Министерство образования и науки, молодёжи и спорта Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

**Л. Н. Попова**

# САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Методическое пособие по курсу «Теория колебаний»

Харьков – 2011

УДК 534.01(076)
ББК 22.217я73-4
П57

*Утверждено ученым советом механико-математического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол №3 от 18.03.2011 г.)*

**Рецензенты:** доктор физико-математических наук, профессор
**Пацегон Николай Федорович**,
профессор кафедры теоретической механики
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина

кандидат физико-математических наук, доцент
**Терехов Леонид Павлович**,
доцент кафедры теоретической механики
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина

**П57** **Попова Л.Н. Самостоятельные работы по теории колебаний:** Методическое пособие по курсу «Теория колебаний». – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2011. – 32 с.

Методическое пособие содержит самостоятельные работы по основным разделам курса «Теория колебаний»: статика, малые колебания, устойчивость равновесия и движения, канонические преобразования и нелинейные колебания. В первой части приводятся примеры решения типичных задач по теории колебаний, подобные им задачи включены в самостоятельные работы, варианты которых находятся во второй части. Пособие рассчитано на студентов третьего курса механико-математического факультета, обучающихся по специальности «Механика», оно может быть рекомендовано студентам других специальностей физико-математического профиля.

УДК 534.01(076)
ББК 22.217я73-4

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие содержит самостоятельные работы по основным разделам курса «Теория колебаний»: статика, малые колебания, устойчивость равновесия, устойчивость движения, канонические преобразования и нелинейные колебания. Оно состоит из двух частей. В первой части приводятся примеры решения типовых задач, подобные им задачи включены в самостоятельные работы, варианты которых находятся во второй части. Подобраны относительно простые задачи, для решения которых не надо выполнять сложных математических преобразований, но необходимо хорошо понимать их физический смысл.

Сборник предназначен в первую очередь для аудиторной работы. Предполагается, что в конце каждого практического занятия для закрепления пройденной темы студенты выполняют самостоятельную работу, на которую отводится, в зависимости от сложности задачи, 5 – 15 минут. Пособие может быть также использовано для самостоятельной работы студентов при подготовке к практическим занятиям, контрольным работам, зачетам и экзаменам.

Пособие рассчитано на студентов третьего курса механико-математического факультета, обучающихся по специальности «Механика», и использует знания, полученные ими при изучении основных математических дисциплин, теоретической механики и теории колебаний. Оно может быть рекомендовано студентам других специальностей физико-математического профиля.

В конце приводится список литературы по теоретической механике и теории колебаний, которая может быть полезна желающим получить навыки в решении задач. Вошедшие в список книги имеются в фонде Центральной научной библиотеки университета и доступны студентам.

# 1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## Статика

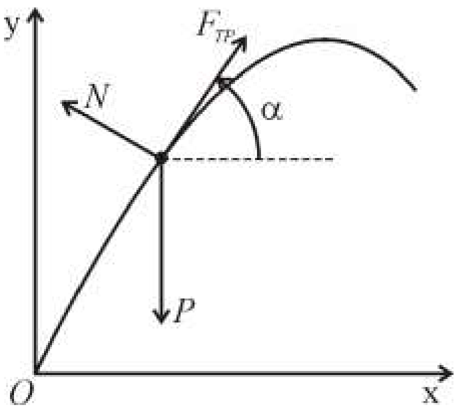



*Рис. 1*

**Задача 1.** *Тяжелое колечко расположено на шероховатой кривой, которая задается уравнением*

$$y=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x.$$

*Определить наименьшее значение коэффициента трения $f$, при котором колечко находится в равновесии при $x=x_0=0.5$. Ось $Oy$ направлена вертикально вверх.*

Р е ш е н и е. Материальная точка не свободна: она находится на кривой. Пользуясь принципом освобождаемости от связи, заменяем действие кривой эквивалентной силой – реакцией связи $\vec{R}=\vec{N}+\vec{F}_{TP}$, где $\vec{N}$ – нормальная реакция, а $\vec{F}_{TP}$ – сила трения.

В положении равновесия на точку действует активная сила – сила тяжести $\vec{P}$ и реакция кривой $\vec{R}$. Составляем уравнение равновесия точки:

$$\vec{P}+\vec{N}+\vec{F}_{TP}=0. \tag{1}$$

Проектируем равенство (1) на касательную к кривой:

$$-P\sin\alpha+F_{TP}=0 \tag{2}$$

и на нормаль к кривой:

$$P\cos\alpha-N=0. \tag{3}$$

Здесь $\alpha$ – угол наклона касательной к оси $Ox$.

Из системы уравнений (2), (3) находим

$$F_{TP}=N\,tg\alpha. \tag{4}$$

В положении равновесия выполняется неравенство

$$F_{TP}\le fN. \tag{5}$$

Подставляя в это неравенство выражение для силы трения (4), находим

$$f\ge tg\alpha.$$

Учитывая, что

$$tg\alpha=\frac{dy}{dx}(\,x_0\,),$$

определяем наименьшее значение коэффициента трения, при котором точка находится в равновесии на кривой:

$$f=\frac{\pi}{4}cos\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\approx 0.555\,.$$

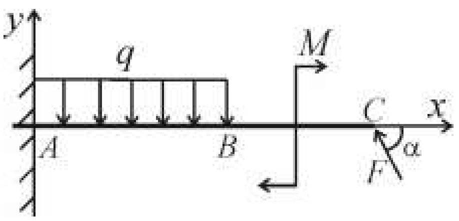



*Рис. 2*

**Задача 2.** *Определить реакцию заделки консольной балки* $AC$, *изображенной на рис. 2 и находящейся под действием распределенной нагрузки интенсивностью* $q=1.5\,êÍ\,/ì$ , *сосредоточенной силы* $F=4\,êÍ$ *и пары сил с моментом* $M=2\,êÍ\cdot ì$ , *если* $AB=3\,ì$ , $BC=2\,ì$ , $\alpha=45^0$.

Решение. Балка не свободна: она защемлена на левом конце. Пользуясь принципом освобождаемости от связи, заменяем действие защемления совокупностью силы $\vec{R}_A=X_A\vec{i}+Y_A\vec{j}$ и пары сил с моментом $\vec{M}_A$. Для равновесия балки необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\vec{F}^{(e)}$ и главный момент внешних сил $\vec{M}_O^{(e)}$ относительно произвольно выбранного полюса $O$ равнялись нулю:

$$\vec{F}^{(e)}=0, \tag{1}$$

$$\vec{M}_O^{(e)}=0. \tag{2}$$

В качестве полюса $O$ выбираем точку $A$.

Проектируем равенство (1) на оси $x, y$:

$$X_A-F\,cos\,\alpha=0, \tag{3}$$

$$Y_A-q\cdot AB+F\cdot sin\alpha=0. \tag{4}$$

Проектируем уравнение (2) на ось $z$:

$$M_{Az}-\frac{1}{2}q\cdot AB^2-M+F\cdot AC\cdot sin\alpha=0, \tag{5}$$

где $M_{Az}$ – проекция на ось $z$ момента в заделке.

Из уравнений (3) – (5) находим

$$X_A=F\cdot cos\alpha\approx 2.82\,êÍ\,,\ Y_A=q\cdot AB-F\cdot sin\alpha\approx 1.68\,êÍ\,,$$

$$M_{Az}=\frac{1}{2}q\cdot AB^2+M-F\cdot AC\cdot sin\alpha\approx-5.35$$ êÍ ·ì .

## Малые колебания

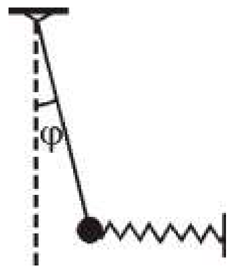



*Рис. 3*

**Задача 3.** *Найти малые колебания системы, изображенной на рис. 3. Масса шарика –* $m$*, длина стержня –* $a$*, коэффициент жесткости пружины –* $c$*. Массой стержня пренебречь. Пружина не напряжена, когда стержень занимает вертикальное положение.*

Р е ш е н и е . Система имеет одну степень свободы, выбираем в качестве обобщенной координаты угол $\varphi$ между стержнем и вертикалью.

Выписываем функцию Лагранжа:

$$L=T-\Pi=\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2+mga\cos\varphi-\frac{1}{2}c\Delta l^2,$$

где $\Delta l$ – деформация пружины. Учитывая, что при малых значениях $\varphi$

$$|\Delta l|\approx a\varphi, \qquad \cos\varphi\approx 1-\frac{1}{2}\varphi^2,$$

получаем

$$L\approx\frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}a(mg+ca)\varphi^2+mga.$$

Составляем уравнение движения:

$$ma^2\ddot{\varphi}+a(mg+ca)\varphi=0.$$

Делим его на $ma^2$ и вводим обозначение

$$\omega^2=\frac{c}{m}+\frac{g}{a},$$

тогда уравнение принимает вид

$$\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0.$$

Общее решение этого уравнения $\varphi(t)=A\cos(\omega t+\alpha)$ описывает малые колебания системы. Постоянные $A,\alpha$ определяются из начальных условий.

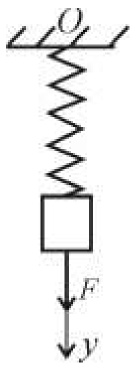



*Рис. 4*

**Задача 4.** *На груз массой* $m=0.5$ кг*, подвешенный на пружине жесткости* $c=200$ Н/м*, действует вынуждающая сила* $F=Q\sin pt$*. Определить частоту вынуждающей силы, при которой наступит резонанс. Найти амплитуду вынужденных колебаний при* $Q=0.1$ Н*,* $p=10$ с$^{-1}$.

Р е ш е н и е . Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выбираем длину пружины $y$. Составляем уравнение движения груза:

$$m\vec{W}=\vec{F}+m\vec{g}+\vec{F}_{\text{óï ð}}. \qquad (1)$$

Проектируем уравнение на вертикальную ось:

$$m\ddot{y}=Q\sin pt+mg-c(y-l), \qquad (2)$$

где $l$ – длина пружины в ненапряженном состоянии. Делим это уравнение на массу, вводим обозначения:

$$\omega^2:=\frac{c}{m}, \qquad q:=y-l-\frac{mg}{c},$$

получаем

$$\ddot{q}+\omega^2 q=\frac{Q}{m}\sin pt. \qquad (3)$$

Резонанс в системе наступает при

$$p=\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}=20 \text{ с}^{-1}.$$

Вынужденные колебания описываются частным решением неоднородного уравнения (3):

$$q_{\text{÷í}}(t)=A\sin pt.$$

Подставляя эту функцию в уравнение (3), находим амплитуду вынужденных колебаний:

$$A=\frac{Q}{m(\omega^2-p^2)}\approx 0.67\cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

**Задача 5.** Най*ти малые колебания системы, функция Лагранжа которой задается выражение*

$$L=m\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}+\beta\dot{x}\dot{y}-c\frac{x^2+y^2}{2} \qquad (m>0,\ m>|\beta|).$$

Р е ш е н и е . Система имеет две степени свободы $(n=2)$, обобщенные координаты: $q_1=x, q_2=y$.

Выписываем выражения для кинетической энергии:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\beta\dot{x}\dot{y}$$

и потенциальной энергии:

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}q_i q_k=\frac{c}{2}(x^2+y^2).$$

Для рассматриваемого случая $a_{11}=a_{22}=m,\ a_{12}=a_{21}=\beta$, $c_{11}=c_{22}=$ $=c,\ c_{12}=c_{21}=0$.

Составляем уравнение частот:

$$\begin{pmatrix} c_{11}-\lambda a_{11} & c_{12}-\lambda a_{12} \\ c_{21}-\lambda a_{21} & c_{22}-\lambda a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c-\lambda m & -\lambda\beta \\ -\lambda\beta & c-\lambda m \end{pmatrix}=(c-\lambda m)^2-\lambda^2\beta^2=0.$$

Решения этого уравнения:

$$\lambda_{1,2}=\frac{c}{m\pm\beta}.$$

Определяем частоты:

$$\omega_{1,2}=\sqrt{\lambda_{1,2}}=\sqrt{\frac{c}{m\pm\beta}}.$$

Из уравнения

$$(c_{11}-\lambda_i a_{11})u_1^{(i)}+(c_{12}-\lambda_i a_{12})u_2^{(i)}=(c-\lambda_i m)u_1^{(i)}-\lambda_i\beta u_2^{(i)}=0$$

находим амплитудные векторы, которые с точностью до произвольных множителей могут быть представлены в виде

$$u^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\qquad u^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Вычисляем главные колебания:

$$q_{(i)}=C_i u^{(i)}\sin(\omega_i t+\alpha_i),\quad i=1,2..$$

Находим общее решение уравнений малых колебаний:

$$q(t)=\sum_{i=1}^{2} q_{(i)}=\sum_{i=1}^{2} C_i u^{(i)}\sin(\omega_i t+\alpha_i)=$$

$$=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\sin(\omega_2 t+\alpha_2),$$

или – в координатах:

$$x(t)=C_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1)+C_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

$$y(t)=C_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1)-C_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$$

## Устойчивость равновесия

**Задача 6.** *Тяжелый шарик может двигаться по горизонтальной прямой Ox под действием силы, потенциал которой задается выражением*

$$\pi(x)=a\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\frac{x}{l}\right],\qquad a>0.$$

*Найти положения равновесия шарика и исследовать их устойчивость.*

Решение. Шарик в поле потенциальной силы, потенциал которой явно не зависит от времени, является консервативной системой. Положения равновесия шарика соответствуют точкам экстремума потенциала $\pi(x)$.

Находим первую производную функции $\pi(x)$:

$$\pi'(x)=\frac{3a}{l}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2-1\right].$$

Из этого выражения видно, что шарик имеет два положения равновесия: $x_1=l$ и $x_2=-l$.

Вычисляем вторую производную функции $\pi(x)$:

$$\pi''(x)=\frac{6a}{l^3}x.$$

Если $x=x_1=l$, то

$$\pi''(x)=\frac{6a}{l^2}>0,$$

потенциальная энергия системы в этом положении имеет строгий минимум и, согласно теореме Лагранжа об устойчивости равновесия консервативной системы, это положение равновесия является устойчивым.

Если $x=x_2=-l$, то

$$\pi''(x)=-\frac{6a}{l^2}<0,$$

потенциальная энергия системы в этом положении имеет строгий максимум, при этом в окрестности положения $x_2$ она может быть представлена в виде

$$\pi(x)=\pi(x_2)-\frac{3a}{l^2}(x+l)^2+o\left[(x+l)^2\right],$$

и, по теореме Ляпунова о неустойчивости равновесия консервативной системы, положение $x_2=-l$ неустойчиво.

**Задача 7.** *Движение осциллятора, помещенного в вязкую жидкость, описывается уравнением*

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0 \qquad (m,b,c>0). \tag{1}$$

*Пользуясь критерием Рауса – Гурвица, доказать асимптотическую устойчивость равновесия осциллятора.*

Р е ш е н и е . Уравнение движения осциллятора (1) может быть представлено в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, если положить $y_1=x,\ y_2=\dot{x}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt}=-\dfrac{c}{m}y_1-\dfrac{b}{m}y_2\,. \end{cases} \tag{2}$$

В положении равновесия $y_1=0,\ y_2=0.$ Система (2) является линейной. Уравнения возмущенного движения совпадают с уравнениями (2). Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{c}{m} & -\dfrac{b}{m}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\frac{b}{m}\lambda+\frac{c}{m}=0\,.$$

Коэффициенты характеристического уравнения: $a_0=1,\quad a_1=b/m,$ $a_2=c/m.$

Матрица Гурвица имеет вид

$$\Gamma=\begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} b/m & 0 \\ 1 & c/m \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Для рассматриваемой системы определители Гурвица (главные миноры матрицы (3)) положительны:

$$\Delta_1 = a_1 = \frac{b}{m} > 0,\ \Delta_2 = a_1 \cdot a_2 = \frac{b}{m} \cdot \frac{c}{m} > 0.$$

Согласно критерию Рауса – Гурвица, корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. В этом случае положение равновесия системы асимптотически устойчиво.

**Задача 8.** *Найти асимптотически устойчивое положение равновесия системы, движение которой задается уравнениями:*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1^2 - 1 \\ \dot{y}_2 = y_1 y_2 \end{cases}. \tag{1}$$

Р е ш е н и е . Находим положения равновесия. Они отвечают постоянным решениям системы и удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} y_1^2 - 1 = 0 \\ y_1 y_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Эта система имеет два решения: $y_1^* = \pm 1,\ y_2^* = 0.$

Возмущенное движение представляем в виде суммы невозмущенного движения $y^*$ и возмущения $x$:

$$y_i = y_i^* + x_i\,, \quad i = 1,2\,. \tag{3}$$

Подставляем соотношения (3) в уравнения (1) и учитываем, что невозмущенное решение удовлетворяет уравнениям (2). Находим уравнения возмущенного движения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2\,y_1^* x_1 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 y_2^* + x_2 y_1^* + x_1 x_2 \end{cases}.$$

Если пренебречь нелинейными членами, получаем уравнения первого приближения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2\,y_1^* x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 y_2^* + x_2 y_1^* \end{cases}. \tag{4}$$

Выписываем матрицу линейной системы (4):

$$A = \begin{pmatrix} 2\,y_1^* & 0 \\ y_2^* & y_1^* \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение для $A$:

$$\begin{vmatrix} 2y_1^*-\lambda & 0 \\ y_2^* & y_1^*-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3y_1^*\lambda + 2\left(y_1^*\right)^2 = 0.$$

Матрица Гурвица для этого уравнения имеет вид

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3y_1^* & 0 \\ 1 & 2\left(y_1^*\right)^2 \end{Vmatrix}.$$

Условия асимптотической устойчивости невозмущенного движения:

$$\Delta_1 = -3y_1^* > 0,\ \Delta_2 = \Delta_1 \cdot 2\left(y_1^*\right)^2 > 0$$

в рассматриваемом случае сводятся к неравенству $y_1^* < 0$. Следовательно, состояние равновесия системы $y_1^* = -1, y_2^* = 0$ является асимптотически устойчивым.

## Устойчивость движения

**Задача 9.** *Дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид*

$$\dot{x} = -y + \alpha x^3,\ \dot{y} = x + \alpha y^3. \tag{1}$$

*Исследовать устойчивость невозмущенного движения в зависимости от параметра* $\alpha$.

Решение. Попытаемся исследовать устойчивость невозмущенного движения с помощью уравнений первого приближения. Для этого отбрасываем в системе (1) нелинейные относительно возмущений $x, y$ члены, получаем линейную систему

$$\dot{x} = -y,\ \dot{y} = x.$$

Составляем характеристическое уравнение для матрицы этой системы:

$$\begin{Vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = \pm i$ являются чисто мнимыми, что соответствует критическому случаю, в котором по устойчивости нулевого решения линейной системы нельзя судить об устойчивости решения нелинейной системы.

Для исследования устойчивости невозмущенного движения в рассматриваемом случае воспользуемся прямым методом Ляпунова.

Умножим первое уравнение системы (1) на $x$, второе – на $y$ и сложим, получим

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=\alpha\left(x^4+y^4\right). \qquad (2)$$

Рассмотрим функцию

$$V=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$$

Эта функция является положительно-определенной, а ее производная в силу уравнений возмущенного движения, как следует из равенства (2), задается выражением

$$\dot{V}=\alpha\left(x^4+y^4\right). \qquad (3)$$

При $\alpha<0$ функция $\dot{V}$ является отрицательно-определенной и невозмущенное движение асимптотически устойчиво по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости.

При $\alpha=0$ функция $\dot{V}$ тождественно равна нулю, следовательно, невозмущенное движение устойчиво по теореме Ляпунова об устойчивости.

При $\alpha>0$ функция $\dot{V}$ является положительно-определенной и невозмущенное движение неустойчиво по первой теореме Ляпунова о неустойчивости, согласно которой невозмущенное движение неустойчиво, если производная $\dot{V}$ есть функция знакоопределенная, а сама функция $V$ не является знакопостоянной противоположного с $\dot{V}$ знака.

**Задача 10.** *Маятник, образованный стержнем длины $l$ с материальной точкой на конце, подвешен на горизонтальной оси, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг оси $z$. Установить, при каких значениях $\omega$ нижнее вертикальное положение равновесия маятника устойчиво. Массой стержня пренебречь.*

Р е ш е н и е . Рассмотрим движение маятника относительно системы отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг вертикальной оси $z$. В этой системе на маятник действуют три активные силы: сила тяжести и две силы инерции: переносная (центробежная):

$$\vec{J}^{(e)}=m\omega^2 x\vec{i},$$

где $m$ – масса точки, а $x$ – горизонтальная координата точки, и кориолисова:

$$\vec{J}^{(c)}=-2m\left[\vec{\omega},\vec{V}^{(r)}\right],$$

где $\vec{V}^{(r)}$ – относительная скорость точки. В качестве обобщенной координаты выбираем угол, который составляет маятник с вертикалью, отсчитываемый от нижнего положения маятника.

Потенциал силы тяжести задается выражением

$$\pi_1=mgz=-mgl\cos\varphi.$$

Центробежная сила инерции также является потенциальной: существует скалярная функция

$$\pi_2(x,y,z) = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\varphi,$$

удовлетворяющая равенству $\vec{J}^{(e)} = -\nabla\pi_2$.

Кориолисова сила инерции является гироскопической, т. к. ее работа на любом виртуальном перемещении равна нулю:

$$\left(\vec{J}^{(c)}, \delta\vec{r}\right) = -2m\left(\left[\vec{\omega}, \vec{V}^{(r)}\right], \vec{V}^{(r)}\right)dt = 0.$$

Наложение на консервативную систему гироскопических сил не влияет на положение равновесия системы, при этом устойчивое положение остается устойчивым. Поэтому при исследовании устойчивости равновесия гироскопическую силу можно не учитывать.

Потенциальная энергия системы задается выражением

$$\pi = -mgl\cos\varphi - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\varphi.$$

Точки экстремума первой производной определяют положения равновесия системы:

$$\frac{d\pi}{d\varphi} = mgl\sin\varphi - m\omega^2 l^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Из этого уравнения видно, что $\varphi = 0$ отвечает положению равновесия. Устойчивость этого положения определяется знаком второй производной:

$$\left.\frac{d^2\pi}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = \left(mgl\cos\varphi - m\omega^2 l^2 \cos 2\varphi\right)\Big|_{\varphi=0} = ml\left(g - \omega^2 l\right).$$

Отсюда следует, что при $g > \omega^2 l$ положение равновесия $\varphi = 0$ устойчиво.

## Канонические преобразования

**Задача 11.** *Показать, что преобразование*

$$q^* = \frac{1}{2}p^{1/2},\ p^* = q \qquad (1)$$

*переводит каноническую систему с гамильтонианом $H = p$ в каноническую систему. Найти гамильтониан преобразованной системы.*

Р е ш е н и е . Уравнения движения системы в переменных $q, p$ имеют вид

$$\begin{cases} \dot{q}=\dfrac{\partial H}{\partial p}=1 \\ \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial q}=0. \end{cases} \tag{2}$$

Обращая преобразование (1), выражаем старые переменные $q, p$ через новые $q^*, p^*$:

$$q=p^*,\ p=4(q^*)^2. \tag{3}$$

Переходим в уравнениях (2) к переменным $q^*, p^*$, получаем:

$$\begin{cases} \dot{q}^*=0 \\ \dot{p}^*=1 \end{cases}. \tag{4}$$

Если система (4) является канонической, то ее гамильтониан $H^*\left(q^*, p^*, t\right)$ должен удовлетворять уравнениям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H^*}{\partial p^*}=0 \\ \dfrac{\partial H^*}{\partial q^*}=-1 \end{cases}. \tag{5}$$

Условие разрешимости этой системы

$$\frac{\partial}{\partial q^*}\left(\frac{\partial H^*}{\partial p^*}\right)=\frac{\partial}{\partial p^*}\left(\frac{\partial H^*}{\partial q^*}\right)$$

выполняется, следовательно, существует функция $H^*\left(q^*, p^*, t\right)$, удовлетворяющая уравнениям (5).

Из первого уравнения системы (5) следует: $H^*=H^*\left(q^*, t\right)$. Подставляем эту функцию во второе уравнение и интегрируем его по $q^*$, получаем:

$$H^*=-q^*+\psi(t),$$

где $\psi(t)$ – произвольная функция времени.

**Задача 12.** *Выписать формулы свободного канонического преобразования валентности $c$, заданного производящей функцией:*

$$S=\sum_{i=1}^{n} sin\left(q_i t+q_i^*\right).$$

Р е ш е н и е . Производящая функция $S\left(q, q^*, t\right)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=cp_i\,,\ \frac{\partial S}{\partial q^*_i}=-p^*_i\,,\ i=\overline{1,n}\,. \qquad (1)$$

В рассматриваемом случае уравнения (1) имеют вид

$$t\cos\left(q_i t+q_i^*\right)=cp_i\,,\ \cos\left(q_i t+q_i^*\right)=-p^*_i\,,\ i=\overline{1,n} \qquad (2)$$

Разрешаем первую группу уравнений (2) относительно $q_i^*$:

$$q_i^*=\arccos\frac{cp_i}{t}-q_i t,\ i=\overline{1,n}. \qquad (3)$$

Из второй группы уравнений (2), с учетом уравнений первой группы, следует

$$p_i^*=-\frac{cp_i}{t}, \qquad i=\overline{1,n}. \qquad (4)$$

Свободные канонические преобразования задаются уравнениями (3), (4).

## Нелинейные колебания

**Задача 13.** *Найти тип неподвижных точек, соответствующих состояниям равновесия математического маятника. Учесть силу вязкого трения* $\vec{R}=-b\vec{V}(b>0)$.

Р е ш е н и е . Дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$\ddot{\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi-\frac{b}{m}\dot{\varphi}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) можно записать в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, если положить $x_1=\varphi,\ x_2=\dot{\varphi}$:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\dfrac{g}{l}\sin x_1-\dfrac{b}{m}x_2\end{cases}. \qquad (2)$$

Неподвижные точки этой системы удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases}x_2=0\\ \dfrac{g}{l}\sin x_1+\dfrac{b}{m}x_2=0\end{cases}. \qquad (3)$$

Система (3) имеет два решения: 1) $x_{10}=0, x_{20}=0$ и 2) $x_{10}=\pi, x_{20}=0$.

Линеаризуем уравнения (2) в окрестности неподвижной точки $x_{10}, x_{20}=0$. Для этого переходим к локальным координатам $\xi_1, \xi_2$ по формулам: $x_1=x_{10}+\xi_1, x_2=\xi_2$, раскладываем правую часть (2) в ряд в окрестности точки $(x_{10}, 0)$ и отбрасываем нелинейные по $\xi_1, \xi_2$ члены, получаем

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1=\xi_2 \\ \dot{\xi}_2=-\dfrac{g}{l}\cos x_{10}\,\xi_1-\dfrac{b}{m}\xi_2 \end{cases}. \tag{4}$$

Характеристическое уравнение для матрицы линейной системы (4) имеет вид

$$\lambda^2+\frac{b}{m}\lambda+\frac{g}{l}\cos x_{10}=0.$$

Корни этого уравнения:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{b}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{g}{l}\cos x_{10}}.$$

Для неподвижной точки $x_{10}=0, x_{20}=0$ корни $\lambda_1, \lambda_2$ – вещественные отрицательные числа при $b^2>4m^2 g/l$ и комплексно–сопряженные числа с отрицательной действительной частью при $b^2<4m^2 g/l$. В первом случае точка является устойчивым узлом, а во втором случае – устойчивым фокусом. Для неподвижной точки $x_{10}=\pi, x_{20}=0$ корни $\lambda_1, \lambda_2$ – вещественные числа противоположных знаков и точка является седлом.

**Задача 14.** *Найти замкнутую траекторию, соответствующую колебаниям механической системы, движение которой описывается уравнением*

$$\ddot{x}+(2\dot{x}^2+x^4-1)\dot{x}+x^3=0. \tag{1}$$

Решение. Дифференциальное уравнение (1) эквивалентно динамической системе второго порядка, фазовым пространством которой является плоскость. В качестве переменных состояния выбираем координату $x_1=x$ и скорость $x_2=\dot{x}$.

Ищем уравнение фазовой траектории в виде

$$2\dot{x}^2+x^4=a, \tag{2}$$

где $a>0$. В левой части стоит положительно-определенная функция, поэтому уравнение (2) определяет на плоскости замкнутую кривую, содержащую внутри себя начало координат. Для изображающей точки на траектории равенство (2) выполняется в каждый момент времени, продифференцируем его по времени, получим

$$4\dot{x}(\ddot{x}+x^3)=0.$$

Т. к. $\dot{x}$ тождественно не равно нулю, то на траектории $\ddot{x}+x^3=0$. Учитывая это равенство в уравнении (1), приходим к соотношению

$$(2\dot{x}^2+x^4-1)\dot{x}=0. \qquad (3)$$

Сравнивая (3) с (2), определяем постоянную $a=1$.

**Задача 15.** *Частица движется в поле консервативной силы, потенциал которой показан на рис. 5(a). Изобразить качественно фазовый портрет системы.*

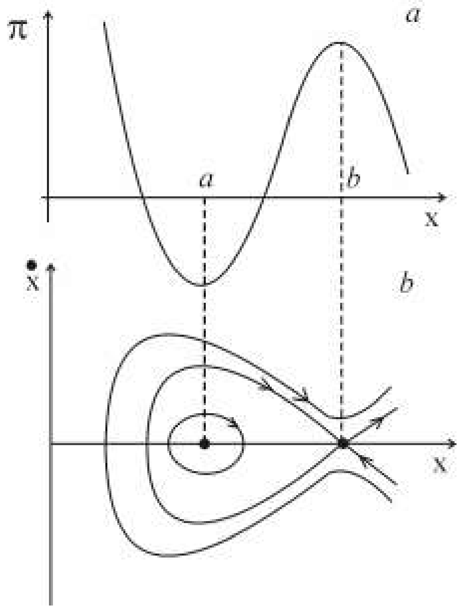



*Рис. 5*

Р е ш е н и е . Механическая система имеет одну степень свободы, она эквивалентна динамической системе второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-\dfrac{1}{m}\pi'(x_1) \end{cases}, \qquad (1)$$

где $m$ – масса частицы, $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$ – переменные состояния. Для консервативной системы существует интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\pi(x)=E=const. \qquad (2)$$

Постоянная $E$ находится из начальных условий. Уравнение

$$\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-\pi(x))}, \qquad (3)$$

которое следует из (2), описывает фазовый портрет системы.

Точки экстремума потенциала определяют положения равновесия частицы: точка минимума $a$ отвечает устойчивому положению равновесия, а точка максимума $b$ – неустойчивому положению. Неподвижная точка $(a,0)$ динамической системы (1) является центром, а неподвижная точка $(b,0)$ – седлом.

Из уравнения (3) видно, что движение частицы возможно только в случае $E>\pi_{min}$. Если $\pi_{min}<E<\pi_{max}$, фазовые траектории являются замкнутыми, они соответствуют периодическим движениям – незатухающим колебаниям. При

$E=\pi_{max}$ получаем сепаратрисы седла, а при $E>\pi_{max}$ – незамкнутые траектории, огибающие сепаратрисы. Направление движения изображающей точки определяется из первого уравнения системы (1): в верхней полуплоскости, где $x_2>0$, координата $x_1$ со временем увеличивается, а в нижней полуплоскости, наоборот, уменьшается.

## 2. САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

**Самостоятельная работа 1.** *Материальная точка расположена внутри шероховатой трубки, форма которой задается уравнением $y=y(x)$. Определить наименьшее значение коэффициента трения $f$, при котором точка находится в равновесии при $x=x_0$. Ось $Oy$ направлена вертикально вверх. Необходимые для решения задачи данные приведены в таблице 1.*

*Таблица 1*

| Номер варианта | Уравнение кривой $y=y(x)$ | Значение $x_0$ |
|---|---|---|
| 1 | $y=\frac{1}{4}\cos\pi x$ | $-0.25$ |
| 2 | $y=x^{1/5}$ | $1$ |
| 3 | $y=\cos\frac{\pi}{4}x$ | $-1$ |
| 4 | $y=2\ln x$ | $3$ |
| 5 | $y=\frac{1}{5}\cos\pi x$ | $-\frac{1}{6}$ |
| 6 | $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ | $1$ |
| 7 | $y=\frac{1}{2}\ln(x-1)$ | $2$ |
| 8 | $y=4x^{1/6}$ | $1$ |
| 9 | $y=\frac{1}{6}\cos\pi x$ | $-\frac{1}{3}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 10 | $y=2x^{1/3}$ | $1$ |
| 11 | $y=\frac{1}{6}ln(x-3)$ | $4$ |
| 12 | $y=\frac{1}{2}cos\frac{\pi}{2}x$ | $-\frac{1}{3}$ |
| 13 | $y=\frac{1}{3}\ ln(x-2)$ | $3$ |
| 14 | $y=\frac{1}{3}cos\frac{\pi}{2}x$ | $-\frac{1}{2}$ |

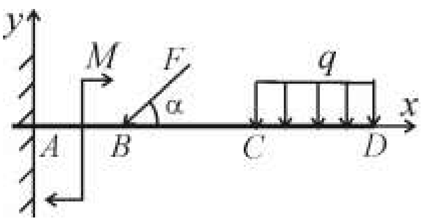


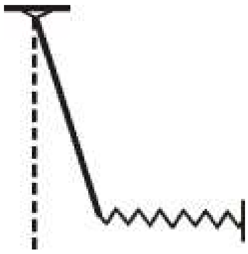

*Рис. 6*

**Самостоятельная работа 2.** *К консольной балке $AD$ приложена пара сил с моментом $M$, распределенная нагрузка интенсивности $q$ и сосредоточенная сила $F$. Найти реакцию заделки, если $AB=BC=CD=a$. Необходимые для решения задачи данные приведены в таблице 2.*

*Таблица 2*

| Номер варианта | $F$, Н | $M$, Н·м | $q$, Н/м | $\alpha$, град | $a$, м |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 400 | 200 | 100 | 60 | 2 |
| 2 | 100 | 200 | 300 | 30 | 3 |
| 3 | 300 | 100 | 200 | 45 | 4 |
| 4 | 200 | 200 | 400 | 90 | 3 |
| 5 | 400 | 100 | 200 | 30 | 2 |
| 6 | 100 | 200 | 500 | 60 | 2 |
| 7 | 300 | 300 | 100 | 90 | 3 |
| 8 | 200 | 100 | 200 | 45 | 2 |
| 9 | 400 | 400 | 400 | 90 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 100 | 100 | 100 | 30 | 2 |
| 11 | 300 | 200 | 500 | 60 | 3 |
| 12 | 200 | 100 | 200 | 45 | 1 |
| 13 | 400 | 200 | 100 | 90 | 1 |
| 14 | 100 | 300 | 200 | 45 | 2 |



**Самостоятельная работа 3.** *Найти малые колебания системы, изображенной на рис.7. Масса стержня –* $m$*, длина стержня –* $l$*, коэффициент жесткости пружины –* $c$*. Пружина не напряжена, когда стержень занимает вертикальное положение. Необходимые для решения задачи данные приведены в таблице 3.*

*Рис. 7*

*Таблица 3*

| Номер варианта | $m$, кг | $c$, кН/м | $l$, м |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 0.7 |
| 2 | 1.5 | 1 | 0.5 |
| 3 | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 1.2 | 1 | 0.4 |
| 5 | 0.6 | 0.4 | 0.2 |
| 6 | 0.9 | 0.8 | 0.3 |
| 7 | 0.8 | 0.7 | 0.2 |
| 8 | 1.8 | 1 | 0.6 |
| 9 | 2.1 | 2 | 0.7 |
| 10 | 2.4 | 1.5 | 0.8 |
| 11 | 2.7 | 1 | 0.9 |
| 12 | 1.6 | 3 | 0.5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 1.9 | 4 | 0.6 |
| 14 | 1.3 | 2 | 0.5 |

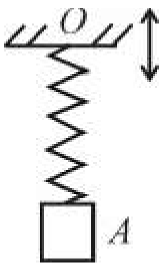



*Рис. 8*

**Самостоятельная работа 4.** *Тело массой* $m$ *соединено посредством пружины жесткостью* $k$ *с точкой O, совершающей вертикальные колебания по закону* $x_O = a \sin pt$. *Определить частоту* $p$, *при которой наступит резонанс. Найти амплитуду вынужденных колебаний системы при заданных значениях* $m, k, a$ *и* $p$ *(см. таблицу 4).*

*Таблица 4*

| Номер варианта | $m$, кг | $k$, Н/м | $a$, м | $p$, с$^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 1250 | 0.001 | 10 |
| 2 | 1.0 | 2500 | 0.03 | 40 |
| 3 | 0.6 | 960 | 0.007 | 30 |
| 4 | 0.2 | 320 | 0.001 | 20 |
| 5 | 1.4 | 11340 | 0.002 | 80 |
| 6 | 0.4 | 160 | 0.005 | 10 |
| 7 | 1.3 | 8320 | 0.001 | 70 |
| 8 | 0.1 | 250 | 0.003 | 25 |
| 9 | 1.2 | 5880 | 0.005 | 60 |
| 10 | 0.8 | 320 | 0.004 | 15 |
| 11 | 0.3 | 270 | 0.001 | 15 |
| 12 | 0.7 | 630 | 0.004 | 10 |
| 13 | 1.1 | 3960 | 0.006 | 50 |
| 14 | 0.9 | 360 | 0.005 | 10 |

**Самостоятельная работа 5.** *Функция Лагранжа механической системы известна (см. таблицу 5). Найти малые колебания системы.*

*Таблица 5*

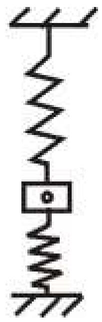
| Номер варианта | Функция Лагранжа | Номер варианта | Функция Лагранжа |
|---|---|---|---|
| 1 | $\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{2}xy$ | 8 | $3\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}-x^2-y^2+\frac{1}{2}xy$ |
| 2 | $2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-x^2-y^2+xy$ | 9 | $7\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}-2(x^2+y^2)+3xy$ |
| 3 | $4(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{2}xy$ | 10 | $4(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-3\frac{x^2+y^2}{2}+2xy$ |
| 4 | $3(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{2}xy$ | 11 | $2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{2}xy$ |
| 5 | $\frac{3}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2-x^2-y^2\right)+2xy$ | 12 | $3(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-3\frac{x^2+y^2}{2}+2xy$ |
| 6 | $5\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}-\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{2}xy$ | 13 | $5\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}-x^2-y^2+xy$ |
| 7 | $\dot{x}^2+\dot{y}^2-x^2-y^2+xy$ | 14 | $7\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}-2(x^2+y^2)+xy$ |

**Самостоятельная работа 6.** *Тяжелая бусинка надета на гладкую кривую, которая задается уравнением* $z=f(x)$ *(см. таблицу 6). Ось* $Oz$ *направлена вертикально вверх. Найти положения равновесия бусинки и исследовать их устойчивость.*

*Таблица 6*

| Номер варианта | Уравнение кривой $z=f(x)$ | Номер варианта | Уравнение кривой $z=f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$ | 8 | $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | $\frac{1}{3}x^3 - x$ | 9 | $x^3 - 6x^2 + 9x$ |
| 3 | $-x^3 - \frac{3}{2}x^2$ | 10 | $\frac{3}{2}x^2 - x^3$ |
| 4 | $\frac{9}{2}x^2 - x^3$ | 11 | $3x^2 - x^3$ |
| 5 | $x^3 - 6x^2$ | 12 | $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$ |
| 6 | $x^3 - 3x^2$ | 13 | $x^3 + 3x^2 - 9x$ |
| 7 | $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2$ | 14 | $\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ |



**Самостоятельная работа 7.** *Груз массой* $m$, *связанный с неподвижными опорами пружинами жесткости* $c$, *как показано на рис .9, может перемещаться по вертикали. На груз действует сила вязкого трения* $\vec{F} = -b\vec{V}\,(b > 0)$. *Используя критерий Рауса – Гурвица, показать, что положение равновесия этой системы асимптотически устойчиво. Необходимые для решения задачи данные приведены в таблице 7.*

*Рис. 9*

*Таблица 7*

| Номер варианта | $m$, кг | $c$, кН/м | $b$, кг/с |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 10 |
| 2 | 4 | 2 | 20 |
| 3 | 8 | 1 | 10 |
| 4 | 6 | 1 | 5 |
| 5 | 3 | 3 | 20 |
| 6 | 5 | 1 | 10 |
| 7 | 2 | 2 | 10 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 3 | 1 | 10 |
| 9 | 7 | 4 | 30 |
| 10 | 8 | 3 | 20 |
| 11 | 4 | 1 | 5 |
| 12 | 6 | 3 | 10 |
| 13 | 5 | 2 | 20 |
| 14 | 7 | 4 | 10 |

**Самостоятельная работа 8.** *Задано уравнение движения механической системы (см. таблицу 8). Найти асимптотически устойчивое положение равновесия системы.*

*Таблица 8*

| Номер варианта | Уравнение движения | Номер варианта | Уравнение движения |
|---|---|---|---|
| 1 | $6\ddot{x}+5\dot{x}-x^2+1=0$ | 8 | $3\ddot{x}+10\dot{x}-x^2+1=0$ |
| 2 | $\ddot{x}+5\dot{x}-0.4x^2+0.4=0$ | 9 | $2\ddot{x}+5\dot{x}-0.75x^2+0.75=0$ |
| 3 | $8\ddot{x}+10\dot{x}-x^2+4=0$ | 10 | $\ddot{x}+5\dot{x}-x^2+1=0$ |
| 4 | $\ddot{x}+5\dot{x}-0.5x^2+0.5=0$ | 11 | $4\ddot{x}+5\dot{x}-x^2+4=0$ |
| 5 | $3\ddot{x}+20\dot{x}-3x^2+3=0$ | 12 | $7\ddot{x}+10\dot{x}-4x^2+4=0$ |
| 6 | $\ddot{x}+2\dot{x}-0.2x^2+0.2=0$ | 13 | $3\ddot{x}+5\dot{x}-0.15x^2+0.15=0$ |
| 7 | $7\ddot{x}+30\dot{x}-4x^2+4=0$ | 14 | $\ddot{x}+4\dot{x}-0.4x^2+0.4=0$ |

**Самостоятельная работа 9.** *Заданы дифференциальные уравнения возмущенного движения (см. таблицу 9). Исследовать устойчивость невозмущенного движения в зависимости от параметра* $a$.

*Таблица 9*

| Номер варианта | Уравнения возмущенного движения |
|---|---|
| 1 | $\dot{x}=-y+ax^3,\ \dot{y}=x+ay^2\sin y$ |
| 2 | $\dot{x}=-y+ax^2\sin x,\ \dot{y}=x+ay^3$ |
| 3 | $\dot{x}=-y+ax^5,\ \dot{y}=x+ay^2\sin y$ |
| 4 | $\dot{x}=-y+ax^2\sin x,\ \dot{y}=x+ay^5$ |
| 5 | $\dot{x}=-y+ax^3,\ \dot{y}=x+ay^4\sin y$ |
| 6 | $\dot{x}=-y+ax^2\sin x,\ \dot{y}=x+ay^5$ |
| 7 | $\dot{x}=-y+2ax^3,\ \dot{y}=x+ay^2\sin 2y$ |
| 8 | $\dot{x}=-y+ax^2\sin 2x,\ \dot{y}=x+2ay^3$ |
| 9 | $\dot{x}=-y+2ax^5,\ \dot{y}=x+ay^2\sin 2y$ |
| 10 | $\dot{x}=-y+ax^2\sin 2x,\ \dot{y}=x+2ay^5$ |
| 11 | $\dot{x}=-y+2ax^3,\ \dot{y}=x+ay^4\sin 2y$ |
| 12 | $\dot{x}=-y+ax^4\sin 2x,\ \dot{y}=x+2ay^3$ |
| 13 | $\dot{x}=-y+3ax^3,\ \dot{y}=x+ay^2\sin 3y$ |
| 14 | $\dot{x}=-y+ax^2\sin 3x,\ \dot{y}=x+3ay^3$ |

**Самостоятельная работа 10.** *Материальная точка может двигаться по гладкой кривой $z=f(x)$, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг оси $z$ (ось $z$ направлена вверх). Определить, при каких значениях $\omega$ положение равновесия точки $x=0$ является устойчивым. Уравнение кривой приведено в таблице 10.*

*Таблица 10*

| Номер варианта | Уравнение кривой $z=f(x)$ | Номер варианта | Уравнение кривой $z=f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $z=2x^2$ ( ì ) | 8 | $z=x^2/2$( ì ) |
| 2 | $z=x\sin x$( ì ) | 9 | $z=3x\sin 2x$( ì ) |
| 3 | $z=2(1-\cos x)$( ì ) | 10 | $z=(1-\cos x/2)$( ì ) |
| 4 | $z=3x^2$ ( ì ) | 11 | $z=3\sin 2x^2$ ( ì ) |
| 5 | $z=\sin x^2$ ( ì ) | 12 | $z=5x^2$ ( ì ) |
| 6 | $z=(1-\cos 2x)$( ì ) | 13 | $z=5x\sin x$( ì ) |
| 7 | $z=\frac{1}{5}x^2$ ( ì ) | 14 | $z=(1-\cos 3x)$( ì ) |

**Самостоятельная работа 11.** *Показать, что преобразование* $q^*=\varphi(q,p),\ p^*=\psi(q,p)$ *переводит каноническую систему с гамильтонианом* $H=H(q,p)$ *в каноническую систему. Функции* $\varphi(q,p),\psi(q,p)$, $H(q,p)$ *приведены в таблице 11.*

*Таблица 11*

| Номер варианта | $\varphi(q,p)$ | $\psi(q,p)$ | $H(q,p)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $p$ | $2q^{1/3}$ | $q$ |
| 2 | $p^{1/2}$ | $4q$ | $p$ |
| 3 | $2p$ | $3q^{1/3}$ | $q$ |
| 4 | $p^{1/3}$ | $2q$ | $p$ |
| 5 | $4p$ | $\frac{1}{2}q^{1/3}$ | $q$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | $2\,p^{1/4}$ | $q$ | $p$ |
| 7 | $3\,p$ | $q^{1/4}$ | $q$ |
| 8 | $p^{1/9}$ | $5\,q$ | $p$ |
| 9 | $2\,p$ | $q^{1/4}$ | $q$ |
| 10 | $p^{1/5}$ | $3\,q$ | $p$ |
| 11 | $4\,p$ | $\frac{1}{3}q^{1/3}$ | $q$ |
| 12 | $p^{1/4}$ | $4\,q$ | $p$ |
| 13 | $3\,p$ | $q^{1/7}$ | $q$ |
| 14 | $p^{1/6}$ | $2\,q$ | $p$ |

**Самостоятельная работа 12.** *Выписать формулы свободного канонического преобразования валентности* $c$, *заданного производящей функцией* $S(q, q^*, t)$ *(см. таблицу 12).*

*Таблица 12*

| Номер варианта | $S(q,q^*,t)$ | Номер варианта | $S(q,q^*,t)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\sum_{i=1}^{n}(q_i^*)^2\left[ln(q_i t)+t\right]$ | 8 | $\sum_{i=1}^{n}(q_i^*)^{3/2}\left[ln(q_i t)+t\right]$ |
| 2 | $\sum_{i=1}^{n}(q_i^*)^{1/2}\left[ln(q_i t)-2t\right]$ | 9 | $\sum_{i=1}^{n}(q_i^*)^{3/5}\left[ln(q_i t)+3t\right]$ |
| 3 | $\sum_{i=1}^{n}(q_i^*)^3\left[ln(q_i t)+4t\right]$ | 10 | $\sum_{i=1}^{n}(q_i^*)^4\left[ln(q_i t)-t\right]$ |
| 4 | $\sum_{i=1}^{n}(q_i^*)^{1/4}\left[ln(q_i t)-t\right]$ | 11 | $\sum_{i=1}^{n}(q_i^*)^{3/4}\left[ln(q_i t)+3t\right]$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | $\sum_{i=1}^{n}\left(q_i^*\right)^{2/3}\left[ln\left(q_i t\right)-5t\right]$ | 12 | $\sum_{i=1}^{n}\left(q_i^*\right)^{5}\left[ln\left(q_i t\right)-t\right]$ |
| 6 | $\sum_{i=1}^{n}\left(q_i^*\right)^{3}\left[ln\left(q_i t\right)-2t\right]$ | 13 | $\sum_{i=1}^{n}\left(q_i^*\right)^{2}\left[ln\left(q_i t\right)-3t\right]$ |
| 7 | $\sum_{i=1}^{n}q_i^*\left[ln\left(q_i t\right)-6t\right]$ | 14 | $\sum_{i=1}^{n}\left(q_i^*\right)^{1/3}\left[ln\left(q_i t\right)-6t\right]$ |

**Самостоятельная работа 13.** *Найти тип неподвижных точек, соответствующих состояниям равновесия механической системы, движение которой описывается заданным дифференциальным уравнением (см. таблицу 13).*

*Таблица 13*

| Номер варианта | Уравнение движения | Номер варианта | Уравнение движения |
|---|---|---|---|
| 1 | $\ddot{x}=-2x+\frac{1}{2}x^3-\dot{x}$ | 8 | $\ddot{x}=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^3-\dot{x}$ |
| 2 | $\ddot{x}=-x+x^3-\dot{x}$ | 9 | $\ddot{x}=-3x+\frac{1}{3}x^3-\dot{x}$ |
| 3 | $\ddot{x}=4x-x^3-\dot{x}$ | 10 | $\ddot{x}=x-x^3-\dot{x}$ |
| 4 | $\ddot{x}=-x+\frac{1}{4}x^3-\dot{x}$ | 11 | $\ddot{x}=x-\frac{1}{4}x^3-\dot{x}$ |
| 5 | $\ddot{x}=3x-\frac{1}{3}x^3-\dot{x}$ | 12 | $\ddot{x}=2x-\frac{1}{2}x^3-\dot{x}$ |
| 6 | $\ddot{x}=x-\frac{1}{4}x^3-\dot{x}$ | 13 | $\ddot{x}=25x-x^3-\dot{x}$ |
| 7 | $\ddot{x}=-5x+\frac{1}{5}x^3-\dot{x}$ | 14 | $\ddot{x}=8x-2x^3-\dot{x}$ |

**Самостоятельная работа 14.** *Задано дифференциальное уравнение движения механической системы (см. таблицу 14). Найти замкнутую траекторию, соответствующую колебаниям системы.*

*Таблица 14*

| Номер варианта | Уравнение движения |
|---|---|
| 1 | $2\ddot{x}+(\dot{x}^2+2x^4-1)\dot{x}+8x^3=0$ |
| 2 | $\ddot{x}-(7-3\dot{x}^2-2x^2)x=0$ |
| 3 | $\ddot{x}+(2\dot{x}^2+4x^6-1)\dot{x}+6x^5=0$ |
| 4 | $\ddot{x}-(1-2\dot{x}^2-2x^4)\dot{x}+2x^3=0$ |
| 5 | $\ddot{x}+(2\dot{x}^2+4x^6-1)\dot{x}+6x^5=0$ |
| 6 | $2\ddot{x}+(\dot{x}^2+3x^2-1)x=0$ |
| 7 | $\ddot{x}-(1-\dot{x}^2-x^4)x^3=0$ |
| 8 | $3\ddot{x}+(\dot{x}^2+x^4-5)\dot{x}+6x^3=0$ |
| 9 | $\ddot{x}+(2\dot{x}^2+4x^4-3)x^3=0$ |
| 10 | $4\ddot{x}+(2\dot{x}^2+5x^2-3)x=0$ |
| 11 | $\ddot{x}-(2-3\dot{x}^2-x^6)\dot{x}+x^5=0$ |
| 12 | $\ddot{x}-(1-3\dot{x}^2-3x^4)\dot{x}+2x^3=0$ |
| 13 | $3\ddot{x}-(5-\dot{x}^2-2x^4)x^3=0$ |
| 14 | $3\ddot{x}+(\dot{x}^2+x^2-5)x=0$ |

**Самостоятельная работа 15.** *Материальная точка движется под действием консервативной силы, потенциал которой задается функцией* $\pi(x)$ *(см. таблицу 15). Построить фазовый портрет системы.*

*Таблица 15*

| Номер варианта | Потенциал силы $\pi(x)$ | Номер варианта | Потенциал силы $\pi(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2$ | 8 | $\frac{x^3}{3}-x^2-3x$ |
| 2 | $x^3-3x^2$ | 9 | $x^3+3x^2-9x$ |
| 3 | $-x^3-\frac{3}{2}x^2$ | 10 | $\frac{3}{2}x^2-x^3$ |
| 4 | $\frac{9}{2}x^2-x^3$ | 11 | $3x^2-x^3$ |
| 5 | $x^3-6x^2$ | 12 | $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2$ |
| 6 | $\frac{1}{3}x^3-x$ | 13 | $x^3-6x^2+9x$ |
| 7 | $x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$ | 14 | $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$ |

## Список использованной литературы

1. Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 1999. – 572 с.
2. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1981. – 480 с.
3. Пятницкий Е.С. и др. Сборник задач по аналитической механике: Учебное пособие. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
4. Кузнецов А. П. и др. Линейные колебания и волны (Сборник задач). – М.: Физматлит, 2001. – 128 с.
5. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
6. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Физматлит, 2001. – 264 с.
7. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ