МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

О. Л. Півень
Т. І. Сморцова

АНАЛІЗ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Методичні рекомендації
для студентів 1 курсу другого магістерського рівня освіти
денної форми навчання
спеціальності 113 «Прикладна математика»

Електронний ресурс

Харків – 2024

УДК 519.237+519.246.8(075.8)
П 32

Рецензенти:

О. Л. Вишневецький – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету;

Т. Б. Фастовська – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Затверджено до розміщення в мережі Інтернет рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 5 від 22 лютого 2024 року)

Півень О. Л.

П 32 Аналіз часових рядів : методичні рекомендації для студентів 1 курсу другого магістерського рівня освіти денної форми навчання спеціальності 113 «Прикладна математика» [Електронний ресурс] / О. Л. Півень, Т. І. Сморцова. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024. – (PDF 49 с.)

Методичні рекомендації з курсу «Прикладні задачі математичної статистики» розроблені для студентів 1 курсу другого магістерського рівня освіти денної форми навчання спеціальності 113 «Прикладна математика». Тут висвітлені питання з розділу математичної статистики «Аналіз часових рядів». Наведено велику кількість прикладів розв’язання типових задач з цього розділу курсу, а також завдання для самостійної роботи.

Матеріали можуть бути корисними для студентів різних спеціальностей, які використовують методи прикладної математичної статистики для своїх досліджень.

УДК 519.237+519.246.8(075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні рекомендації та завдання з курсу «Прикладні задачі математичної статистики» розроблені для студентів 1 курсу другого магістерського рівня освіти денної форми навчання спеціальності 113 «Прикладна математика» факультету математики і інформатики. Тут висвітлені питання з аналізу часових рядів. Цей розділ математичної статистики застосовуються в різноманітних сферах: економіці, соціології, фінансовому аналізі, техніці та інших. У методичних вказівках наведено велику кількість прикладів розв'язання типових задач із зазначеного розділу курсу, а також завдання для самостійної роботи. Усі задачі мають прикладний характер. У додатках наведені таблиці математичної статистики, які необхідні для розв'язання задач.

Студенти, яким викладається курс «Прикладні задачі математичної статистики», повинні мати знання з курсів «Теорія ймовірностей» та «Математична статистика». Зокрема, студенти мають володіти основними законами розподілу, методами оцінювання параметрів, характеристик випадкових величин та випадкових векторів, методами перевірки статистичних гіпотез про параметри нормального розподілу, критеріями узгодженості, основами кореляційного аналізу. Ці питання викладені в [1 – 4].

Ці матеріали можуть бути корисними для викладачів та студентів різних спеціальностей, які використовують методи прикладної математичної статистики для своїх досліджень, під час проведення практичних занять в аудиторії та для самостійної роботи.

1. КРИТЕРІЇ ПЕРЕВІРКИ ВИПАДКОВОСТІ ЧАСОВОГО РЯДУ

У цьому розділі розглядаються критерії перевірки випадковості часового ряду, наведені в [5].

Нехай заданий часовий ряд $x_i = x(i)$, $i = 1, \dots, n$ довжини n. Тут $x_i \neq x_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$, інакше точки часового ряду $x_i = x_{i+1}$ розглядаються як одне значення, при цьому довжина часового ряду n зменшується на 1.

Критерій, що ґрунтується на екстремальних точках часового ряду.

Точка $x_{i+1}, i = 1, \dots, n-2$ називається е*кстремальною точкою* часового ряду, якщо або $x_i < x_{i+1} > x_{i+2}$, або $x_i > x_{i+1} < x_{i+2}$. Підраховуємо число p – кількість екстремальних точок часового ряду. Статистика p має асимптотично нормальний закон. Обчислюємо статистику

$$y_1 = \frac{p - \frac{2}{3}(n-2)}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}}. \qquad (1.1)$$

За допомогою функції Лапласа $\Phi_0(x)$ (табл. 1 Додатку) за заданою довірчою ймовірністю α, знаходимо величину ε_α із умови $\Phi_0(\varepsilon_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$. Якщо $|y_1| < \varepsilon_\alpha$, то з довірчою ймовірністю α ми приймаємо гіпотезу про те, що розподіл числа екстремальних точок часового ряду, який досліджується, узгоджується з розподілом числа екстремальних точок суто випадкового часового ряду. Якщо $|y_1| \geq \varepsilon_\alpha$, то на рівні значущості $q = 1 - \alpha$ відхиляємо гіпотезу про те, що розподіл числа екстремальних точок часового ряду, який досліджується, узгоджується з розподілом числа екстремальних точок суто випадкового часового ряду.

Критерії фаз.

Фаза – це інтервал часу між двома послідовними екстремальними точками. Для кожного числа $d = 1, \dots, n-3$ у часовому ряді, який досліджується, підраховуємо кількість ν_d фаз довжини d. Для суто випадкового часового ряду математичне сподівання числа фаз довжини d дорівнює

$$N_d = \frac{2(n-d-2)(d^2+3d+1)}{(d+3)!}, \quad d = 1, \dots, n-3, \quad (1.2)$$

а математичне сподівання повного числа фаз дорівнює

$$N = \sum_{d=1}^{n-3} N_d \approx \frac{2n-7}{3}. \quad (1.3)$$

Теоретичні ймовірності появи фази довжини d у суто випадковому часовому ряді дорівнюють

$$p_d = \frac{N_d}{N}, \quad d = 1, \dots, n-3. \quad (1.4)$$

За допомогою критерію узгодженості (наприклад, критерію χ^2 Пірсона [1 – 4]) з'ясовуємо, чи узгоджується розподіл числа фаз часового ряду, який досліджується, з розподілом числа фаз суто випадкового часового ряду.

Критерій знаків.

Для часового ряду, який досліджується, підраховуємо кількість c тих значень x_i, $i = 1, \dots, n-1$, для яких $x_i < x_{i+1}$, тобто кількість додатних різниць $x_{i+1} - x_i$ першого порядку. Обчислюємо статистику

$$y_2 = \frac{c - \frac{1}{2}(n-1)}{\sqrt{\frac{n+1}{12}}}. \quad (1.5)$$

За допомогою функції Лапласа $\Phi_0(x)$ (табл. 1 Додатку) за заданою довірчою ймовірністю α, знаходимо величину ε_α із умови $\Phi_0(\varepsilon_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$. Якщо $|y_2| < \varepsilon_\alpha$, то з довірчою ймовірністю α ми приймаємо гіпотезу про те, що розподіл кількості додатних різниць першого порядку часового ряду, який досліджується, узгоджується з розподілом числа додатних різниць першого порядку суто випадкового часового ряду. Якщо $|y_2| \geq \varepsilon_\alpha$, то на рівні значущості $q = 1 - \alpha$ відхиляємо гіпотезу про те, що розподіл числа додатних різниць першого порядку часового ряду, який досліджується, узгоджується з розподілом числа додатних різниць першого порядку суто випадкового часового ряду.

Приклад 1.1. У таблиці наведені дані про врожайність ячменю в Англії та Уельсі з 1884 по 1939 роки. З'ясувати, чи узгоджуються розподіл числа екстремальних точок, фаз та додатних різниць першого порядку цього часового ряду з розподілом числа екстремальних точок, фаз та додатних різниць першого порядку суто випадкового часового ряду.

Розв'язання. Застосуємо до цього часового ряду усі перелічені критерії перевірки випадковості. Всього було проведено 56 спостережень врожайності. Проте двічі (у 1906, 1907 та 1910, 1911 роках) значення врожайності для сусідніх років виявились однаковими, тому кожна пара таких спостережень розглядається як одне спостереження. Тому довжина часового ряду $n = 54$.

У таблиці знаком «∨» відмічені екстремальні точки часового ряду, знаком «+» – ті значення x_i, для яких $x_i < x_{i+1}$, а знаком «–» відмічені ті значення x_i, для яких $x_i > x_{i+1}$.

Рік	Врожайність	Рік	Врожайність	Рік	Врожайність
1884	+ 15,2	1903	– 15,1	1921	+ 14,0 ∨
1885	– 16,9 ∨	1904	+ 14,6 ∨	1923	+ 14,5
1886	– 15,3	1905	+ 16,0	1924	– 15,4 ∨
1887	+ 14,9 ∨	1906	16,8	1925	+ 15,3 ∨
1888	– 15,7 ∨	1907	– 16,8 ∨	1926	+ 16,0
1889	+ 15,1 ∨	1908	+ 15,5 ∨	1927	+ 16,4
1890	– 16,7 ∨	1909	– 17,3 ∨	1928	+ 17,2
1891	+ 16,3 ∨	1910	15,5	1929	– 17,8 ∨
1892	– 16,5 ∨	1911	– 15,5	1930	+ 14,4 ∨
1893	+ 13,3 ∨	1912	+ 14,2 ∨	1931	+ 15,0
1894	– 16,5 ∨	1913	– 15,8 ∨	1932	+ 16,0
1895	+ 15,0 ∨	1914	– 15,7	1933	+ 16,8
1896	– 15,9 ∨	1915	+ 14,1 ∨	1934	– 16,9 ∨
1897	+ 15,5 ∨	1916	– 14,8 ∨	1935	– 16,6
1898	– 16,9 ∨	1917	+ 14,4 ∨	1936	– 16,2
1899	– 16,4	1918	– 15,6 ∨	1937	+ 14,0 ∨
1900	– 14,9	1919	+ 13,9 ∨	1938	– 18,1 ∨
1901	+ 14,5 ∨	1920	– 14,7 ∨	1939	17,5
1902	– 16,6 ∨	1921	– 14,3		

Часовий ряд, який аналізується, містить $p = 35$ екстремальних точок та $c = 26$ додатних різниць першого порядку. За формулами (1.1) та (1.5) відповідно, обчислюємо $y_1 = 0{,}1094$, $y_2 = -0{,}23$. Для довірчої ймовірності $\alpha = 0{,}95$ обчислюємо $\varepsilon_\alpha = 1{,}96$. Оскільки $|y_1| < \varepsilon_\alpha$, то з довірчою ймовірністю 0,95 приймаємо гіпотезу про те, що розподіл числа екстремальних точок часового ряду, що досліджується, узгоджується з розподілом числа екстремальних точок суто випадкового часового ряду.

Оскільки $|y_2| < \varepsilon_\alpha$, то з довірчою ймовірністю 0,95 ми приймаємо гіпотезу про те, що розподіл числа додатних різниць першого порядку часового ряду, що досліджується, узгоджується з розподілом числа додатних різниць першого порядку суто випадкового часового ряду.

Часовий ряд, який досліджується, містить $\nu_1 = 23$ фази довжини 1, $\nu_2 = 7$ фаз довжини 2, $\nu_3 = 2$ фази довжини 3 та $\nu_4 = 2$ фази довжини 4. Тепер скористаємося критерієм узгодженості χ^2 Пірсона для того, щоб з'ясувати, чи узгоджується розподіл довжин фаз заданого часового ряду з розподілом довжин фаз суто випадкового часового ряду. Множину $\{1, \ldots, n-3\}$ значень випадкової величини ξ, що характеризує довжини фаз, розбиваємо на підмножини, що не перетинаються: $\Delta_i = \{i\}$, $i = 1, 2, 3$, $\Delta_4 = \{4, \ldots, 51\}$. За формулами (1.2) визначаємо очікуване число фаз довжини $d = 1, 2, 3$: $N_1 = \frac{85}{4}$, $N_2 = \frac{55}{6}$, $N_3 = \frac{931}{360}$, а за формулою (1.3) для суто випадкового часового ряду довжини $n = 54$ визначаємо очікувану кількість фаз $N = \frac{101}{3}$. Далі за формулою (1.4) визначаємо теоретичні ймовірності p_d появи фази довжини $d = 1, 2, 3$: $p_1 = \frac{255}{404}$, $p_2 = \frac{55}{202}$, $p_3 = \frac{931}{12120}$, які, відповідно, є теоретичними ймовірностями потрапляння випадкової величини ξ у множину Δ_d. Ймовірність потрапляння випадкової величини ξ у множину Δ_4 дорівнює $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = \frac{239}{12120}$. Тоді

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{\nu_i^2}{kp_i} - k = 3{,}44, \quad k = \sum_{i=1}^{4} \nu_i = 34,$$

де k – загальна кількість фаз часового ряду, який досліджується. Для рівня значущості $q = 0{,}05$ за табл. 2 Додатку (закон розподілу χ^2) маємо $\chi^2_{3;\,0{,}05} = 7{,}81$. Оскільки $\chi^2 < \chi^2_{3;\,0{,}05}$, то з довірчою ймовірністю 0,95 ми приймаємо гіпотезу про те, що розподіл кількості фаз часового ряду, який досліджується, узгоджується з розподілом кількості фаз суто випадкового часового ряду.

Завдання для самостійної роботи

1.1 – 1.10. Впродовж 30 тижнів проводились спостереження за кількістю продажів. У таблиці наведені дані продажів на кінець тижня. З’ясувати, чи узгоджуються розподіл числа екстремальних точок, фаз та додатних різниць першого порядку цього часового ряду з розподілом числа екстремальних точок, фаз та додатних різниць першого порядку суто випадкового часового ряду.

Варіант	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10
Тиждень										
1	1795	622	53	72	517	1204	1494	6827	6848	2428
2	1738	621	33	73	554	1328	1525	6178	7027	2010
3	1934	620	30	77	538	1328	1551	7084	7685	2981
4	1835	636	29	81	575	1435	1539	8462	7602	3074
5	2024	630	55	78	584	1416	1629	8162	7775	2893
6	2083	666	44	79	609	1494	1665	9644	7933	3198
7	1341	650	41	87	601	1525	1799	8350	8094	3250
8	987	670	43	94	625	1551	1708	7829	9280	3495
9	1650	676	68	93	665	1539	1973	8829	8730	3528
10	2074	696	55	84	644	1664	1873	9948	9614	3838
11	2122	684	55	92	676	1640	2087	10638	9290	3916

12	1920	707	67	100	725	1708	2271	11253	10925	4142
13	1877	705	55	106	700	1799	2208	11179	10645	4441
14	1815	718	57	110	745	1973	2365	12820	12161	5583
15	1848	731	52	108	787	1873	2423	12950	10466	6230
16	1646	758	34	111	832	2087	2416	10894	11030	6497
17	1653	745	29	103	810	2208	2484	10455	11424	5480
18	1810	773	30	109	855	2271	2605	11179	10748	5870
19	1462	787	28	121	884	2365	2744	10590	11390	6354
20	1404	807	28	110	878	2416	2729	8919	11637	6610
21	1522	844	41	115	941	2483	2695	11607	12200	6290
22	1624	828	50	125	914	2400	2858	12537	11577	6725
23	1732	894	49	145	959	2605	2826	14759	12246	6435
24	1850	870	44	132	939	2744	3190	10437	13281	6687
25	1920	939	52	136	957	2729	3115	13589	10360	6885
26	2074	920	79	158	983	2695	3248	13402	13812	6540
27	2122	962	68	146	1000	2826	3166	13103	12185	6480
28	2305	102	83	148	1002	2858	3279	14190	14057	7000
29	2280	990	107	160	996	3115	3501	13560	16243	6580
30	2295	105	105	155	993	3190	3618	10820	12400	6985

2. МЕТОДИ ЗГЛАДЖУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ

1. Метод найменших квадратів описано в [6].

Розглянемо модель часового ряду

$$x(t) = f(t) + \varepsilon(t), \quad t = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

де $f(t)$ та $\varepsilon(t)$ – детермінована та випадкова компоненти відповідно. Тут випадкові величини $\varepsilon(t),\ t = 1, \dots, n,$ незалежні, нормально розподілені та мають нульове математичне сподівання і сталу дисперсію σ^2, а функція $f(t)$ має вигляд

$$f(t) = \theta_0 + \sum_{j=1}^{p} \theta_j \varphi_j(t), \tag{2.2}$$

де $\varphi_j(t)$ – задані функції, $\theta_0, \dots, \theta_p$ – невідомі параметри, які мають бути оцінені. Для оцінки параметрів за методом найменших квадратів будується матриця розмірності $n \times (p+1)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1(1) & \cdots & \varphi_p(1) \\ 1 & \varphi_1(2) & \cdots & \varphi_p(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \varphi_1(n) & \cdots & \varphi_p(n) \end{pmatrix},$$

на яку накладається обмеження

$$rank\, X = p + 1 < n. \tag{2.3}$$

Зазначимо, що обмеження (2.3) завжди виконується, якщо в (2.2) $f(t) = \sum_{j=0}^{p} \theta_j t^j$.

Відповідно до методу найменших квадратів, за виконання обмеження (2.3), оцінки $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p$ відповідних параметрів $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_p$ детермінованої складової $f(t)$ знаходяться за формулою

$$\hat{\theta} = \left(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p\right)^T = (X^T X)^{-1} X^T y, \tag{2.4}$$

де $y = (x_1, \dots, x_n)^T$, $x_i = x(i),\ i = 1, \dots, n.$

Довірчий інтервал для прогнозу часового ряду.

Нехай в моделі (2.1) функція $f(t)$ має вигляд (2.2) та виконується обмеження (2.3). Розглянемо функцію

$$\hat{f}(t) = \hat{\theta}_0 + \sum_{j=1}^{p} \hat{\theta}_j \varphi_j(t),$$

яка для $t > n$ дає прогноз часового ряду $x(t)$ в момент часу t. Оцінки $\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p$ знаходяться методом найменших квадратів за формулою (2.4). Довірчий інтервал для прогнозу часового ряду $f(t)$ в момент t, який відповідає заданій довірчій ймовірності α, має вигляд

$$f(t)$$

$$\in \left(\hat{f}(t) - \hat{s} t_{n-p-1;\,q} \sqrt{\left((X^T X)^{-1} z(t), z(t)\right)},\right.$$

$$\left.\hat{f}(t) \ + \ \hat{s} t_{n-p-1;\,q} \sqrt{\left((X^T X)^{-1} z(t), z(t)\right)}\right), \qquad (2.5)$$

де

$$z(t) = \left(1, \varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t)\right)^T, \hat{s}^2 = \frac{1}{n-p-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{x}_i)^2, \hat{x}_i = \hat{f}(i),$$

а величина $t_{n-p-1;\,q}$ знаходиться за табл. 3 Додатку (закон розподілу Стьюдента) для ймовірності $q = 1 - \alpha$ та числа ступенів свободи $(n - p - 1)$.

Перевірка рівняння тренду на адекватність.

Для перевірки спочатку обчислюємо значення

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i - \bar{x})^2 / p}{\sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i - x_i)^2 / (n - p - 1)}, \quad \text{де } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (2.6)$$

Для заданого рівня значущості q та чисел ступенів свободи p, $n - p - 1$ за табл. 4 Додатку (закон розподілу Фішера) знаходимо величину $F_{p;\,n-p-1;\,q}$. Якщо $F < F_{p;\,n-p-1;\,q}$, то з довірчою ймовірністю $\alpha = 1 - q$ приймаємо гіпотезу про неадекватність моделі (2.1) з трендом (2.2). Якщо $F \geq F_{p;\,n-p-1;\,q}$, то на рівні значущості q відхиляємо гіпотезу про неадекватність моделі (2.1) з трендом (2.2) та приймаємо альтернативну гіпотезу про адекватність цієї моделі.

Приклад 2.1. Адміністрація банку вивчає динаміку обсягів депозитів фізичних осіб впродовж низки років (млн грн): 2; 6; 7; 3; 10; 12; 13. Побудувати рівняння лінійного тренду та перевірити його на адекватність. Надати точковий та інтервальний прогнози обсягів депозитів на 10-й рік.

Розв'язання. Маємо часовий ряд довжини $n = 7$. Рівняння лінійного тренду має вигляд $f(t) = \theta_0 + \theta_1 t$. Коефіцієнти θ_0, θ_1 оцінимо за методом найменших квадратів. Маємо $p = 1$ та матрицю X вигляду

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 7 \end{pmatrix}^T.$$

Оскільки $rank\, X = 2 < n$, то матриця X задовольняє обмеження (2.3). Далі обчислюємо

$$X^T X = \begin{pmatrix} 7 & 28 \\ 28 & 140 \end{pmatrix}, \quad (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{28} \end{pmatrix},$$

$$y = (2; 6; 7; 3; 10; 12; 13)^T.$$

За формулою (2.4) знаходимо $\hat{\theta} = \left(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1\right)^T = \left(\frac{5}{7}, \frac{12}{7}\right)^T$. Обчислюємо $\bar{x} = \frac{53}{7}$ та значення $\hat{x}_i = \hat{\theta}_0 + i\,\hat{\theta}_1$ для $i = 1, \dots, 7$:

$\frac{17}{7};\frac{29}{7};\frac{41}{7};\frac{53}{7};\frac{65}{7};11;\frac{89}{7}$. Далі за формулою (2.6) обчислюємо статистику $F = 15$. Для рівня значущості $q = 0{,}05$ за табл. 4 Додатку (закон розподілу Фішера) знаходимо величину $F_{p;\,n-p-1;\,q} = F_{1;5;0{,}05} = 6{,}61$. Оскільки $F > F_{p;\,n-p-1;\,q}$, то на рівні значущості q відхиляємо гіпотезу про неадекватність лінійного тренду $\hat{f}(t) = \hat{\theta}_0 + t\hat{\theta}_1$ та приймаємо альтернативну гіпотезу про адекватність цього тренду.

Точковий прогноз обсягів депозитів на 10-й рік маємо такий: $\hat{f}(t) = \hat{\theta}_0 + 10\hat{\theta}_1 = \frac{125}{7}$ млн грн.

Тепер побудуємо відповідний довірчий інтервал для прогнозу обсягів депозитів на 10 років, використавши співвідношення (2.5), у якому маємо $t = 10$, $z(10) = (1;10)^T$. Задамо довірчу ймовірність $\alpha = 0{,}95$ і за табл. 3 Додатку (закон розподілу Стьюдента) знаходимо $t_{5;\,0{,}05} = 2{,}57$. Тоді незміщена оцінка дисперсії залишків має значення $\hat{s}^2 = \frac{192}{35}$. Отже, шуканий довірчий інтервал має вигляд $(10{,}66;\ 25{,}05)$.

Завдання для самостійної роботи

2.1. Є дані про чисельність населення міста А за 2014 – 2022 роки (на початок кожного року), тис. осіб: 119; 120; 119; 118; 118,6; 118; 117,9; 117,7; 117,4. За допомогою методу найменших квадратів виділити лінійний тренд та перевірити його на адекватність. Надати точковий та інтервальний прогнози чисельності населення на 2023 рік.

2.2. Є дані про курс акцій (в грн) деякого акціонерного товариства за 12 місяців 2022 року: 624; 627; 628; 629; 641; 637; 649; 651; 641; 647; 659; 658. За допомогою методу найменших квадратів виділити лінійний тренд та перевірити його на адекватність. Надати точковий та інтервальний прогнози курсу акцій на січень 2023 року.

2.3. Кількість персональних комп'ютерів в організації за останні 6 років складала, відповідно, 50; 110; 350; 1020; 1950; 3710. За допомогою методу найменших квадратів виділити лінійний тренд та перевірити його на адекватність. Надати точковий та інтервальний прогнози кількості комп'ютерів в університеті на дев'ятий рік.

2.4. Є дані про поштові тарифи за 11 років: 5; 5; 8; 8; 10; 13; 15; 18; 20; 22; 25. За допомогою методу найменших квадратів виділити лінійний тренд та перевірити його на адекватність. Надати точковий та інтервальний прогнози величини поштового тарифу на 13-й рік

2.5. Компанія, яка спеціалізується на виробництві очисних пристроїв, зафіксувала наступний обсяг продажів за останні 9 років (в тис. грн): 13; 15; 19; 21; 27; 35; 47; 49; 57. За допомогою методу найменших квадратів виділити лінійний тренд та перевірити його на адекватність. Надати точковий та інтервальний прогнози продаж на 12-й рік

2.6. Є дані про чисельність безробітних в місті А за січень – листопад, осіб: 2360; 2351; 2041; 1695; 1489; 1557; 1236; 1113; 903; 865; 652. За допомогою методу найменших квадратів виділити лінійний тренд та перевірити його на адекватність. Надати точковий та інтервальний прогнози кількості безробітних на січень наступного року.

2.7. Є дані про витрати на харчування (в тис. злотих) польської сім'ї впродовж 10 місяців: 2,8; 2,6; 2,7; 2,9; 3,0; 3,0; 3,3; 3,5; 3,6; 3,7. За допомогою методу найменших квадратів виділити лінійний тренд та перевірити його на адекватність. Надати точковий та інтервальний прогнози витрат сім’ї на харчування на 12-й місяць.

2.8. Є дані про річну врожайність пшениці (в ц/га) з деякої посівної площі за 2015 – 2022 роки: 12,2; 12,8; 13; 13,4; 14; 14,5; 15; 15,1. За допомогою методу найменших квадратів виділити лінійний тренд та перевірити його на адекватність. Надати точковий та інтервальний прогнози врожайності пшениці на 2023 рік.

2.9. Є дані обсягів надходжень щодо податкових платежів та інших доходів у бюджетну систему регіону країни (у млн грн) за січень – грудень поточного року: 2595,9; 2885,59; 3238,04; 1016,66; 4027,65; 3208,17; 3721,02; 4283,87; 3587,29; 4111,46; 4451,21; 6757,75. За допомогою методу найменших квадратів виділити лінійний тренд та перевірити його на адекватність. Надати точковий та інтервальний прогнози обсягів надходжень щодо податкових платежів та інших доходів у бюджетну систему регіону на лютий наступного року.

2.10. Є щомісячні дані про темпи зростання номінальної заробітної плати в деякій країні за 10 місяців поточного року в процентах до рівня грудня минулого року: 82,9; 87,3; 99,4; 104,98; 107,2; 121,6; 118,6; 114,1; 123,0; 127,3. За допомогою методу найменших квадратів виділити лінійний тренд та перевірити його на адекватність. Надати точковий та інтервальний прогнози темпу зростання заробітної плати на 12-й місяць поточного року

2. Метод ковзного середнього детально описаний в [6].

На відміну від методу найменших квадратів, цей метод є алгоритмічним та не передбачає завдання форми детермінованої компоненти $f(t)$ вигляду (2.2). Метою методу є побудова нового згладженого ряду з дисперсією меншою, ніж дисперсія σ^2 початкового ряду.

Якщо згладжування проводиться за непарним числом $N = 2m + 1 < n$ точок, то згладжений ряд має наступний вигляд

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} \sum_{k=-m}^{m} \left(\frac{3k(t-m-1)}{m(m+1)(2m+1)} + \frac{1}{2m+1} \right) x(k+m+1), \\ \qquad t = 1, \dots, m, \\ \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-m}^{m} x(t+k), \qquad t = m+1, \dots, n-m, \\ \sum_{k=-m}^{m} \left(\frac{3k(t-n+m)}{m(m+1)(2m+1)} + \frac{1}{2m+1} \right) x(k+n-m), \\ \qquad t = n-m+1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.7)$$

Якщо ж згладжування проводиться за парним числом $N = 2m < n$ точок, то згладжений ряд має наступний вигляд

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{2m} \left(\frac{6\left(k-m-\frac{1}{2}\right)\left(t-m-\frac{1}{2}\right)}{m(2m-1)(2m+1)} + \frac{1}{2m} \right) x(k), \\ \qquad t = 1, \dots, m, \\ \frac{1}{4m} x(t-m) + \frac{1}{4m} x(t+m) + \frac{1}{2m} \sum_{k=-m+1}^{m-1} x(t+k), \\ \qquad t = m+1, \dots, n-m, \\ \sum_{k=n-2m+1}^{n} \left(\frac{6\left(k-n+m-\frac{1}{2}\right)\left(t-n+m-\frac{1}{2}\right)}{m(2m-1)(2m+1)} + \frac{1}{2m} \right) x(k), \\ \qquad t = n-m+1, \dots, n. \end{cases} \quad (2.8)$$

Приклад 2.2. Є дані про врожайність (ц/га) озимої пшениці за 10 років: 16,3; 20,2; 17,1; 7,7; 15,3; 16,3; 19,9; 14,4; 18,7; 20,7.

Провести згладжування за методом простого ковзного середнього з інтервалом згладжування а) 3 точки; б) 4 точки.

Розв'язання.

а) Маємо $n = 10, N = 3$. Застосовуючи (2.7) для $m = 1$, отримаємо новий згладжений часовий ряд $\hat{f}(t)$: $\frac{262}{15}, \frac{268}{15}$, $15, \frac{401}{30}, \frac{131}{10}, \frac{103}{6}, \frac{253}{15}, \frac{53}{3}, \frac{269}{15}, \frac{253}{12}$.

б) Застосувавши (2.8) зі значеннями $m = 2, n = 10, N = 4$, отримуємо новий згладжений часовий ряд $\hat{f}(t)$: 19,6600; 16,7700; 15,20; 14,58750; 14,4500; 15,6375; 16,90; 17,875; 18,7600; 19,4300.

Завдання для самостійної роботи

В умовах задач 1.1 – 1.10 провести згладжування часового ряду методом ковзного середнього з інтервалом згладжування 3 та 4 точки.

3. Експоненціальне згладжування. Цей метод був запропонований Р. Брауном у 1963 році в монографії [8].

Згладжений ряд отримуємо із вихідного ряду $x(t)$ за допомогою такого оператору згладжування:

$$S_t[x] = \alpha x(t) + (1 - \alpha) S_{t-1}[x], \quad t = 1, \dots, n \qquad (2.9)$$

де параметр згладжування $\alpha \in (0; 1)$, а детермінована стала $S_0 = S_0[x]$ визначає початкове значення. Як і у випадку методу ковзного середнього, результатом застосування оператора згладжування є ряд, дисперсія якого менше дисперсії σ^2 вихідного ряду. Рекурентно визначаються оператори кратного експоненціального згладжування порядку k:

$$S_t^{(1)}[x] = S_t[x],$$
$$S_t^{(k)}[x] = \alpha S_t^{(k-1)}[x] + (1-\alpha) S_{t-1}^{(k)}[x],$$
$$t = 1, \dots, n, \qquad k = 2,3, \dots \qquad (2.10)$$

за детермінованих початкових значень $S_0^{(k)} = S_0^{(k)}[x]$.

Для прогнозування часового ряду $x(t)$ довжини n на глибину $\tau \in N$, тобто на момент часу $n + \tau$, використовуються прогнозуючі поліноми $\sum_{j=0}^{p} a_j \frac{\tau^j}{j!}$, коефіцієнти яких оцінюються за *дисконтованим методом найменших квадратів*. У випадку $p = 1$ оцінки коефіцієнтів прогнозуючого поліному $a_0 + a_1\tau$ – мають вигляд

$$\hat{a}_0 = 2S_n^{(1)} - S_n^{(2)}, \quad \hat{a}_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(S_n^{(1)} - S_n^{(2)}\right), \qquad (2.11)$$

та прогнозоване значення часового ряду на глибину τ визначається формулою

$$\hat{f}(n+\tau) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\tau. \qquad (2.12)$$

Що менше α, то менше дисперсія згладженого ряду і більший вплив усіх членів ряду. З іншого боку, що ближче α до 1, то більше ваги під час прогнозування мають останні спостереження. В якості початкових значень $S_0^{(k)} = S_0^{(k)}[x]$ беруть або перший член ряду, або середнє всіх або деяких спостережень.

Приклад 2.3. У наведеній нижче таблиці дані часового ряду x_t довжини $n = 15$ характеризують щоденний курс акцій (в доларах) фірми IBM з 11 по 29 липня 1960 року (за виключенням вихідних днів 16, 17, 23, 24 липня). До цього ряду застосовані оператори експоненціального згладжування $S_t^{(1)}[x], S_t^{(2)}[x]$ першого та другого порядку відповідно зі значеннями параметру α, що дорівнюють 0,1 та 0,9. Розрахунки проводились за формулами (2.9) та (2.10). В якості початкових значень для експоненціального згладжування обирались перші елементи згладжуваних рядів: $S_0^{(1)}[x] = x_1$, $S_0^{(2)}[x] = S_1^1$. За допомогою формул (2.11) обчислюємо коефіцієнти прогнозуючих поліномів (2.12) першого ступеня. Прогнозуючий поліном для $\alpha = 0{,}1$ має вигляд $505{,}1309 - 0{,}072\tau$, а для $\alpha = 0{,}9$ – $524{,}9023 + 14{,}1825\tau$. Наприклад, прогнозований курс акцій на 16-й день (тобто, на 1 серпня) для $\alpha = 0{,}9$ складе $524{,}9023 + 14{,}1825 = 539{,}0848$.

t	x_t	$\alpha = 0{,}1$		$\alpha = 0{,}9$	
		$S_t^{(1)}$	$S_t^{(2)}$	$S_t^{(1)}$	$S_t^{(2)}$
1	510,0000	510,0000	510,0000	510,0000	510,0000
2	497,0000	508,7000	509,8700	498,3000	499,4700
3	504,0000	508,2300	509,7060	503,4300	503,0340
4	510,0000	508,4070	509,5761	509,3430	508,7121
5	509,0000	508,4663	509,4651	509,0343	509,0021
6	503,0000	507,9197	509,3106	503,6034	504,1433
7	500,0000	507,1277	509,0923	500,3603	500,7386
8	500,0000	506,4149	508,8246	500,0360	500,1063
9	500,0000	505,7734	508,5194	500,0036	500,0139
10	495,0000	504,6961	508,1371	495,5004	495,9517
11	494,0000	503,6265	507,6860	494,1500	494,3302
12	499,0000	503,1638	507,2338	498,5150	498,0965
13	502,0000	503,0475	506,8152	501,6515	501,2960
14	509,0000	503,6427	506,4979	508,2652	507,5682
15	525,0000	505,7784	506,4260	523,3265	521,7507

Завдання для самостійної роботи

2.11. Наведені дані про крос-курс валюти[1] за 20 днів (в у.о.): 110,7; 110,43; 110,56; 110,75; 110,84; 110,46; 110,56; 110,46; 110,05; 109,6; 109,31; 109,31; 109,25; 109,02; 108,54; 108,77; 109,02; 109,44; 109,38; 109,53. Надати прогноз крос-курсу валюти на 22-й день методом експоненціального згладжування з параметром $\alpha = 0{,}3$.

2.12. Наведені дані про курс акцій (в доларах) деякого АТ за 12 місяців поточного року: 621; 623; 601; 605; 620; 621; 611; 604; 607; 602; 605; 610. Надати прогноз курсу акцій на січень методом експоненціального згладжування з параметром $\alpha = 0{,}6$.

2.13. Є такі дані про врожайність пшениці (в ц/га) за 10 років: 6,3; 20,2; 17,1; 7,7; 15,3; 15,3; 19,9; 14,4; 18,7; 20,7. Надати прогноз врожайності пшениці на 12-й рік методом експоненціального згладжування з параметром $\alpha = 0{,}4$.

2.14. Експорт машин та устаткування має наступну динаміку за 12 місяців 2000 року (в млрд доларів): 0,34; 0,54; 0,84; 0,64; 0,59; 0,63; 0,55; 0,95; 0,65; 0,64; 1,09; 1,61. Надати прогноз величини експорту машин та устаткування на лютий 2001 року методом експоненціального згладжування з параметром $\alpha = 0{,}3$.

2.15. Наведені дані про обсяги продажів деякого товару (в тис. штук) за 10 років: 27; 26; 29; 22; 20; 34; 20; 35; 34; 27. Надати прогноз величини обсягів продажів на 12-й рік методом експоненціального згладжування з параметром $\alpha = 0{,}7$.

2.16. Наведені дані про відстані (в тис. миль), які пройдені британськими авіалайнерами за 12 місяців 1963 року: 6827; 6178;

[1] Курс валюти – ціна грошової одиниці однієї країни, виражена в грошовій одиниці іншої країни. Курс однієї валюти відносно іншої може бути визначений також через третю валюту. В цьому випадку він називається *крос-курсом*.

7084; 8162; 8462; 9644; 10466; 10748; 9963; 8194; 6848; 7027. Надати прогноз величини відстані, які пройдені авіалайнерами, на лютий 1964 року методом експоненціального згладжування з параметром $\alpha = 0{,}6$.

2.17. Наведені щоквартальні дані про обсяги споживання електроенергії (в кВт/ч) за 2001 – 2004 роки: 6; 4,4; 5; 9; 7,2; 4,8; 6; 10; 8; 5,6; 6,4; 11; 9; 6,6; 7; 10,8. Надати прогноз обсягів споживання електроенергії на 1 квартал 2005 року методом експоненціального згладжування з параметром $\alpha = 0{,}7$.

2.18. Наведені значення логарифму інфляції[2] в одній з європейських країн за 20 днів: 3,773; 3,791; 3,807; 3,820; 3,835; 3,846; 3,852; 3,861; 3,875; 3,892; 3,910; 3,920; 3,936; 3,949; 3,957; 3,967; 3,978; 3,987; 4,000; 4,018; 4,034; 4,050; 4,064; 4,071. Надати прогноз логарифму інфляції на 25-й день методом експоненціального згладжування з параметром $\alpha = 0{,}5$.

2.19. Оператором мобільного зв'язку зібрані дані про сумарний щоденний час розмов (в хв.) деяких абонентів по мобільному телефону за 1 – 14 жовтня: 10; 12; 10; 12; 12; 6; 8; 12; 14; 10; 12; 10; 7; 7. Надати прогноз часу розмови по телефону на 16 жовтня методом експоненціального згладжування з параметром $\alpha = 0{,}25$.

2.20. Наведені дані динаміки величини щомісячних позовів страхової компанії (в доларах) за 15 місяців: 1000; 1300; 1800; 1600; 1200; 1500; 1500; 1500; 1200; 1500; 1700; 1500; 1700; 1400; 1600. Надати прогноз величини позову, який буде пред'явлений до страхової компанії в 16-му місяці, методом експоненціального згладжування з параметром $\alpha = 0{,}75$.

[2] Натуральний логарифм збільшення зростання цін (в %).

3. ВИДІЛЕННЯ ПЕРІОДИЧНОЇ КОМПОНЕНТИ ЧАСОВОГО РЯДУ

Розглянуті методи виділення періодичної компоненти викладено в [7].

Для побудови часового ряду вигляду (2.1) з періодичною (сезонною або циклічною) компонентою, яка має період m, застосовується метод найменших квадратів з тригонометричним трендом вигляду

$$f(t) = A_0 + \sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} A_j \sin\frac{2\pi jt}{m} + B_j \cos\frac{2\pi jt}{m}, \ \ t = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Тут період m є дільником довжини n часового ряду. Зауважимо, що для функції $f(t)$ вигляду (3.1) обмеження (2.3) завжди виконуються. Параметри функції можуть бути оцінені за допомогою формули (2.4). У випадку парного m маємо

$$p = m - 1, \ \ \hat{\theta} = \left(\hat{A}_0, \dots, \hat{A}_{\frac{m}{2}-1}, \hat{B}_1, \dots \hat{B}_{\frac{m}{2}}\right)^T,$$

$$\hat{A}_0 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \ \ \hat{B}_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i x_i, \quad (3.2)$$

$$\hat{A}_j = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sin\frac{2\pi ji}{m}, \ \ \hat{B}_j = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cos\frac{2\pi ji}{m}, \ \ j = 1, \dots, \frac{m}{2} - 1.$$

Під час перевірки рівняння тригонометричного тренду на адекватність використовується статистика F (2.6), в якій $p = m - 1$, а

$$\hat{x}_i = \hat{A}_0 + \sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \hat{A}_j \sin\frac{2\pi ji}{m} + \hat{B}_j \cos\frac{2\pi ji}{m}, \ \ i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Ще один метод виділення сезонної складової є алгоритмічним методом ковзного середнього та не припускає завдання явної форми вигляду (3.1). Як і раніше, розглядається ряд, що має періодичну складову (сезонну або циклічну компоненту), що без остачі ділить n. Нехай $r = \frac{m}{n}$. Тоді періодична складова часового ряду з періодом m оцінюється за початковим рядом за допомогою таких формул:

$$v(t) = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1} x(t + mj) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \ \ v(t + mk) = v(t),$$

$$k = 1, \dots, r - 1, \ \ t = 1, \dots, m. \qquad (3.4)$$

Приклад 3.1. Наведені дані про щоквартальні обсяги продажів (в тис. грн) за останні 5 років. Виділити щоквартальну сезонну складову часового ряду у формі 4-періодичного тригонометричного тренду. Перевірити рівняння тренду на адекватність.

Квартал / Рік	I	II	III	IV
1	8,8	13,5	18,9	15,0
2	9,8	16,0	22,1	16,9
3	10,9	17,8	24,4	18,5
4	12,3	20,2	27,8	20,2
5	13,5	23,1	33,1	21,9

Розв'язання.

Довжина ряду $n = 20$, спостереження проводяться щоквартально впродовж п'яти років. При цьому значення періоду $m = 4$ – парне і є дільником довжини ряду. Застосувавши формули

(3.2), маємо $\hat{A}_0 = 18{,}235$, $\hat{A}_1 = -7{,}1$, $\hat{B}_1 = 0{,}19$, $\hat{B}_2 = 0{,}075$. Отже, сезонною складовою є тригонометричний тренд вигляду

$$\hat{f}(t) = 18{,}235 - 7{,}1 \sin\frac{\pi t}{2} + 0{,}19 \cos\frac{\pi t}{2} + 0{,}075 \cos \pi t. \quad (3.5)$$

Для перевірки отриманого тригонометричного тренду на адекватність, скористаємося статистикою F (2.6), в якій $p = 3$, а значення $\hat{x}_i = \hat{f}(i)$ обчислюємо за формулою (3.3). Тоді значення статистики $F = 12{,}36$. Для рівня значущості $q = 0{,}05$ знаходимо за табл. 4 Додатку (закон розподілу Фішера), що $F_{3;16;0{,}05} = 3{,}24$. Оскільки $F > F_{3;16;0{,}05}$, то на рівні значущості $q = 0{,}05$ ми відхиляємо гіпотезу про неадекватність моделі часового ряду $x(t) = f(t) + \varepsilon(t)$, де $f(t)$ – тригонометричний 4-періодичний тренд з оцінкою $\hat{f}(t)$ вигляду (3.5), а $\varepsilon(t)$ – випадкова складова. Таким чином, побудована нами модель часового ряду має сезонну 4-періодичну складову та випадкову складову.

Приклад 3.2. Наведені дані про квартальний товарообіг компанії за останні 20 кварталів. Виділити сезонну квартальну складову методом ковзного середнього і потім тренд методом найменших квадратів. Перевірити рівняння тренду на адекватність.

Рік / Квартал	Товаро-обіг	Рік / Квартал	Товаро-обіг	Рік / Квартал	Товаро-обіг	Рік / Квартал	Товаро-обіг
1998/1	155	1999/2	162	2000/3	187	2001/4	207
1998/2	160	1999/3	168	2000/4	197	2002/1	192
1998/3	163	1999/4	179	2001/1	188	2002/2	196
1998/4	173	2000/1	175	2001/2	193	2002/3	200
1999/1	161	2000/2	181	2001/3	198	2002/4	210

Розв'язання.

Застосуємо формулу (3.4), в якій $n = 20, m = 4, r = 5$, для виділення сезонної складової.

У таблиці нижче початковий часовий ряд $x(t)$ – квартальний товарообіг торгової компанії – наведений у другому стовбці. Результати обчислення $v(t)$ наведені у третьому стовпці таблиці. У четвертому стовпці цієї таблиці наведений новий часовий ряд $y(t)$, який отримаємо з початкового часового ряду $x(t)$ видаленням сезонної компоненти.

t	$x(t)$	$v(t)$	$y(t) = x(t) - v(t)$
1	155	-8,05	163,05
2	160	-3,85	163,85
3	163	0,95	162,05
4	173	10,95	162,05
5	161	-8,05	169,05
6	162	-3,85	165,85
7	168	0,95	167,05
8	179	10,95	168,05
9	175	-8,05	183,05
10	181	-3,85	184,85
11	187	0,95	186,05
12	197	10,95	186,05
13	188	-8,05	196,05
14	193	-3,85	196,85
15	198	0,95	197,05
16	207	10,95	196,05
17	192	-8,05	200,05
18	196	-3,85	199,85
19	200	0,95	199,05
20	210	10,95	199,05

До цього часового ряду застосуємо метод найменших квадратів для виділення тренду у вигляді $u(t) = \theta_0 + \theta_1 t$. За формулою (2.4) знаходимо оцінки параметрів $\hat{\theta}_0 = 156{,}35$, $\hat{\theta}_1 = 2{,}47$.

Модель лінійного тренду є адекватною. Для $n = 20, p = 1$, для ряду $y(t)$ та моделі лінійного тренду $\hat{u}(t) = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 t$ обчислюємо статистику F за формулою (2.6). Маємо $F = 184{,}27$. Для рівня значущості $q = 0{,}05$ та чисел ступенів свободи 1, 18 за табл. 4 Додатку (закон розподілу Фішера) знаходимо $F_{1;18;0{,}05} = 4{,}41$. Оскільки $F > F_{1;18;0{,}05}$, то на рівні значущості $q = 0{,}05$ ми відхиляємо гіпотезу про неадекватність моделі тренду та приймаємо гіпотезу про адекватність моделі. Таким чином, модель часового ряду має вигляд $x(t) = u(t) + v(t) + \varepsilon(t)$, де $u(t)$ – лінійний тренд з оцінкою $\hat{u}(t) = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 t$, $v(t)$ – щоквартальна сезонна складова (див. таблицю), $\varepsilon(t)$ – випадкова складова.

Завдання для самостійної роботи

В умовах задач 3.1 – 3.10 виділити щоквартальну сезонну складову часового ряду у формі 4-періодичного тригонометричного тренду. Перевірити рівняння тренду на адекватність.

3.1. Власник фірми з виробництва човнів склав наступну таблицю, що містить квартальні прибутки за останні 5 років (×100 000 грн).

Рік	Весна	Літо	Осінь	Зима
1	102	120	90	78
2	110	126	95	83
3	111	128	97	86

4	115	135	103	91
5	122	144	110	98

3.2. Президент фармацевтичної компанії виписала наступні процентні ставки за кожний квартал впродовж 4 років.

Рік	Весна	Літо	Осінь	Зима
1	5,6	6,8	6,3	5,2
2	5,7	6,7	6,4	5,4
3	5,3	6,6	6,1	5,1
4	5,4	6,9	6,2	5,3

3.3. Гірський курорт відвідувала наступна кількість гостей впродовж кожного сезону за останні 5 років.

Рік	Весна	Літо	Осінь	Зима
1	200	300	125	325
2	175	250	150	375
3	225	300	200	450
4	200	350	225	375
5	175	300	200	350

3.4. Будівельна компанія зібрала дані про кількість будинків, будівництво яких було розпочато в кожному кварталі за останні 5 років.

Рік	Весна	Літо	Осінь	Зима
1	8	10	7	5
2	9	10	7	6
3	10	11	7	6
4	10	12	8	7
5	11	13	9	8

3.5. Комісія визначила витрати енергії, виходячи з наступних щоквартальних витрат натурального газу, в млн. $м^3$.

Рік	Весна	Літо	Осінь	Зима
1	293	246	231	282
2	301	252	227	291
3	304	259	239	296
4	306	265	240	300

3.6. Положення на ринку місцевого виробника пива демонструють такі дані про обсяг продажів за квартал (в тис. грн):

Рік	I	II	III	IV
1	19	24	38	25
2	21	28	44	23
3	23	31	41	23
4	24	35	48	21

3.7. Заповідник надав квартальні дані витрат на утримання (в тис. грн).

Рік	Весна	Літо	Осінь	Зима
1	87	106	86	125
2	85	110	83	127
3	84	105	87	128
4	88	104	88	124

3.8. Виробник автомобільних ключів отримав такі дані про щоквартальні витрати фірми (в тис. грн)

Рік	Весна	Літо	Осінь	Зима
1	108	128	94	70
2	112	132	88	68
3	109	134	84	73
4	110	131	90	69
5	108	135	89	68
6	106	129	93	72

3.9. Завідувач навчального відділу університету склав таку таблицю відвідування занять студентами за останні п’ять років (в тис. осіб).

Рік	Осінь	Зима	Весна	Літо
1	220	203	193	84
2	235	208	206	76
3	236	206	209	73
4	241	215	206	92
5	239	221	213	115

3.10. Надані щоквартальні дані динаміки імпорту КНР за 1993 – 1995 роки (у млрд доларів).

Рік	1993				1994				1995			
Квартал	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Імпорт	15,8	21,5	24,8	33,1	18,7	26,4	26,5	34,5	21,9	30,0	31,2	38,1

В умовах задач 3.11 – 3.20 виділити сезонну квартальну складову методом ковзного середнього і потім тренд (лінійний або квадратичний) методом найменших квадратів. Перевірити рівняння тренду на адекватність.

3.11. Наведено дані про обсяги продажів плодоовочевих консервів у місті за 2006 –2009 роки (тис. тон).

Квартал \ Рік	2006	2007	2008	2009
I	11,9	11,8	13,1	14,6
II	13,6	13,6	14,7	16,6
III	5,8	6,6	7,9	7,2
IV	12,3	12,0	15,0	15,5

3.12. Динаміка імпорту КНР за 1993 – 1995 роки характеризується такими щоквартальними даними (у млрд доларів).

Рік	1993				1994				1995			
Квартал	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Імпорт	15,8	21,5	24,8	33,1	18,7	26,4	26,5	34,5	21,9	30,0	31,2	38,1

3.13. Наведено дані про індекс обсягів випуску промислової продукції країни за кварталами 1991 – 1996 років.

Квартал \ Рік	1991	1992	1993	1994	1995	1996
I	162,22	154,45	164,35	138,89	132,36	124,54
II	157,19	159,44	171,91	139,34	137,22	130,67
III	172,89	157,69	162,19	152,96	124,79	124,33
IV	157,60	164,79	157,06	139,55	120,92	126,71

3.14. Наведено дані зовнішньоторгового обороту експорту товарів регіону за кварталами 2006 – 2009 років (млрд доларів США).

Рік / Квартал	2006	2007	2008	2009
I	21,1	18,6	15,5	24,4
II	20,6	18,9	17,0	25,0
III	21,8	18,1	18,9	26,6
IV	25,5	19,3	24,3	29,5

3.15. Наведено дані про обсяги реалізації овочів у місті за кварталами 2006 – 2009 років (тон).

Рік / Квартал	2006	2007	2008	2009
I	209	271	267	260
II	174	188	193	180
III	155	139	180	130
IV	235	274	297	240

3.16. Наведено дані про щоквартальні обсяги споживання електроенергії в місті за 2006 – 2009 роки (млн кВт год).

Рік / Квартал	2006	2007	2008	2009
I	2,2	2,2	2,4	2,6
II	1,9	1,8	1,9	2,1
III	2,7	2,6	2,7	2,8
IV	3,7	3,4	3,5	3,7

3.17. Наведено дані про щоквартальні обсяги виробництва молока в області за 2006 – 2009 роки (тон).

Рік / Квартал	2006	2007	2008	2009
I	9041	9904	8732	8002
II	11761	12623	11646	10950
III	12736	12551	12606	11020
IV	9477	9280	9002	8900

3.18. Наведено дані про щоквартальні обсяги виробництва яєць за 2006 –2009 роки (млн шт.).

Рік / Квартал	2006	2007	2008	2009
I	7,3	7,7	7,5	8,0
II	9,0	9,2	9,1	9,3
III	8,6	8,7	9,1	9,0
IV	7,3	7,1	7,4	7,7

3.19. Наведено дані про щоквартальний пасажирообіг залізничного приміського сполучення в області за 2006 –2009 роки (млн пасажиро-кілометрів).

Рік / Квартал	2006	2007	2008	2009
I	1,0	0,9	0,8	0,7
II	2,1	2,0	1,9	1,6
III	4,1	4,0	3,8	2,8
IV	0,9	0,8	0,7	0,6

3.20. Динаміка ВВП країни за кварталами 1994 – 1996 років має наступний вигляд (в у.о.).

Рік / Квартал	1994	1995	1996
I	87,6	253,3	456,2
II	130,3	353,1	508,5
III	168	442,9	569,7
IV	224,8	491,1	611,2

4. ВИБІРКОВА ОЦІНКА АВТОКОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ЧАСОВОГО РЯДУ. ВИБІРКОВА ОЦІНКА ЧАСТИННОЇ АВТОКОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ЧАСОВОГО РЯДУ

1. ***Вибіркова оцінка*** $\boldsymbol{\bar{r}(\tau)}$ ***автокореляційної функції*** часового ряду $x_1, \dots, x_n$ з лагом $\tau < n$ має вигляд [5]

$$\bar{r}(\tau) = \frac{(n-\tau)\sum_{i=1}^{n-\tau} x_i x_{i+\tau} - \sum_{i=1}^{n-\tau} x_i \sum_{i=1}^{n-\tau} x_{i+\tau}}{\sqrt{\left((n-\tau)\sum_{i=1}^{n-\tau} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-\tau} x_i\right)^2\right)\left((n-\tau)\sum_{i=1}^{n-\tau} x_{i+\tau}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-\tau} x_{i+\tau}\right)^2\right)}}, \quad (4.1)$$

Для обчислення $\bar{r}(\tau)$ використовується кореляційна таблиця:

i	x_i	$x_{i+\tau}$	$x_i x_{i+\tau}$	x_i^2	$x_{i+\tau}^2$
1 $\vdots$ $n-\tau$					
$\sum$					

Перевірка статистичної значущості автокореляційної функції часового ряду з лагом $\boldsymbol{\tau}$. Обчислюємо значення

$$t = \frac{\bar{r}(\tau)\sqrt{n-\tau-2}}{\sqrt{1-\bar{r}^2(\tau)}}. \quad (4.2)$$

Для заданого рівня значущості q за табл. 3 Додатку (закон розподілу Стьюдента) знаходимо величину $t_{n-\tau-2;\,q}$. Якщо $|t| < t_{n-\tau-2;\,q}$, то з довірчою ймовірністю $\alpha = 1 - q$ приймаємо гіпотезу про те, що відхилення від нуля автокореляційної функції з лагом τ є незначущим. Якщо $|t| \geq t_{n-\tau-2;\,q}$, то на рівні значущості

q відхиляємо цю гіпотезу та приймаємо альтернативну гіпотезу про те, що відхилення від нуля автокореляційної функції з лагом τ є значущим.

2. ***Вибіркова оцінка*** $\bar{\boldsymbol{r}}_{\text{част}}(\boldsymbol{\tau})$ ***автокореляційної функції*** часового ряду $x_1, \dots, x_n$ з лагом τ проводиться таким чином [2, п.3.2]. Будується кореляційна матриця $\bar{R} = \left\{\bar{r}_{jk}\right\}_{j,k=0}^{\tau}$, де

$$\bar{r}_{jk} = \frac{(n-\tau)\sum\limits_{i=1}^{n-\tau} x_{i+j}x_{i+k} - \sum\limits_{i=1}^{n-\tau} x_{i+j} \sum\limits_{i=1}^{n-\tau} x_{i+k}}{\sqrt{\left((n-\tau)\sum\limits_{i=1}^{n-\tau} x_{i+j}^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n-\tau} x_{i+j}\right)^2\right)\left((n-\tau)\sum\limits_{i=1}^{n-\tau} x_{i+k}^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n-\tau} x_{i+k}\right)^2\right)}},$$

$$j, k = 0, \dots, \tau. \qquad (4.3)$$

За цією матрицею знаходимо

$$\bar{r}_{\text{част}}(\tau) = -\frac{\bar{R}_{0\tau}}{\sqrt{\bar{R}_{00}}\sqrt{\bar{R}_{\tau\tau}}}, \qquad (4.4)$$

де $\bar{R}_{lm},\ l, m = 0, \tau$ – алгебраїчне доповнення елементу $\bar{r}_{lm}$ матриці $\bar{R}$. Зауважимо, що $\bar{r}_{0k} = \bar{r}(k), k = 1, 2, \dots$.

Перевірка статистичної значущості частинної автокореляційної функції часового ряду з лагом τ. Обчислюємо значення

$$t = \frac{\bar{r}_{\text{част}}(\tau)\sqrt{n-2\tau-1}}{\sqrt{1-\bar{r}_{\text{част}}^2(\tau)}}. \qquad (4.5)$$

Для заданого рівня значущості q за табл. 3 Додатку (закон розподілу Стьюдента) знаходимо величину $t_{n-2\tau-1;\, q}$. Якщо $|t| < t_{n-2\tau-1;\, q}$, то з довірчою ймовірністю $\alpha = 1 - q$ приймаємо гіпотезу про те, що відхилення від нуля частинної автокореляційної функції з лагом τ є незначущим. Якщо $|t| \geq t_{n-2\tau-1;\, q}$, то на рівні значущості q відхиляємо цю гіпотезу та приймаємо альтернативну гіпотезу про те, що відхилення від нуля частинної автокореляційної функції з лагом τ є значущим.

Автокореляційна функція та частинна автокореляційна функція використовується під час ідентифікації різних моделей стаціонарних часових рядів (наприклад, моделі ковзного середнього, авторегресії та ін. [5 – 7]).

Приклад 4.1. У таблиці наведена динаміка випуску продукції (в шт.) за 1986 – 1997 роки. Обчислити оцінки автокореляційної функції та частинної автокореляційної функції розглянутих часових рядів з лагом 2. Перевірити статистичну значущість цих автокореляційних функцій.

Рік	Випуск продукції	Рік	Випуск продукції	Рік	Випуск продукції
1986	25	1990	30	1994	40
1987	27	1991	35	1995	42
1988	30	1992	33	1996	45
1989	29	1993	40	1997	44

Розв'язання. Маємо довжину ряду $n = 12$, лаг $\tau = 2$. Для обчислення $\bar{r}(2)$ використаємо формулу (4.1). Для цього побудуємо кореляційну таблицю.

i	x_i	x_{i+2}	$x_i x_{i+2}$	x_i^2	x_{i+2}^2
1	25	30	750	625	900
2	27	29	783	729	841
3	30	30	900	900	900
4	29	35	1015	841	1225
5	30	33	990	900	1089
6	35	40	1400	1225	1600
7	33	40	1320	1089	1600
8	40	42	1680	1600	1764
9	40	45	1800	1600	2025
10	42	44	1848	1764	1936
$\sum$	331	368	12486	11273	13880

Тоді в силу (4.1) маємо, що

$$\bar{r}(2) = \frac{10 \cdot 12486 - 331 \cdot 368}{\sqrt{10 \cdot 11273 - 331^2}\sqrt{10 \cdot 13880 - 368^2}} = 0{,}9331.$$

За формулою (4.2) обчислюємо статистику $t = 7{,}34$. За табл. 3 Додатку (закон розподілу Стьюдента) знаходимо $t_{8;\,0{,}05} = 2{,}31$. Тому на рівні значущості 0,05 відкидаємо гіпотезу про статистичну незначущість автокореляційної функції з лагом 2 та приймаємо альтернативну гіпотезу про те, що відхилення від нуля автокореляційної функції з лагом 2 є значущим.

Для обчислення $\bar{r}_{\text{част}}(2)$ побудуємо кореляційну таблицю.

i	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}	$x_i x_{i+1}$	$x_i x_{i+2}$	$x_{i+1} x_{i+2}$	x_i^2	x_{i+1}^2	x_{i+2}^2
1	25	27	30	675	750	810	625	729	900
2	27	30	29	810	783	870	729	900	841
3	30	29	30	870	900	870	900	841	900
4	29	30	35	870	1015	1050	841	900	1225
5	30	35	33	1050	990	1155	900	1225	1089
6	35	33	40	1155	1400	1320	1225	1089	1600
7	33	40	40	1320	1320	1600	1089	1600	1600
8	40	40	42	1600	1680	1680	1600	1600	1764
9	40	42	45	1680	1800	1890	1600	1764	2025
10	42	45	44	1890	1848	1980	1764	2025	1936
$\sum$	331	351	368	11920	12486	13225	11273	12673	13880

За допомогою цієї таблиці та формули (4.3) обчислюємо кореляційну матрицю

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9028 & 0{,}9331 \\ 0{,}9028 & 1 & 0{,}8929 \\ 0{,}9331 & 0{,}8929 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зокрема, $\bar{r}(1) = 0{,}9028$. Тепер за допомогою матриці $\bar{R}$ для обчислення $\bar{r}_{\text{част}}(2)$ використаємо формулу (4.4). Отримаємо $\bar{r}_{\text{част}}(2) = 0{,}6558$. За формулою (4.5) обчислюємо статистику $t = 2{,}2982$. За табл. 3 Додатку (закон розподілу Стьюдента) для рівня значущості $q = 0{,}05$ знаходимо $t_{n-2\tau-1;\,0{,}05} = t_{7;0{,}05} = 2{,}36$. Оскільки $|t| < t_{n-2\tau-1;\,q}$, то з довірчою ймовірністю 0,95 приймаємо гіпотезу про статистичну незначущість частинної автокореляційної функції з лагом 2.

Завдання для самостійної роботи

В умовах задач 4.1 – 4.10 обчислити оцінки автокореляційної функції і частинної автокореляційної функції розглянутих часових рядів з лагами від 1 до 5 включно. Перевірити статистичну значущість відповідних автокореляційних функцій.

4.11. Дані за 1970 – 1997 роки про рівень середньорічних цін на какао-боби із Бразилії центи США за фунт: 29,4; 23,5; 26,2; 48,5; 73,4; 56,6; 77,0; 183,5; 153,5; 140,7; 107,1; 87,5; 8,3; 83,1; 105,3; 94,9; 92,0; 83,9; 72,7; 56,9; 49,1;47,5; 45,0; 44,5; 55,9; 60,5; 64,1; 71,0.

7.2. Дані за 1970 – 1997 роки про рівень середньорічних цін на рис із Таїланду на ринках Бангкока, долари США за метричну тонну. 143; 130; 150; 296; 542; 363; 254; 272; 369; 334; 434; 483; 293; 277; 252; 217; 210; 229; 302; 320; 270; 287; 291; 237; 269; 321; 338; 303.

7.3. Дані за 1970 – 1997 роки про рівень середньорічних цін на яловичину із США на ринках Нью-Йорка, центи США за фунт: 41; 42; 49; 64; 53; 44; 52; 51; 71; 92; 87; 86; 99; 96; 97; 89; 77; 81; 82; 87; 94; 90; 90; 93; 87; 84; 85; 86.

7.4. Дані за 1970 – 1996 роки про рівень середньорічних цін на світових ринках на шерсть із Нової Зеландії, центи США за кілограм: 73,8; 72,6; 106,9; 237,5; 214,7; 147,6; 202,9; 256,4; 249,6; 300,4; 316,7; 274,6; 239,7; 221,9; 230,7; 234,9; 248,5; 333,0; 403,2; 386,3; 341,5; 249,3; 242,9; 234,3; 287,9; 356,2; 348,3.

7.5. Динаміка видобутку газу в деякій країні характеризується за місяцями 1996 – 1997 років, млрд м^3: 56,8; 53,2; 56,3; 51,7; 46,9; 44,3; 44; 42,2; 44,2; 52,5; 52,6; 56,1; 57,4; 51,5; 54,2; 48,7; 45; 39,3; 37,9; 37,6; 40,7; 48,6; 53,8; 56,9.

7.6. Дані про обсяги продажів (в шт.) деякого товару за 30 днів: 19; 15; 20; 21; 21; 19; 16; 20; 20; 22; 19; 16; 22; 22; 23; 21; 19; 23; 21; 23; 22; 19; 21; 21; 23; 21; 19; 22; 21; 24.

7.7. Дані про середньогодинну заробітну плату в економіці США (в доларах) за 1960 – 1979 роки: 6,79; 6,88; 7,07; 7,17; 7,33; 7,52; 7,62; 7,72; 7,89; 7,98; 8,03; 8,21; 8,53; 8,55; 8,28; 8,12; 8,24; 8,36; 8,40; 8,17.

7.8. Динаміка обсягів платних послуг населенню регіону за кварталами 1996 – 1999 років: 2428; 2010; 2981; 3074; 2893; 3198; 3250; 3495; 3528; 3838; 3916; 4142; 4441; 5583; 6230; 6497.

7.9. Щомісячні дані про динаміку обороту щомісячної роздрібної торгівлі регіону за 1998 – 1999 роки: 70.8; 98,7; 97,9; 99,6; 96,1; 103,4; 95,5; 102,9; 77,6; 102,3; 102,9; 123,1; 74,3; 92,9; 106,0; 99,8; 105,2; 99,7; 99,7; 107,9; 98,8; 104,6; 106,4; 122,7.

7.10. Щомісячні дані про динаміку індексу споживчих цін регіону за 1998 – 1999 роки (% до попереднього місяця): 101,7; 101,1; 100,4; 100,1; 100,0; 100,1; 100,0; 105,8; 145,0; 99,8; 102,7; 109,4; 110,0; 106,4; 103,2; 103,2; 102,9; 100,8; 101,6; 101,5; 101,4; 101,7; 101,7; 101,2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика : посібник. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2008. 504 с.
2. Руденко В. М. Математична статистика : навчальний посібник. Київ: Центр учбової літератури, 2012. 304 с.
3. Лебедєв Є. О. Математична статистика : навчальний посібник / Є. О. Лебедєв, Г. В. Лівінська, І. В. Розора, М. М. Шарапов. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2016. 160 с.
4. Турчин В. М. Теорія ймовірностей та математична статистика. Дніпропетровськ: IMA-прес, 2014. 556 с.
5. Maurice G. Kendall. The Advanced Theory of Statistics. Volume 3: Design and Analysis, and Time-Series / Maurice G. Kendall, Alan Stuart. London: Charles Griffin & Co Limited, 1966. 552 p.
6. Montgomery D. C. Introduction to Time Series Analysis and Forecasting / Montgomery D. C., Jennings C. L., Kulahci M. John Wiley & Sons, Inc., Wiley Series in Probability and Statistics, 2008. 446 p.
7. Anderson T. W. The Statistical Analysis of Time Series. NY: John Wiley & Sons, 1971. 720 p.
8. Brown R.G. Smoothing, Forecasting, and Prediction of Discrete Time Series. NY: Dover Publications, 1963. 474 p.

ДОДАТКИ
ТАБЛИЦІ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Таблиця 1

Значення функції Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936

2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Таблиця 2

Значення $\chi^2_{k;q}$, відповідні ймовірності $q = P\left(\chi^2_k \geq \chi^2_{k;q}\right)$,
де випадкова величина χ^2_k має розподіл χ^2 з k ступенями свободи

k	q									
	0,99	0,975	0,95	0,9	0,5	0,25	0,1	0,05	0,025	0,01
1	0,0002	0,0001	0,004	0,02	0,45	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	13,70	17,28	19,68	21,92	24,73
12	3,57	4,40	5,23	6,30	11,34	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19
20	8,26	9,59	10,85	12,44	19,34	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	10,28	11,59	13,24	20,34	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	10,98	12,34	14,04	21,34	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	22,34	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	23,34	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98
25	11,52	13,12	14,61	16,47	24,34	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	25,34	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	26,34	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	27,34	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28
29	14,26	16,05	17,71	19,77	28,34	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	29,34	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89

Таблиця 3

Значення $t_{k;q}$, відповідні ймовірності $q = P\left(|t_k| \geq |t_{k;q}|\right)$,
де випадкова величина t_k має розподіл Стьюдента з k ступенями свободи

k	q							
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	318,31	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	14,09	22,33	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	10,21	12,92
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	7,17	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	4,77	5,89	6,87
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,21	5,96
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,03	4,79	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	4,50	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,30	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,14	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,02	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	3,93	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	3,85	4,22
14	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	3,79	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	3,73	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	3,69	4,01
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,65	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,61	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,58	3,88
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,15	3,55	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,53	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,50	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,48	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,47	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,08	3,45	3,73
26	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,43	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,42	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,41	3,67
29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,04	3,40	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,39	3,65

Таблиця 4

Значення $F_{n_1;n_2;q}$, відповідні ймовірності $q = P\left(F_{n_1;n_2} > F_{n_1;n_2;q}\right)$, де випадкова величина має $F_{n_1;n_2}$ розподіл Фішера з n_1, n_2 ступенями свободи

$q = 0,05$										
n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16

Продовження табл. 4

$q = 0{,}05$										
n_2 \ n_1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	242,98	243,91	244,69	245,36	245,95	246,46	246,92	247,32	247,69	248,01
2	19,40	19,41	19,42	19,42	19,43	19,43	19,44	19,44	19,44	19,45
3	8,76	8,74	8,73	8,71	8,70	8,69	8,68	8,67	8,67	8,66
4	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84	5,83	5,82	5,81	5,80
5	4,70	4,68	4,66	4,64	4,62	4,60	4,59	4,58	4,57	4,56
6	4,03	4,00	3,98	3,96	3,94	3,92	3,91	3,90	3,88	3,87
7	3,60	3,57	3,55	3,53	3,51	3,49	3,48	3,47	3,46	3,44
8	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,20	3,19	3,17	3,16	3,15
9	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,97	2,96	2,95	2,94
10	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83	2,81	2,80	2,79	2,77
11	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,70	2,69	2,67	2,66	2,65
12	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,60	2,58	2,57	2,56	2,54
13	2,63	2,60	2,58	2,55	2,53	2,51	2,50	2,48	2,47	2,46
14	2,57	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,43	2,41	2,40	2,39
15	2,51	2,48	2,45	2,42	2,40	2,38	2,37	2,35	2,34	2,33
16	2,46	2,42	2,40	2,37	2,35	2,33	2,32	2,30	2,29	2,28
17	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,27	2,26	2,24	2,23
18	2,37	2,34	2,31	2,29	2,27	2,25	2,23	2,22	2,20	2,19
19	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,20	2,18	2,17	2,16
20	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,17	2,15	2,14	2,12
21	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,14	2,12	2,11	2,10
22	2,26	2,23	2,20	2,17	2,15	2,13	2,11	2,10	2,08	2,07
23	2,24	2,20	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,08	2,06	2,05
24	2,22	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,03
25	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,02	2,01
26	2,18	2,15	2,12	2,09	2,07	2,05	2,03	2,02	2,00	1,99
27	2,17	2,13	2,10	2,08	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,97
28	2,15	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,97	1,96
29	2,14	2,10	2,08	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94
30	2,13	2,09	2,06	2,04	2,01	1,99	1,98	1,96	1,95	1,93

Електронне навчальне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

Півень Олексій Леонідович
Сморцова Тетяна Іванівна

АНАЛІЗ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Методичні рекомендації
для студентів 1 курсу другого магістерського рівня освіти
денної форми навчання
спеціальності 113 «Прикладна математика»

В авторській редакції

Підписано до розміщення 22.02.2024. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 1,58. Обсяг 1,267 Мб. Зам. № 22/24.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна