

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА
В КОНУСЕ. II (ОБЩАЯ ТЕОРИЯ)*

5. Формулы Грина и Карлемана. Для произвольного борелевского множества $E \subset \subset \bar{K} \setminus \{0\}$ положим

$$\tau(E) = \int_E \left\{ \varphi d\mu - \frac{1}{\theta_m} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dv \right\}. \quad (27)$$

Тем самым мы определим на $\bar{K} \setminus \{0\}$ меру $\tau = \tau_u$, «объединяющую» меры μ и ν . С учетом доказанного в лемме 5 мы теперь можем распространить формулу Карлемана и на функции, субгармонические в конусе K , не предполагая, как это было в лемме 2, их продолжимости в окрестность $\bar{K}$. Мы приведем также и другой вариант формулы Карлемана, приспособленный к изучению поведения субгармонических функций при подходе к вершине конуса. Оба варианта содержатся в приводимом нами более общем равенстве, носящем характер формулы Грина для функций, субгармонических в конусе и ограниченных сверху на всех его ограниченных подмножествах.

Лемма 6. Пусть функция $u \in SH(K)$ ограничена сверху на всех ограниченных подмножествах конуса K . Тогда для любой функции $\psi \in C^2(\bar{K}_{r,R})$ и для всех $r \in \Lambda_u$, $R \in \Lambda_u$, $r < R$ справедливо равенство**

$$\begin{aligned} & \theta_m \int_{\bar{K}_{r,R}} \psi d\tau - \int_{K_{r,R}} u \Delta(\varphi\psi) d\omega = \\ &= \int_{\Gamma_r} u \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS_r + \int_{\Gamma_R} u \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS_R - Q(\psi, r, u) + \\ & \quad + Q(\psi, R, u). \end{aligned} \quad (28)$$

В частности, при $\psi(x) = \gamma_R(|x|)$, где $\gamma_R(t) = t^{k-} - R^{k-} - t^{k+}$,

$$\begin{aligned} & \theta_m \int_{K_{r,R}} \gamma_R(|x|) \varphi d\mu = \int_{\Gamma_{r,R}} \gamma_R(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dv + \\ & + \gamma'_R(r) \int_{\Gamma_r} u \varphi dS_r - \gamma'_R(R) \int_{\Gamma_R} u \varphi dS_R - \\ & - \gamma_R(r) Q(1, r, u), \end{aligned} \quad (29)$$

* Это вторая часть статьи, первая часть которой опубликована в предыдущем выпуске настоящего сборника. Нумерация утверждений, формул и литературы является продолжением соответствующей нумерации из первой части.

** Если меры $u \varphi dS_t$ на Γ_t заменить мерами $dv^{(t)}$, $t = r, R$, то полученные равенства будут справедливы при r и R , не принадлежащих не более чем счетному множеству $\Lambda_u^1 \cup \Lambda_u^2$.

при $\psi(x) = \tilde{\gamma}_r(|x|)$, где $\tilde{\gamma}_r(t) = t^{\kappa^+} - r^{\kappa^+ - \kappa^-} t^{\kappa^-}$,

$$\begin{aligned} \theta_m \int_{K_{r,R}} \tilde{\gamma}_r(|x|) \varphi d\mu &= \int_{\Gamma_{r,R}} \tilde{\gamma}_r(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\nu - \\ &- \tilde{\gamma}'_r(R) \int_{\Gamma_R} u \varphi dS_R + \tilde{\gamma}'_r(r) \int_{\Gamma_r} u \varphi dS_r - \\ &- \tilde{\gamma}_r(R) Q(1, R, u). \end{aligned} \quad (30)$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 5, построим последовательность функций $u_h^j \in SH(K_{r,R}) \cap C^\infty(K_{r,R})$ при $j \rightarrow \infty$ монотонно убывающую к функции u_h . Обозначим через $\Lambda_u^*(t) = \{h: \mu_h(\bar{\Gamma}_t) \neq 0\}$.

Согласно формуле Грина, примененной к функциям u_h^j и $\varphi\psi$ в области $K_{r,R}$, имеем

$$\begin{aligned} &\int_{K_{r,R}} \varphi\psi \Delta u_h^j d\omega - \int_{K_{r,R}} u_h^j \Delta(\varphi\psi) d\omega = \\ &= \int_{\Gamma_{r,R}} u_h^j \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma + \int_{\Gamma_r} u_h^j \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS_r - \int_{\Gamma_r} \varphi\psi \frac{\partial u_h^j}{\partial n} dS_r + \\ &+ \int_{\Gamma_R} u_h^j \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS_R - \int_{\Gamma_R} \varphi\psi \frac{\partial u_h^j}{\partial n} dS_R. \end{aligned}$$

Считая, что $h \notin \{\Lambda_u^*(R) \cup \Lambda_u^*(r)\}$, перейдем в этом равенстве к пределу сначала по $j \rightarrow \infty$, а потом по $h \rightarrow 0$. Используя лемму 5, получим при этом равенство (28), из которого очевидным образом следуют равенства (29) и (30).

Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $L(x)$ — положительно однородная степени $\rho > \kappa^*$ ограниченная сверху на Γ субгармоническая функция в конусе K . Тогда для любой функции $\psi \in C^2(\bar{K}_1)$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \int_{\bar{K}_1} L \Delta(\varphi\psi) d\omega &= \theta_m \int_{\bar{K}_1} \psi d\tau_L - \rho \int_{\Gamma_1} \varphi\psi L dS_1 - \\ &- \int_{\Gamma_1} L \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS_1. \end{aligned} \quad (31)$$

Доказательство. Применяя предшествующую лемму в области $K_{\lambda,1}$ к функциям L и ψ и устремляя затем λ к нулю, получаем равенство (31). Лемма доказана.

6. Распространение результатов на случай «несдвигаемого» конуса. Итоговые оценки. Сейчас мы избавимся от введенного в п. 3 требования «сдвигаемости» конуса K , т. е. не будем предполагать, что $\exists x^0 \in S_1: \forall h > 0 \{ \overline{K + hx^0} \} \subset K$. Единственным условием на конус K остается двойная гладкость границы области $\Gamma \subset S_1$, $K = K^\Gamma$.

Нетрудно показать, что в этом случае область Γ можно покрыть объединением областей $\Gamma^{(j)} \subset \Gamma$, $j = 1, \dots, N = N(\Gamma)$ со следующими свойствами: 1) границы $\Gamma^{(j)}$ дважды гладкие; 2) $\exists x^{(j)} \in S_1$ такие, что $\forall h > 0 \{ \Gamma^{(j)} + hx^{(j)} \} \subseteq K$, $j = 1, \dots, N$. Ясно, что каждый конус $K^{(j)} = K^{\Gamma^{(j)}}$ «сдвигаем» в K , поэтому для функций $u \in SH(K^{(j)})$ справедливы все утверждения лемм 4—7 для конуса $K^{(j)}$. Подчеркнем, однако, что для функции $u \in SH(K)$ содержащиеся в этих леммах оценки для всех конусов одновременно доказаны пока только с $\rho > \max_j \kappa^+(K^{(j)})$.

Положим $\tilde{\Gamma}^{(j)} = \Gamma^{(j)} \cup (\partial\Gamma^{(j)} \cap \partial\Gamma)$ и введем в рассмотрение функции η_j , $j = 1, \dots, N$ со следующими свойствами: 1) $\eta_j \in C^\infty(\tilde{\Gamma}^{(j)})$; 2) $\text{supp } \eta_j \subset \tilde{\Gamma}^{(j)}$; 3) $\eta_1 + \dots + \eta_N \equiv 1$. Через η_j обозначим также однородное степени 0 продолжение функции η_j в $\bar{K}$. Через $\varphi^{(j)}$ обозначим первую собственную функцию краевой задачи в $\Gamma^{(j)}$ $\Delta^* \eta + \lambda \eta = 0$, $\eta|_{\partial\Gamma^{(j)}} = 0$, продолженную в $K^{(j)}$ как однородную степени 0 и нулем в $\bar{K}/K^{(j)}$. Для любой функции $\psi \in C^2(\bar{K}_{\lambda,R})$, $0 < \lambda < R$ положим

$$\psi_j = \frac{\varphi \eta_j}{\varphi^{(j)}} \psi, \quad j = 1, \dots, N.$$

Ясно, что $\psi_j \in C^2(\bar{K}_{\lambda,R}^{(j)})$, $\psi_j(x) = 0$ при $x \in \partial K^{(j)} \cap K_{\lambda,R}$, $\psi_j(x) = \psi(x) \eta_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} / \frac{\partial \varphi^{(j)}(x)}{\partial n}$ при $x \in \partial K_{\lambda,R}^{(j)} \cap \partial K$. Функцию ψ_j будем называть «проекцией» функции ψ на $K^{(j)}$. В силу того, что $\{\eta_j\}$ — разбиение единицы, справедливо тождество

$$\sum_{1 \leq j \leq N} \varphi^{(j)} \psi_j \equiv \varphi \psi.$$

Пусть функция $u \in SH(K)$ ограничена сверху на всех ограниченных множествах. Тогда в каждом конусе $K^{(j)}$ она удовлетворяет условиям леммы 5 и, стало быть, на $\partial K^{(j)} \setminus \{0\}$ у нее существует граничная мера $\nu^{(j)}$. Области $\Gamma^{(j)}$ всегда можно выбрать так, чтобы $|\nu^{(j)}|(E) = 0$ для любого множества E , лежащего на границе множества $\partial K^{(j)} \cap \partial K$. В силу единственности каждой меры $\nu^{(j)}$ на $\partial K^{(j)}$, для любого борелевского множества $E \subset \partial K^{(j)} \cap \partial K^{(i)}$ выполняется равенство $\nu^{(i)}(E) = \nu^{(j)}(E)$. Таким образом, на $\partial K \setminus \{0\}$ можно корректно определить вещественную меру $\nu = \nu_u$, полагая

$$\nu(E) = \sum_{1 \leq j \leq N} \nu^{(j)}(E_j), \quad E \subseteq \partial K \setminus \{0\},$$

где $\{E_j\}$ — такое разбиение множества E , что $E_j \subset \partial K^{(j)}$, или, эквивалентно,

$$\nu(E) = \sum_{1 \leq j \leq N} \int_E \eta_j d\nu^{(j)}. \quad (32)$$

Заметим, что определенная так мера ν не зависит от выбора покрытия $\{\Gamma^{(j)}\}$ множества Γ и локально является граничным значением функции u в следующем смысле:

$$\forall \psi \in C(\Gamma_{\lambda, R} \cap \Gamma_{\lambda, R}^{(j)});$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{\Gamma_{\lambda, R} \cap \Gamma_{\lambda, R}^{(j)}} \psi(x) u(x + hx^{(j)}) d\sigma = \int_{\Gamma_{\lambda, R} \cap \Gamma_{\lambda, R}^{(j)}} \psi(x) d\nu. \quad (33)$$

Наконец, для любой функции $\psi \in C^2(\bar{\Gamma}_r)$ положим

$$Q(\psi, r, u) = \sum_{1 \leq j \leq N} Q^{(j)}(\psi_j, r, u), \quad (34)$$

где

$$Q^{(j)}(\eta, r, u) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r^{(j)}} \varphi^{(j)}(x) \eta(x) \frac{\partial u(x + hx^{(j)})}{\partial r} dS_r,$$

функции ψ_j являются «проекциями» на $K^{(j)}$ функции ψ . При этом, в силу равенства (26) величина $Q(\psi, r, u)$ не зависит от выбора семейства $\{\Gamma^{(j)}\}$.

Теперь несложно убедиться, что для функции $u \in SH(K)$, ограниченной сверху на всех ограниченных множествах, формула (28) справедлива и для «несдвигаемого» конуса K , причем мера ν и величины $Q(\psi, r, u)$, $Q(\psi, R, u)$ определяются уже соотношениями (32), (34). Для этого нужно записать равенства (28) для всех конусов $K^{(j)}$, которые по построению «сдвигаемы», и «проекции» ψ_j функции $\psi \in C^2(\bar{K}_{r, R})$, после чего просуммировать полученные равенства. Наличие формулы (28) в общем случае влечет за собой и справедливость равенств (29) — (31) без предположения «сдвигаемости» конуса K .

В следующей ниже теореме мы подытожим проведенное изучение асимптотических свойств функции u и порождаемой ею меры τ_u . Обозначим через $SH(K; \rho)$, $\rho > \kappa^+$, класс функций $u(x)$, гармонических в конусе K и удовлетворяющих всюду в K неравенству $u(x) \leq a|x|^\rho + b$ при некоторых $a = a(u) > 0$, $b = b(u) \geq 0$.

Теорема 1. Пусть функция $u(x) \in SH(K; \rho)$, $\rho > \kappa^+$, $0 < r < \lambda < R$. Тогда

$$\int_{\Gamma_R} |u| \varphi dS_R \leq C_1 R^{\rho+m-1}; \quad (35)$$

$$\int_{\Gamma_r} |u| \varphi dS_r \leq C_2 (r^{1-\kappa^+} + 1); \quad (36)$$

$$|\tau|(K_{r, R}) \leq C_3 (r^{-\kappa^+} + R^{\rho+m-2}), \quad (37)$$

где $C_j = C_j(u, \lambda, \rho)$, $j = 1, 2, 3$.

Доказательство. Для «сдвигаемого» конуса K неравенство (35) и оценка величины $|\tau|(\bar{K}_{\lambda, R})$ содержатся в леммах 4 и 6. В общем случае эти соотношения устанавливаются из формулы (29) так,

как это делалось в лемме 3 для функций, субгармонических в окрестности конуса. Точно так же из формулы (30) вытекают неравенства (36) и оценка

$$|\tau|(\bar{K}_r, \lambda) \leq C_3 r^{-\kappa^+},$$

что завершает доказательство теоремы.

7. Оценка функций на C_0 -множествах. В дальнейшем нам понадобится интегральная оценка функций класса $SH(K; \rho)$ на «редких» множествах, а точнее, на C_0 -множествах. Напомним, что множество $E \subset K$ называется C_0 -множеством в K , если каждое множество $E_R = E \cap B_R$ может быть покрыто счетной системой шаров так, чтобы их центры лежали в шаре B_R , а их радиусы $r_j(R)$ удовлетворяли условию

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1-m} \sum_j [r_j(R)]^{m-1} = 0, \quad (38)$$

Лемма 8. Пусть функция $u \in SH(K; \rho)$, $\rho > \kappa^+$ и пусть E — некоторое C_0 -множество в K . Тогда для любого конуса $K' = K^{\Gamma'}$, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ и любого $\delta \in (0, 1)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\rho-m} \int_{E \cap K_{\delta t, t}} |u| d\omega = 0. \quad (39)$$

Доказательство. Представим функцию $|u|$ в виде $|u| = 2u^+ - u$ и обозначим для краткости множество $E \cap K_{\delta t, t}$ через $E_{\delta t, t}$, тогда

$$\int_{E_{\delta t, t}} |u| d\omega = \int_{E_{\delta t, t}} 2u^+ d\omega - \int_{E_{\delta t, t}} u d\omega. \quad (40)$$

Согласно определению C_0 -множества для любого $t > 0$ существуют такие шары $B(y^{(j)}, R_j) = \{x: |x - y^{(j)}| < R_j\}$, $y^{(j)} = y^{(j)}(t)$, $R_j = R_j(t)$, что $y^{(j)} \in B_t$, $E_{\delta t, t} \subset \bigcup_j B(y^{(j)}, R_j)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-m} \sum_j R_j^{m-1} = 0$.

Следовательно,

$$\int_{E_{\delta t, t}} u^+ d\omega \leq c(at^{\rho} + b) \sum_j R_j^m$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\rho-m} \int_{E_{\delta t, t}} u^+ d\omega = 0. \quad (41)$$

Для оценки второго слагаемого в (40) рассмотрим функцию $u_t(x) = u(tx) t^{-\rho}$ и множество $A_t = t^{-1} E_{\delta t, t}$. Очевидно, что

$$t^{-\rho-m} \int_{E_{\delta t, t}} u d\omega = \int_{A_t} u_t d\omega$$

и что $A_t \subset K_{\delta, 1}$. Покроем множество $K_{\delta, 1}$ шарами $B(a_j, r)$, $j = 1, 2, \dots, n$, так, чтобы $\bar{K}_{\delta, 1} \subset \bigcup_j B(a_j, r) \subset \bigcup_j B(a_j, 5r) \subseteq K$. По-

Поскольку функция $u(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то существует такая константа $D > 0$, что

$$\int_{K_{\delta t, t}} |u| d\omega < D t^{\rho+m},$$

или, что эквивалентно,

$$\int_{K_{\delta, 1}} |u_t| d\omega < D. \tag{42}$$

Пусть $0 < d < \frac{\sigma_m}{3} r^m$, где $\sigma_m = \int_{B_1} d\omega$.

Обозначим $F_{t, R} = \{x \in K_{\delta, 1} : |u_t(x)| > R\}$. Из (42) следует, что существует не зависящее от t положительное число N , такое, что $\text{mes } F_{t, N} < d$. Зададим теперь произвольное $\varepsilon < d$ и выберем число $T > 0$ так, чтобы при любом $t > T$ множество A_t покрывалось шарами с суммой объемов меньшей, чем ε . Тогда в каждом шаре $B(a_j, r)$ существует точка $b_j \notin A_t \cup F_{t, N}$. Обозначим

$$\begin{aligned} A^1 &= A_t \cap B(b_1, 2r); \\ A^2 &= (A_t \setminus A^1) \cap B(b_2, 2r); \\ A^3 &= (A_t \setminus (A^1 \cup A^2)) \cap B(b_3, 2r); \\ &\dots\dots\dots \\ A^n &= (A_t \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A^j) \cap B(b_n, 2r). \end{aligned}$$

Тогда

$$\left| \int_{A_t} u_t d\omega \right| \leq \sum_j \left| \int_{A^j} u_t d\omega \right|.$$

Запишем теперь для функции u_t представление Рисса в шаре $B(b_j, 4r)$:

$$u_t(x) = H_t(x) - \int_{B(b_j, 4r)} G_j(x, y) d\mu_t(y). \tag{43}$$

Здесь $H_t(x)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $u_t(x)$ в шаре $B(b_j, 4r)$; G_j — функция Грина шара $B(b_j, 4r)$; μ_t — мера, ассоциированная по Риссу функции u_t . Так как $G_j(x, y) \leq c(m) \times |x - y|^{2-m}$, согласно пространственному варианту леммы 7.2 из [10] имеем*

* Цитируемый вариант формулируется следующим образом. Пусть множество Q лежит в шаре B_R и пусть $\text{mes } Q = s$. Пусть, далее, $\lambda(t)$ — невозрастающая интегрируемая функция на интервале $(0, R)$. Тогда $\int_Q \lambda(|x|) d\omega \leq \int_{B_R(s)} \lambda(|x|) d\omega$, где $R(s)$ таково, что $\text{mes } B_{R(s)} = s$.

$$\int_{A_i} G_j(x, y) d\omega(x) \leq c(m) \int_{A_i} |x - y|^{2-m} d\omega(x) \leq c(m) \int_{B_i} \frac{d\omega}{|x|^{m-2}} = \\ = \bar{c}(m) (\text{mes } A_i)^{\frac{2}{m}}.$$

Далее, из формулы Пуассона-Иенсена вытекает следующая оценка функции $H_t(x)$ при $|x - b_j| \leq 2r$:

$$|H_t(x)| \leq \frac{1}{2r} \left| \int_{|y - b_j| = 4r} u_t(y) \frac{(4r)^2 - |x - b_j|^2}{|x - y|^m} dS_{4r} \right| \leq \\ \leq 2(2r)^{1-m} \int_{|y - b_j| = 4r} |u_t| dS_{4r} \leq 2(2r)^{1-m} \left[\int_{|y - b_j| = 4r} u_t^+ dS_{4r} - \right. \\ \left. - \delta^m (4r)^{m-1} u_t(b_j) \right] \leq c_1 r^{1-m} \int_{|y - b_j| = 4r} u_t^+ dS_{4r} + c_2 N.$$

Применяя полученные оценки к представлению (43), получаем

$$\left| \int_{A_i} u_t d\omega \right| \leq c_1 r^{1-m} \int_{|y - b_j| = 4r} u_t^+ dS_{4r} \cdot \text{mes } A_i + c_2 N \text{mes } A_i + \\ + \bar{c} (\text{mes } A_i)^{\frac{2}{m}} \int_{B(b_j, 4r)} d\mu_t.$$

Поскольку $u_t^+(y) \leq a|y|^p + b$, то

$$c_1 r^{1-m} \int_{|y - b_j| = 4r} u_t^+ dS_{4r} \leq a_2 (5r + 1)^p + b_2 < d_1$$

и

$$\mu_t(B(b_j, 4r)) \leq [a_3 (5r + 1)^p + b_3 + c_3 N] r^{m-2} < d_2.$$

Таким образом, для всех $t > T$

$$t^{-p-m} \left| \int_{E_{\delta t, t}} u d\omega \right| = \left| \int_{A_t} u_t d\omega \right| \leq \sum_j \left| \int_{A_i} u_t d\omega \right| \leq c_1 d_1 \varepsilon + \\ + c_2 N \varepsilon + \bar{c} d_2 n \varepsilon^{\frac{2}{m}} \leq d_3 \varepsilon^{\frac{2}{m}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-p-m} \int_{E_{\delta t, t}} u d\omega = 0.$$

Отсюда, а также из (41) заключаем о выполнении соотношения (39). Лемма доказана.

Замечание. Из доказательства леммы видно, что ее утверждение остается в силе, если в определении C_0 -множества условие (38) заменить менее ограничительным условием

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-m} \sum_j [r_j(R)]^m = 0.$$

8. Каноническое представление. В заключение этой части статьи приведем полученное одним из авторов в [8] интегральное представление субгармонической в конусе функции $u(x)$ конечного порядка роста

$$\rho = \inf \{ \gamma > 0 : u(x) <^{\text{ас}} |x|^\gamma \} > \kappa^+.$$

Воспользуемся этим результатом при исследовании функций вполне регулярного роста.

Всюду далее через $G(x, y)$ обозначается функция Грина конуса K . Пусть число $\rho \in \mathbb{N}$ выбрано из условия $\kappa_\rho^+ \leq \rho < \kappa_{\rho+1}^+$. Рассмотрим функцию

$$G_\rho(x, y) = -G(x, y) + \beta \sum_{n=1}^{\rho} |x|^{\kappa_n^+} |y|^{\kappa_n^-} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(y)}{\alpha_n}, \quad (44)$$

где $\alpha_n = \kappa_n^+ - \kappa_n^-$, $\beta = \int_{\Gamma} dS_1$, и по мерам μ и ν , порожденным функцией $u(x)$, определим потенциалы

$$J'_{\mu, \rho}(x) = \int_{K_{\lambda, \infty}} G_\rho(x, y) d\mu(y);$$

$$J''_{\nu, \rho}(x) = \frac{1}{\theta_m} \int_{\Gamma_{\lambda, \infty}} \frac{\partial G_\rho(x, y)}{\partial n_y} d\nu(y).$$

Потенциал $J'_{\mu, \rho}$ представляет собой субгармоническую функцию в K , рисовская мера которой в $K_{\lambda, \infty}$ совпадает с мерой μ , а предельные значения на ∂K равны нулю; функция $J''_{\nu, \rho}$ гармонична в K , а ее граничное значение на $\Gamma_{\lambda, \infty}$ (в смысле равенства (32)) равно $-\gamma$.

Теорема 2 [8]. Функция $u \in SH(K)$ порядка $\rho \in [\kappa_\rho^+, \kappa_{\rho+1}^+)$ представляется в виде

$$u(x) = J'_{\mu, \rho}(x) - J''_{\nu, \rho}(x) + \sum_{n=1}^{\rho} c_n |x|^{\kappa_n^+} \varphi_n(x) + v(x), \quad (45)$$

где c_n — константы, а функция $v(x)$ субгармонична в K , гармонична в $K_{\lambda, \infty}$, $|v(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$.

Для функций конечного порядка, аналитических в полуплоскости, представление такого вида было получено Н. В. Говоровым [5] и распространено А. Ф. Гришиным [2] на функции, субгармонические в полуплоскости.

Отметим еще, что равенство (45) можно записать также в виде

$$u(x) = J_{\tau, \rho}(x) + \sum_{n=1}^{\rho} c_n |x|^{\kappa_n^+} \varphi_n(x) + v(x), \quad (46)$$

где $J_{\tau, \rho}(x) = \int_{K_{\lambda, \infty}} W_\rho(x, y) d\tau(y)$ — потенциал меры $\tau = \tau_u$ с ядром

$$W_p(x, y) = \begin{cases} \frac{G_p(x, y)}{\psi(y)}, & x \in K, y \in K; \\ \frac{\partial G_p(x, y)}{\partial n_y} / \frac{\partial \psi(y)}{\partial n} = \lim_{\substack{y' \rightarrow y \\ y' \notin K}} W_p(x, y), & x \in K, y \in \partial K \setminus \{0\}. \end{cases}$$

В [8] показано, что справедливы следующие оценки ядра W_p :

$$W_p(x, y) \leq D_1 \frac{|x|^{x_{p+1}^+} |y|^{x_p^-} \varphi(x)}{|x|^{x_{p+1}^+ - x_p^+} + |y|^{x_{p+1}^+ - x_p^+}}, \quad \begin{matrix} x \in K, \\ y \in \bar{K} \setminus \{0\}, \\ p = 1, 2, \dots; \end{matrix} \quad (47)$$

$$|W_p(x, y)| \leq D_2 |x|^{x_{p+1}^+} |y|^{x_p^-} \varphi(x), \quad \begin{matrix} x \in K, \\ y \in \bar{K} \setminus \{0\}, \\ |x| \leq t|y|, t < 1, \\ p = 0, 1, 2, \dots; \end{matrix} \quad (48)$$

$$D_1, D_2 = D_1, D_2(p, t).$$

Список литературы: 1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 592 с. 2. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций. III // Теория функций, функциональный анализ и их прил. 1968. Вып. 7. С. 59—84.

Поступила в редколлегию 12.01.89