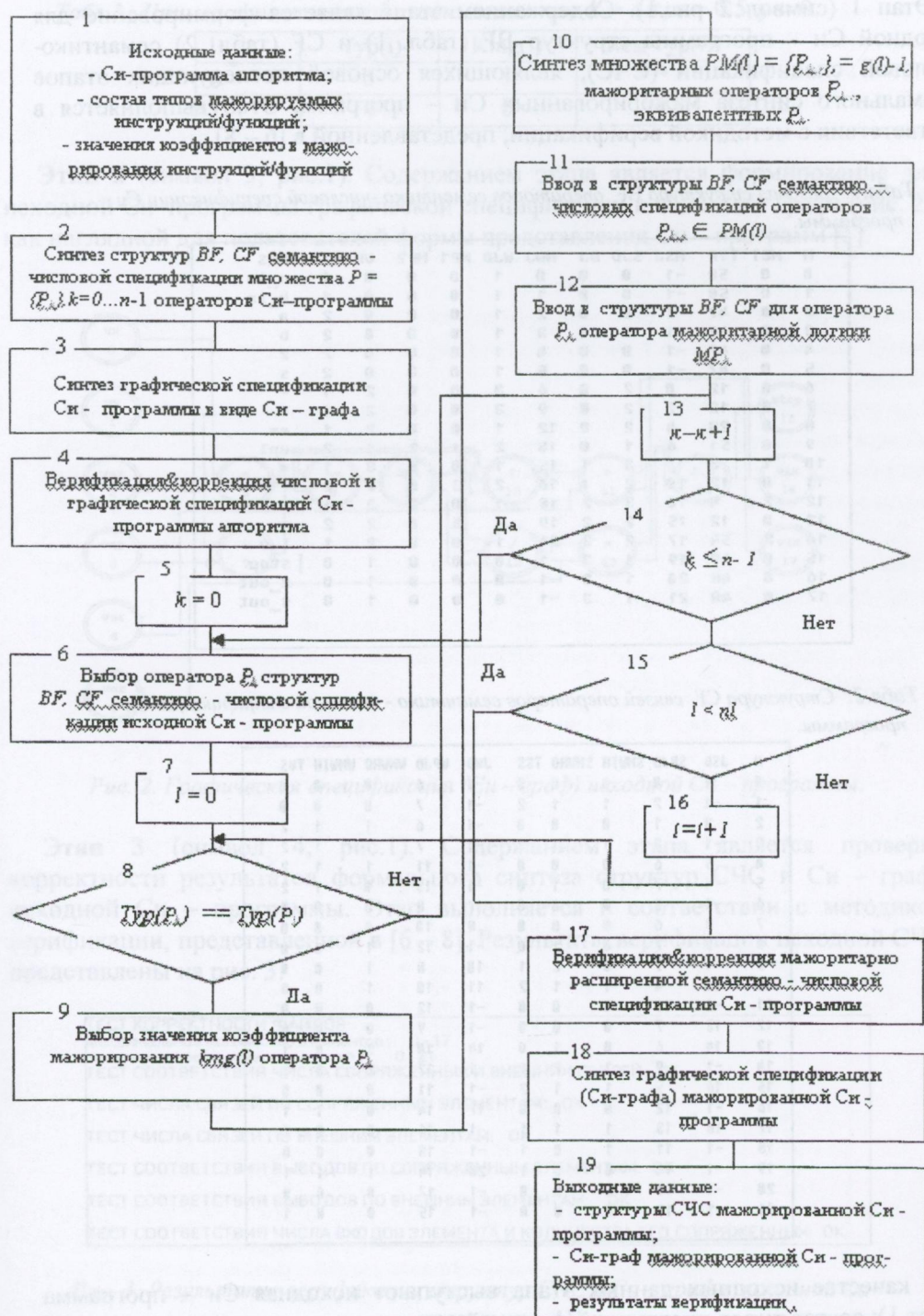


Рис.1. Обобщенный алгоритм формального синтеза структур семантико – числовой спецификации (СНС) мажорированной Си – программы.

Этап 1 (символ 2 рис.1). Содержанием этапа является формирование для исходной Си – программы структур ВФ (табл. 1) и СФ (табл. 2) семантико-числовой спецификации (СЧС), являющихся основой последующих этапов формального синтеза мажорированных Си – программ. Этап выполняется в соответствии с методикой верификации, представленной в [6 – 8].

Табл.1. Базовая структура ВФ операторов семантико -числовой спецификации Си – программы.

N	MET	TYP	NSJ	SJD	BJ	NWJ	WJD	MP1	MP2	UH	UIH	RES
0	0	58	-1	0	0	0	1	0	0	0	1	a_in
1	0	58	-1	0	0	1	1	0	0	0	1	b_in
2	0	47	-1	0	0	2	1	0	0	0	2	a
3	0	47	-1	0	0	3	1	0	0	0	2	b
4	0	47	-1	0	0	4	1	0	0	0	2	z
5	0	47	-1	0	0	5	1	0	0	0	2	s
6	0	12	0	2	0	6	3	0	0	2	1	=
7	0	12	2	2	0	9	3	0	0	2	1	=
8	0	23	4	2	0	12	1	0	0	2	1	==
9	0	51	6	1	0	13	2	1	2	1	2	up1
10	1	3	7	3	1	15	1	0	0	3	1	*
11	0	12	10	2	1	16	2	3	0	2	2	=
12	2	4	12	3	2	18	1	0	0	3	1	/
13	0	12	15	2	2	19	2	3	0	2	2	=
14	3	54	17	2	3	21	1	0	0	2	1	l.o
15	0	49	19	1	3	-1	0	0	0	1	0	stop
16	0	48	20	1	3	-1	0	0	0	1	0	z_out
17	0	48	21	1	3	-1	0	0	0	1	0	s_out

Табл.2. Структура СФ связей операторов семантико - числовой спецификации Си – программы.

N	JSD	SPJD	SNWJH	SNWHD	TSS	JWD	WPJD	WNWHD	WNWJH	TUS
0	1	0	0	0	0	-1	6	0	0	0
1	-1	2	1	1	2	-1	7	0	0	0
2	3	1	0	0	0	-1	6	1	1	2
3	-1	3	1	1	2	-1	7	1	1	2
4	5	6	0	0	0	-1	11	1	1	2
5	-1	7	0	1	0	-1	13	1	1	2
6	-1	8	0	0	0	7	8	0	0	0
7	8	6	0	0	0	8	10	0	0	0
8	9	7	0	1	0	-1	12	1	0	0
9	-1	9	0	2	1	10	8	1	0	0
10	11	4	1	1	2	11	10	1	0	0
11	-1	10	0	0	0	-1	12	0	0	0
12	13	7	0	0	0	-1	9	0	0	0
13	14	6	0	1	0	14	10	2	0	1
14	-1	9	1	2	1	-1	12	2	1	1
15	16	5	1	1	2	-1	11	0	0	0
16	-1	12	0	0	0	17	14	0	1	1
17	18	13	1	1	1	-1	16	0	0	0
18	-1	11	1	0	1	-1	13	0	0	0
19	-1	14	0	0	1	20	14	1	1	1
20	-1	11	0	0	0	-1	17	0	0	0
21	-1	13	0	0	0	-1	15	0	0	1

В качестве исходных данных этапа выступают исходная Си – программа (текст 1); состав типов инструкций/функций, подлежащих мажорированию – тип «*»; значение коэффициента мажорирования оператора типа «*» $kmf(*) = 3$ (табл.3).

Табл.3. Пример «практической сходимости» при $k = 4\pi, x = 0.5, y = 0$.

l	Typ(l)	Kmg(l)	Res(Typ(l))
0	3	3	*
1	4	0	/

Этап 2 (символ 3, рис.1). Содержанием этапа является формирование для исходной Си-программы графической спецификации в виде Си – графа (рис. 2), как наглядной для пользователей формы представления Си – программ [5].

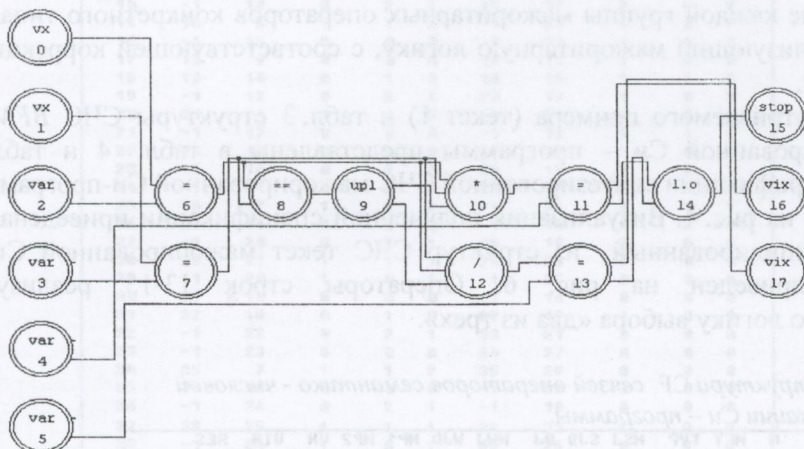


Рис. 2. Графическая спецификация (Си – граф) исходной Си – программы.

Этап 3 (символ 4, рис.1). Содержанием этапа является проверка корректности результатов формального синтеза структур СЧС и Си – графа исходной Си – программы. Этап выполняется в соответствии с методикой верификации, представленной в [6 – 8]. Результаты верификации исходной СЧС представлены на рис. 3.

ТЕСТ КОРРЕКТНОСТИ ФАЙЛОВ:
максимальное количество элементов : 0 - 17
максимальное количество связей : 0 - 21
ТЕСТ СООТВЕТСТВИЯ ЧИСЛА СОПРЯЖЕННЫХ И ВНЕШНИХ СВЯЗЕЙ: ОК
ТЕСТ ЧИСЛА СВЯЗЕЙ ПО СОПРЯЖЕННЫМ ЭЛЕМЕНТАМ: ОК
ТЕСТ ЧИСЛА СВЯЗЕЙ ПО ВНЕШНИМ ЭЛЕМЕНТАМ: ОК
ТЕСТ СООТВЕТСТВИЯ ВЫВОДОВ ПО СОПРЯЖЕННЫМ ЭЛЕМЕНТАМ: ОК
ТЕСТ СООТВЕТСТВИЯ ВЫВОДОВ ПО ВНЕШНИМ ЭЛЕМЕНТАМ: ОК
ТЕСТ СООТВЕТСТВИЯ ЧИСЛА ВХОДОВ ЭЛЕМЕНТА И КОЛИЧЕСТВА ЕГО СОПРЯЖЕННЫХ: ОК

Рис. 3. Результаты верификации структур СЧС и Си – графа исходной Си – программы.

Этап 4 (символы 5 – 14, рис1). Содержанием этапа является выполнение следующих действий:

- выбор текущего оператора P_k структур BF , CF семантико-числовой спецификации исходной Си – программы (табл. 1 и табл. 2);
- проверка принадлежности типа оператора P_k к мажорируемым типам $Typ(L)$ (табл. 3);
- определение значения коэффициента мажорирования $kmg(l)$ оператора P_k ;
- построение для каждого мажорируемого оператора P_k Си-программы множества $PM(l)$ мощности $kmg(l)-1$ мажоритарных операторов, эквивалентных P_k ;
- расширение структур BF , CF СЧС спецификации Си – программы за счет введения мажоритарных операторов;
- замыкание каждой группы мажоритарных операторов конкретного типа на оператор, реализующий мажоритарную логику, с соответствующей коррекцией структур СЧС.

Для рассматриваемого примера (текст 1) и табл. 3 структуры СЧС BFM и CFM мажорированной Си – программы представлены в табл. 4 и табл. 5. Результаты верификации синтезированной СЧС мажорированной Си-программы представлены на рис. 4. Визуализация полученной спецификации приведена на рис. 5. Декомпилированный из структур СЧС текст мажорированной Си – программы приведен на рис. 6. Операторы строк 13-15 реализуют мажоритарную логику выбора «два из трех».

Табл.4. Структура CF связей операторов семантико - числовой спецификации Си – программы.

N	NET	TYP	NSJ	SJD	BJ	NWJ	WJD	MP1	MP2	UH	UIH	RES
0	0	58	-1	0	0	0	1	0	0	0	1	a_in
1	0	58	-1	0	0	1	1	0	0	0	1	b_in
2	0	47	-1	0	0	2	1	0	0	0	2	a
3	0	47	-1	0	0	3	1	0	0	0	2	b
4	0	47	-1	0	0	4	1	0	0	0	2	z
5	0	47	-1	0	0	5	1	0	0	0	2	z1
6	0	47	-1	0	0	6	1	0	0	0	2	z2
7	0	47	-1	0	0	7	3	0	0	0	2	zg
8	0	47	-1	0	0	10	1	0	0	0	2	s
9	0	12	0	2	0	11	5	0	0	2	1	=
10	0	12	2	2	0	16	5	0	0	2	1	=
11	0	23	4	2	0	21	1	0	0	2	1	==
12	0	51	6	1	0	22	4	1	2	1	2	up1
13	1	3	7	3	1	26	1	0	0	3	1	*
14	0	12	10	2	1	27	3	0	0	2	1	=
15	0	3	12	3	1	30	1	0	0	3	1	*
16	0	12	15	2	1	31	5	0	0	2	1	=
17	0	3	17	3	1	36	1	0	0	3	1	*
18	0	12	20	2	1	37	4	0	0	2	1	=
19	0	23	22	2	1	41	1	0	0	2	1	==
20	0	51	24	1	1	42	2	4	6	1	2	up1
21	4	12	25	3	2	44	1	6	0	3	2	=
22	6	54	28	2	3	45	1	0	0	2	1	l.o
23	0	23	30	3	3	46	1	0	0	3	1	==
24	0	51	33	1	3	47	2	7	9	1	2	up1
25	7	12	34	3	4	49	1	9	0	3	2	=
26	9	54	37	2	5	50	1	0	0	2	1	l.o
27	0	23	39	3	5	51	1	0	0	3	1	==
28	0	51	42	1	5	52	2	10	12	1	2	up1
29	10	12	43	3	6	54	2	12	0	3	2	l.o
31	2	4	48	3	8	57	1	0	0	3	1	/
32	0	12	51	2	8	58	2	3	0	2	2	=
33	3	54	53	2	9	60	1	0	0	2	1	l.o
34	0	49	55	1	9	-1	0	0	0	1	0	stop
35	0	48	56	1	9	-1	0	0	0	1	0	z_out
36	0	48	57	1	9	-1	0	0	0	1	0	z1_out

Табл. 5. Структура CFM связей операторов семантико - числовой спецификации мажорированной Си - программы.

N	JSD	SPJD	SNWIH	SNWHD	TSS	JWD	WPJD	MNWHO	MNWIH	TUS
0	1	0	0	0	0	-1	9	0	0	0
1	-1	2	1	1	2	-1	10	0	0	0
2	3	1	0	0	0	-1	9	1	1	2
3	-1	3	1	1	2	-1	10	1	1	2
4	5	9	0	0	0	-1	14	1	1	2
5	-1	10	0	1	0	-1	16	1	1	2
6	-1	11	0	0	0	-1	18	1	1	2
7	8	9	0	0	0	8	21	1	1	2
8	9	10	0	1	0	9	25	1	1	2
9	-1	12	0	2	1	-1	29	1	1	2
10	11	4	1	1	2	-1	32	1	1	2
11	-1	13	0	0	0	12	11	0	0	0
12	13	9	0	0	0	13	13	0	0	0
13	14	10	0	1	0	14	15	0	0	0
14	-1	12	0	2	1	15	17	0	0	0
15	16	5	1	1	2	-1	31	1	0	0
16	-1	15	0	0	0	17	11	1	0	0
17	18	9	0	0	0	18	13	1	0	0
18	19	10	0	1	0	19	15	1	0	0
19	-1	12	0	2	1	20	17	1	0	0
20	21	6	1	1	2	-1	31	0	0	0
21	-1	17	0	0	0	-1	12	0	0	0
22	23	14	0	0	0	23	13	2	0	1
23	-1	16	0	1	0	24	15	2	0	1
24	-1	19	0	0	0	25	17	2	0	1
25	26	7	1	1	2	-1	31	2	1	1
26	27	16	0	0	0	-1	14	0	0	0
27	-1	20	0	2	1	28	19	0	0	0
28	29	21	1	1	1	29	23	0	0	0
29	-1	20	1	0	1	-1	35	0	0	0
30	31	14	0	0	0	-1	16	0	0	0
31	32	18	0	1	0	32	19	1	0	0
32	-1	22	0	2	1	33	21	0	0	0
33	-1	23	0	0	0	34	27	0	0	0
34	35	7	1	1	2	35	29	0	0	0
35	36	18	0	0	0	-1	36	0	0	0
36	-1	24	0	2	1	-1	18	0	0	0
37	38	25	1	1	1	38	23	1	0	0
38	-1	24	1	0	1	39	25	0	0	0
39	40	16	0	0	0	40	27	1	0	0
40	41	18	0	1	0	-1	37	0	0	0
41	-1	26	0	2	1	-1	20	0	0	0
42	-1	27	0	0	0	43	21	2	0	1
43	44	7	1	1	2	-1	22	0	1	1
44	45	16	0	0	0	-1	22	1	1	1
45	-1	28	0	2	1	-1	23	2	0	1
46	47	29	1	1	1	-1	24	0	0	0
47	-1	28	1	0	1	48	25	2	0	1
48	49	18	0	0	0	-1	26	0	1	1
49	50	9	0	1	0	-1	26	1	1	1
50	-1	12	1	2	1	-1	27	2	0	1
51	52	8	1	1	2	-1	28	0	0	0
52	-1	31	0	0	0	53	29	2	0	1
53	54	32	1	1	1	-1	30	0	1	1
54	-1	30	0	0	1	55	30	1	1	1
55	-1	33	0	0	1	-1	38	0	0	0
56	-1	14	0	0	0	-1	33	0	0	1
57	-1	16	0	0	0	-1	32	0	0	0
58	-1	18	0	0	0	59	33	1	1	1
59	-1	29	0	0	0	-1	39	0	0	0
60	-1	32	0	0	0	-1	34	0	0	1

ТЕСТ КОРРЕКТНОСТИ ФАЙЛОВ:

максимальное количество элементов: 0 - 39

максимальное количество связей: 0 - 60

ТЕСТ СООТВЕТСТВИЯ ЧИСЛА СОПРЯЖЕННЫХ И ВНЕШНИХ СВЯЗЕЙ: ОК

ТЕСТ ЧИСЛА СВЯЗЕЙ ПО СОПРЯЖЕННЫМ ЭЛЕМЕНТАМ: ОК

ТЕСТ ЧИСЛА СВЯЗЕЙ ПО ВНЕШНИМ ЭЛЕМЕНТАМ: ОК

ТЕСТ СООТВЕТСТВИЯ ВЫВОДОВ ПО СОПРЯЖЕННЫМ ЭЛЕМЕНТАМ: ОК

ТЕСТ СООТВЕТСТВИЯ ВЫВОДОВ ПО ВНЕШНИМ ЭЛЕМЕНТАМ: ОК

ТЕСТ СООТВЕТСТВИЯ ЧИСЛА ВХОДОВ ЭЛЕМЕНТА И КОЛИЧЕСТВА ЕГО СОПРЯЖЕННЫХ: ОК

Рис. 4. Результаты верификации структур СЧС и Си - графа мажорированной Си - программы.

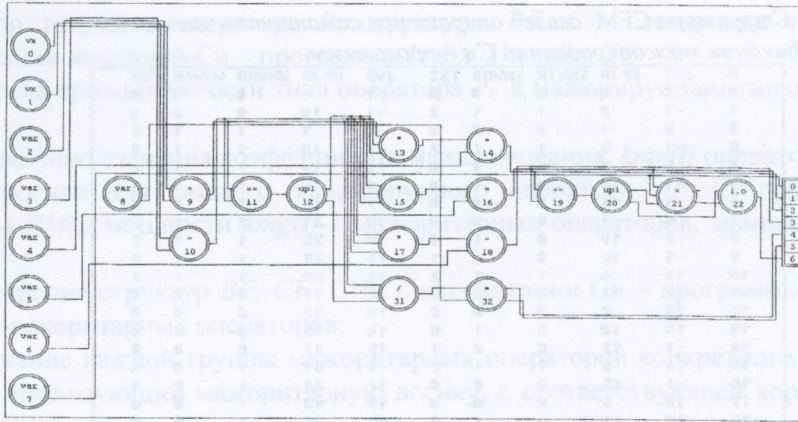


Рис. 5. Графическая спецификация (Си – граф) макросированной Си – программы (начало).

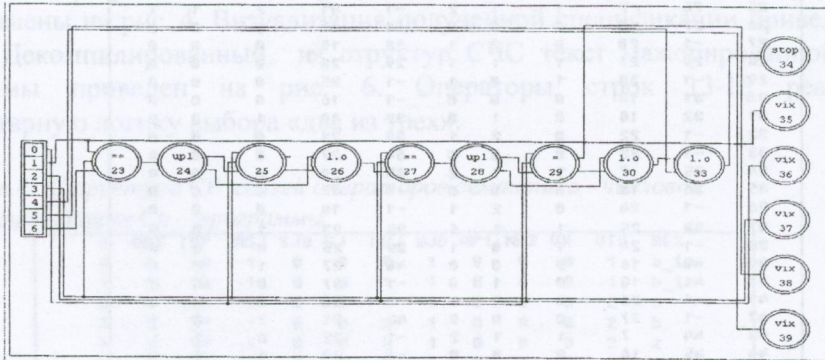


Рис. 5. Графическая спецификация (Си – граф) макросированной Си – программы (окончание).

```

Файл  Проекты  Параметры  Справка
#include <stdio.h>
void main(void)
{
    int a,b;
    int z,z1,z2,zg,s;
    scanf("%d %d %d %d",&a);
    scanf("%d %d %d %d",&b);
    if(a == b)
    {
        z = a * b ;
        z1 = a * b ;
        z2 = a * b ;
    }
    if(z==z1) zg=z1;
    if(z==z2) zg=z2;
    if(z1==z2)zg=z1;
    printf("%d\n",z);
    printf("%d\n",z1);
    printf("%d\n",z2);
    printf("%d\n",zg);
}
else
{
    s = b / a ;
    printf("%d\n",s);
}
}

```

Рис. 6. Декомпилированный из структур СЧС текст макросированной Си – программы.

5. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

1. Одним из способов повышения надежности программного обеспечения является использование мажоритарной логики.

2. Применение аппарата семантико-числовой спецификации обеспечивает возможность формального синтеза программ с повышенной достоверностью результатов вычислений на основе мажоритарного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черкасов Г.Н. Надежность аппаратно – программных комплексов. Питер, 2005. – 479 с.
2. Липаев В.В. Надежность программных средств. Синтег, 1998. – 232 с.
3. Камерон Хьюз, Трейси Хьюз. Параллельное и распределенное программирование с использованием C++. ИД Вильямс, 2004. – 668 с.
4. Поляков Г.А., Толстолужская Е.Г. Аппарат структур временной семантико-числовой спецификации как основа синтеза параллельных аппаратно-программных средств. Всероссийская научная конференция с элементами научной школы для молодежи «параллельная компьютерная алгебра» 11–15 октября 2010 г. Сборник научных трудов – с. 31–39.
5. Поляков Г.А., Онищенко В.В. Визуализация статико – динамических объектов автоматического проектирования мультипараллельных цифровых устройств. Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 7 (35). – С. 169-177.
6. Поляков Г.А., Толстолужский Д.А. Методика комплексной семантико-числовой верификации Си-программ и их временных параллельных моделей. Радіоелектронні і комп'ютерні системи, 2009. №7– с. 240 – 244.
7. Толстолужский Д.А. Автоматизация верификации временных мультипараллельных аппаратно-программных средств. Радіоелектронні і комп'ютерні системи, 2010 г. №5– с. 99 – 103.
8. Поляков Г.А., Толстолужский Д.А.. Компиляционная методика верификации статических и динамических объектов автоматического проектирования мультипараллельных цифровых устройств. Прикладная радиоэлектроника. – Х.: АН ПРЭ. – 2005. – Т. 4 , № 2. –С. 161-167.
9. Поляков Г.А., Скляр В.В., Толстолужский Д.А., Толстолужская Е.Г., Харченко В.С. Проблемы многоверсионного проектирования высоконадежных параллельных программных средств для систем управления критическими технологиями и объектами. Радіоелектронні і комп'ютерні системи, 2006 г. № 7.
10. Поляков Г.А. Адаптивные самоорганизующиеся системы с мультипараллельной обработкой данных–стратегия развития цифровой вычислительной техники в XXI веке. Прикладная радиоэлектроника, Том 1 №1, –Х.: АН ПРЭ, 2002 г. – 537 с.
11. Отчет о НИР. Под редакцией Полякова Г.А., – Х.:НКАУ, 1994 г.– 302 с.

УДК 004.942:519.6

Обучение нейронной сети для параметрического восстановления спектра пучка электронов

А. Ю. Баев

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

В работе рассматриваются методы искусственного интеллекта для решения задачи восстановления спектра пучка электронов по измеренному глубинному распределению поглощенного заряда. Ранее было показано, что для решения указанной задачи могут быть использованы методы, основанные на нейронных сетях. Существенным является выбор вида сети, ее параметров и обучающего множества. Работа посвящена исследованию зависимости между точностью восстановления спектра методом, использующим обобщенно-регрессионную нейронную сеть, и шириной активационной функции нейронов этой сети. В результате выполнения вычислительного эксперимента выделены диапазоны значений ширины активационной функции, для которых точность восстановления спектра пучка электронов максимальна.

Ключевые слова: Обратные задачи спектроскопии, радиационные технологии, компьютерное моделирование, РБФ нейронные сети, активационная функция.

В роботі розглядаються методи штучного інтелекту для вирішення задачі відновлення спектру пучка електронів за виміряним глибинним розподіленням поглиненого заряду. Раніше було показано, що для вирішення вказаної задачі можуть використовуватися методи, які базуються на нейронних мережах. Суттєвим є вибір виду мережі, параметрів її нейронів та множини для навчання. Робота присвячена дослідженню залежності між точністю відновлення спектру методом, що використовує загально-регресійну нейронну мережу, та шириною активационної функції її нейронів цієї мережі. За результатами виконаного обчислювального експерименту виявлені діапазони значень ширини активационної функції, для яких точність відновлення спектру пучка електронів максимальна.

Ключові слова: Обернені задачі спектроскопії, радіаційні технології, комп'ютерне моделювання, РБФ нейронні мережі, активационна функція.

In the work considered methods of artificial intelligence for solving problem of electron spectrum reconstruction by measured distribution of charge deposition. Previously shown that based on neural networks methods can be used to resolve this problem. Accuracy of reconstruction depends on networks type, their parameters and form of neurons activation function. The aim of this work is an investigation of dependency between inaccuracy of spectrum reconstruction based on general regression neural network and neurons smoothness. The results of computational experiment allowed to find points of the dependency under investigation which correspond to maximum accuracy of reconstruction of electron beam spectrum.

Keywords: Inverse problems, radiation technology, computer simulation, RBF neural network, activation function.

1. Общая постановка задачи

Решение обратных задач спектроскопии, в том числе восстановление спектра пучка электронов по измеренному глубинному распределению поглощенной дозы или заряда, связано с рядом проблем вызванных неустойчивостью решения интегрального уравнения Фредгольма I рода, описывающего процесс косвенного измерения [1]:

$$\int_{E_L}^{E_R} Q(x, E) y(E) dE = f(x). \quad (1)$$

В дискретном случае – измерение соответствующих величин методом поглотителей – интеграл (1) приближается системой уравнений вида:

$$Ay = f, \quad (2)$$

где элементы матрицы A определяются на основе зависимости $Q(x, E)$, а также дискретизации спектра электронов $y(E_j)$ (шаг ΔE выбирается при решении обратной задачи) и свойств дискретного набора $f(x_i)$ (шаг Δx задается характеристиками измерительного прибора). Очевидно, что в процессе измерения к значениям $f(x_i)$ добавляется погрешность, обусловленная несовершенством методов измерения и различными внешними факторами. Далее через f будем обозначать набор истинных значений функции $f(x)$, а через \tilde{f} – значения функции $f(x)$, дополненные нормально распределенной погрешностью.

Некорректные обратные задачи спектроскопии могут быть рассмотрены как задачи многомерной аппроксимации, т.е. сводятся к поиску функции $\tilde{y} = \varphi(\tilde{f})$ такой, что $Err(\tilde{f}, A\tilde{y}) \rightarrow \min$. В работах [2, 3] для их решения рассматриваются методы, основанные на нейронных сетях (НС) [4, 5]. Обучение и тестирование в предложенном подходе основаны на использовании наборов данных, соответствующих реальным входным спектрам и результатам измерений, которые получены на базе существующих компьютерных моделей физических процессов.

В [6] истинные спектры параметризуются, и НС обучается так, что результатом ее работы являются численные значения соответствующих параметров. Обученная НС представляет собой отображение $\Phi: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{R}^M$, где N – количество детектирующих слоев дозиметра, а M – количество параметров спектра, базовые точки $(E_{p_1}, E_{p_2}, \dots, E_{p_M}, \tilde{f})_l$, т.е. различные спектры и соответствующие им распределения поглощенного заряда, используются для формирования обучающей выборки. Согласно [6] для параметрического восстановления спектра пучка электронов по распределению поглощенного заряда целесообразно использовать разновидность радиально базисной сети – обобщенную регрессионную нейронную сеть [7], результаты работы которой обладают наименьшей дисперсией в сравнении с другими нейронными сетями и классическими методами обработки результатов. Однако для этого вида нейронных сетей выявлена не зависящая от погрешности измерительного прибора систематическая ошибка, выраженная смещением восстановленного спектра вдоль оси абсцисс (см. рис. 1).

Способности к аппроксимации нейронной сети на радиально-базисных функциях в соответствии с [8, 9] зависят от ширины активационной функции (α), а согласно общей постановке задачи аппроксимации функции от выбранных базовых точек.

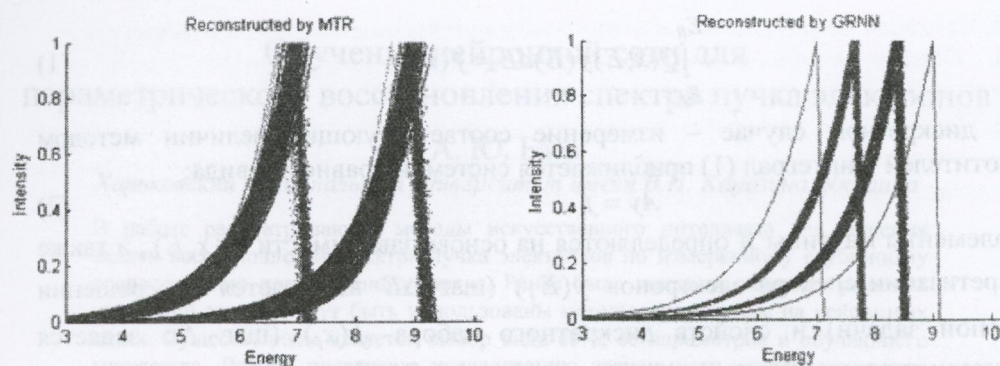


Рис. 1. Спектры восстановленные методом регуляризации Тихонова и обобщенно регрессионной нейронной сетью.

В этой связи работа посвящена исследованию вида зависимости величины смещения восстановленного спектра, т.е. точности восстановления спектра электронов нейронной сетью, от α и характеристик множества для обучения.

2. Вычислительный эксперимент

2.1 Общее описание

Исследование влияния параметров НС на точность восстановления спектра электронов в рассматриваемой задаче выполнено согласно статистическому эксперименту, рассмотренному в [10]. На каждой итерации цикла Common (см. рис. 2) генерируются наборы экспериментальных данных для обучения и тестирования НС с использованием модели процесса взаимодействия ионизирующего излучения с веществом и модели процесса измерения глубинного распределения заряда. После обучения НС выполняется восстановление энергетического распределения пучка электронов и оценка отклонения восстановленного спектра от истинного (цикл DataEvaluation) для каждого набора тестовой выборки. В цикле Common варьируется величина α , а дисперсия погрешности измерений остается неизменной. Завершающим этапом эксперимента является расчет статистических характеристик результатов всех итераций: среднего, стандартного отклонения, – и на их основе формирование графиков, отображающих зависимость между величиной отклонения восстановленного спектра от его истинного значения и α .

Прямая задача. Пучок электронов падает на измерительный прибор, состоящий из чередующихся поглотителей и детектирующих слоев. В результате взаимодействия, электроны останавливаются на различной глубине, а детектирующие слои фиксируют дискретный набор пар «глубина-заряд» – (x_i, \tilde{f}_i) . Очевидно, что значение измеренного заряда \tilde{f}_i отличается от его истинного значения f_i на величину погрешности измерительного прибора σ .

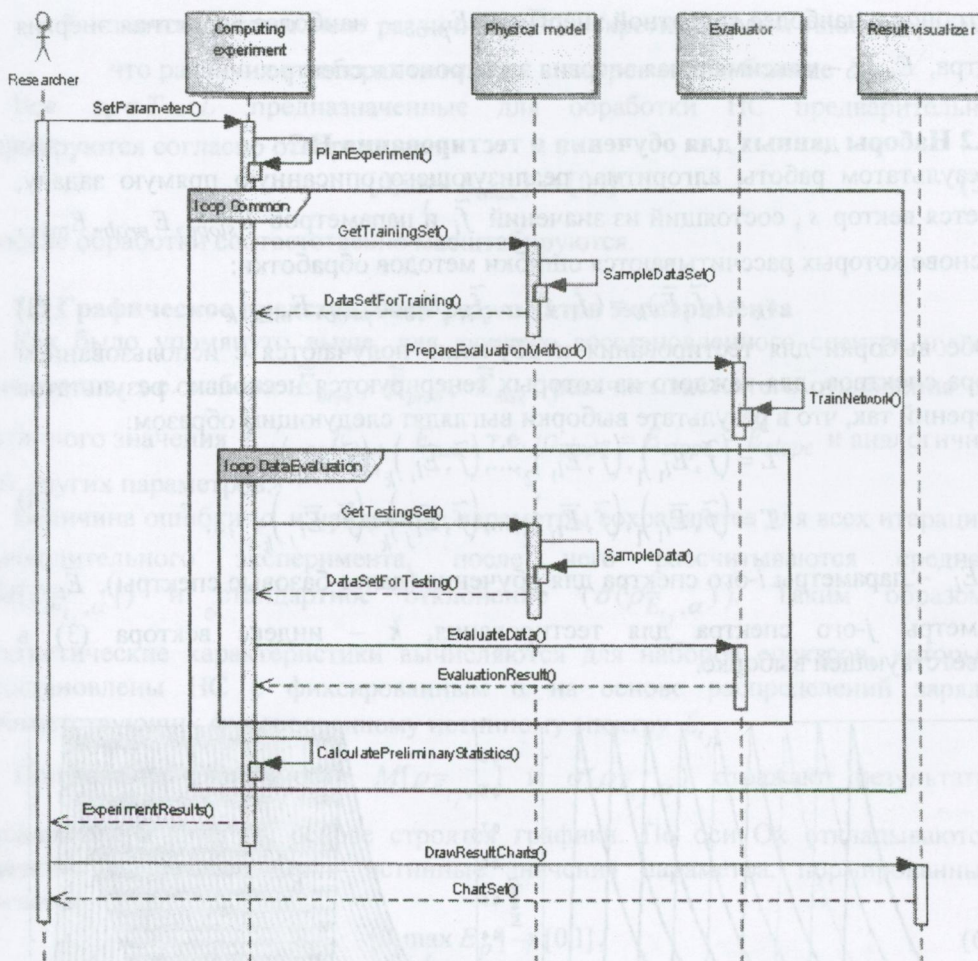


Рис. 2. Диаграмма последовательности вычислительного эксперимента

Описанный процесс взаимодействия моделируется с использованием эмпирико-теоретических компьютерных моделей [11], а процесс измерения – нормально распределенной погрешностью со стандартным отклонением от 0% до 15%. В работе распределение пучка электронов задается согласно уравнениям:

$$y(E, \bar{E}) = \begin{cases} e^{\mu(E-E_{prob})}, & 0 < E \leq E_{prob} \\ k_1 E + k_2, & E_{prob} < E \leq E_{max} \\ 0, & E > E_{max} \end{cases}, \quad (2)$$

$$\mu = \frac{\ln(0.1)}{E_{slope} - E_{prob}}, k_1 = \frac{1}{E_{prob} - E_{max}}, k_2 = \frac{E_{max}}{E_{max} - E_{prob}}$$

где $\bar{E} = (E_{slope}, E_{prob}, E_{max})$, E_{slope} – энергия электронов, для которых интенсивность по левому склону спектра в 10 раз меньше интенсивности

6615334

электронов с наиболее вероятной энергией, E_{prob} – наиболее вероятная энергия спектра, E_{max} – максимальная энергия электронов в спектре.

2.2 Наборы данных для обучения и тестирования НС

Результатом работы алгоритма, реализующего описанную прямую задачу, является вектор s , состоящий из значений \tilde{f}_i и параметров $E_{slope}, E_{prob}, E_{max}$, на основе которых рассчитываются ошибки методов обработки:

$$s_k = (\tilde{f}, \bar{E})_k = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_N, E_{10}, E_{prob}, E_{max})_k. \quad (3)$$

Обе выборки для тестирования и обучения получают с использованием набора спектров, для каждого из которых генерируются несколько результатов измерений так, что в результате выборки выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} L &= (\tilde{f}, \bar{E}_{l_1})_1, (\tilde{f}, \bar{E}_{l_1})_2, \dots, (\tilde{f}, \bar{E}_{l_1})_k, (\tilde{f}, \bar{E}_{l_1})_{k+1}, \dots \\ T &= (\tilde{f}, \bar{E}_{t_1})_1, (\tilde{f}, \bar{E}_{t_1})_2, \dots, (\tilde{f}, \bar{E}_{t_j})_k, (\tilde{f}, \bar{E}_{t_j})_{k+1}, \dots \end{aligned}, \quad (4)$$

где \bar{E}_{l_i} – параметры i -ого спектра для обучения (далее базовые спектры), \bar{E}_{t_j} – параметры j -ого спектра для тестирования, k – индекс вектора (3) в соответствующей выборке.

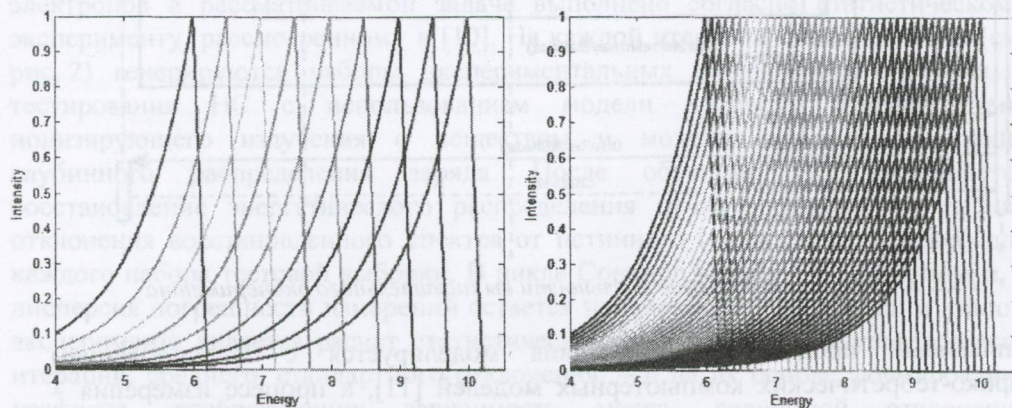


Рис. 3. Спектры для а) обучения (базовые) и б) тестирования НС.

На рис. 3 показан пример использованных спектров. Видно, что число базовых спектров меньше числа спектров используемых для обучения. Их совокупность задает диапазон возможных при тестировании значений параметров E_{slope} , E_{prob} , E_{max} и определяет базовые точки, необходимые для построения аппроксимирующей поверхности. Стоит отметить, что множество L может быть разбито на подмножества для непосредственно обучения и валидации процесса обучения в зависимости от используемого алгоритма.

При выборе спектров допускаются следующие предположения:

1. неопределенность δ^* истинного энергетического распределения электронов считается много меньше, чем неопределенность процедуры измерения,

2. значения компонент различных \bar{E} дискретизированы таким образом, что различия в наборах истинных спектров много больше δ^* .

Все $s_k \in T \cup L$ предназначенные для обработки НС предварительно нормируются согласно отображению

$$[0; \max_L E_{\max}] \rightarrow [0; 1] \quad (5)$$

и после обработки соответственно масштабируются.

2.3 Графическое представление результатов эксперимента

Как было упомянуто выше, для каждого восстановленного спектра пучка электронов, т.е. набора \tilde{E}_{slope} , \tilde{E}_{prob} , \tilde{E}_{max} , рассчитывается его отклонение от истинного значения E_{slope} , E_{prob} , E_{max} , т.е. $\rho_{slope} = E_{slope} - \tilde{E}_{slope}$ и аналогично для других параметров.

Величина ошибки ρ и найденные параметры сохраняются для всех итераций вычислительного эксперимента, после чего рассчитываются среднее ($M[\rho_{\bar{E}_{ij}, \alpha}]$) и стандартное отклонение ($\sigma(\rho_{\bar{E}_{ij}, \alpha})$). Таким образом, статистические характеристики вычисляются для наборов спектров, которые восстановлены НС с фиксированным α на основе распределений заряда соответствующих фиксированному истинному спектру \bar{E}_{ij} .

Полученные зависимости $M[\rho_{\bar{E}_{ij}, \alpha}]$ и $\sigma(\rho_{\bar{E}_{ij}, \alpha})$ отражают результаты эксперимента и на их основе строятся графики. По оси Ох откладываются значения α , по оси Оу – истинные значения параметра, нормированные согласно:

$$[0; \max_L E_p] \rightarrow [0; 1], \quad (6)$$

где E_p – один из параметров E_{slope} , E_{prob} , E_{max} для которого строится график. По оси Oz откладываются значения $M[\rho]$ или $\sigma(\rho)$.

3. Результаты и обсуждение

Программная реализация модели прямой задачи, методов обработки результатов измерений и алгоритмов обработки результатов вычислительного эксперимента выполнена в среде MATLAB. Реализации НС – функция newgrnn. Общие параметры вычислительного эксперимента представлены в табл. 1.

Табл. 1. Параметры вычислительного эксперимента

Параметр (1)	Значение (2)	Параметр (3)	Значение (4)
Базовые спектры	Левый спектр: $[E_{slope}; E_{prob}; E_{max}] = [4; 6; 6.2]$ Правый спектр: $[E_{slope}; E_{prob}; E_{max}] = [8; 10; 10.2]$ Число спектров: 3, 4, ..., 9	Измеряемая хар-ка	Распред. заряда

(1)	(2)	(3)	(4)
Спектры (тестирование)	Левый спектр: $[E_{10}; E_{prob}; E_{max}] = [4; 6; 6.2]$ Правый спектр: $[E_{10}; E_{prob}; E_{max}] = [8; 10; 10.2]$ Число спектров: 41	Сетка дискретизации по x	$[0; 6], \Delta x = 1$
Сетка дискретизации по E	$E \in [3; 10.2], \Delta E = 0.1$	Материал поглотителей	Al: ($A = 27,$ $Z = 13$)
Мощность L (набор для обучения)	3.9×1000	Погрешность измерений (d)	5%
Мощность T (набор для тестирования)	41×1000	Число измерителей	7
α	0.01..1 с шагом 0.01		

На рис. 4-6 показаны графики-зависимости ошибки определения соответствующих параметров спектра электронов. На верхних трех графиках каждого рисунка ось Oz соответствует систематической ошибке $M[\rho]$ восстановления, а на нижних – статистической $\sigma(\rho)$. Стоит отметить, что графики идентичны для различных параметров спектра. В этой связи на рис. 7 показаны регрессионные зависимости только для параметра E_{slope} с учетом, что для E_{prob} и E_{max} графики будут аналогичны.

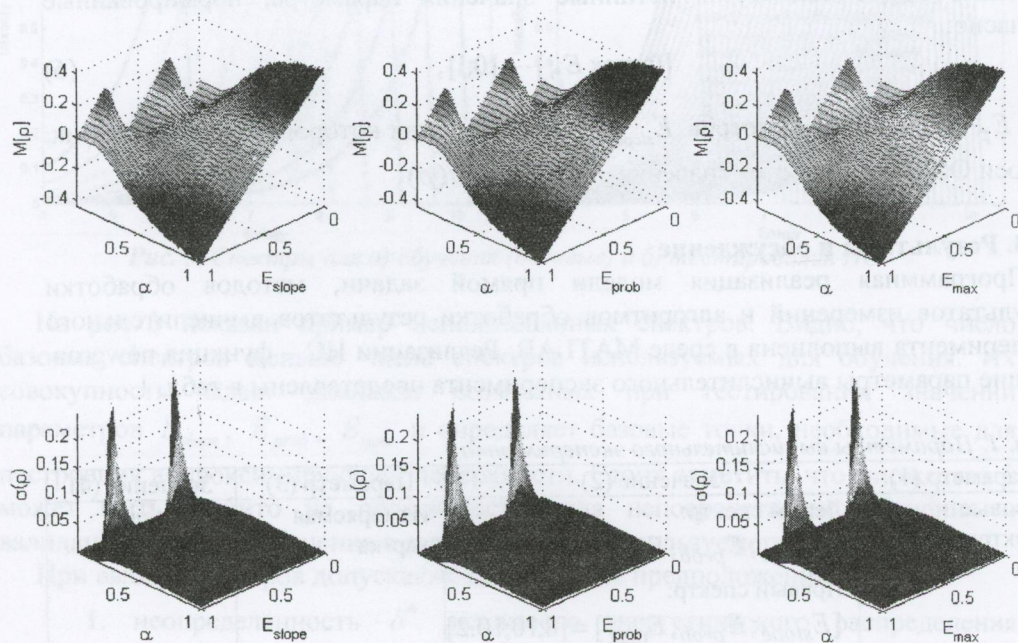


Рис. 4. Зависимость ошибок восстановления параметров спектров от α для 3 базовых спектров.

На рис. 4-6 видно, что с увеличением значения α возникают значительные систематические ошибки, а при значениях менее 0.05 увеличивается дисперсия результатов. В результате при больших α результаты НС стремятся к середине задаваемого базовыми спектрами интервала, а при малых α стремятся к собственно базовым спектрам, что видно на графиках регрессионных зависимостей (см. рис. 7). Учитывая, что ось Oz соответствует величине ошибки, очевидно, что оптимальным значением α будет такая, при которой изменение функций $M[\rho]$ и $\sigma(\rho)$, описывающей перпендикулярное Ox сечение графика, будет стремиться к 0.

Сопоставление графиков на рис. 4-6 показывает, что с увеличением числа базовых спектров выделяется область, в которой изменение $M[\rho]$ и $\sigma(\rho)$ минимально. Графики на рис. 4, 5 и 6 соответствуют экспериментам, в которых использованы 3, 5 и 9 базовых спектра. Видно, что увеличение числа последних приводит к минимизации изменений $M[\rho]$ и $\sigma(\rho)$ при малых значениях параметра α . В тоже время на зависимости $\sigma(\rho)$ уменьшается высота пиков соответствующих базовым спектрам, но значения функции около основания пиков изменяется слабо. Таким образом, можно предположить существование максимального числа базовых спектров такого, что дальнейшее его увеличение не приводит к улучшению качества восстановления.

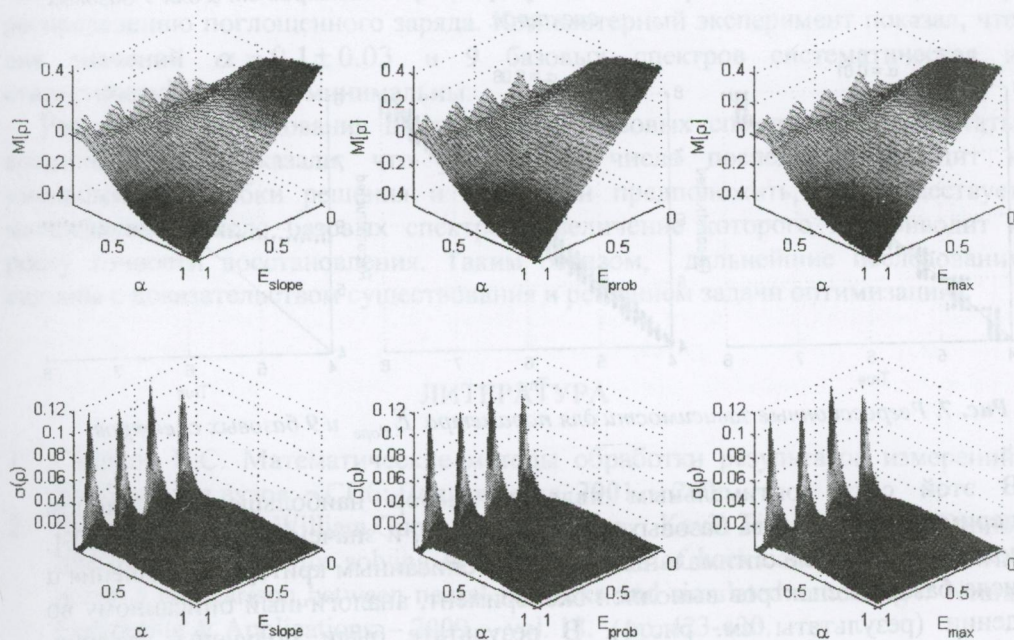


Рис. 5. Зависимость ошибок восстановления параметров спектров от α для 5 базовых спектров.

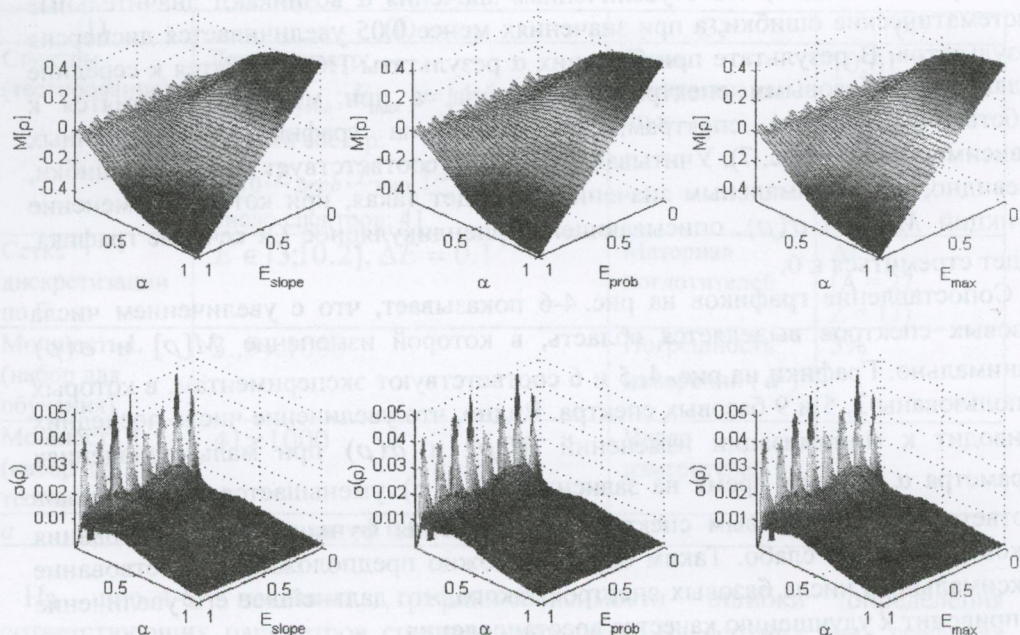


Рис. 6. Зависимость ошибок восстановления параметров спектров от α для 9 базовых спектров.

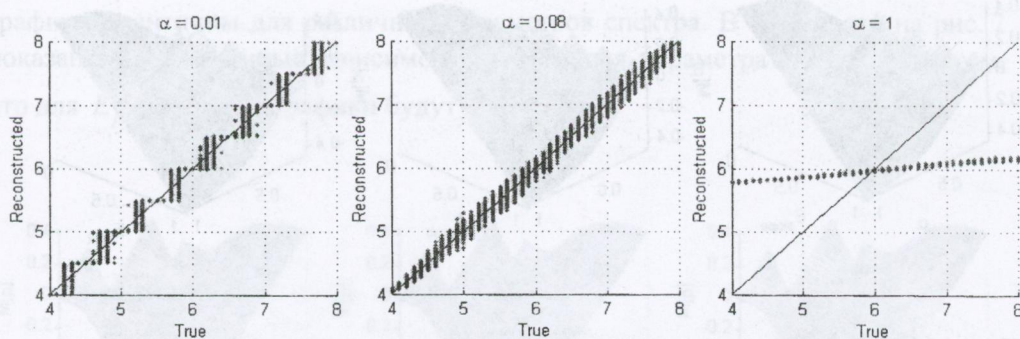


Рис. 7. Регрессионные зависимости для параметра E_{slope} и 9 базовых спектров.

В этой связи оптимальным является выбор наибольшего в данном эксперименте количества базовых спектров, т.е. 9, и значения α близким к 0.1. Используя найденные оптимальные, согласно описанным критериям, значения α и числа базовых спектров выполнен эксперимент, аналогичный описанному во введении (результаты см. рис. 1). В результате были получены графики, представленные на рис. 8, на которых видно, что с помощью НС возможно получать приемлемые решения задачи восстановления спектра пучка электронов на основе глубинного распределения заряда.

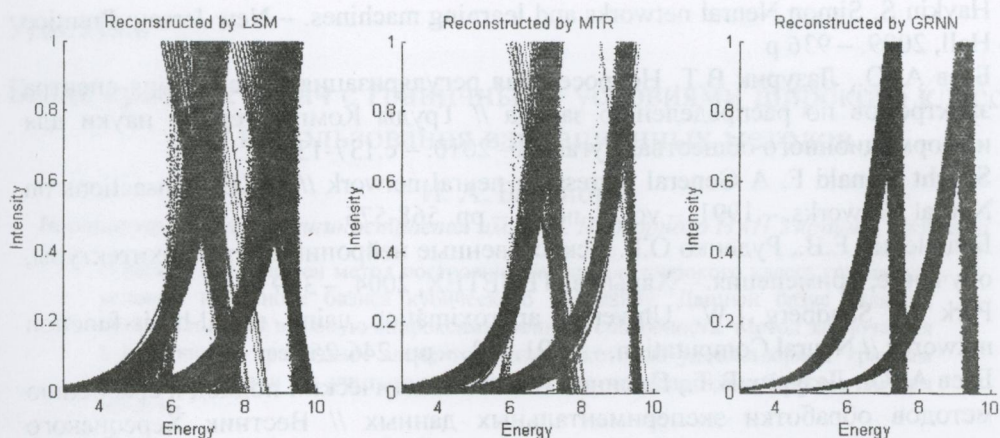


Рис. 8. Спектры, восстановленные методом наименьших квадратов, регуляризации Тихонова и обобщенно регрессионной нейронной сетью с $\alpha = 0.1$ и 9 базовыми спектрами.

4. Выводы

Определены значения ширины активационной функции обобщенно-регрессионной нейронной сети, для которых максимальна точность решения задачи восстановления спектра пучка электронов по измеренному распределению поглощенного заряда. Компьютерный эксперимент показал, что для значений $\alpha = 0.1 \pm 0.03$ и 9 базовых спектров систематическая и статистическая ошибки минимальны.

Результаты исследования влияния числа базовых спектров на результаты восстановления показали, что увеличение числа последних приводит к уменьшению ошибки решения и позволили предположить, что существует максимальное число базовых спектров, увеличение которого не приводит к росту точности восстановления. Таким образом, дальнейшие исследования связаны с доказательством существования и решением задачи оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений: Учебник для вузов. – СПб: Политехника, 2001. – 240с.
2. Michael M. Li, William Guo, Brijesh Verma, Kevin Tickle, John O'Connor Intelligent methods for solving inverse problems of backscattering spectra with noise: a comparison between neural networks and simulated annealing // Neural Computing & Applications. – 2009. – vol. 18. – pp. 423-430.
3. Баев А.Ю., Лазурик В.Т. Регуляризация процедуры определения энергии фотонов методами искусственного интеллекта // Вестник Харьковского национального университета. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2010. – №890., вып. 13. – с.5-11.
4. Bishop Christopher M. Neural networks for pattern recognition. – New York: Oxford University Press Inc., 1996. – 482 p.

5. Haykin S. *Simon Neural networks and learning machines.* – New Jersey: Prentice Hall, 2009. – 936 p
6. Баев А.Ю., Лазурик В.Т. Нейросетевая регуляризация определения спектра электронов по распределению заряда // Труды Компьютерные науки для информационного общества, Луганск – 2010. – с.137-138
7. Specht Donald F. A General regression neural network // *IEEE Transactions on Neural Networks.* – 1991. – vol. 2, no. 6. – pp. 568-576.
8. Бодянский Е.В., Руденко О.Г. Искусственные нейронные сети: архитектуры, обучение, применения. – Харьков: ТЕЛТЕХ, 2004. – 369 с.
9. Park J., Sandberg I.W. Universal approximation using radial-basis-function networks // *Neural Computation.* – 1991. – 3. – pp. 246-257
10. Баев А.Ю., Лазурик В.Т., Починок А.В. Статистический подход к сравнению методов обработки экспериментальных данных // Вестник Херсонского национального технического университета, - 2010. – вып. 3(39). – С.53-57.
11. Valentina Lazurik, Tatsuo Tabata, Valentin Lazurik, A database for electron-material interactions // *Radiation Physics and Chemistry.* – 2001. – vol. 60 issue 3. – p. 161

УДК 519.6

Базис краевых задач с граничными условиями широкого класса для использования вариационных методов

И. А. Баранов

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Украина

В работе представлен метод построения базиса для широкого класса граничных условий на основе базиса кубического В-сплайну. Данный базис является полным и имеет высокую аппроксимационную способность. Метод заключается в построении граничных элементов базиса, которые удовлетворяют краевым условиям задачи и учитывают стыковку со стандартным базисом внутри области.

Ключевые слова: базис краевой задачи, вариационные методы, численное решение.

У роботі представлений метод побудови базису для широкого класу граничних умов на основі базису кубічного В-сплайну. Даний базис є повним та має високу апроксимаційну здатність. Метод полягає в побудові граничних елементів базису, які задовольняють крайовим умовам задачі і враховують стыковку зі стандартним базисом в середині області.

Ключові слова: базис крайової задачі, варіаційні методи, чисельне рішення.

The method of basis construction for wide class boundary conditions based on the basis of cubic B-spline is presented in work. This basis is full and has high approximation characteristics. This method consists in construction of boundary elements of basis which are satisfied the boundary conditions of problem and took into account the joint with a standard basis into a domain.

Key words: basis of the boundary value problem, variations method, numerical solution.

Применение вариационных методов математической физики [1,2] для решения краевых задач дифференциальных уравнений – очень эффективно, однако, при этом, удовлетворение краевым условиям составляет зачастую серьезную проблему. Метод R-функций [3-6] академика НАН Украины Рвачева В.Л. позволил решить эту проблему. Данный метод преобразует некоторый стандартный базис в базис краевой задачи, что позволяет точно учесть граничные условия, а также обеспечить полноту построенного базиса. Однако, структура решения краевой задачи построенная по методу R-функций преобразует все элементы базиса, что требует определенных затрат машинного времени. Кроме того, чем сложнее область решения задачи, тем сложнее функции, входящие в оператор преобразования базиса, что увеличивает время счета. Таким образом, актуальной задачей является построение эффективных базисов краевых задач для дифференциальных уравнений. Для многих прикладных задач удобными, с вычислительной точки зрения, являются базисы, состоящие из финитных функций, которые получаются переносом некоторого элемента [3]. В настоящее время, широкое употребление получили базисные сплайны [7,8], благодаря их высоким аппроксимационным свойствам и удобству применения. В данной работе предлагается метод построения базиса для граничных широкого класса на основе базиса В-сплайна. Базисные элементы, носители которых целиком лежат внутри области решения краевой задачи, остаются без изменения, таким образом, обеспечивается аппроксимация

в некоторой области, целиком лежащей в области решения задачи, а элементы базиса, носители которых пересекают границу области решения задачи, заменяются на базисные элементы, удовлетворяющие краевым условиям задачи и учитывающие стыковку с базисом внутри области. Таким образом, метод построения базиса сводится к построению граничных элементов. Благодаря такой схеме можно существенно увеличить скорость решения краевых задач.

Данный подход был применен для построения базиса смешанной краевой задачи. В данной работе, впервые, представлен метод построения базиса для широкого класса граничных условий.

Рассмотрим задачу построения базиса для одномерной краевой задачи на основе базиса кубического В-сплайна.

Рассмотрим возможные случаи граничных условий в некоторой точке (для определенности в точке 0):

1. Одно граничное условие. В общем случае:

$$\left\{ a_0^1 u(x) + a_1^1 u'(x) + a_2^1 u''(x) \right\}_{x=0} = b_0; \quad (1)$$

2. Два граничных условия. В общем случае:

$$\begin{cases} \left\{ a_0^1 u(x) + a_1^1 u'(x) + a_2^1 u''(x) \right\}_{x=0} = b_1; \\ \left\{ a_0^2 u(x) + a_1^2 u'(x) + a_2^2 u''(x) \right\}_{x=0} = b_2; \end{cases} \quad (2)$$

3. Три граничных условия. В общем случае:

$$\begin{cases} \left\{ a_0^1 u(x) + a_1^1 u'(x) + a_2^1 u''(x) \right\}_{x=0} = b_1; \\ \left\{ a_0^2 u(x) + a_1^2 u'(x) + a_2^2 u''(x) \right\}_{x=0} = b_2; \\ \left\{ a_0^3 u(x) + a_1^3 u'(x) + a_2^3 u''(x) \right\}_{x=0} = b_3; \end{cases} \quad (3)$$

Граничные условия вида (2) (при $k_2^2 \neq 0, k_0^1 \neq 0$) и (3) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{cases} \left\{ \tilde{a}_0^1 u(x) + \tilde{a}_1^1 u'(x) \right\}_{x=0} = \tilde{b}_1; \\ \left\{ \tilde{a}_1^2 u'(x) + \tilde{a}_2^2 u''(x) \right\}_{x=0} = \tilde{b}_2; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} u(x)|_{x=0} = \tilde{b}_1; \\ u'(x)|_{x=0} = \tilde{b}_2; \\ u''(x)|_{x=0} = \tilde{b}_3; \end{cases} \quad (5)$$

Представленные условия можно привести к однородным:

$$\left\{ k_0^1 u(x) + k_1^1 u'(x) + k_2^1 u''(x) \right\}_{x=0} = 0; \quad (6)$$

$$\begin{cases} k_0^1 u(x) + k_1^1 u'(x) \Big|_{x=0} = 0; \\ k_1^2 u'(x) + k_2^2 u''(x) \Big|_{x=0} = 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} u(x) \Big|_{x=0} = 0; \\ u'(x) \Big|_{x=0} = 0; \\ u''(x) \Big|_{x=0} = 0; \end{cases} \quad (8)$$

Пусть для определенности решается задача на отрезке $[0, a]$. И пусть рассматривается задача построения базиса на основе базиса кубического В-сплайна $\{\varphi_i\}$ с диаметром носителя $2h$. Элементы, носители которых лежат внутри области, остаются без изменения (рис. 1, жирные линии).

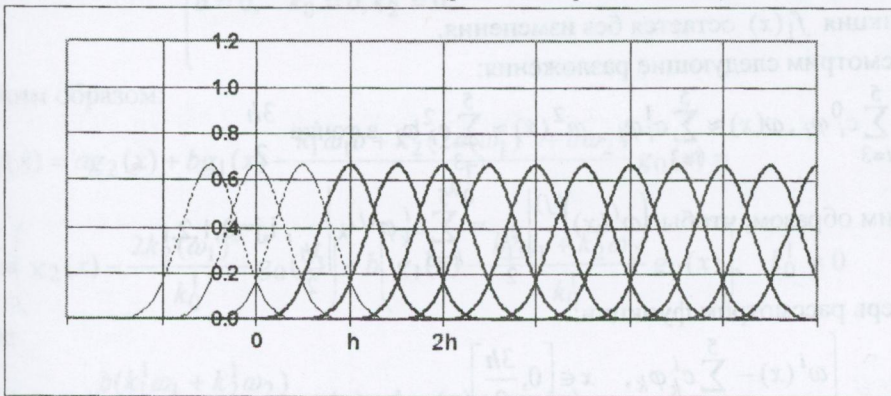


Рис. 1. Стандартный базис кубического В-сплайна.

Рассмотрим метод построения граничных элементов базиса, удовлетворяющих краевым условиям (6-8).

Пусть есть некоторая функция $\omega(x)$, такая что: $\omega(0) = 0, \omega'(0) = \omega_1, \omega''(0) = 0$.

Рассмотрим произвольную функцию $F(x)$. Рассмотрим некоторое приближение функции $F(x)$ в окрестности 0.

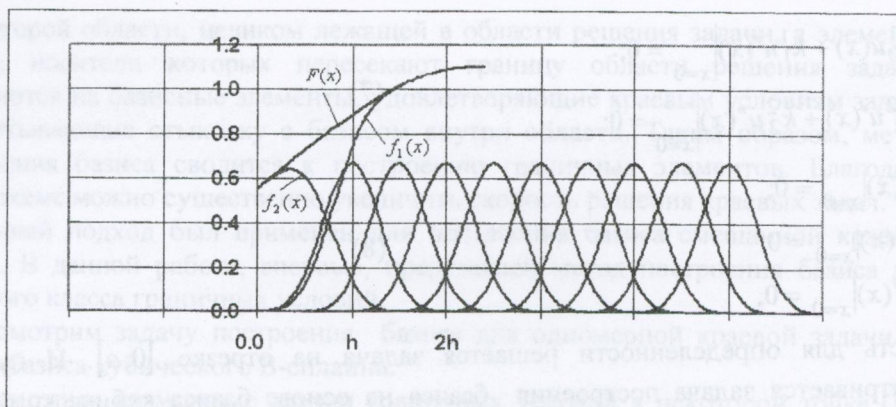
$$F(x) = a\omega^2(x) + b\omega(x) + c + \delta.$$

Данную функцию необходимо разложить по новому базису, удовлетворяющему краевым условиям.

Построим разложение функции $F(x)$ по стандартному базису кубического В-сплайна:

$$F(x) \approx \sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i.$$

$$\text{Рассмотрим } F(x) \approx f_2(x) + f_1(x) = \sum_{i=0}^2 c_i \varphi_i + \sum_{i=3}^{2n} c_i \varphi_i \quad (\text{рис.2}).$$

Рис.2. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Функция $f_1(x)$ остается без изменения.

Рассмотрим следующие разложения:

$$1 = \sum_{i=3}^5 c_i^0 \varphi_i, \quad \omega(x) \approx \sum_{i=3}^5 c_i^1 \varphi_i, \quad \omega^2(x) \approx \sum_{i=3}^5 c_i^2 \varphi_i \quad \text{в точке } \frac{3h}{2}.$$

$$\text{Таким образом, чтобы } \left(\omega^i(x) \right)^{(j)} \Big|_{\frac{3h}{2}} = \sum_{k=3}^5 c_k^i \varphi_k^{(j)} \Big|_{\frac{3h}{2}}, \quad i, j = 0, 1, 2.$$

Теперь рассмотрим функции:

$$g_i(x) = \begin{cases} \omega^i(x) - \sum_{k=3}^5 c_k^i \varphi_k, & x \in \left[0, \frac{3h}{2} \right], \\ 0, & x > \frac{3h}{2} \end{cases}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Функции $g_i(x) \in C^2[0, a]$.

Теперь в качестве функции $f_2(x)$ возьмем:

$$\tilde{f}_2 = ag_2(x) + bg_1(x) + cg_0(x).$$

$$F(x) \approx \tilde{f}_2(x) + f_1(x) = ag_2(x) + bg_1(x) + cg_0(x) + \sum_{i=3}^{2n} c_i \varphi_i.$$

Рассмотрим случай удовлетворения условию

$$k_0^1 u(x) + k_1^1 u'(x) + k_2^1 u''(x) \Big|_{x=0} = 0.$$

Потребуем выполнения граничного условия от функции $F(x)$:

$$\text{Так как, } \left(\sum_{k=3}^{2n} c_k \varphi_k \right)^{(i)} \Big|_0 = 0, \text{ а также } \left(\sum_{k=3}^{2n} c_k^i \varphi_k \right)^{(i)} \Big|_0 = 0 \quad i = 0, 1, 2;$$

$$\begin{aligned} & \left(k_0^1 F(x) + k_1^1 F'(x) + k_2^1 F''(x) \right) \Big|_0 = \\ & = \left(k_0^1 (a\omega^2(x) + b\omega(x) + c) + k_1^1 (2a\omega(x)\omega'(x) + b\omega'(x)) + \right. \\ & \left. + k_2^1 (2a(\omega'(x))^2 + 2a\omega(x)\omega''(x) + b\omega''(x)) \right) \Big|_0 = \\ & = k_0^1 c + k_1^1 \omega_1 b + k_2^1 (2a(\omega_1)^2 + b\omega_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда следует} \begin{cases} c = -\frac{k_1^1 \omega_1 b + k_2^1 (2a(\omega_1)^2 + b\omega_2)}{k_0^1}, & k_0^1 \neq 0; \\ a = -\frac{b(k_1^1 \omega_1 + k_2^1 \omega_2)}{2k_2^1 (\omega_1)^2}, & k_0^1 = 0, k_2^1 \neq 0; \\ b = 0, & k_0^1 = 0, k_2^1 = 0. \end{cases}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= ag_2(x) + bg_1(x) - \frac{k_1^1 \omega_1 b + k_2^1 (2a(\omega_1)^2 + b\omega_2)}{k_0^1} g_0(x) = \\ &= a \left(g_2(x) - \frac{2k_2^1 (\omega_1)^2}{k_0^1} g_0(x) \right) + b \left(g_1(x) - \frac{k_1^1 \omega_1 + k_2^1 \omega_2}{k_0^1} g_0(x) \right), \quad k_0^1 \neq 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -\frac{b(k_1^1 \omega_1 + k_2^1 \omega_2)}{2k_2^1 (\omega_1)^2} g_2(x) + bg_1(x) + cg_0(x) = \\ &= b \left(g_1(x) - \frac{(k_1^1 \omega_1 + k_2^1 \omega_2)}{2k_2^1 (\omega_1)^2} g_2(x) \right) + cg_0(x), \quad k_0^1 = 0, \quad k_2^1 \neq 0 \end{aligned}$$

или

$$f_2(x) = ag_2(x) + cg_0(x), \quad k_0^1 = 0, \quad k_2^1 = 0;$$

Таким образом, функции

$$\begin{cases} \left\{ g_2(x) - \frac{2k_2^1 (\omega_1)^2}{k_0^1} g_0(x), \quad g_1(x) - \frac{k_1^1 \omega_1 + k_2^1 \omega_2}{k_0^1} g_0(x) \right\}, & k_0^1 \neq 0; \\ \left\{ g_1(x) - \frac{(k_1^1 \omega_1 + k_2^1 \omega_2)}{2k_2^1 (\omega_1)^2} g_2(x), \quad g_0(x) \right\}, & k_0^1 = 0, k_2^1 \neq 0; \\ \{ g_2(x), \quad g_0(x) \}, & k_0^1 = 0, \quad k_2^1 = 0; \end{cases}$$

можно взять в качестве первых двух элементов базиса. Данные функции удовлетворяют условию $k_0^1 u(x) + k_1^1 u'(x) + k_2^1 u''(x) \Big|_{x=0} = 0$.

Рассмотрим случай удовлетворения условию
$$\begin{cases} k_0^1 u(x) + k_1^1 u'(x) \Big|_{x=0} = 0; \\ k_1^2 u'(x) + k_2^2 u''(x) \Big|_{x=0} = 0; \end{cases}$$

Потребуем выполнения данного граничного условия от функции $F(x)$:

$$\begin{aligned} \text{Так как, } \left(\sum_{k=3}^{2n} c_k \varphi_k \right) \Big|_0^{(i)} = 0, \text{ а также } \left(\sum_{k=3}^{2n} c_k^i \varphi_k \right) \Big|_0^{(i)} = 0, \quad i = 0, 1, 2; \\ \left(k_0^1 F(x) + k_1^1 F'(x) \right) \Big|_0 = \\ = \left(k_0^1 (a\omega^2(x) + b\omega(x) + c) + k_1^1 (2a\omega(x)\omega'(x) + b\omega'(x)) \right) \Big|_0 = \\ = k_0^1 c + k_1^1 \omega_1 b = 0 \\ \left(k_1^2 F'(x) + k_2^2 F''(x) \right) \Big|_0 = \\ = \left(k_1^2 (2a\omega(x)\omega'(x) + b\omega'(x)) + k_2^2 (2a(\omega'(x))^2 + 2a\omega(x)\omega''(x) + b\omega''(x)) \right) \Big|_0 = \\ = k_1^2 b\omega_1 + k_2^2 (2a\omega_1)^2 + b\omega_2 = 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{cases} c = -\frac{k_1^1 \omega_1 b}{k_0^1}, & k_0^1 \neq 0; \\ b = 0 & k_0^1 = 0; \\ a = -\frac{b(k_1^2 \omega_1 + k_2^2 \omega_2)}{2k_2^2 (\omega_1)^2}, & k_2^2 \neq 0; \\ b = 0, & k_2^2 = 0; \end{cases}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -\frac{b(k_1^2 \omega_1 + k_2^2 \omega_2)}{2k_2^2 (\omega_1)^2} g_2(x) + b g_1(x) - \frac{k_1^1 \omega_1 b}{k_0^1} g_0(x) = \\ &= b \left(g_1(x) - \frac{(k_1^2 \omega_1 + k_2^2 \omega_2)}{2k_2^2 (\omega_1)^2} g_2(x) - \frac{k_1^1 \omega_1}{k_0^1} g_0(x) \right), \quad k_0^1 \neq 0, k_2^2 \neq 0 \end{aligned}$$

или

$$f_2(x) = a g_2(x), \quad k_0^1 \neq 0, k_2^2 = 0$$

или

$$f_2(x) = c g_0(x), \quad k_0^1 = 0, k_2^2 = 0$$

Таким образом, функцию

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ g_1(x) - \frac{(k_1^2 \omega_1 + k_2^2 \omega_2)}{2k_2^2 (\omega_1)^2} g_2(x) - \frac{k_1^1 \omega_1}{k_0^1} g_0(x) \right\}, \quad k_0^1 \neq 0, k_2^2 \neq 0 \\ \{g_2(x)\}, \quad k_0^1 \neq 0, k_2^2 = 0 \\ \{g_0(x)\}, \quad k_0^1 = 0, k_2^2 \neq 0 \end{array} \right.$$

можно взять в качестве первого элементов базиса. Данные функции удовлетворяют условию:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0^1 u(x) + k_1^1 u'(x) \Big|_{x=0} = 0; \\ k_1^2 u'(x) + k_2^2 u''(x) \Big|_{x=0} = 0; \end{array} \right.$$

Рассмотрим случай удовлетворения условию $\left\{ \begin{array}{l} u(x) \Big|_{x=0} = 0; \\ u'(x) \Big|_{x=0} = 0; \\ u''(x) \Big|_{x=0} = 0; \end{array} \right.$

Потребуем выполнения данного граничного условия от функции $F(x)$:

Так как, $\left(\sum_{k=3}^{2n} c_k \varphi_k \right) \Big|_0^{(i)} = 0$, а также $\left(\sum_{k=3}^{2n} c_k^i \varphi_k \right) \Big|_0^{(i)} = 0, i = 0, 1, 2;$

$$F(x) \Big|_0 = (a\omega^2(x) + b\omega(x) + c) \Big|_0 = c = 0$$

$$F'(x) \Big|_0 = (2a\omega(x)\omega'(x) + b\omega'(x)) \Big|_0 = b\omega_1 = 0$$

$$F''(x) \Big|_0 = (2a(\omega'(x))^2 + 2a\omega(x)\omega''(x) + b\omega''(x)) \Big|_0 = 2a(\omega_1)^2 + b\omega_2 = 0$$

Отсюда следует, что $a = b = c = 0$

Таким образом: $f_2(x) = 0$

Теорема.

Если в качестве функции $\omega(x)$ взять функцию $\omega(x) = x$, то любую функцию из пространства сплайн-функций, удовлетворяющую граничным условиям вида (6-8) можно точно разложить по построенному базису.

Доказательство.

Рассмотрим следующие разложения:

$$1 = \sum_{i=0}^{2n} c_i^0 \varphi_i, \quad x = \sum_{i=0}^{2n} c_i^1 \varphi_i, \quad x^2 = \sum_{i=0}^{2n} c_i^2 \varphi_i,$$

Тогда:

$$g_i(x) = \sum_{k=0}^2 c_k^i \varphi_k, \quad i = 0, 1, 2.$$

Рассмотрим произвольную функцию вида: $\sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i$.

Предположим, что:

$$\sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i = a \sum_{i=0}^2 c_i^2 \varphi_i + b \sum_{i=0}^1 c_i^1 \varphi_i + c \sum_{i=0}^0 c_i^0 \varphi_i + \sum_{i=3}^{2n} c_i \varphi_i$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^2 c_i \varphi_i = a \sum_{i=0}^2 c_i^2 \varphi_i + b \sum_{i=0}^1 c_i^1 \varphi_i + c \sum_{i=0}^0 c_i^0 \varphi_i$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} c_0^2 & c_0^1 & c_0^0 \\ c_1^2 & c_1^1 & c_1^0 \\ c_2^2 & c_2^1 & c_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Столбцы матрицы линейно независимые, так как функции $\{1, x, x^2\}$ линейно независимые. Таким образом детерминант матрицы $\det C \neq 0$. Следовательно, существует C^{-1} .

Тогда

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, всегда можно представить:

$$\sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i = a \sum_{i=0}^2 c_i^2 \varphi_i + b \sum_{i=0}^1 c_i^1 \varphi_i + c \sum_{i=0}^0 c_i^0 \varphi_i + \sum_{i=3}^{2n} c_i \varphi_i.$$

Теперь, если потребовать выполнение граничных условий вида (6-8) от произвольной функции из пространства сплайн-функций:

$$\left\{ k_0^1 \sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i + k_1^1 \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i \right)' + k_2^1 \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i \right)'' \right\}_{x=0} = 0;$$

$$\left\{ k_0^1 \sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i + k_1^1 \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i \right)' \right\}_{x=0} = 0;$$

$$\left\{ k_1^2 \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i \right)' + k_2^2 \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i \right)'' \right\}_{x=0} = 0;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i \Big|_{x=0} = 0; \\ \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i \right)' \Big|_{x=0} = 0; \\ \left(\sum_{i=0}^{2n} c_i \varphi_i \right)'' \Big|_{x=0} = 0; \end{cases}$$

приходим к условиям:

$$\begin{cases} c = -\frac{k_1^1 b + 2k_2^1 a}{k_0^1}, & k_0^1 \neq 0; \\ a = -\frac{bk_1^1}{2k_2^1}, & k_0^1 = 0, k_2^1 \neq 0; \\ b = 0, & k_0^1 = 0, k_2^1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -\frac{k_1^1 b}{k_0^1}, & k_0^1 \neq 0; \\ b = 0 & k_0^1 = 0; \\ a = -\frac{bk_1^2}{2k_2^2}, & k_2^2 \neq 0; \\ b = 0, & k_2^2 = 0; \\ a = b = c = 0 \end{cases}$$

Это совпадает с выведенными условиями, при: $\omega_1 = 1$; $\omega_2 = 0$.

Теорема доказана.

Численная реализация предложенного подхода

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} f''(x) = -\pi \sin(\pi x), & x \in [0,1]; \\ 2f'(x) + f(x) \Big|_0 = 0; \\ f(x) \Big|_1 = 0; \end{cases}$$

Аналитическим решением данной задачи будет функция: $\frac{1}{\pi} \sin(\pi x) - 2x + 2$.

Для данной задачи применим метод наименьших квадратов [1,2].

Результаты вычислительного эксперимента (количество сплайнов 21):

x	solution	$\sin(x\pi)-\pi$	Abs(solution- ($\sin(x\pi)-\pi$))
0.00000000000	1.99999835514	2.00000000000	0.00000164486
0.10000000000	1.89836160274	1.89836316431	0.00000156156
0.20000000000	1.78709638640	1.78709785676	0.00000147035
0.30000000000	1.65751674338	1.65751810740	0.00000136402
0.40000000000	1.50272945458	1.50273069146	0.00000123688
0.50000000000	1.31830880093	1.31830988618	0.00000108526
0.60000000000	1.10272978355	1.10273069146	0.00000090791
0.70000000000	0.85751740132	0.85751810740	0.00000070608
0.80000000000	0.58709737322	0.58709785676	0.00000048344
0.90000000000	0.29836291863	0.29836316431	0.00000024568
1.00000000000	0.00000000000	0.00000000000	0.00000000000

Выводы

В данной работе представлен метод построения базиса для краевых задач с граничными условиями широкого класса на основе базиса В-сплайна. Доказана теорема, показывающая полноту построенного базиса.

Для дифференциальных уравнений, оператор которых представляет линейную комбинацию самой функции и ее различных производных, элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений, построенных по методу наименьших квадратов, Рунца и др.[1,2] будут повторяться и их можно будет вычислить даже аналитически. Что позволит существенно сократить время счета и уменьшить накопление погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М. Наука, 1970.- 512 с.
2. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М. Мир, 1985.- 590 с.
3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. –552 с.
4. Баранов И.А., Кравченко О.В., Суворова И.Г. Метод R-функций для расчета взаимосвязанных полей в гидротоках//Вісник ХНУ. – Харьков, 2007. – №780. – С.9–18.
5. Баранов И.А., Кравченко О.В., Суворова И.Г. Расчет гидродинамических характеристик потока вязкой несжимаемой жидкости методом R – функций// Вісник ХНУ. – Харьков, 2008. – №809. – С. 9–19.
6. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. – Харьков, ИПМаш НАН Украины, 2009. –306 с.
7. Д. Роджерс, Дж.Адамс. Математические основы машинной графики.– М. Мир, 2001.- 604 с.
8. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М. Наука, 1984. – 352 с.

УДК 519.63

Обчислювальна схема методу скінчених елементів з вибором оптимальних координатних функцій для еліптичних крайових задач

Т. А. Баранова¹, О. М. Литвин², К. В. Носов³¹Національний технічний університет «ХПІ»²Українська інженерно-педагогічна академія³Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

У статті пропонується схема для наближеного розв'язання еліптичних крайових задач у частинних похідних парного порядку методом скінчених елементів для областей спеціального вигляду. Знаходження наближеного розв'язку ґрунтується на варіаційних принципах, причому знаходженню підлягають як вузлові параметри, так і координатні функції, які утворюють наближений розв'язок. На відміну від раніше пропонуваних схем, з кожним вузлом сітки пов'язується своя система координатних функцій, що дозволяє отримати більш високу точність наближення.

Ключові слова: еліптичні задачі, варіаційні методи, метод скінчених елементів, оптимальні координатні функції, інтегро-диференціальні рівняння.

В статье предложена схема для приближенного решения эллиптических краевых задач в частных производных четного порядка методом конечных элементов для областей специального вида. Нахождение приближенного решения основано на вариационных принципах, причем нахождению подлежат как узловые параметры, так и координатные функции, формирующие приближенное решение. В отличие от предложенных ранее схем, с каждым узлом сетки связывается своя система координатных функций, что позволяет получить более высокую точность приближения.

Ключевые слова: эллиптические задачи, вариационные методы, метод конечных элементов, оптимальные координатные функции, интегро-дифференциальные уравнения.

In the paper the schema for approximate solution of elliptic boundary problems in partial derivatives of even order by the finite element method for special shaped domains is suggested. Calculation of approximate solution is based upon variational principles, and node parameters and coordinate functions, which both form a solution, are calculated. In contrast to earlier suggested schemas, in this case a specified system of coordinate functions corresponds to each node of mesh. This fact allows to obtain higher precision of approximation.

Key words: elliptic problems, variational method, finite element method, optimal coordinate functions, integro-differential equations.

1. Вступ

При математичному моделюванні стаціонарних процесів різної фізичної природи, серед яких можна назвати стаціонарний розподіл тепла, дифузію, електростатичні та електромагнітні явища, деформаційні процеси, часто виникає необхідність у розв'язанні крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь. Для розв'язання цих крайових задач застосовуються різні аналітичні та наближені методи. При цьому застосування перших можливо лише у випадках найпростіших областей та диференціальних операторів, а останні, наближені методи, посідають основне місце. Найбільш відомими наближеними методами є метод скінчених різниць, варіаційні та проєкційні методи (методи Релея-Рітца,

Бубнова-Гальоркіна, Канторовича), метод інтегральних співвідношень Дородніцина, спектральні методи. Метод скінченних елементів (МСЕ) для еліптичних задач, який є частинним випадком варіаційних методів, посідає одне з найважливіших місць серед наближених методів для задач цього класу.

При побудові схем МСЕ виникає задача вибору системи координатних функцій, за допомогою яких будується наближений розв'язок. Використання тієї чи іншої системи координатних функцій підпорядковується задачам забезпечення потрібного класу диференційованості шуканого наближеного розв'язку в області інтегрування та досягнення необхідного порядку збіжності наближеного розв'язку до точного (при подрібненні сітки). В залежності від способів розбиття області на елементи різної геометричної форми та умов задачі в роботах різних авторів (наприклад, Р. Варга, Ж. Деклу, Г.І. Марчук, С.Г. Міхлін, С.Б.Стечкін, Ю.Н. Суботін, Г.Стренг, Дж. Фікс, Ф.С'ярле, Г. Біркгофф, М. Шульц) досліджені різні системи координатних функцій. Завдяки простоті обчислення, в тому числі на ЕОМ, і відомим аналітичним властивостям, найбільш широкого розповсюдження набули поліноміальні інтерполянти різного типу — Зламала, Женішека, елементи Клафа-Точера та інші. Коригування степені поліноміальних інтерполянтів та/або згущення сітки розбиття в околі точок з особливостями точного розв'язку з метою отримання кращого наближення, що враховує особливу поведінку згаданого точного розв'язку, покладено в основу адаптивних схем МСЕ [1-2].

Незважаючи на різноманітність схем МСЕ для еліптичних задач з частинними похідними, практичне отримання розв'язку з великою точністю зустрічає серйозні перешкоди у зв'язку із стрімким зростанням обчислювальних витрат та накопиченням похибок округлення при збільшенні ступенів свободи та/або збільшенні степені використовуваних інтерполянтів. Тому розробка обчислювальних схем МСЕ, які при заданому, як правило, відносно невеликому, числі степенів свободи забезпечують мінімальну похибку, залишається цілком актуальною.

Аналіз згаданих схем МСЕ показав, що побудова систем координатних функцій враховує лише деякі властивості крайової задачі (належність узагальненого розв'язку до певного класу, задовільнення головним крайовим умовам тощо) і мало пов'язана з властивостями диференціального оператора задачі. Тому врахування цих властивостей привело до одного з плідних підходів до розв'язання цієї проблеми. Деякі загальні результати відносно вибору скінченновимірною базису для побудови наближених розв'язків крайових задач, зокрема, для МСЕ, отримані у роботах J. J. Goel [3], Г.І. Марчука та В.І. Агошкова [4], С. Г. Міхліна [5], В.В. Смелова [6] та інших.

Схеми МСЕ з вибором координатних функцій, які є оптимальними з точки зору мінімізації функціоналу енергії варіаційної задачі, що еквівалентна початковій, вперше запропоновані у роботах О. М. Литвина [7-8]. У подальших роботах О. М. Литвина, К. В. Носова, Т. А. Баранової [9-13] були розроблені різні обчислювальні схеми для МСЕ з вибором координатних функцій. Так, у роботі [10] координатні функції наближеного розв'язку будувалися з використанням сплайнів першого степеня, параметри яких визначалися з умови мінімуму функціоналу енергії з використанням методу Гауса-Зейделя. У роботах

[11-12] була розроблена ітераційна схема "фліп-флоп", згідно якої сукупності вузлових параметрів та координатних функцій обчислювалися на окремих кроках ітераційного процесу.

Метою даної роботи є розробка обчислювальної схеми МСЕ з вибором координатних функцій, яка у відомому сенсі є узагальненням попередніх схем [7-13]. Узагальнення торкається використання своєї системи координатних функцій для кожного вузла розбиття сітки. Обчислювальний експеримент, проведений для модельної задачі на кількох областях, підтвердив високу точність запропонованої схеми.

2. Постановка задачі у загальному випадку

Розглянемо наступну граничну задачу для самоспряженого диференціального оператора:

$$\begin{aligned} Au(\mathbf{x}) &= f(x), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \\ \partial^s u / \partial \mathbf{n}^s &= 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, s = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

де Ω — n -вимірний багатогранник, грані якого паралельні координатним площинам, \mathbf{n} — нормаль до $\partial\Omega$, $f(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega)$, A — самоспряжений диференціальний оператор еліптичного типу порядку $2m$:

$$A = \sum_{|\mathbf{b}| \leq m} (-1)^{|\mathbf{b}|} D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{b}} (a_{\mathbf{b}}(x) D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{b}} u), \mathbf{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (2)$$

$$|\mathbf{b}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, D_{\mathbf{x}}^{\mathbf{b}} u = \partial^{|\mathbf{b}|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}.$$

Звичайним чином вводиться розбиття області Ω на гіперпаралелепіпеди гіперплощинами $x_k = x_{k,i_k}, i_k = \overline{1, N_k}, k = \overline{1, n}$, і далі будується наближений розв'язок з використанням вузлових параметрів у кожній точці розбиття та системи функцій, які забезпечують відповідні характеристики розв'язку.

Введемо позначення $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$, $\Delta_{k,i_k} = x_{k,i_k+1} - x_{k,i_k}$, $k = \overline{1, n}$.

Гіперпаралелепіпед, що відповідає точці $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, позначимо

$$P_{\mathbf{i}} = \{\mathbf{x} \mid x_k \in [x_{k,i_k}, x_{k,i_k+1}], k = \overline{1, n}\}.$$

У $P_{\mathbf{i}}$ наближений розв'язок представимо у формі

$$\tilde{u}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) = \sum_{r_1=0}^{m-1} \dots \sum_{r_n=0}^{m-1} \sum_{\mu_1=0}^1 \dots \sum_{\mu_n=0}^1 u_{\mathbf{i}+\mathbf{m}}^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle} \prod_{q=1}^n h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu_q, r_q} \left(\frac{x_q - x_{q, i_q}}{\Delta_{q, i_q}} \right) \Delta_{q, i_q}^{r_q}, \quad (3)$$

де $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, $\mathbf{i} + \mathbf{m} = (i_1 + \mu_1, i_2 + \mu_2, \dots, i_n + \mu_n)$, а функцій $h_{q, \mathbf{i}, \mu, p}(\cdot) \in W_2^{2m} [0, 1]$ мають властивості:

$$h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu, p}^{(s)}(\gamma) = \delta_{\mu, \gamma} \delta_{s, p}, \mu = 0, 1; s = \overline{0, m-1}; p = \overline{0, m-1}; q = 0, 1. \quad (4)$$

Нескладно перевірити, що для $\tilde{u}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$, як і для наближеного розв'язку, запропонованому у [8], виконується умова

$$D^{\mathfrak{b}} \tilde{u}(\mathbf{x}) \Big|_{x_1=x_{1,i_1}, \dots, x_n=x_{n,i_n}} = u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}.$$

для всіх вузлових параметрів $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$ області Ω .

Але суттєвим розширенням попередньої схеми [8] є використання для кожного вузлового параметра $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle}$ окремої системи координатних функцій, що і відображено у (1).

Наближений розв'язок будемо знаходити з умови мінімуму функціоналу енергії задачі (1)

$$J(u) = \int_{\Omega} \sum_{|\mathfrak{b}| \leq m} a_{\mathfrak{b}}(\mathbf{x}) (D_{\mathbf{x}}^{\mathfrak{b}} u(\mathbf{x}) - 2f(\mathbf{x})u(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

по координатним функціям $h_{q,i,\mu,p}(\cdot)$ та вузловим параметрам $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle}$.

Повторюючи міркування, аналогічні до наведених у роботі [8] (Теорема 1.1), можна показати, що сталі $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$ та координатні функції $h_{q,i,\mu,p}(\cdot)$, які реалізують мінімум функціоналу енергії, задовольняють системі Рітця

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}} = 0,$$

де $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$ пробігають усі вузлові параметри області Ω , та крайовій задачі для системи звичайних нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь виду

$$\delta h_{q,i,1-\mu_q,r_q} J(\tilde{u}) = 0,$$

де через δ позначена варіація функціоналу J по функціям $h_{q,i,1-\mu_q,r_q}(\cdot)$. Кожна така варіація представляє собою звичайне нелінійне інтегро-диференціальне рівняння. Крайові умови невідомих функцій, що входять до цих рівнянь, визначаються з умов (4).

3. Задача Діріхле для рівняння Пуассона

Проведемо детальне дослідження схеми побудови наближеного розв'язку модельної задачі (задача Діріхле для рівняння Пуассона)

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in G,$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial \bar{G}.$$

Спираючись на припущення щодо виду області G , її можна розбити прямими $x = x_j, j = 0, n_x$ $y = y_j, j = 0, n_y$ на прямокутні елементи $\Pi_{ij} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}; y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$ і вважати, що з кожним вузлом розбиття пов'язується система із 4-х базисних функцій. Тоді наближений розв'язок у Π_{ij} можна представити у формі

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) = & u_{i,j} h_{1,i,j} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{1,i,j} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + \\ & + u_{i+1,j} h_{0,i+1,j} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{1,i+1,j} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + u_{i,j+1} h_{1,i,j+1} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{0,i,j+1} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + \\ & + u_{i+1,j+1} h_{0,i+1,j+1} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{0,i+1,j+1} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right). \end{aligned}$$

Функції $h_{1,i,j}(t)$, $h_{0,i,j}(t)$, $H_{1,i,j}(t)$, $H_{0,i,j}(t)$ мають властивості:

1. Вони належать до класу W_2^1 (це забезпечує існування функціоналу енергії).
2. Задовольняють граничним умовам: $h_{\mu,i,j}(\gamma) = \delta_{\mu,1-\gamma}$, $H_{\mu,i,j}(\gamma) = \delta_{\mu,1-\gamma}$ $\gamma = 0,1$, $\mu = 0,1$.

Для знаходження наближеного розв'язку використовується наступна ітераційна схема. Вважаючи функції $h_{\mu,i,j}(x)$, $H_{\mu,i,j}(y)$ відомими (на першому кроці їх можна вважати лінійними функціями з відповідним граничним умовам), знаходимо невідомі $u_{i,j}$ із системи Рітца $\partial J(u) / \partial u_{i,j} = 0$. Будемо використовувати позначення $h_{\mu,i,j}^{[k]}(x)$ для функції $h_{\mu,i,j}(x)$, знайденої на кроці k ітераційного процесу, аналогічно $H_{\mu,i,j}^{[k]}(y)$ — k -та ітерація функції $H_{\mu,i,j}(y)$. Таким чином, початкові функції $h_{\mu,i,j}(x)$ і $H_{\mu,i,j}(y)$ позначимо як $h_{\mu,i,j}^{[0]}(x)$ та $H_{\mu,i,j}^{[0]}(y)$. Позначимо $u_{i,j}$, знайдені на цьому кроці, через $u_{i,j}^{[0]}$, де верхній індекс відбиває номери ітерацій для базисних функцій ($h_{\mu,i,j}^{[0]}(x)$ та $H_{\mu,i,j}^{[0]}(y)$), що використовуються для знаходження $u_{i,j}^{[0]}$. Далі, використовуючи знайдені вузлові параметри $u_{i,j}^{[0]}$ та вважаючи $H_{\mu,i,j}^{[0]}(y)$ фіксованими, з умови $\delta_{h_{\mu,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$ ($\mu = 0,1$) знаходимо систему функцій $h_{\mu,i,j}(x)$, яку позначимо $h_{\mu,i,j}^{[1]}(x)$. Знову з системи Рітца, вважаючи $h_{\mu,i,j}^{[1]}(x)$ та $H_{\mu,i,j}^{[0]}(y)$ відомими, знаходимо вузлові параметри $u_{i,j}$, які позначимо $u_{i,j}^{[1]}$. Аналогічно, з умови $\delta_{H_{\mu,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$ ($\mu = 0,1$) знаходимо систему функцій $H_{\mu,i,j}^{[1]}(y)$, після чого алгоритм повторюється зрозумілим чином.

Послідовність початкових ітерацій для знаходження вузлових параметрів та координатних функцій можна представити схемою

$$\{h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}\} \mapsto u^{[0,0]}_{i,j},$$

$$\{u^{[0,0]}_{i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}\} \mapsto h^{[1]}_{\mu,i,j},$$

$$\{h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}\} \mapsto u^{[1,0]}_{i,j},$$

$$\{u^{[0,0]}_{i,j}, h^{[1]}_{\mu,i,j}\} \mapsto H^{[1]}_{\mu,i,j},$$

$$\{h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}\} \mapsto u^{[1,1]}_{i,j}.$$

Аналогічно, для кроку k ітераційний процес передається схемою

$$\{h^{[k]}_{\mu,i,j}, H^{[k]}_{\mu,i,j}\} \mapsto u^{[k,k]}_{i,j},$$

$$\{u^{[k,k]}_{i,j}, H^{[k]}_{\mu,i,j}\} \mapsto h^{[k+1]}_{\mu,i,j},$$

$$\{h^{[k+1]}_{\mu,i,j}, H^{[k]}_{\mu,i,j}\} \mapsto u^{[k+1,k]}_{i,j},$$

$$\{u^{[k,k]}_{i,j}, h^{[k+1]}_{\mu,i,j}\} \mapsto H^{[k+1]}_{\mu,i,j},$$

$$\{h^{[k+1]}_{\mu,i,j}, H^{[k+1]}_{\mu,i,j}\} \mapsto u^{[k+1,k+1]}_{i,j}.$$

Опишемо кожний тип ітерацій.

Знаходження чергової ітерації для вузлових параметрів (розв'язування системи Рітця), як відомо, зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, оскільки поставлена задача мінімізації функціоналу по вузловим параметрам $u_{i,j}$ є квадратичною. З квадратичності випливає єдиність розв'язку системи Рітця при довільних координатних функціях $h_{\mu,i,j}(x)$, $H_{\mu,i,j}(y)$, на які накладено приведені вище умови.

Звернімося до розв'язання систем $\delta_{h_{\mu,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$, $\delta_{H_{\mu,i,j}(\cdot)} J(u) = 0$. Має місце теорема.

Теорема 1. Нехай $\Pi_{i,m}$, $\Pi_{i,m+1}$, ..., $\Pi_{i,M}$ — сукупність прямокутних елементів, що задовольняють умови:

1. Сторони $\{(x,y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y = y_m\}$ та $\{(x,y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y = y_{M+1}\}$ елементів $\Pi_{i,m}$ та $\Pi_{i,M}$ відповідно належать ∂G .

2. Жодна з сторін $\{(x,y) | x_i \leq x \leq x_{i+1}, y = y_j\}$, $j = \overline{m+1, M}$ не належить ∂G .

Тоді варіації функціоналу $J(\tilde{u})$ по функціям $h_{\mu,i,j}(x)$, $j = \overline{m+1, M}$, $\mu = 0, 1$ представляють граничну задачу для наступної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} Ah''(t) + Bh(t) = C, \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{h}_0, \mathbf{h}(1) = \mathbf{h}_1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
[E_j]_{1,2} &= -\frac{u_{i,j}u_{i+1,j+1}\Delta_{2,j}}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 H_{1,i,j}(t)H_{0,i+1,j+1}(t)dt, \\
[E_j]_{2,1} &= -\frac{u_{i,j+1}u_{i+1,j}\Delta_{2,j}}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 H_{1,i+1,j}(t)H_{0,i,j+1}(t)dt, \\
[E_j]_{2,2} &= -\frac{u_{i+1,j}u_{i+1,j+1}\Delta_{2,j}}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 H_{1,i+1,j}(t)H_{0,i+1,j+1}(t)dt, \\
[F_j]_{1,1} &= -\frac{u_{i,j}u_{i,j-1}\Delta_{2,j-1}}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 H_{1,i,j-1}(t)H_{0,i,j}(t)dt, \\
[F_j]_{1,2} &= -\frac{u_{i,j}u_{i+1,j-1}\Delta_{2,j-1}}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 H_{1,i+1,j-1}(t)H_{0,i,j}(t)dt, \\
[F_j]_{2,1} &= -\frac{u_{i,j-1}u_{i+1,j}\Delta_{2,j-1}}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 H_{1,i,j-1}(t)H_{0,i+1,j}(t)dt, \\
[F_j]_{2,2} &= -\frac{u_{i+1,j}u_{i+1,j-1}\Delta_{2,j-1}}{\Delta_{1,i}} \int_0^1 H_{1,i+1,j-1}(t)H_{0,i+1,j}(t)dt, \\
[\tilde{D}_j]_{1,1} &= u_{i,j}^2 \Delta_{1,i} \int_0^1 \left(\frac{(H'_{0,i,j}(t))^2}{\Delta_{2,j-1}} + \frac{(H'_{1,i,j}(t))^2}{\Delta_{2,j}} \right) dt, \\
[\tilde{D}_j]_{1,2} &= \\
[\tilde{D}_j]_{2,1} &= u_{i,j}u_{i+1,j}\Delta_{1,i} \int_0^1 \left(\frac{H'_{0,i,j}(t)H'_{0,i+1,j}(t)}{\Delta_{2,j-1}} + \frac{H'_{1,i,j}H'_{1,i+1,j}(t)}{\Delta_{2,j}} \right) dt, \\
[\tilde{D}_j]_{2,2} &= u_{i+1,j}^2 \Delta_{1,i} \int_0^1 \left(\frac{(H'_{0,i+1,j}(t))^2}{\Delta_{2,j-1}} + \frac{(H'_{1,i+1,j}(t))^2}{\Delta_{2,j-1}} \right) dt, \\
[\tilde{E}_j]_{1,1} &= \frac{u_{i,j}u_{i,j+1}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j}} \int_0^1 H'_{1,i,j}(t)H'_{0,i,j+1}(t)dt, \\
[\tilde{E}_j]_{1,2} &= \frac{u_{i,j}u_{i+1,j+1}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j}} \int_0^1 H'_{1,i,j}(t)H'_{0,i+1,j+1}(t)dt, \\
[\tilde{E}_j]_{2,1} &= \frac{u_{i,j+1}u_{i+1,j}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j}} \int_0^1 H'_{1,i+1,j}(t)H'_{0,i,j+1}(t)dt, \\
[\tilde{E}_j]_{2,2} &= \frac{u_{i+1,j}u_{i+1,j+1}\Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j}} \int_0^1 H'_{1,i+1,j}(t)H'_{0,i+1,j+1}(t)dt,
\end{aligned}$$

$$[\tilde{F}_j]_{1,1} = \frac{u_{i,j} u_{i,j-1} \Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j-1}} \int_0^1 H'_{1,i,j-1}(t) H'_{0,i,j}(t) dt,$$

$$[\tilde{F}_j]_{1,2} = \frac{u_{i,j} u_{i+1,j-1} \Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j-1}} \int_0^1 H'_{1,i+1,j-1}(t) H'_{0,i,j}(t) dt,$$

$$[\tilde{F}_j]_{2,1} = \frac{u_{i,j-1} u_{i+1,j} \Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j-1}} \int_0^1 H'_{1,i,j-1}(t) H'_{0,i+1,j}(t) dt,$$

$$[\tilde{F}_j]_{2,2} = \frac{u_{i+1,j} u_{i+1,j-1} \Delta_{1,i}}{\Delta_{2,j-1}} \int_0^1 H'_{1,i+1,j-1}(t) H'_{0,i+1,j}(t) dt,$$

права частина системи має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 2u_{i,m+1} \Delta_{1,i} \int_0^1 (\Delta_{2,m} H_{0,i,m+1}(t) + \Delta_{2,m+1} H_{1,i,m+1}(t)) dt \\ 2u_{i+1,m+1} \Delta_{1,i} \int_0^1 (\Delta_{2,m} H_{0,i+1,m+1}(t) + \Delta_{2,m+1} H_{1,i+1,m+1}(t)) dt \\ 2u_{i,m+2} \Delta_{1,i} \int_0^1 (\Delta_{2,m+1} H_{0,i,m+2}(t) + \Delta_{2,m+2} H_{1,i,m+2}(t)) dt \\ 2u_{i+1,m+2} \Delta_{1,i} \int_0^1 (\Delta_{2,m+1} H_{0,i+1,m+2}(t) + \Delta_{2,m+2} H_{1,i+1,m+2}(t)) dt \\ \vdots \\ 2u_{i,M} \Delta_{1,i} \int_0^1 (\Delta_{2,M-1} H_{0,i,M-1}(t) + \Delta_{2,M} H_{1,i,M}(t)) dt \\ 2u_{i+1,M} \Delta_{1,i} \int_0^1 (\Delta_{2,M-1} H_{0,i+1,M-1}(t) + \Delta_{2,M} H_{1,i+1,M}(t)) dt \end{pmatrix}$$

Доведення. Відмітимо, що коли знаходженню підлягають варіації функціоналу $J(\tilde{u})$ по функціям $h_{1,i,j}(x)$, $h_{0,i+1,j}(x)$ при фіксованому j (j від $m+1$ до M), достатньо звузити область інтегрування функціоналу до об'єднання елементів $\Pi_{i,j-1} \cup \Pi_{i,j}$, оскільки наближений розв'язок \tilde{u} тільки на цій області залежить від цих двох функцій. Знаходячи варіації Лагранжа від $J(\tilde{u})$ по цим двом функціям, отримуємо два звичайних диференціальних рівняння з крайовими умовами, накладеними на $h_{1,i,j}(x)$, $h_{0,i+1,j}(x)$. Цим двом рівнянням відповідає два рядки системи (5). Знаходячи варіації по всім $2(M-m)$ функціям $h_{1,i,m+1}(t)$, $h_{0,i+1,m+1}(t)$, $h_{1,i,m+2}(t)$, $h_{0,i+1,m+2}(t)$, ..., $h_{1,i,M}(t)$, $h_{0,i+1,M}(t)$ і враховуючи накладені на них умови, отримуємо систему

(5). Теорему доведено.

Очевидно, що аналогічна теорема може бути сформульована для знаходження варіацій функціоналу $J(\tilde{u})$ по функціям $H_{\mu,i,j}(y)$, $i = \overline{m+1, M}$, $\mu = 0, 1$, коли сукупність елементів $\Pi_{m,j}$, $\Pi_{m+1,j}$, ..., $\Pi_{M,j}$, які задовольняють умовам, аналогічним умовам Теорема 1.

З Теорема 1 випливає, що при реалізації ітераційного процесу знаходження координатних функцій це обчислення відбувається по смугам: для знаходження $h_{1,i,j}(x)$, $h_{0,i+1,j}(x)$, $j = \overline{m+1, M}$ використовується смуга $\{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$, для $h_{1,i,j}(x)$, $h_{0,i,j+1}(x)$, $i = \overline{m+1, M}$ — смуга $\{(x, y) \mid y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$. Ця властивість дозволяє використовувати паралельні обчислювальні алгоритми розв'язання задач такого типу.

Відмітимо, що описана ітераційна схема допускає очевидні модифікації. Наприклад, знаходження сукупності функцій $h_{1,i,m+1}(t)$, $h_{0,i+1,m+1}(t)$, $h_{1,i,m+2}(t)$, $h_{0,i+1,m+2}(t)$, ..., $h_{1,i,M}(t)$, $h_{0,i+1,M}(t)$, які визначають розв'язок на смугі $\Pi_{i,m} \cup \Pi_{i,m+1} \cup \dots \cup \Pi_{i,M}$, може бути виконано за два кроки: перший — знаходження сукупності $h_{1,i,m+1}(t)$, $h_{1,i,m+2}(t)$, ..., $h_{1,i,M}(t)$, другий — сукупності $h_{0,i+1,m+1}(t)$, $h_{0,i+1,m+2}(t)$, ..., $h_{0,i+1,M}(t)$. На кожному з цих двох кроків система, аналогічна (5), буде мати порядок $M - m$, тобто вдвічі менше, ніж при обчисленні сукупності функцій $h_{1,i,m+1}(t)$, $h_{0,i+1,m+1}(t)$, $h_{1,i,m+2}(t)$, $h_{0,i+1,m+2}(t)$, ..., $h_{1,i,M}(t)$, $h_{0,i+1,M}(t)$ згідно Теорема 1.

4. Обчислювальний експеримент

Обчислювальний експеримент був проведений з модельною задачею — двовимірною граничною задачею Діріхле для рівняння Пуассона зі сталою правою частиною

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= -2, & (x, y) \in G, \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial \bar{G}. \end{aligned} \quad (6)$$

Експеримент проводився для трьох областей різної форми. На Рис. 1 представлені контури цих області з сіткою, на якій реалізовувалася схема МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій.

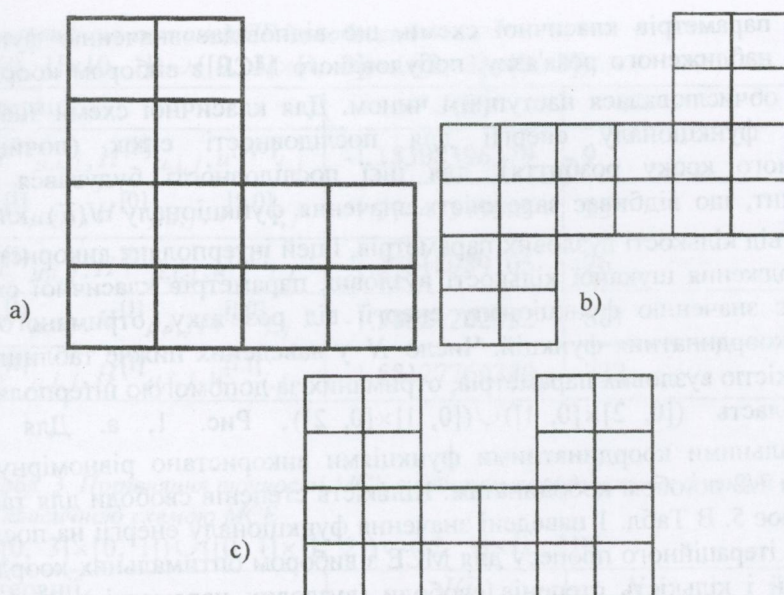


Рис. 1. Области *a*, *b*, *c* з сіткою, на якій реалізувалася схема МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій.

Для кожної області проводилися ітерації до обчислення сукупності вузлових параметрів та функцій $u^{[1,1]}_{i,j}$, $h^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot)$, $H^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot)$ включно. При цьому порівнювалися точності двох наближених розв'язків — отриманого за допомогою схеми МСЕ з вибором координатних функцій та отриманого з використанням кусково-лінійних координатних функцій ($h_{\mu,i,j}(t) = \mu + (1 - 2\mu)t$, $H_{\mu,i,j}(t) = \mu + (1 - 2\mu)t$, $\mu = 1, 2$). Остання схема є класичною для задачі (6) [14]. Критерієм порівняння виступало значення функціоналу енергії наближеного розв'язку, яке для еліптичних задач співвідноситься з похибкою наступним чином

$$J(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2,$$

де $\| \cdot \|_A$ — енергетична норма, пов'язана з оператором A крайової задачі (в нашому випадку оператор Лапласа). У якості початкових наближень координатних функцій $h^{[0]}_{\mu,i,j}(\cdot)$, $H^{[0]}_{\mu,i,j}(\cdot)$ використовувалися згадані вище кусково-лінійні координатні функції.

Обчислювальний експеримент полягав у проведенні ітераційного процесу МСЕ з вибором координатних функцій, обчисленні функціоналу енергії для наближеного розв'язку цієї схеми (на кожному кроці) та знаходженні кількості вузлових параметрів наближеного розв'язку за класичною схемою МСЕ, який дає таке ж значення функціоналу енергії. Тобто, знаходилася та кількість вузлових параметрів, при якій наближений розв'язок класичної схеми має таку ж похибку у енергетичній нормі, що і наближений розв'язок МСЕ з вибором координатних функцій. Для класичної схеми МСЕ використовувалася рівномірна сітка з однаковим кроком розбиття по обом координатам. Кількість

вузлових параметрів класичної схеми, що відповідає значенню функціоналу $J(\tilde{u})$ від наближеного розв'язку, побудованого МСЕ з вибором координатних функцій, обчислювалася наступним чином. Для класичної схеми знаходилися значення функціоналу енергії для послідовності сіток (починаючи з мінімального кроку розбиття), для цієї послідовності будувався лінійний інтерполянт, що відбиває залежність значення функціоналу $J(\tilde{u})$ класичного розв'язку від кількості вузлових параметрів, і цей інтерполянт використовувався для знаходження шуканої кількості вузлових параметрів класичної схеми, що відповідає значенню функціоналу енергії від розв'язку, отриманого МСЕ з вибором координатних функцій. Число N у наведених нижче таблицях є саме цією кількістю вузлових параметрів, отриманих за допомогою інтерполянта.

1. Область $([0, 2] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [0, 2])$, Рис. 1, а. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями використано рівномірну сітку з кроком $1/2$ по обом координатам. Кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 5. В Табл. 1 наведені значення функціоналу енергії на послідовних кроках ітераційного процесу для МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій і кількість степенів свободи (вузлових параметрів) N класичної МСЕ, яка необхідна для досягнення того ж значення функціоналу енергії.

Табл. 1. Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій з класичною схемою МСЕ для області $([0, 2] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [0, 2])$

Ітерації	$J(\tilde{u})$	N
$h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}, u^{[0,0]}_{i,j}$	-0.63502358	5
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}, u^{[0,0]}_{i,j}$	-0.738081695	13
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}, u^{[1,0]}_{i,j}$	-0.739004998	14
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[1,0]}_{i,j}$	-0.852729837	1083
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[1,1]}_{i,j}$	-0.85311464	1339

2. Область $([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([0, 3] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [2, 3])$, Рис. 1, б. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями взята рівномірна сітка з кроком $1/2$ по обом координатам, кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 9. В Табл. 2 наведено порівняння точності двох схем МСЕ, аналогічне до Табл. 1.

3. Область $([0, 3] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [1, 2])$, Рис. 1, с. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями вибрана рівномірна сітка з кроком $1/2$ по обом координатам, кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 9. В Табл. 3 наведено порівняння точності двох схем МСЕ, аналогічне до Табл. 1.

Табл. 2. Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій

з класичною схемою МСЕ для області

$$([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([0, 3] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [2, 3])$$

Ітерації	$J(\tilde{u})$	N
$h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}, u^{[0,0]}_{i,j}$	-1.18308396379	9
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}, u^{[0,0]}_{i,j}$	-1.37441579503	25
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}, u^{[1,0]}_{i,j}$	-1.37618989105	26
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[1,0]}_{i,j}$	-1.58021202352	661
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[1,1]}_{i,j}$	-1.58127760380	732

Табл. 3. Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій з класичною схемою МСЕ

$$([0, 3] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [1, 2])$$

Ітерації	$J(\tilde{u})$	N
$h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}, u^{[0,0]}_{i,j}$	-1.18308396379	9
$h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[0,0]}_{i,j}$	-1.35170061965	23
$h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[0,1]}_{i,j}$	-1.35571120522	23
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[0,1]}_{i,j}$	-1.54662903454	167
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[1,1]}_{i,j}$	-1.54836797703	174

Як впливає з результатів, представлених у Табл. 1-3, для досягнення точності у енергетичній нормі, яку дає МСЕ з вибором координатних функцій на кроці ітераційного процесу, що відповідає сукупності $u^{[1,1]}_{i,j}, h^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot), H^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot)$, потрібна кількість елементів класичної схеми, яка для першої області у $1339/5 \approx 268$ разів більша кількості елементів схеми МСЕ з вибором координатних функцій, та приблизно у 81 та 19 разів для другої та третьої відповідно.

Висновки

В даній роботі запропоноване подальше розширення обчислювальних схем МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій для еліптичних крайових задач, що відрізняється від раніш запропонованих використанням локальної системи координатних функцій, пов'язаних з кожним вузлом, на відміну від загальної системи функцій, запропонованої у попередніх роботах. Можна сказати, що данна схема підвищує адаптивність обчислювальної схеми, що дає змогу значно підняти точність наближених розв'язків, отриманих за цією схемою.

Головні властивості запропонованої схеми полягають у тому, що координатні функція МСЕ не задаються наперед, як у відомих схемах, що використовують

поліноміальні інтерполянти, а знаходяться з умови мінімуму функціоналу енергії, що відповідає заданій крайовій задачі. На відміну від адаптивних схем МСЕ, вид цих функцій не фіксується (у вигляді полінома чи функції іншого класу), а знаходиться як розв'язок варіаційної задачі, що визначається функціоналом енергії задачі та формою наближеного розв'язку.

Розв'язання модельної задачі, проведене у ході обчислювального експерименту, має наступні особливості:

1) Наближений розв'язок знаходиться ітераційним методом, у якому на початку використовувались відомі координатні функції (наприклад, кусково-лінійні, як в даній роботі) і ітерації проводилися для кожної смуги розбиття області на елементи;

2) Знаходження координатних функцій по смугам дозволяє використовувати алгоритми з розпаралелюванням, що може мати значення для великих, складних областей, а також, напевне, для задач високої розмірності;

3) Обчислювальний експеримент продемонстрував набагато вищу точність пропонованої схеми порівняно з класичним МСЕ на основі кусково-лінійних інтерполянтів.

Відкритими питаннями запропонованої обчислювальної схеми, які передбачається дослідити у наступних роботах, є: розробка ітераційної процедури для задач високої розмірності ($n \geq 3$); дослідження збіжності цих ітераційних процедур; оцінка похибки наближеного розв'язку схеми у різних функціональних просторах; дослідження питань, пов'язаних з існуванням і єдиністю наближеного розв'язку даної схеми, що реалізує мінімум функціоналу енергії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Babuška I., Guo B.Q. The h-p version of finite element method, Part 1: The basic approximation results // *Comp. Mech.* - 1986. - No. 1. - P. 21-41.
2. Babuška I., Guo B.Q. The h-p version of finite element method, Part 2: General results and approximation // *Comp. Mech.* - 1986. - No. 1. - P. 203-220.
3. Goel J.J. Construction of Basis Functions for Numerical Utilization of Ritz's Method // *Numer. Math.* - 1968. - V. 12. - P. 435-447.
4. Марчук Г.И., Агошков В.И. О выборе координатных функций в обобщенном методе Бубнова-Галеркина // *ДАН СССР.* - 1977. - Т. 232, № 6. - С. 1253-1256.
5. Михлин С.Г. О координатных системах вариационно-разностного метода // *Доклады АН СССР.* - 1971. - Т. 200, № 3. - С. 526-529.
6. Смелов В.В. Об одном способе формирования базисных функций для многомерных вариационных задач // *Разностные и вариационно-разностные методы.* - Вып. 2. - Новосибирск, 1977. - С. 111-117.
7. Литвин О.Н. К вопросу о построении оптимальных схем МКЭ // *Тезисы докл. 2-й респ. конференции "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе".* - К. - 1978. - С. 21-22.
8. Литвин О.Н. Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов // *Дифференциальные уравнения.* 1984. - Т 20, № 4. - С.677-688.

9. Литвин О.Н. Методи обчислень. Додаткові глави. - Київ: Наукова думка, 2005. - 333 с.
10. Баранова Т.А., Литвин О.М., Федько В.В. Про чисельну реалізацію оптимального методу скінчених елементів (задача Діріхле для рівняння Пуассона, прямокутні елементи) // Вісник Львівської Політехніки. - 1998. - № 337, Т. 2. - С. 294-297.
11. Литвин О.Н., Носов К.В. Некоторые аспекты численной реализации оптимального метода конечных элементов на примере бигармонической задачи с краевыми условиями второго рода // Кибернетика и системный анализ. - 1999. № 1. - С. 178-187.
12. Литвин О.М., Носов К.В. Деякі оцінки ітераційного процесу в методі оптимальних скінчених елементів // Матеріали Х міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука. - К.: Задруга, 2004. - С. 436.
13. Баранова Т. А. Аналітичний вигляд базисних функцій в оптимальному методі скінчених елементів // Праці міжнародного симпозиуму „Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)”, присвяченої 50-річчю створення Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007, с. 34-35.
14. Стренг Г., Фикс Г. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977. - 349 с.

УДК 519.6

Метод квазіконформних відображень моделювання процесів руху рідин у водоймах з урахуванням просторових збурень

А. Я. Бомба, Є. В. Савюк, А. В. Терубус

Рівненський державний гуманітарний університет, Національний університет водного господарства та природокористування, Україна

Розглядається задача розрахунку гідродинамічних параметрів течії у водоймі, обмеженій поверхнями течії та еквіпотенціальними поверхнями, з урахуванням просторових збурень. Побудовано алгоритм її розв'язку з використанням методології моделювання процесів повільного руху рідин, що ґрунтується на заміні реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним фільтраційним полем, методики апроксимації просторової фільтраційної течії деяким її «усередненим» плоским аналогом та розроблених числових методів квазіконформних відображень.

Ключові слова: квазіконформне відображення, крайова задача, метод фіктивної фільтрації.

Рассматривается задача расчета гидродинамических параметров течения в водоеме, ограниченном поверхностями течения и эквипотенциальными поверхностями, с учетом пространственных возмущений. Построен алгоритм ее решения с использованием методологии моделирования процессов медленного движения жидкостей, базирующейся на замене реального течения некоторым фиктивным квазиидеальным фильтрационным полем, методики аппроксимации пространственного фильтрационного течения некоторым его «усредненным» плоским аналогом и разработанных численных методов квазиконформных отображений.

Ключевые слова: квазиконформные отображения, краевая задача, метод фиктивной фильтрации.

A problem of the computation of hydrodynamic flow parameters in the reservoir, restricted by stream surfaces and equipotential surfaces, taking into account spatial perturbations is considered. An algorithm of its solution with use of the slow liquid motion processes modeling methodology based on a substitution of the real stream by some fictitious quasiideal filtration field, the method of an approximation of spatial filtration flow by some its averaged plane analogue and developed numerical quasiconformal mappings methods is built.

Key words: quasiconformal mapping, boundary-value problem, fictitious filtration method.

1. Вступ

Одним із основних етапів розв'язку задач, пов'язаних з моделюванням гідрофізичних процесів у водоймах є розрахунок гідродинамічних параметрів течії. При розрахунку параметрів течії у мілководних водоймах добре зарекомендували себе так звані рівняння мілкої води, які погано описують процеси в глибоководних областях [1, 2]. Нами при прогнозуванні процесів руху рідин у водоймах в двовимірному випадку запропонований метод фіктивної фільтрації, який ґрунтується на заміні реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним фільтраційним полем з наступним застосуванням наближених методів квазіконформних відображень [3, 4].

В даній роботі таку методику перенесено на випадки трьохвимірних областей, течію в яких можна умовно інтерпретувати як плоско-паралельний рух вздовж окремих їх прошарків [5-7].

2. Загальна постановка задачі

Розглянемо процес перенесення рідини у змінній глибини H водоймі – області $G_\tau = A_*B_*C_*D_*A^*B^*C^*D^*$, $\tau = (x, y, z)$ (рис. 1), обмеженій чотирма непроникними «стінками», серед яких: дно водойми $A_*B_*C_*D_*$ ($z = -H(x, y)$), два береги $A_*D_*A^*D^*$, $B_*C_*C^*B^*$ і поверхня водойми $A^*B^*C^*D^*$ ($z = 0$), та двома екіпотенціальними поверхнями втоку та витoku рідини в цю водойму. Припустимо, що переміщення водяних мас можна розглядати як деяку фіктивну квазіідеальну течію в даній області із заданим коефіцієнтом провідності, який визначає фізичні характеристики такої течії.

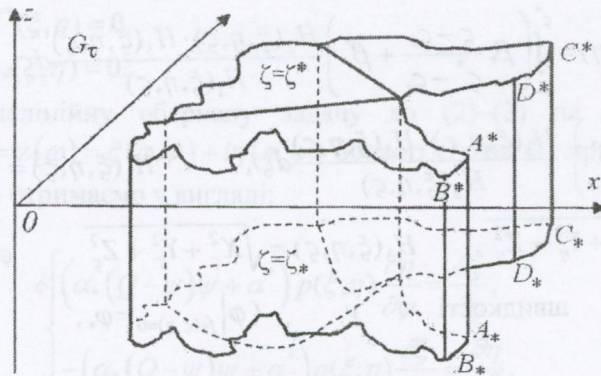


Рис. 1. Фізична область G_τ

Введемо стосовно G_τ деякі ортогональні криволінійні координати (ξ, η, ς) , пов'язані з фізичними співвідношеннями $x = X(\xi, \eta, \varsigma)$, $y = Y(\xi, \eta, \varsigma)$, $z = Z(\xi, \eta, \varsigma)$, таким чином, щоб рівняння дна та поверхні водойми у цих координатах можна було записати у вигляді: $A_*B_*C_*D_* = \{(\xi, \eta, \varsigma) : \varsigma = \varsigma_*\}$, $A^*B^*C^*D^* = \{(\xi, \eta, \varsigma) : \varsigma = \varsigma^*\}$. Рівняння решти обмежуючих G_τ поверхонь представимо наступним чином: $A_*A^*B^*B_* = \{(\xi, \eta, \varsigma) : f_*(\xi, \eta) = 0\}$, $C_*C^*D^*D_* = \{(\xi, \eta, \varsigma) : f^*(\xi, \eta) = 0\}$ (еквіпотенціали), $A_*D_*A^*D^* = \{(\xi, \eta, \varsigma) : g_*(\xi, \eta) = 0\}$, $B_*C_*C^*B^* = \{(\xi, \eta, \varsigma) : g^*(\xi, \eta) = 0\}$ (поверхні течії), де $f_*(\xi, \eta) = 0$, $f^*(\xi, \eta) = 0$, $g_*(\xi, \eta) = 0$, $g^*(\xi, \eta) = 0$ – задані достатньо-гладкі функції. Вважатимемо, що викривлення дна є малими в порівнянні з геометричними розмірами площі водойми, а відповідний процес – двовимірним відносно змінних (ξ, η) . Відповідну плоску область зміни (ξ, η) позначимо як $G_z = ABCD$. Коефіцієнт провідності, при цьому, представимо за формулою [4]: $k(\varsigma, \alpha_*, \alpha^*, \beta_*, \beta^*, \psi, Q) = (\alpha_*(Q - \psi)\psi + \alpha^*) \left(\beta_*(\varsigma - \varsigma_*)(\varsigma^* - \varsigma_*)^{-1} + \beta^* \right)$, де Q – потік через довільний поперечний переріз течії водойми, $\psi = \psi(\xi, \eta)$ – функція

усередненої течії (див. нижче), α_* , α^* , β_* , β^* – деякі параметри. Значення параметра α_* шукатимемо на основі рівності $Q = \int_{AB} -v_\xi d\xi + v_\eta d\eta$, де $\vec{v} = (v_\xi, v_\eta)$

визначаємо згідно закону руху Дарсі, шляхом додаванням до якого рівняння нерозривності [5, 6], одержимо співвідношення для опису процесу руху рідини:

$$\vec{v} = \kappa(\zeta, \alpha_*, \alpha^*, \beta_*, \beta^*, \psi, Q) \left(\frac{\varphi_\xi}{H_1}, \frac{\varphi_\eta}{H_2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left((\alpha_* (Q - \psi) \psi + \alpha^*) p(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\alpha_* (Q - \psi) \psi + \alpha^*) q(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\text{де} \quad p(\xi, \eta) = \int_{\zeta_*}^{\zeta^*} \left(\beta_* \frac{\zeta - \zeta_*}{\zeta^* - \zeta_*} + \beta^* \right) \frac{H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta)}{H_1(\xi, \eta, \zeta)} d\zeta, \quad q(\xi, \eta) =$$

$$= \int_{\zeta_*}^{\zeta^*} \left(\beta_* \frac{\zeta - \zeta_*}{\zeta^* - \zeta_*} + \beta^* \right) \cdot \frac{H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta)}{H_2(\xi, \eta, \zeta)} d\zeta, \quad H_1(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{X_\xi^2 + Y_\xi^2 + Z_\xi^2},$$

$$H_2(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{X_\eta^2 + Y_\eta^2 + Z_\eta^2}, \quad H_3(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{X_\zeta^2 + Y_\zeta^2 + Z_\zeta^2}, \quad \varphi = \varphi(\xi, \eta) -$$

квазіпотенціал швидкості \vec{v} ($\varphi|_{f_*(\xi, \eta)=0} = \varphi_*$, $\varphi|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*$,

$$\frac{d\varphi}{dn} \Big|_{g_*(\xi, \eta)=0} = \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{g^*(\xi, \eta)=0} = 0).$$

Функція усередненої течії $\psi = \psi(\xi, \eta)$, згідно з (1), задовольняє систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} (\alpha_* (Q - \psi) \psi + \alpha^*) p(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \\ (\alpha_* (Q - \psi) \psi + \alpha^*) q(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \end{cases} \quad (2)$$

Відповідна пара функцій $(\varphi = \varphi(\xi, \eta), \psi = \psi(\xi, \eta))$ визначає деяку квазіаналітичну функцію $\omega = \omega(z) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$, яка при виконанні умов:

$$\varphi|_{f_*(\xi, \eta)=0} = \varphi_*, \quad \varphi|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \psi|_{g_*(\xi, \eta)=0} = 0, \quad \psi|_{g^*(\xi, \eta)=0} = Q, \quad (3)$$

здійснює квазіконформне відображення області G_z на відповідну область квазікомплексного потенціалу [8] $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$. При цьому, умови гладкості даного відображення у кутових точках A, B, C, D криволінійного чотирикутника G_z запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} p(\xi_A, \eta_A) g_{*\xi}(\xi_A, \eta_A) f_{*\xi}(\xi_A, \eta_A) + q(\xi_A, \eta_A) g_{*\eta}(\xi_A, \eta_A) f_{*\eta}(\xi_A, \eta_A) = 0, \\ p(\xi_B, \eta_B) g_{*\xi}(\xi_B, \eta_B) f_{*\xi}(\xi_B, \eta_B) + q(\xi_B, \eta_B) g_{*\eta}(\xi_B, \eta_B) f_{*\eta}(\xi_B, \eta_B) = 0, \\ p(\xi_C, \eta_C) g_{*\xi}(\xi_C, \eta_C) f_{*\xi}(\xi_C, \eta_C) + q(\xi_C, \eta_C) g_{*\eta}(\xi_C, \eta_C) f_{*\eta}(\xi_C, \eta_C) = 0, \\ p(\xi_D, \eta_D) g_{*\xi}(\xi_D, \eta_D) f_{*\xi}(\xi_D, \eta_D) + q(\xi_D, \eta_D) g_{*\eta}(\xi_D, \eta_D) f_{*\eta}(\xi_D, \eta_D) = 0, \end{cases}$$

де (ξ_A, η_A) , (ξ_B, η_B) , (ξ_C, η_C) , (ξ_D, η_D) визначаються відповідно в результаті

розв'язання систем алгебраїчних рівнянь:
$$\begin{cases} f_*(\xi, \eta) = 0, \\ g_*(\xi, \eta) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f_*(\xi, \eta) = 0, \\ g_*(\xi, \eta) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_*(\xi, \eta) = 0, \\ g_*(\xi, \eta) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f_*(\xi, \eta) = 0, \\ g_*(\xi, \eta) = 0. \end{cases}$$

Відповідну нелінійну обернену задачу до (2)–(3) на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = \xi(\varphi, \psi) + i\eta(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q аналогічно до [8] отримаємо у вигляді:

$$\begin{cases} (\alpha_*(Q - \psi)\psi + \alpha^*) p(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \psi} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \\ -(\alpha_*(Q - \psi)\psi + \alpha^*) q(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \psi} = \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f_*(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi)) = 0, & f_*(\xi(\varphi^*, \psi), \eta(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ g_*(\xi(\varphi, 0), \eta(\varphi, 0)) = 0, & g_*(\xi(\varphi, Q), \eta(\varphi, Q)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{cases} \quad (5)$$

зокрема, як наслідок (4), матимемо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\alpha_*(Q - \psi)\psi + \alpha^*)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{p(\xi, \eta)} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) + (\alpha_*(Q - \psi)\psi + \alpha^*) \frac{\partial}{\partial \psi} (q(\xi, \eta) \cdot \\ & \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \psi}) + \alpha_*(Q - 2\psi) q(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{1}{(\alpha_*(Q - \psi)\psi + \alpha^*)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{q(\xi, \eta)} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right) + \\ & + (\alpha_*(Q - \psi)\psi + \alpha^*) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(p(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + \alpha_*(Q - 2\psi) p(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial \psi} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

3. Алгоритм числового розв'язання задачі

В загальному випадку алгоритм розв'язання у рівномірній сітковій області

$$G_\omega^r = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m}; \quad \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n}; \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m},$$

$$\Delta\psi = \frac{Q}{n}, \quad \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, \quad m, n \in \mathbf{N}\} \text{ побудуємо [8] шляхом поетапної параметризації}$$

(“почергового заморожування”) параметра α_* (за відомої витрати Q), граничних та внутрішніх вузлів сітки G_z^γ з використанням ідей методу блочної ітерації.

1. Задаємо параметри розбиття сіткової області m та n , параметр точності ε , значення потенціалів на вході (φ_*) та виході (φ^*), значення витрати Q , початкові наближення координат граничних вузлів $\xi_{0,j}^{(0)}, \eta_{0,j}^{(0)}, \xi_{m,j}^{(0)}, \eta_{m,j}^{(0)}, \xi_{i,n}^{(0)}, \eta_{i,n}^{(0)}, \xi_{i,0}^{(0)}, \eta_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб задовольнялись умови (5)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(\xi_{i,j}^{(0)}, \eta_{i,j}^{(0)})$, де $\xi_{i,j} = \xi(\varphi_i, \psi_j), \eta_{i,j} = \eta(\varphi_i, \psi_j), i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}$.

2. Шляхом чисельного розв'язання рівняння, що відображає “квазіконформну подібність в малому” елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=1}^{m,n} \frac{\sqrt{(\xi_{i,j-1} - \xi_{i-1,j-1})^2 + (\eta_{i,j-1} - \eta_{i-1,j-1})^2} + \sqrt{(\xi_{i,j} - \xi_{i-1,j})^2 + (\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j})^2}}{(\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) (A_{i-1,j} + A_{i,j})},$$

наприклад, методом Ньютона, знаходимо відповідне наближення параметра α_* .

При цьому, $A_{i,j} = \sqrt{p_{i,j}^2 (\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1})^2 + q_{i,j}^2 (\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1})^2}$, а обчислення значень функцій $p_{i,j} = p_{i,j}(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}), q_{i,j} = q_{i,j}(\xi_{i,j}, \eta_{i,j})$, тут і надалі, проводимо за наступними квадратурними формулами:

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \left(\beta_* \frac{\zeta_k - h/2 - \zeta_*}{\zeta^* - \zeta_*} + \beta^* \right) \frac{H_2(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \zeta_k - h/2) \cdot H_3(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \zeta_k - h/2)}{H_1(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \zeta_k - h/2)}, \quad q_{i,j} = \\ &= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \left(\beta_* \frac{\zeta_k - h/2 - \zeta_*}{\zeta^* - \zeta_*} + \beta^* \right) \frac{H_1(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \zeta_k - h/2) \cdot H_3(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \zeta_k - h/2)}{H_2(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \zeta_k - h/2)}, \quad h = \\ &= \frac{\zeta^* - \zeta_*}{N}, \quad \zeta_k = \zeta_* + h \cdot k, \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

3. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(\xi_{i,j}, \eta_{i,j})$ виходячи з різницевих аналогів рівнянь (6):

$$\begin{aligned} \xi_{i,j} &= \left[\frac{2}{(\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) p_{i,j}} + 2\gamma^2 (\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) q_{i,j} \right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{(\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) p_{i,j}} (\xi_{i+1,j} + \xi_{i-1,j}) + \gamma^2 (\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) q_{i,j} \cdot \right. \\ &\cdot (\xi_{i,j+1} + \xi_{i,j-1}) - \frac{1}{4(\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) p_{i,j}^2} (\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}) [p_{\xi_{i,j}}(\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}) + \end{aligned}$$

$$+ p_{\eta_{i,j}} (\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j})] + \frac{\gamma^2}{4} (\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}) [q_{\xi_{i,j}} (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}) + q_{\eta_{i,j}} (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})] + \frac{\alpha_* \gamma \Delta \varphi}{2} (Q - 2\psi_j) q_{i,j} (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}) \Big\},$$

$$\eta_{i,j} = \left(\frac{2}{(\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) q_{i,j}} + 2\gamma^2 (\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) p_{i,j} \right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{(\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) q_{i,j}} (\eta_{i+1,j} + \eta_{i-1,j}) + \gamma^2 (\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) p_{i,j} \cdot (\eta_{i,j+1} + \eta_{i,j-1}) - \frac{1}{4(\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) q_{i,j}^2} (\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}) [q_{\xi_{i,j}} (\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}) + q_{\eta_{i,j}} (\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j})] + \frac{\gamma^2}{4} (\alpha_* (Q - \psi_j) \psi_j + \alpha^*) (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}) [p_{\xi_{i,j}} (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}) + p_{\eta_{i,j}} (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})] + \frac{\alpha_* \gamma \Delta \varphi}{2} (Q - 2\psi_j) p_{i,j} (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}) \right\},$$

де $p_{\xi_{i,j}} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \left(\beta_* \frac{\varsigma_k - h/2 - \varsigma_*}{\varsigma_* - \varsigma_*} + \beta^* \right) H_1^{-2} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) (H_{2\xi} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) \cdot H_3 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_1 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) + H_2 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_{3\xi} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_1 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) - H_2 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_3 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_{1\xi} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2)),$

$p_{\eta_{i,j}} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \left(\beta_* \frac{\varsigma_k - h/2 - \varsigma_*}{\varsigma_* - \varsigma_*} + \beta^* \right) H_1^{-2} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) (H_{2\eta} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) \cdot H_3 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_1 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) + H_2 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_{3\eta} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_1 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) - H_2 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_3 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) \cdot H_{1\eta} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2)),$

$q_{\xi_{i,j}} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \left(\beta_* \frac{\varsigma_k - h/2 - \varsigma_*}{\varsigma_* - \varsigma_*} + \beta^* \right) H_2^{-2} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) \cdot (H_{1\xi} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_3 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_2 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) + H_1 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_{3\xi} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_2 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) - H_1 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_3 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_{2\xi} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2)),$

$q_{\eta_{i,j}} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \left(\beta_* \frac{\varsigma_k - h/2 - \varsigma_*}{\varsigma_* - \varsigma_*} + \beta^* \right) H_2^{-2} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) (H_{1\eta} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_3 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_2 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) + H_1 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_{3\eta} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_2 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) - H_1 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_3 (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2) H_{2\eta} (\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \varsigma_k - h/2))$

$$-h/2)H_3(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \zeta_k - h/2)H_{2n}(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}, \zeta_k - h/2)), \quad i=\overline{1, m-1}, \quad j=\overline{1, n-1}, \quad h = \frac{\zeta^* - \zeta^*}{N},$$

$$\zeta_k = \zeta^* + h \cdot k, \quad k = \overline{0, N}.$$

4. Координати граничних вузлів підправляємо з використанням системи рівнянь для крайових умов (5) та приграничних аналогів умов квазіортогональності:

$$\begin{cases} f_*(\xi_{0,j}, \eta_{0,j}) = 0, & f^*(\xi_{m,j}, \eta_{m,j}) = 0, & j = \overline{1, n-1}, \\ g_*(\xi_{i,0}, \eta_{i,0}) = 0, & g^*(\xi_{i,n}, \eta_{i,n}) = 0, & i = \overline{1, m-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -p_{0,j} f_{*\xi}(\xi_{0,j}, \eta_{0,j})(\eta_{1,j} - \eta_{0,j}) + q_{0,j} f_{*\eta}(\xi_{0,j}, \eta_{0,j})(\xi_{1,j} - \xi_{0,j}) = 0, \\ -p_{m,j} f_{*\xi}(\xi_{m,j}, \eta_{m,j})(\eta_{m,j} - \eta_{m-1,j}) + q_{m,j} f_{*\eta}(\xi_{m,j}, \eta_{m,j})(\xi_{m,j} - \xi_{m-1,j}) = 0, & j = \overline{1, n-1}; \\ p_{i,0} g_{*\xi}(\xi_{i,0}, \eta_{i,0})(\eta_{i,1} - \eta_{i,0}) - q_{i,0} g_{*\eta}(\xi_{i,0}, \eta_{i,0})(\xi_{i,1} - \xi_{i,0}) = 0, \\ p_{i,n} g_{*\xi}(\xi_{i,n}, \eta_{i,n})(\eta_{i,n} - \eta_{i,n-1}) - q_{i,n} g_{*\eta}(\xi_{i,n}, \eta_{i,n})(\xi_{i,n} - \xi_{i,n-1}) = 0, & i = \overline{1, m-1}. \end{cases}$$

5. При виконанні умов: $\max_{\xi_{i,j}, \eta_{i,j}} \left(\left| \xi_{i,j}^{(k)} - \xi_{i,j}^{(k-1)} \right|, \left| \eta_{i,j}^{(k)} - \eta_{i,j}^{(k-1)} \right| \right) < \varepsilon,$

$$\left| \alpha_*^{(k)} - \alpha_*^{(k-1)} \right| < \varepsilon, \quad i = \overline{0, m}, \quad j = \overline{0, n}, \quad \left| D^{(k)} - D^{(k-1)} \right| < \varepsilon,$$

де $D = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=1}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i,j} - x_{i-1,j-1})^2 + (y_{i,j} - y_{i-1,j-1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j-1} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i,j-1} - y_{i-1,j})^2}}$ – відношення довжин діагоналей

криволінійних чотирикутників сіткової області G_ω^z , обчислювальний процес припиняємо; у протилежному випадку переходимо до пункту 2, де визначаємо нові наближення параметру $\alpha_*^{(k+1)}$.

4. Результати числових розрахунків

В якості прикладу наведемо результати проведених обчислень для водойми, дно якої описується рівнянням $z = -\cos(x)\cos(y) - 2$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, $y \in [-\pi/2; \pi/2]$, береги – $x = -\pi/2$, $x = \pi/2$, а «еквіпотенціальні стінки»

(ділянки входу та виходу) – $y = -\pi/2$, $y = \pi/2$, при $\varphi_* \Big|_{x=-\pi/2} = 0$,

$\varphi_* \Big|_{x=\pi/2} = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$. При цьому, криволінійні координати пов'яжемо з

фізичними наступними співвідношеннями: $x = \xi$, $y = \eta$, $z = -(\cos \xi \cos \eta + 2)\zeta$.

В такому разі обмежуючі $G_r = A_* B_* C_* D_* A^* B^* C^* D^*$ поверхні $A_* B_* C_* D_*$, $A^* B^* C^* D^*$, $A_* A^* B^* B_*$, $C_* C^* D^* D_*$, $A_* D_* A^* D^*$, $B_* C_* C^* B^*$ характеризуватимемо

відповідно як $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, $\xi = -\pi/2$, $\xi = \pi/2$, $\eta = -\pi/2$, $\eta = \pi/2$. На рис. 2 зображено розрахункову гідродинамічну сітку руху для G_r та відповідної їй плоскої області G_z при $\kappa(\zeta, \psi, \alpha_*) = (0.1\zeta + 0.001)(\alpha_*(Q - \psi)\psi + 0.03)$, $Q = 1$, $m = 15$, $n = 15$.

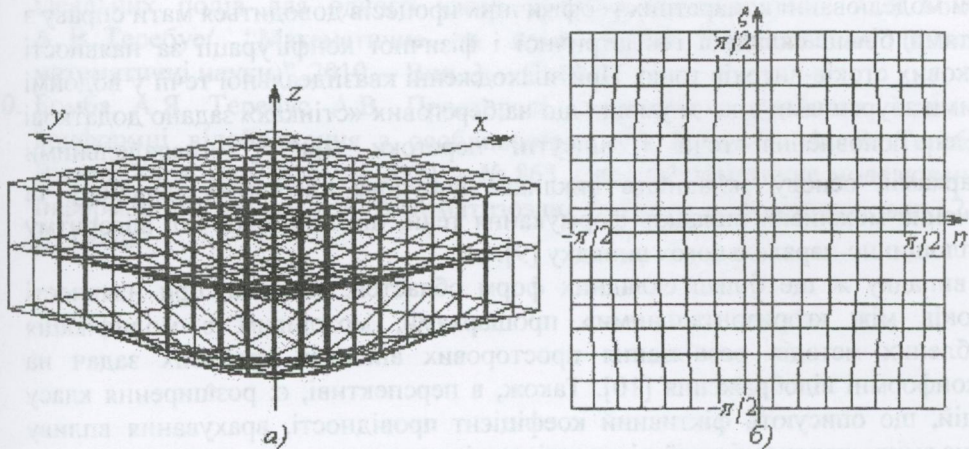


Рис. 2. Гідродинамічна сітка руху в областях а) G_r та б) G_z при розбитті 15×15

При цьому, в результаті проведених обчислень, одержано значення невідомого параметру $\alpha_* = 17.4765$. Крім цього, проведено ряд розрахунків для цієї ж водойми при різних значеннях витрати Q . Зокрема, при $Q = 5$ одержано $\alpha_* = 59.40493$, а при $Q = 0.2$ – $\alpha_* = 15.81302$. Це відповідає фізичній картині, адже, очевидно, що збільшення витрати Q призводить до збільшення коефіцієнта фіктивної провідності (а відповідно і параметра α_*).

5. Узагальнення та висновки

Побудовано математичну модель процесу руху частинок рідини у водоймі з відносно малими викривленнями дна, обмеженої поверхнями течії та екіпотенціальними поверхнями. При розв'язанні задачі розрахунку гідродинамічних параметрів течії модифіковано методологію моделювання процесів повільного руху рідин (що ґрунтується на заміні реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним фільтраційним полем) та розроблені числові методи квазіконформних відображень на основі використання методики апроксимації просторової фільтраційної течії деяким її «усередненим» плоским аналогом. При цьому, підкреслимо, що серед завдань роботи відповідного алгоритму, зокрема, є знаходження значення характерного (для формування фіктивного коефіцієнта провідності κ) параметра α_* .

Часто у реальних умовах процес руху рідини є базовою складовою частиною деякого більш загального процесу, що відбувається у водоймі. Так, наприклад, математичному моделюванню процесу теплопровідності у водоймі-охолоджувачі передуює розрахунок квазіідеального фіктивного фільтраційного поля. В такій

ситуації доцільно до визначити сформований нами фіктивний коефіцієнт провідності, наприклад, шляхом його домноження на деяку функцію $g(T)$, що характеризує вплив температури на опір середовища (алгоритми розв'язків відповідних нелінійних задач типу «конвекція-дифузія» можуть бути побудовані на основі поетапної фіксації теплових та фільтраційних характеристик процесу і середовища).

При моделюванні конкретних геофізичних процесів доводиться мати справу з областями більш складної геометричної і фізичної конфігурації за наявності додаткових стоків-витоків тощо. При знаходженні квазіідеальної течії у водоймі з малими збуреннями дна, за умови, що на берегових «стінках» задано додаткові джерела поповнення течії і відсутні перетоки між ζ - паралельними прошарками, основу складності викликає побудова алгоритму перебору та визначення можливих випадків формування течії, що повторює хід алгоритму для «площинно-паралельного» випадку [9].

У випадку ж ще більш складних форм областей, зокрема, при наявності перетоків між «горизонтальними» прошарками, можливим є модифікація розроблених методів розв'язання просторових аналогів крайових задач на квазіконформні відображення [10]. Також, в перспективі, є розширення класу функцій, що описують фіктивний коефіцієнт провідності, врахування впливу вітру на зміну швидкості течії, кількості опадів та випаровування.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616с.
2. Чикина Л. Г. Моделирование распространения загрязнения в мобилском заливе (США) / Л. Г. Чикина, А. Л. Чикин // Математическое моделирование. – 2001. – Т.13, №2. – С. 93-98.
3. Бомба А.Я., Метод «фіктивної фільтрації» математичного моделювання сингулярно-збурених процесів типу «конвекція-теплова дифузія-теплообмін» / А.Я. Бомба, Є.В. Савюк, О.А. Фурсачик // Вісник Харк. нац. ун-ту. – 2010. – № 925. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип.14. – с. 20-27.
4. Бомба А.Я. Метод фіктивної фільтрації моделювання одного класу квазіідеальних процесів руху рідин / А. Я. Бомба., С. О. Пеньковський, Є.В. Савюк // Волинський математичний вісник. – 2010. – Вип. 7(16). – С.20-29.
5. Толпаев В. А. Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: автореферат диссертации на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук :05.13.18 / В. А. Толпаев. – Ставрополь. – 2004. – 38 с.
6. Толпаев В.А. Уравнения линейной двумерной фильтрации жидкости в анизотропных искривленных слоях переменной и постоянной толщины/ В.А. Толпаев, В.И. Ледовской// Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. – №2. – Ростов-на-Дону. – 2004. – С. 19-30.
7. Бомба А. Я. Моделювання ідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів // А. Я. Бомба, А. В. Теребус/ Математичне та

- комп'ютерне моделювання. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський Національний університет. 2010. – Вип. 4. – С. 31-40.
8. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – Київ : Наукова думка, 2007. – 292 с.
 9. Бомба А.Я, Теребус А.В. Метод квазіконформних відображень моделювання ідеальних полів для одного класу просторових областей// А. Я. Бомба, А. В. Теребус/ “Математичне та комп'ютерне моделювання (фізико-математичні науки)”. 2010. – Вип. 3. – С. 13-27
 10. Бомба А.Я, Теребус А.В. Просторові узагальнення крайових задач на конформні відображення з особливостями //А. Я. Бомба, А. В. Теребус/ Вісник Харк. нац. ун-ту. – 2009. – № 863. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип.12. – С. 13-20.