УДК 517.956

Я. И. ЖИТОМИРСКИЙ

О ПОТЕНЦИАЛАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Хорошо известно, что теория потенциалов, развитая для урав[...]ий эллиптического и параболического типов, позволяет сводить [...]евые задачи к решению интегральных уравнений.

Цель данной заметки — показать возможность построения ана[...] потенциалов для уравнений, не относящихся к названным [...]пам. В заметке рассмотрен модельный представитель эволюцион[...]ых корректных по И. Г. Петровскому уравнений — уравнение [Шр]едингера

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Пусть ищется решение уравнения (1) в области $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T < \infty\}$, удовлетворяющее краевым и начальному условиям:

$$u(x, 0) = u_0(x); \tag{2}$$

$$u(0, t) = I_0(t), \qquad u(1, t) = I_1(t);$$

$$u_0(0) = I_0(0), \qquad u_0(1) = I_0(0). \tag{3}$$

[С]читая сначала $u_0(x) \equiv 0$, $I_0(0) = I_1(0) = 0$, будем искать решение [за]дачи (1) — (2) — (3) в виде

$$u(x, t) = \int_0^t \mu(\tau)\frac{\exp\left\{\frac{ix^2}{4(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + \int_0^t \nu(\tau)\frac{\exp\left\{\frac{i(x-1)^2}{4(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau \equiv$$

$$\equiv U(x, t) + V(x, t), \tag{4}$$

где $\mu(\tau)$ и $\nu(\tau)$ — искомые плотности «потенциалов» $U(x, t)$ и $V(x, t)$. Условия (3) приводят тогда к системе интегральных уравнений для определения $\mu(\tau)$ и $\nu(\tau)$:

$$\int_0^t \mu(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t \nu(\tau) \frac{\exp\left\{\frac{i}{4(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = I_0(t), \tag{5}$$

$$\int_0^t \mu(\tau) \exp\left\{\frac{i}{4(t-\tau)}\right\} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t \nu(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = I_1(t).$$

Введя искомую вектор-функцию $\Pi(t) = \{\mu(t), \nu(t)\}$ и обозначив $I(t) = \{I_0(t), I_1(t)\}$, перепишем систему (5) в виде

$$\Pi(t) \ast G(t) = I(t), \tag{6}$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{t}} & \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{\frac{i}{4t}\right\} \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{\frac{i}{4t}\right\} & \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

а символом $f \ast g$ мы обозначим, как обычно,

$$f \ast g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Все рассматриваемые функции (как искомые, так и элементы матрицы (7) и вектора $I(t)$) считаем продолженными нулем на неположительные значения аргумента. Это замечание распространяется на все функции, вводимые в дальнейшем.

Обозначим

$$f_i(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t I_i(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad i = 0, 1 \tag{8}$$

$$f(t) = \{f_0(t), f_1(t)\}.$$

Тогда из (6) получим

$$\Pi(t) = f(t) + A\Pi(t), \tag{9}$$

где

$$A\Pi(t) = \left\{-\frac{1}{\pi} \frac{d}{dt}\left[\nu(t) \ast \frac{\exp\left\{\frac{i}{4t}\right\}}{\sqrt{t}} \ast \frac{1}{\sqrt{t}}\right], -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dt}\left[\mu(t) \ast \frac{\exp\left\{\frac{i}{4t}\right\}}{\sqrt{t}} \ast \frac{1}{\sqrt{t}}\right]\right\}. \tag{10}$$

Систему интегро-дифференциальных уравнений (9) решим методом последовательных приближений:

$$\Pi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k(t), \quad \Pi_0(t) = f(t), \quad \Pi_n(t) = A\Pi_{n-1}(t). \tag{11}$$

кажем, что имеет место следующая формула:

$$\Pi_k(t)=\left\{\frac{(-1)^k}{\pi}\frac{d}{dt}\left[I_{\frac{1+(-1)^{k+1}}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\right],\right.$$
$$\left.\frac{(-1)^k}{\pi}\frac{d}{dt}\left[I_{\frac{1+(-1)^k}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\right]\right\}. \qquad (12)$$

ействительно, из (10) и (11) получаем

$$\Pi_{k+1}(t)=A\Pi_k(t)=$$
$$=\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\left[I_{\frac{1+(-1)^k}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{\exp\left\{\frac{i}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}\right],\right.$$
$$\left.\frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2}\frac{d^2}{dt^2}\left[I_{\frac{1+(-1)^{k+1}}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{\exp\left\{\frac{i}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}\right]\right\}. \qquad (13)$$

ражение (13) можно преобразовать с помощью равенства

$$\frac{\exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{\exp\left\{\frac{i}{\sqrt{t}}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{\exp\left\{\frac{i(k+1)^2}{\sqrt{t}}\right\}}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}, \qquad (14)$$

торое легко доказывается применением преобразования Лапласа использованием формул 5.232*.

Используя теперь соотношение $\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\left[h(t)\ast\frac{1}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}\right]=h(t)$, евидное в силу того, что $\frac{1}{\sqrt{t}}\ast\frac{1}{\sqrt{t}}=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ \pi, & t>0,\end{cases}$ из (13) и (14) олучаем

$$\Pi_{k+1}(t)=\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\frac{d}{dt}\left[I_{\frac{1+(-1)^{k+2}}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{i(k+1)^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\right],\right.$$
$$\left.\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\frac{d}{dt}\left[I_{\frac{1+(-1)^{k+1}}{2}}(t)\ast\frac{\exp\left\{\frac{i(k+1)^2}{4t}\right\}}{\sqrt{t}}\right]\right\}.$$

Отсюда и из того, что (12) справедлива при $k=0$, как это идно из (8) и (11), следует справедливость формулы (12) при всех начениях k.

---

* *Рыжик И. М., Градштейн И. Р.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 1951. 464 с.

Обозначим

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt} I_0(t), \qquad \beta_0(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt} I_1(t),$$

$$\alpha_k(t) = \alpha_0(t) \ast \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}, \qquad \beta_k(t) = \beta_0(t) \ast \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{\frac{ik^2}{4t}\right\}$$

и оценим функции $\alpha_k(t)$ и $\beta_k(t)$ при $0 < t \leqslant T$:

$$\alpha_k(t) = \int_0^t \alpha_0(\tau) \exp\left\{\frac{ik^2}{4(t-\tau)}\right\} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = k \int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \alpha_0\left(t - \frac{k^2}{4y^2}\right) \frac{\exp\{iy^2\}}{y^2}\, dy.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\alpha_k(t) = k \left\{ \frac{\alpha_0\left(t - \frac{k^2}{4y^2}\right)}{2iy^3} \exp\{iy^2\} \Bigg|_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty} - \right.$$

$$\left. - \int_{\frac{k}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\{iy^2\} \left[\alpha_0'\left(t - \frac{k^2}{4y^2}\right) \cdot \frac{k^2}{4iy^6} - \alpha_0\left(t - \frac{k^2}{4y^2}\right) \cdot \frac{3}{2iy^4}\right] dy \right\}.$$

Впредь будем предполагать, что функции $I_0(t)$ и $I_1(t)$ имеют ограниченные на $[0, T]$ производные до третьего порядка включительно. Тогда из последнего равенства заключаем, что $|\alpha_k(t)| \leqslant Ck^{-2}$. Аналогично приходим к такой же оценке для $\beta_k(t)$.

Поскольку $\alpha_k(t)$ и $\beta_k(t)$ служат компонентами вектора $\Pi_k(t)$, то из полученных оценок вытекает равномерная сходимость ряда (11) и тем самым существование решения $\Pi(t)$ уравнения (9).

Члены ряда (11), как видно из (12), непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$. Ряд, полученный почленным дифференцированием ряда (11), сходится равномерно, что устанавливается так же, как равномерная сходимость ряда (11). Поэтому функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$. Из непрерывности $\mu(t)$ и $\nu(t)$ вытекает, что $U(x, 0) = V(x, 0) \equiv 0$; краевые условия (3) выполняются в силу самого построения функции $\Pi(t)$. Остается установить, что $U(x, t)$ и $V(x, t)$ — решения уравнения (1). Формальное дифференцирование под знаком интегралов в (4) сразу приводит к нужному результату. Для оправдания формальных действий заметим, что

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = \frac{ix}{2} \int_0^t \mu(\tau) \exp\left\{\frac{ix^2}{4(t-\tau)}\right\} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{x} \left[\int_0^t \mu(\tau) \frac{\exp\left\{\frac{ix^2}{4(t-\tau)}\right\}}{2\sqrt{(t-\tau)}}\, d\tau - \int_0^t \mu'(\tau) \sqrt{t-\tau} \exp\left\{\frac{ix^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau \right] \equiv$$

$$\equiv \frac{2}{x} [F_1(x, t) + F_2(x, t)].$$

Интегралы $F_1(x, t)$, $F_2(x, t)$, $\frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x}$ и

$$\frac{\partial F_2(x, t)}{\partial x} = -\frac{ix}{2}\int\limits_0^t \mu'(\tau)(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{ix^2}{4(t-\tau)}\right\}d\tau,$$

очевидно, сходятся абсолютно и равномерно относительно x, $-\infty < x < \infty$; для $\frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x}$ это вытекает из того, что $F_1(x, t) = \frac{1}{2}U(x, t)$. Аналогично оправдываются формальные действия с интегралом $V(x, t)$.

Случай, когда $U_0(x) \not\equiv 0$ сводится к рассмотренному обычным образом: вместо $U(x, t)$ вводится новая искомая функция $U^*(x, t) = U(x, t) - U_0(x, t)$, где $U_0(x, t)$ — решение задачи Коши для (1) с начальным условием $u_0(x, 0) = \overline{u}_0(x)$; здесь $\overline{u}_0(x)$ — достаточно гладкая финитная функция, совпадающая на $[0, 1]$ с $u_0(x)$. При этом роль $I_0(t)$ и $I_1(t)$ исполнят функции $\overline{I}_0(t) = I_0(t) - U_0(0, t)$; $\overline{I}_1(t) = I_1(t) - U_0(1, t)$. Очевидно, $\overline{I}_0(0) = \overline{I}_1(0) = 0$ в силу (3).

Итак, если начальная функция $u_0(x)$ и граничные функции $I_0(t)$, $I_1(t)$ являются достаточно гладкими, то решение задачи (1)—(2)—(3) может быть представлено с помощью потенциалов.

Отметим, что единственность построенного решения может быть установлена обычным образом по методу Гольмгрена.

Поступила в редколлегию 20.12.90