

розділ 5.

ПОПЕРЕЧНІ ПХ У МЕТАЛЕВИХ ХВИЛЕВОДАХ НЕКРУГЛОГО ПЕРЕРІЗУ

Форма перерізу хвилеводів, які використовуються у радіофізиці та фізиці плазми, часто не є круглою. Так, наприклад, форма перерізу хвилеводних трактів у НВЧ електроніці може бути прямокутною, переріз камери термоядерного реактора типу токамак має D - подібну форму, а форма перерізу камери реактора типу стелларатор взагалі змінюється вздовж осі камери: від схожої на трикутник із згладженими кутами, до D – і навіть ква-соле-подібної. Форма об'єму плазми, яку утримують у реакторі, також не завжди є циліндричною: вона визначається, у загальних рисах, конфігурацією утримуючого магнітного поля, також на неї впливають електромагнітні збурення.

У цьому розділі представлено результати дослідження поширення незвичайно поляризованих електромагнітних збурень поперек осі плазмових хвилеводів із некруглим перерізом. Їх не можна назвати точно азимутальними, бо напрямок їхнього поширення має також певну радіальну складову, тому будемо називати їх поперечними ПХ. Задачу про поширення таких хвиль можна розв'язувати методами теорії збурень, використовуючи за нульове наближення теорію АПХ. Здобуті результати стосуються властивостей поперечних ПХ, які поширюються

вздовж поверхні стовпа плазми із змінним радіусом кривини, що знаходиться у металевому хвилеводі некруглого перерізу. В загальному випадку радіус його металеві камери (див. Рис. 1) змінюється за законом:

$$R_2 = b \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin(n\varphi - \varphi_n) \right], \quad (5.1)$$

де b - середнє значення величини радіусу камери, $h_n \ll 1$ - відносна глибина гофрування стінки камери. Вважаємо, що вздовж осі металеві камери розташовано стовп плазми однорідної густини. Її радіус R_1 також може бути функцією азимутального кута. Вважаємо, що ця залежність у загальному випадку має вигляд:

$$R_1 = a \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos(n\varphi + \varphi_n) \right], \quad (5.2)$$

де a - це середнє значення величини радіусу шнура плазми, $\delta_n \ll 1$ - це максимальне відносне відхилення радіуса R_1 від a , при цьому виконуються нерівності: $\delta_n, h_n < (b/a - 1) < 1$.

Вважаємо, що хвилевод є однорідним уздовж аксіальної осі: $\partial/\partial z \equiv 0$, плазма є холодною, від стінки камери її відокремлює діелектрик з проникливістю ε_d . Для отримання дисперсійного рівняння слід застосувати наступні крайові умови для полів поперечних ПХ:

$$E_{r,\varphi}(r=0) < \infty, \quad H_z(r=0) < \infty, \quad (5.3)$$

(ця умова означає обмеженість полів хвилі в об'ємі плазми),

$$E_r(R_1 + 0) = E_r(R_1 - 0),$$

$$E_r(R_1) \propto R_1(\varphi) E_\varphi(R_1) + E_r(R_1) \frac{dR_1}{d\varphi},$$

$$H_z(R_1 + 0) = H_z(R_1 - 0), \quad (5.4)$$

(ця умова означає неперервність тангенціальних електричного E_r та магнітного H_z полів на межі плазми),

$$E_r(R_2) \propto R_2(\varphi) E_\varphi(R_2) + E_r(R_2) \frac{d R_2}{d \varphi} = 0, \quad (5.5)$$

(ця умова означає рівність нулю тангенціального електричного поля на поверхні металеві камери).

5.1. Поширення поперечних ПХ у плазмовому хвилеводі некруглого перерізу за відсутності зовнішнього магнітного поля

Цей підрозділ присвячено вивченню дисперсійних властивостей поперечних ПХ, які поширюються впоперек осі симетрії металевого хвилеводу некруглого перерізу із плазмовою вставкою, що має круглий переріз, за відсутності зовнішнього сталого магнітного поля [133,134]. Циліндричний стовп газової або напівпровідникової плазми радіусу a розташовано коаксіально всередині металевого хвилеводу. У наближенні вільної холодної плазми її діелектрична проникливість має вигляд:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_0 - \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}^2 \omega^{-2}, \quad \text{де } \varepsilon_0 - \text{діелектрична проникливість}$$

кристалеві ґратки напівпровідника, а у випадку газової плазми $\varepsilon_0 = 1$, Ω_{α} - плазмова частота, індекс α вказує тип частинок: іони, електрони, дірки. Область $a < r < R_2$ (Рис. 1) заповнено діелектриком із проникливістю $\varepsilon_d \geq 1$.

Вплив гофрування металеві поверхні на дисперсійні

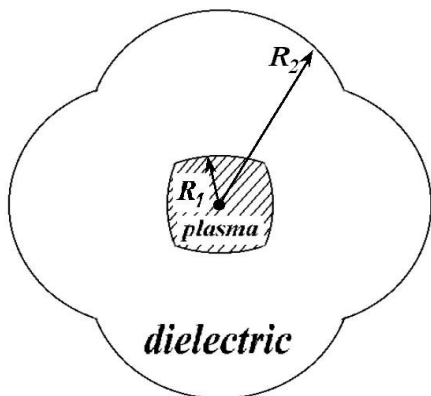


Рис. 1. Схематичне зображення плазмового хвилеводу

властивості ПХ, що поширюються у планарному хвилеводі, було розглянуто в [135]. Але дисперсійні властивості таких ПХ та просторовий розподіл їхнього поля суттєво відрізняються від властивостей АПХ, які поширюються вздовж криволінійної межі плазми. Частотний діапазон існування АПХ у випадку вільної холодної плазми визначається

нерівністю $\epsilon_0 \omega^2 < \Omega_e^2 + \Omega_i^2$. Розв'язуючи рівняння Максвелла в області плазми та області діелектрика, що відокремлює плазму від металеві стінки хвилеводу, дістаємо просторовий розподіл їхніх полів у даному хвилеводі. Магнітне поле хвилі у плазмі описується наступним рівнянням:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial H_z}{\partial r} - \left[\kappa_p^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] H_z = 0, \quad (5.6)$$

розв'язками якого є модифікована функція Бесселя $I_m(z)$ та функція Макдональда $K_m(z)$ [136,137]:

$$H_z = \sum_m H_z^{(m)}(r) \exp(im\varphi),$$

$$H_z^{(m)} = C_1^{(m)} I_m(r \kappa_p) + C_2^{(m)} K_m(r \kappa_p), \quad (5.7)$$

де $\kappa_p = k \sqrt{|\epsilon_p|}$, $k c = \omega$. Електричні складові поля досліджуваної хвилі можна знайти у наступний спосіб:

$$E_r = \frac{ik}{\kappa_p r} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_z, \quad E_\varphi = \frac{-ik}{\kappa_p} \frac{\partial}{\partial r} H_z. \quad (5.8)$$

В області діелектрика ($a \leq r \leq R_2$) магнітне поле хвилі описується в термінах функції Неймана $N_m(z)$ та Бесселя першого роду $J_m(z)$ [136, 137]:

$$H_z^{(m)} = C_3^{(m)} J_m(r\kappa_g) + C_4^{(m)} N_m(r\kappa_g), \quad (5.9)$$

а електричні поля виражаються через магнітне:

$$E_r = \frac{i\sqrt{\varepsilon_d}}{\kappa_g r} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_z, \quad E_\varphi = \frac{i\sqrt{\varepsilon_d}}{-\kappa_g} \frac{\partial}{\partial r} H_z. \quad (10)$$

Тут $C_{1,2,3,4}^{(m)}$ - це константи інтегрування, $\kappa_g = k\sqrt{\varepsilon_d}$.

Розглянемо спочатку хвилевод з перерізом $R_2 = b[1 + h_N \sin(N\varphi)]$, після чого узагальнимо результати на випадок довільного (5.1) перерізу хвилеводу. Вибір залежності $R_2(\varphi)$ у такому вигляді має і самостійне значення: при $N=1$ ця залежність відповідає порушенню коаксіальності плазмового стовпа та металеві камери; випадок $N=2$ описує еліпсоїдну форму камери; $N \geq 3$ - відповідає уповільнюючій структурі з кутовим періодом $2\pi/N$. Застосування крайових умов (5.3)–(5.5) дозволяє здобути дисперсійне рівняння для поперечних ПХ у хвилеводі довільного некруглого перерізу. Аналітично воно розв'язується методом послідовних наближень.

У нульовому наближенні ($h_N=0$) поперечні ПХ з різними азимутальними номерами розповсюджуються незалежно одна від одної. Для області діелектрика у цьому наближенні їхнє поле

визначається у спосіб подібний до випадку АПХ:

$$H_z^{(m)} = 0,5\pi \kappa_g b C_1 L_m(\kappa_g r), \quad (5.11)$$

де

$$L_m(\kappa_g r) = G_1 J_m(\kappa_g r) - G_2 N_m(\kappa_g r), \quad (5.12)$$

$$G_1 = \sqrt{\varepsilon_g / |\varepsilon|} I'_m(\kappa_p b) N_m(\kappa_g b) + I_m(\kappa_p b) N'_m(\kappa_g b), \quad (5.13)$$

$$G_2 = \sqrt{\varepsilon_g / |\varepsilon|} I'_m(\kappa_p b) J_m(\kappa_g b) + I_m(\kappa_p b) J'_m(\kappa_g b), \quad (5.14)$$

символ “штрих” означає похідну за аргументом. У першому наближенні за параметром гофрування магнітне поле поперечних ПХ в області діелектрика слід записати у вигляді хвильового пакета, що має крім основної гармоніки ще дві сателітні $\propto \exp[i(m \pm N)\varphi]$:

$$\begin{aligned} H_z = & 0,5\pi \kappa_g R_0 C_1 \{ L_m(\kappa_g r) \exp(im\varphi) \\ & + H_+ h_N L_{m+N}(\kappa_g r) \exp[i(m+N)\varphi] \\ & + H_- h_N L_{m-N}(\kappa_g r) \exp[i(m-N)\varphi] \} \exp(-i\alpha t). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Щоб H_z у вигляді (5.15) задовольняло крайовій умові (5.4) із точністю до доданків першого порядку за малим параметром гофрування, коефіцієнти H_{\pm} повинні мати такі значення:

$$H_{\pm} = \pm \frac{i L_m(\kappa_g a) (m^2 \pm mN - \kappa_g^2 a^2)}{2 \kappa_g R_1 L'_{m \pm N}(\kappa_g a)}. \quad (5.16)$$

Результати числового аналізу просторового розподілу поля поперечних ПХ у гофрованому хвилеводі наведено на Рис. 2. для наступних значень параметрів хвилеводу: $h_N=0.1$, $m=3$, $N=4$, $\varepsilon_d=1$. При цьому амплітуда поперечних ПХ обчислено у відносних одиницях, а радіальну координату нормовано на радіус

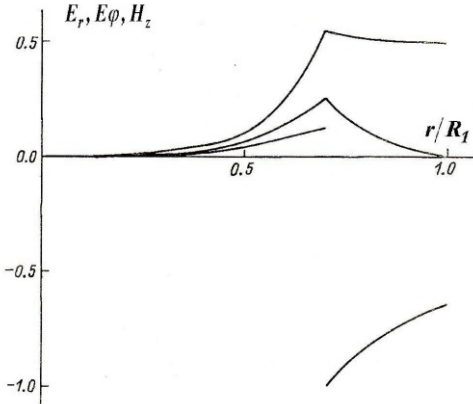


Рис. 2. Радіальний розподіл полів поперечних ПХ у гофрованому хвилеводі

міною форми перерізу хвилеводу від круглої. Вираз для $\Delta\omega_N$ має такий вигляд:

$$\Delta\omega_N = \frac{h_N^2 (m^2 + a^2 \kappa_g^2)}{4\kappa_g a} \frac{L_m(\kappa_g a)}{\frac{dL'_m(\kappa_g a)}{d\omega_0}} \times \left[I + \frac{L_{m+N}(\kappa_g a)}{L'_{m+N}(\kappa_g a)} \frac{(m^2 + mN - \kappa_g^2 a^2)^2}{m^2 + \kappa_g^2 a^2} + \frac{L_{m-N}(\kappa_g a)}{L'_{m-N}(\kappa_g a)} \frac{(m^2 - mN - \kappa_g^2 a^2)^2}{m^2 + \kappa_g^2 a^2} \right]. \quad (5.17)$$

Вираз (5.17) не залежить від знаку азимутального хвильового числа m , що взагалі є типовим для ПХ в ізотропних плазмових хвилеводах [7,8]. Користуючись асимптотичними виразами та рекурентними співвідношеннями для Бесселевих функцій [136,137], можна знайти наближені формули для поправок $\Delta\omega_N$ у випадках широких $\kappa_{g,p} a \gg |m|$ та вузьких $\kappa_{g,p} a \ll 1$

хвилеводу.

Розв'язуючи дисперсійне рівняння у другому наближенні за параметром гофрування h_N , визначимо частоту ПХ у вигляді суми ω_0 власної частоти АПХ за відсутності гофрування ($h_N=0$) [41] та $\Delta\omega_N$ - поправки до частоти, яка обумовлена від-

хвилеводів [133]. У випадку вузьких хвилеводів $\Delta\omega_N \propto -h_N^2(\kappa_g a)^{-2-N} \Delta$, де $\Delta = 1 - a/b$, цей параметр, який характеризує відносну товщину діелектричного прошарку, вважався малим. Аналіз виразу (5.17) свідчить про те, що для широких хвилеводів, з огляду на величину похідної $(dL'_m(\kappa_g a)/d\omega_0)$, може існувати ефект зміни знаку поправки $\Delta\omega_N$. Це відбувається у випадку виконання нерівності:

$$b\Omega_e c^{-1} \Delta > 1 > kb\varepsilon_d (\left| \varepsilon_p \right|)^{-1/2} \Delta. \quad (5.18)$$

Вираз (5.17) для поправки до частоти ПХ має обмежений діапазон використання у випадку $b\Delta \gg \delta$, де $\delta = c\Omega_e^{-1}$. Коли умови (5.18) не виконуються, тобто для хвилеводів великих радіусів ($1 < kb\varepsilon_d b\Delta / \sqrt{\left| \varepsilon_p \right|}$, $ka \gg 1$), для $\Delta\omega_N$ можна записати:

$$\Delta\omega_N \approx -0.25\omega_0 h_N^2 \varepsilon_d (1 + \Delta) \kappa_g^2 a^2. \quad (5.19)$$

Слід відзначити суттєві відмінності між поширенням ПХ у широких ($\kappa_{g,p} b \gg 1$) та вузьких ($\kappa_{g,p} b \ll 1$) хвилеводах. У вузьких хвилеводах величина $|\Delta\omega_N|$ зменшується при збільшенні ε_d та зменшенні кількості гофрів у хвилеводі, тобто параметра N . У широких хвилеводах – навпаки, темп уповільнення не залежить від параметрів m та N , а величина $|\Delta\omega_N| \propto \omega_0 \varepsilon_d^2$.

Величина $\Delta\omega_N$ не залежить від наявності у рівнянні поверхні (5.1) інших малих доданків $\propto \sin(n\varphi)$ ($n \neq N$). Тому у випадку довільного перерізу камери хвилеводу власну частоту поперечних ПХ можна знайти з точністю до малих доданків $\propto h_n^2$ у вигляді суми:

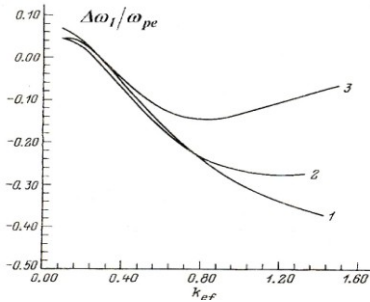


Рис. 3. Залежність поправки до власної частоти АПХ від ефективного хвильового числа при $N=1$

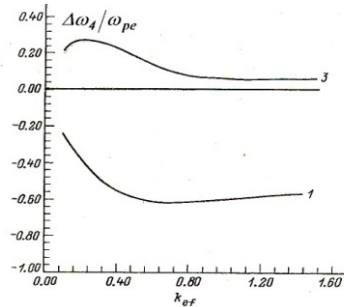


Рис. 4. Залежність поправки до власної частоти АПХ від ефективного хвильового числа при $N=4$

$$\omega = \omega_0 + \sum_{n \neq 2m} \Delta\omega_n. \quad (5.20)$$

Але при цьому слід зазначити, що вплив доданка $bh_{2m}\sin(2m\varphi - \varphi_{2m})$ в рівнянні (1) на частоту даних ПХ формулою (5.17) не описується. Цей особливий випадок потребує додаткового дослідження, результати якого наведено в кінці даного підрозділу.

Результати числових досліджень залежності величини $\Delta\omega_n/\Omega_e$ від ефективного безрозмірного хвильового числа $k_{ef} = mc/(a\Omega_e)$ представлено на Рис. 3 та 4 у випадках $N=1$ та $N=4$, відповідно. Цифрами на них позначено номери мод m , малий параметр гофрування обрано таким, що дорівнює $h_1=0.7$ та $h_4=0.25$. Числові розрахунки вказують на те, що найбільший вплив на величину поправки $\Delta\omega_n(k_{ef})$ справляє товщина діелектричного прошарку – параметр Δ . Збільшення ε_d від 1 до 5 (при незмінних інших параметрах), приблизно удвічі зменшує як ω_0 так і $\Delta\omega_n$, у бік більших значень ефективного хвильового числа пересувається точка $\Delta\omega_n = 0$. А зменшення Δ від 0.3 до

0.1 (при незмінних інших параметрах) неістотно зменшує власну частоту ПХ, в той час як $\Delta\omega_n$ приблизно у сім разів збільшується для ПХ з $m=1$, - удвічі для ПХ із $m=2$ при такій зміні параметра Δ .

АПХ у круглих хвилеводах, заповнених вільною плазмою, є взаємними, отже частотний спектр таких хвиль є виродженим [7,8,35,41,75]. Тому окремо розглянемо вплив періодичної зміни товщини діелектричного шару уздовж азимуту на властивості поперечних ПХ, коли кутовий період неоднорідності дорівнює половині періоду хвилі.

Спочатку дослідимо поперечні ПХ у хвилеводі з некруглою металевою камерою, який містить круглий плазмовий циліндр радіуса a , що відділено діелектричним шаром від металевої камери. Оскільки АПХ із різними азимутальними номерами m поширюються незалежно, вважаємо, що в нульовому наближенні існують гармоніки тільки з азимутальними номерами $\pm M$. Обидві гармоніки поширюються в нульовому наближенні на однакових частотах $\omega_M^{(0)}$, які є розв'язком дисперсійного рівняння АПХ $D_M^{(0)}(\omega_M^{(0)})=0$, яке описує випадок $R_2 = b$ [41]. Дисперсійну залежність $\omega_M^{(0)}(k_{ef})$ в цьому наближенні представлено на Рис. 5 та 6 суцільними лініями.

Частоти поперечних ПХ з кутовим періодом основних гармонік ($2\pi/M$) розщеплюються, якщо в рівнянні металевої поверхні (1) є малий доданок з $n=2M$. У випадку виродженого спектра за теорією збурень [75] розв'язок рівняння для магнітного поля хвилі в області діелектрика знаходимо з урахуванням доданків першого порядку малості у вигляді стоячих хвиль:

$$H_z(r, \varphi, t) = \kappa_g a \exp(-i\alpha t) \times \{ C_{11} L_M(\kappa_g r) [\exp(iM\varphi) \pm \exp(-iM\varphi)] + C_r L_{3M}(\kappa_g r) [\exp(i3M\varphi) \pm \exp(-i3M\varphi)] \} \pi / 2. \quad (5.21)$$

Тут константа C_{11} визначає амплітудне значення основ-

ної гармоніки поперечних ПХ, а малий коефіцієнт C_r має вигляд:

$$C_r = \frac{-ih_{2M}L_M(\kappa_g a)}{2\kappa_g a L'_{3M}(\kappa_g a)}(\kappa_g^2 a^2 - 3M^2)C_{11}. \quad (5.22)$$

Величина (5.22) визначається з умови рівності нулю на металевій поверхні амплітуд сателітних ($\propto \exp(\pm 3M\varphi)$) гармонік тангенціального електричного поля хвилі [138].

Умова рівності нулю на металевій поверхні амплітуд основних $\propto \exp(\pm iM\varphi)$ гармонік тангенціального електричного поля хвилі призводить до дисперсійного рівняння, що має вигляд секулярного рівняння: $(D_M^{(0)})^2 - (D_M^{(1)})^2 = 0$, де $D_M^{(1)}$ є величиною першого порядку малості. Його розв'язок знаходимо у вигляді $\omega = \omega_M^{(0)} \pm \Delta\omega_{b,M}$, де поправка:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{b,M} &= D_M^{(1)} / \left. \frac{\partial D_M^{(0)}}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_M^{(0)}} \\ &= \frac{h_{2M}L_M(\kappa_g a)}{2\kappa_g a} (M^2 + \kappa_g^2 a^2) \left(\left. \frac{\partial L'_M(\kappa_g a)}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_M^{(0)}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Вираз (5.23) спрощується у випадку плазмового циліндра великих розмірів ($\kappa_g a \gg 1$):

$$\Delta\omega_{b,M} = -h_{2M}M \left(1 + \Lambda a \sqrt{\varepsilon_g} \delta^{-1} \right) \sqrt{\delta / (a\Lambda)} \varepsilon_g^{-1/4} \omega_M^{(0)} / 4. \quad (5.24)$$

Відзначимо, що поправка до частоти АПХ у цьому випадку є пропорційною першому ступеню малого параметра ($\Delta\omega_{b,M} \propto h_{2M}$), тоді як наявність у рівнянні металевій поверхні (5.1) малих доданків з $n \neq 2M$ призводить до слабшої ($\propto h_n^2$) зміни частоти [133,134]. Графіки залежності поправки до частоти ПХ, нормованої на ленгмюрівську частоту $\Delta\omega_{b,M} \Omega_e^{-1}$, від ефектив-

ного хвильового числа k_{ef} зображено на Рис. 5 і 6 лініями з короткими штрихами, при цьому параметр гофрування обрано рівним $h_{2M}=1$ для зручності читачів.

Дослідимо тепер поперечні ПХ у стовпі плазми з некруг-

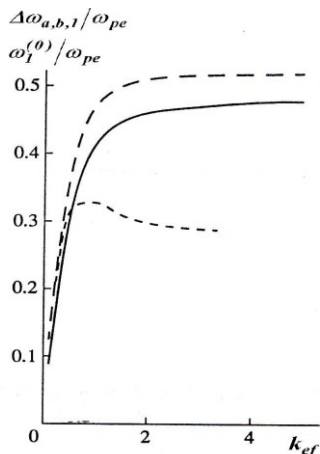


Рис. 5. Частота поперечних ПХ з $M=1$ (суцільні лінії) та величини їхнього розщеплення, обумовлено відмінністю від кола форм перерізу металеві камери (короткі штрихи) та плазмового стовпа (довгі штрихи)

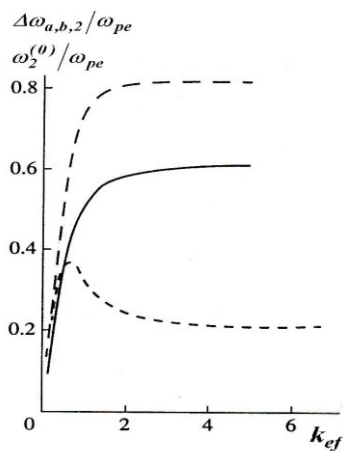


Рис. 6. Те саме, що і на рис. 5, але для поперечних ПХ з азимутальним хвильовим числом основних гармонік $M=2$

лим перерізом (5.2), що міститься в круглій металевій камері радіуса b за відсутності магнітного поля. Розщеплення частоти ПХ із кутовим періодом $(2\pi/M)$ відбувається в цьому випадку, як і в попередньому, за наявності в правій частині рівняння межі поділу (5.2) малого доданка з $n=2M$. Обмежений на осі системи розв'язок рівняння (6) знаходимо в цьому випадку з урахуванням доданків першого порядку малості у наступному вигляді [138]:

$$H_z(r, \varphi, t) = \exp(-i\omega t)$$

$$\times \{I_M(\kappa_p r) [A_0^{(+)} \exp(iM\varphi) + A_0^{(-)} \exp(-iM\varphi)] + \\ + I_{3M}(\kappa_p r) [A_1^{(+)} \exp(i3M\varphi) + A_1^{(-)} \exp(-i3M\varphi)]\}, \quad (5.25)$$

де $A_{0,l}^{(\pm)}$ – це константи інтегрування. Розв'язок рівняння, що описує розподіл поля H_z у діелектрику та задовольняє крайовій умові (5.5) на круглій металевій поверхні ($r=b$), знаходимо з урахуванням доданків першого порядку малості у вигляді

$$H_z = \exp(-i\omega t) \\ \times \{L_M(\kappa_g r) [F_0^{(+)} \exp(iM\varphi) + F_0^{(-)} \exp(-iM\varphi)] \quad (5.26) \\ + L_{3M}(\kappa_g r) [F_1^{(+)} \exp(i3M\varphi) + F_1^{(-)} \exp(-i3M\varphi)]\},$$

де $F_{0,l}^{(\pm)}$ – це константи, функція $L_m(\kappa_g r)$ визначена формулою (5.12), у якій тепер

$$G_1 = N'_M(\kappa_g b), \quad G_2 = J'_M(\kappa_g b). \quad (5.27)$$

Умова неперервності сателітних гармонік полів H_z та E_r на межі $r=R_l(\varphi)$ визначає амплітуди сателітних гармонік,

$$A_l^{(\pm)} = \frac{-\delta_{2M} A_0^{(\pm)}}{2D_{3M}^{(0)}} [I'_M(\kappa_p a) L'_{3M}(\kappa_g a) \frac{\kappa_g^2 + \kappa_p^2}{\kappa_p \kappa_g} a^2 \\ + 3M^2 I_M(\kappa_p a) L_{3M}(\kappa_g a) \frac{\kappa_p^2 + \kappa_g^2}{\kappa_p^2 \kappa_g^2}], \quad (5.28)$$

$$F_l^{(\pm)} = \frac{\delta_{2M} A_0^{(\pm)}}{2D_{3M}^{(0)}} [I'_M(\kappa_p a) L'_{3M}(\kappa_g a) \frac{\kappa_g^2 + \kappa_p^2}{\kappa_p^2} a^2 \\ - 3M^2 I_M(\kappa_p a) L_{3M}(\kappa_g a) \frac{\kappa_g^2 + \kappa_p^2}{\kappa_p^2 \kappa_g^2}]. \quad (5.29)$$

Умови неперервності основних гармонік H_z і E_r на некруглій межі $r=R_l(\varphi)$ визначають зв'язок між амплітудами осно-

вних гармонік у плазмі та діелектрику:

$$F_0^{(\pm)} = A_0^{(\pm)} I_m(\kappa_p a) / L_M(\kappa_g a), \quad (5.30)$$

а також дають можливість здобути дисперсійне рівняння, що враховує просторову неоднорідність кривини межі (5.2) поділу плазма – діелектрик, у вигляді вищезгаданого секулярного рівняння, яке є типовим для випадків виродженого спектра. Поправка $\Delta\omega_{\alpha,M}$, яка обумовлена відмінністю форми перерізу межі плазма - діелектрик від круглої, обчислюється аналогічно до попереднього випадку та дорівнює:

$$\Delta\omega_{\alpha,M} = \frac{\delta_{2M}(\kappa_p^2 + \kappa_g^2)}{2\kappa_p^2 \kappa_g^2 (\partial D_M^{(0)} / \partial \omega_M^{(0)})} [I_M(\kappa_p a) L_{3M}(\kappa_g a) - a^2 \kappa_p \kappa_g I_M'(\kappa_p a) L_M'(\kappa_g a)]. \quad (5.31)$$

Вираз для поправки $\Delta\omega_{\alpha,M}$ спрощується у випадку широких хвильоводів ($k_{ef} \ll 1$):

$$\Delta\omega_{\alpha,M} \approx \frac{\delta_{2M}}{4} \sqrt{\frac{\delta}{a\Delta}} \frac{M\Omega_e}{\sqrt[4]{\epsilon_g}}, \quad (5.32)$$

та вузьких хвильоводів ($k_{ef} \gg 1$):

$$\Delta\omega_{\alpha,M} \approx \frac{\delta_{2M}\Omega_e}{4} \sqrt{\frac{M}{\Delta}}. \quad (5.33)$$

Якщо кутовий період неоднорідності є вдвічі меншим за кутовий період основних гармонік ПХ, то таке електромагнітне збурення існує у вигляді стоячих хвиль ($A_0^{(-)} = \pm A_0^{(+)}$, при цьому $\omega = \omega_M^{(0)} \pm \Delta\omega_{\alpha,M}$) із близькими частотами. Графіки залежності нормованої на плазмову частоту поправки до частоти ПХ ($\Delta\omega_{\alpha,M}/\omega_{pe}$) від ефективного хвильового числа k_{ef} зображено на Рис. 5 та 6 лініями з довгими штрихами. Для зручності порівняння цих результатів із тими, що здобуто у випадку некруглої межі поділу діелектрик – метал, малий параметр обрано також

таким, що дорівнює одиниці, $\delta_{2M}=1$.

Числовий аналіз підтверджує, що поправка до частоти зростає зі зменшенням товщини діелектричного шару та/або діелектричної проникності діелектрика. За інших рівних умов поправка, яка обумовлена відмінністю форми межі поділу від круглої, є більшою, якщо це - межа плазма-діелектрик, ніж якщо це - межа діелектрик-метал. Пов'язано це з тим, що енергія поперечних ПХ зосереджена саме поблизу межі плазма-діелектрик, а, отже, їхні дисперсійні властивості більш чуттєві до неоднорідності саме цієї поверхні [138].

Якщо до досліджуваної структури прикласти аксіальне магнітне поле $\vec{B}_0 \parallel \vec{e}_z$, то відбудеться [39] зняття виродження спектрів АПХ щодо знака азимутального хвильового числа. Поправка до частоти, яка обумовлена малим аксіальним магнітним полем, дорівнює за порядком величини

$$\Delta\omega_B \sim -0.5m|\omega_e|(m^2 + a^2\delta^{-2})^{-0.5}. \quad (5.34)$$

Впливом аксіального магнітного поля на дисперсійні властивості ПХ із кутовим періодом, що вдвічі перевищує кутовий період позадозвжньої неоднорідності, можна знехтувати, якщо електронна циклотронна частота $|\omega_e|$ є достатньо малою:

$$|\omega_e|\Omega_e^{-1} \ll 0.5\delta_{2M} \sqrt{M/\Delta} \times \left[1 + \sqrt{\frac{a}{M\delta}} \varepsilon_d^{-1/4} \left(1 + \frac{a\Delta}{\delta} \right) \right]. \quad (5.35)$$

Для об'ємних хвиль зняття виродження їхніх спектрів поперечним стаціонарним магнітним полем також є добре відомим явищем. Наприклад, на розщеплення власних частот швидких магнітозвукових хвиль стаціонарним позадозвжнім магнітним полем уперше було звернуто увагу в [139], це явище докладно досліджено теоретично і спостерігається експериментально [140]. Дисперсійні властивості ПХ, що поширюються в токамаках уздовж малого азимута, досліджено в [72] з урахуванням ба-

гатьох особливостей цих уловлювачів: радіальної неоднорідності профілю густини плазми, D - подібності форми пологої камери, пологої магнітного поля, обумовленого подовжнім струмом у плазмі, та шафранівського зсуву магнітної осі внаслідок торoidalності пастки. Оскільки умова (5.35) добре виконується для токамаків, досліджене в цьому підрозділі розщеплення власної частоти може спостерігатися в таких уловлювачах для ПХ із пологої номером основної гармоніки $M=1$, де воно є обумовленим D - подібністю форми пологої камери і плазми.

5.2. Поширення поперечних ПХ уздовж межі гіротропної плазми з металевим хвилеводом довільного перерізу

Дослідимо поширення поперечних ПХ з незвичайною поляризацією у густій ($\Omega_e \gg |\omega_e|$) однорідній холодній плазмі, що повністю заповнює симетричний вздовж вісі z металевий хвилевод. Зовнішнє стале однорідне магнітне поле $\vec{B}_0 \parallel \vec{z}$. Форму внутрішньої поверхні металеві камери описує рівняння (1). Задачу розв'яжемо методом послідовних наближень, використовуючи теорію АПХ [40] за нульове наближення.

Розглянемо спочатку випадок, коли поверхня хвилеводу задається рівнянням

$$R_2 = b(1 + h_N \sin(N\varphi)), \quad (5.36)$$

де $h_N \ll 1$, а тоді узагальнимо здобуті результати на випадок хвилеводу довільного перерізу.

Компоненти електричного поля поперечних ПХ виражаються з рівнянь Максвелла через аксіальну складову магнітного поля хвилі H_z в наступний спосіб:

$$E_r = \frac{\omega}{ck_{\perp}^2} \left(\frac{1}{ir} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right),$$

$$E_\varphi = \frac{i\omega}{c k_\perp^2} \left(\frac{\mu}{ir} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (5.37)$$

Тут використано такі саме позначки, як у Розділі 1 після формули (1.1). В першому наближенні за малим параметром h_N розв'язок рівнянь Максвелла шукаємо для аксіальної складової магнітного поля хвилі у наступному вигляді:

$$H_z(r, \varphi, t) = \left[I_m(k_\perp r) + C_+^{(1)} I_{m+N}(k_\perp r) \exp(iN\varphi) + C_-^{(1)} I_{m-N}(k_\perp r) \exp(-iN\varphi) \right] \exp(i(m\varphi - \omega t)). \quad (5.38)$$

Підстановка E_r та E_φ у вигляді (5.37), з урахуванням (5.38), до крайової умови (5.5) показує, що у лінійному наближенні за h_N власна частота даних ПХ не змінюється, але виникають гармоніки – сателіти з амплітудами [141]:

$$C_\pm^{(1)} = \frac{-h_N}{2D_{m \mp N}^{(0)}} I_m(k_\perp b) \left[k_\perp^2 b^2 + m(m \pm N)(1 - \mu^2) \right] \Big|_{\omega^{(0)}}. \quad (5.39)$$

Таким чином, у хвилеводі некруглого перерізу поперечні ПХ розповсюджуються у вигляді пакета гармонік з певними значеннями азимутальних номерів ($m = M \pm jN$, де j - цілі). В пакеті завжди присутні такі сателіти, які розповсюджуються в напрямку, який є зворотним до напрямку розповсюдження основної гармоніки. Як вказує формула (5.38), такий сателіт з'являється вже в першому наближенні за h_N , якщо $|M| < N$. Якщо $|M| > N$, то він з'являється в одному з наступних наближень. Частка енергії ПХ, яку переносять ці гармоніки, є величиною порядку h_N^{2k} , де $k=1$ для $|M| < N$; $k=2$ для $N \leq |M| < 2N$ і т.д. Цим дані поперечні ПХ відрізняються від тих ПХ, які розповсюджуються у хвилеводах планарної геометрії [142].

Відмінність форми перерізу хвилеводу від кола у випад-

ку його малих розмірів $b \ll M\delta$ призводить до зниження частоти $\omega = \omega_M^{(0)} + \omega_{MN}^{(2)}$ цих ПХ порівняно до випадку круглого хвилеводу: $\omega_{MN}^{(2)} < 0$. Для них азимутальна неоднорідність поверхні хвилеводу є гальмуючою структурою. Якщо ж розміри хвилеводу є великим, $b \gg M\delta$, то відмінність форми перерізу від круглої знижує частоту ПХ лише з малими значеннями $M < N$. Якщо ж азимутальне хвильове число основної гармоніки $M > N$, то в інтервалі $(2M/(M^2 - N^2) < M\delta a^{-1} \ll 1)$ відмінність форми перерізу хвилеводу від кола призводить до підвищення частоти $\omega_{MN}^{(2)} > 0$ порівняно з випадком круглого хвилеводу. Числовий аналіз показав, що з великою мірою точності поправка $\omega_{MN}^{(2)} \sim B_0$. Для хвилеводів дуже великих розмірів ($k_{ef} \rightarrow 0$) даний підхід не можна використовувати, бо при цьому поправка до частоти ПХ $\omega_{MN}^{(2)}$ стає більшою за саму частоту.

Виконані дослідження [141] дають підставу дійти висновку, що поправка до власної частоти, яка зумовлена малою відмінністю форми перерізу металевого хвилеводу від кола, у другому наближенні за малим параметром h_N не залежить, у випадку довільного перерізу (5.1), від наявності в правій частині рівняння поверхні (5.1) малих доданків з іншою кутовою залежністю. Тому з урахуванням доданків другого порядку малості за h_N у випадку хвилеводу з довільним перерізом (5.1) частоту поперечних ПХ можна знайти у вигляді суми:

$$\omega = \omega_m^{(0)} + \sum_n \omega_{mn}^{(2)}, \quad (5.40)$$

де поправка до частоти, яку обумовлено малим відхиленням форми перерізу металеві поверхні (5.36) від кола, дорівнює

$$\omega_{MN}^{(2)} = -D_{MN}^{(2)} \left(\frac{\partial D_M^{(0)}}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_M^{(0)}}^{-1}, \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} D_{mn}^{(2)} = & h_n^2 I_m(k_{\perp} b) (m^2 + 3k_{\perp}^2 b^2 - \mu^2 m^2) / 4 \\ & + h_n C_+^{(1)} [I'_{m+n}(k_{\perp} b) k_{\perp} b (l + \mu m) \\ & \quad + I_{m+n}(k_{\perp} b) (k_{\perp}^2 b^2 + (m+n)(m+\mu))] / 2 \\ & + \frac{h_n}{2} C_-^{(1)} [I'_{m-n}(k_{\perp} b) k_{\perp} b (l + \mu m) \\ & \quad + I_{m-n}(k_{\perp} b) (k_{\perp}^2 b^2 + (m-n)(m+\mu))] \Big|_{\omega=\omega_m^{(0)}}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Важливим з практичної точки зору частинним випадком даної задачі є поширення ПХ поперек магнітного поля у майже квадратному хвилеводі. Хоча використання декартової системи координат в цьому випадку, по-перше, диктується міркуваннями симетрії а, по-друге, дозволило розв'язати задачу у випадку напівобмеженої плазми [143] та плоского шару [142], тим не менш воно не допускає розділення змінних у випадку квадратного хвилеводу. Рівняння поверхні квадратного хвилеводу зі стороною a у циліндричній системі координат має вигляд:

$$R_2 = b(1 + h_4 \cos(4\varphi) + h_8 \cos(8\varphi) + h_{12} \cos(12\varphi) + \dots), \quad (5.43)$$

де $b = (a/\pi) \ln(3 + 2\sqrt{2})$, $h_4 = -0.1394$, $h_8 = 0.04395$, $h_{12} = -0.02082$. Оскільки при визначенні власної частоти ПХ у формі (5.41) було знехтувано доданками третього порядку малості, то точність виразу (5.41) у випадку квадратного хвилеводу становить за порядком величини $h_4^2 h_8 = 8.54 \times 10^{-4}$.

Розглянемо, у якості прикладу [144], квадратний хвилевод зі стороною $a = 1.8$ см, який заповнено напівпровідником $n\text{-Ge}$ (концентрація електронів провідності $n_e = 2.5 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$, ефективна маса електронів $M_e = 1.3 \times 10^{-27}$ г, діелектрична проникли-

вість ґратки напівпровідника $\epsilon_0 = 16$) та поміщено в сталє магнітне поле $B_0 = 100$ E. У фізиці напівпровідників ПХ такого типу зветься поверхневими магнітоплазовими поляритонами, а геометрія хвилеводу, яка розглядається у даному підрозділі, - геометрією Фойгта [9,10,13,19]. Найнижчу власну частоту має поперечна ПХ, основна гармоніка якої характеризується азимутальним номером $m=1$. Ця частота дорівнює $\omega = \omega_1^{(0)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(2)} + \omega_1^{(2)} + \dots = 2.51 \times 10^9 - 1.89 \times 10^8 - 6.24 \times 10^7 - 2.73 \times 10^7 = 2.23 \times 10^9$ с⁻¹. Глибина проникнення поля цієї ПХ до $n - Ge$ $k_{\perp}^{-1} = 0.134$ см є малою порівняно до поперечних розмірів хвилеводу. Тривалість життя вільних електронів $\tau = 10^{-5}$ с в плазмі $n - Ge$ [145] є великим порівняно з періодом даних ПХ, що виправдовує використання тут моделі плазми без зіткнень.

Наведений приклад показує, що для практичних розрахунків частоти ПХ в квадратному хвилеводі досить врахувати, окрім основного доданка $\omega_m^{(0)}$, лише першу поправку $\omega_m^{(2)}$, оскільки доданки, якими при цьому нехтуємо, становлять лише близько 4%. Такий стан речей, однак, не носить універсального характеру. Наприклад, це не так для хвилеводу з поперечним перерізом у вигляді прямокутника зі сторонами d та b , такими що $|b-d| \ll b$. Тому для оцінки величини доданків, які відкинуто, слід визначити асимптотику $\omega_{mn}^{(2)}$ (41) для великих значень n ($n \gg k_{\perp} b \gg |m|$). У випадку НЧ ПХ маємо:

$$\omega_{mn}^{(2)} = -0,5 h_n^2 k_{\perp} b n \omega_m^{(0)}, \quad (5.44)$$

а у випадку ВЧ ПХ:

$$\omega_{mn}^{(2)} = -0,5 h_n^2 k_{\perp} b n \omega_{ce}^2 / \omega_m^{(0)}. \quad (5.45)$$

Аналіз виразів (44) та (45) показує, що ряд (40) збігається

ся, якщо h_n зменшується із зростанням параметра n швидше, ніж n^{-1} .

Отже, частота ПХ в квадратному хвилеводі зі стороною a є близькою до частоти АПХ, яка розповсюджується в круглому циліндрі радіусу $R = (a/\pi)\ln(3 + 2\sqrt{2})$. Для визначення цієї частоти в нульовому наближенні можна скористатись асимптотичними формулами для АПХ. Для розглянутого вище прикладу формула для частоти АПХ дає значення $\omega_1^{(0)} = 2.477 \times 10^9 \text{ с}^{-1}$, яке менш, ніж на 2%, відрізняється від розрахованого значення. А приблизне значення поправки дорівнює згідно (5.44) $\omega_1^{(2)} = -3.7 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$, що лише за порядком величини співпадає із значенням, яке здобуто у числовий спосіб. Така помітна розбіжність пояснюється тим, що в цьому випадку $k_{\perp} b = 7.5$, тобто нерівність $k_{\perp} b \gg N$, яка вважалась справедливою при отриманні (5.44), виконується погано [144].

Відзначимо ще дві відмінності властивостей поперечних ПХ, які розповсюджуються в квадратному хвилеводі, від властивостей ПХ у плоско паралельному шарі плазми [142]. По-перше, величина частоти ПХ в однорідному плазмовому шарі не залежить від розмірів хвилеводу, а частота поперечних ПХ в квадратному хвилеводі явно залежить від розмірів хвилеводу. Це пояснюється тим, що частота ПХ в шарі залежить від величини хвильового вектора вздовж напрямку поширення. У випадку шару, який є нескінченно довгим вздовж напрямку поширення хвилі, цей вектор може мати довільну величину, а у випадку ПХ у квадратному хвилеводі роль хвильового вектора для основної гармоніки відіграє частка (m/b) . По-друге, поширення ПХ вздовж протилежних поверхонь однорідного шару відбувається незалежно, а фази ПХ на протилежних гранях квадратного хвилеводу

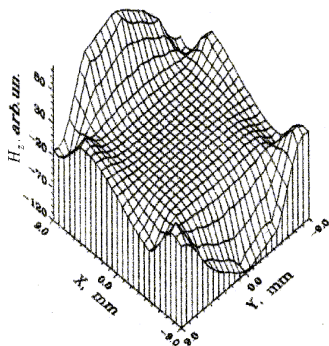


Рис. 7. Розподіл H_z в перерізі квадратного хвильоводу

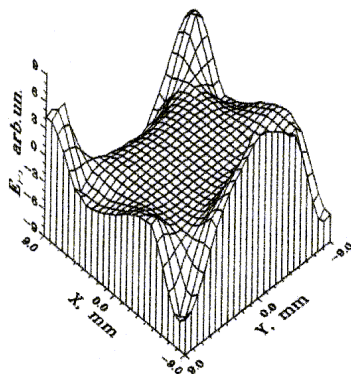


Рис. 8. Розподіл E_x в перерізі квадратного хвильоводу

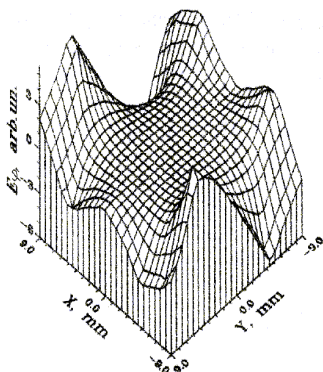


Рис. 9. Розподіл E_φ в перерізі квадратного хвильоводу

жорстко зв'язані (різниця фаз для основної гармоніки становить $M\pi$). Звідси приходимо до висновку, що урахування скінченності довжини однорідного шару призводить до виникнення зв'язку між ПХ, які розповсюджуються вздовж його протилежних поверхонь.

На Рис. 7–9 показано розподіл полів поперечної ПХ, основна гармоніка якої характеризується азимутальним номером $m = 1$, в плазмі

$n - Ge$, який розрахований за формулами (5.37), (5.38), де враховано малі сателіти $\propto \exp(i(m \pm 4)\varphi)$ та $\propto \exp(i(m \pm 8)\varphi)$. Величини полів указані у відносних одиницях. Видно, що максимальну амплітуду має магнітне поле. Це говорить про те, що дані ПХ є істотно непотенціальними. Числовий аналіз показав, що амплітуда сателіта

$\propto \exp(i(M + N)\varphi)$ є більшою за амплітуду сателіта $\propto \exp(i(M - N)\varphi)$, якщо $M < N$, та навпаки, якщо $M > N$.

Теорію АПХ, яку тут використано за нульове наближення, розроблено в [40] також і для хвиль, які розповсюджуються поблизу поверхні круглого металевого стрижня, якого орієнтовано вздовж зовнішнього магнітного поля, і якого поміщено в однорідну плазму. В такій геометрії АПХ існують у тих саме частотних діапазонах, що і у випадку металевого хвилеводу, що повністю заповнено плазмою. Частоти АПХ для цих двох випадків характеризуються якісно однаковою залежністю від параметрів плазми, тому представлені тут результати можна застосовувати і у випадку поперечних ПХ, які поширюються навколо металевого стрижня з некруглим перерізом, що знаходиться у магнітоактивній плазмі.

Залежність поправки до частоти ПХ у прямокутному хвилеводі від концентрації носіїв заряду, напруженості магнітного поля, лінійних розмірів хвилеводу є аналогічною до тієї поправки, що здобута у [141] для квадратного хвилеводу. Слід звернути увагу на головні особливості цього випадка. Поправки $\omega_{mj}^{(2)}$ до частоти ПХ у хвилеводі прямокутного перерізу лінійно зростають зі збільшенням величини B_0 . У хвилеводах великих розмірів, що заповнено напівпровідниками з дуже високою концентрацією вільних електронів (коли $k_{ef} < 0.3$) власна частота поперечних ПХ у НЧ діапазоні стає малою ($\omega_m^{(0)} \approx k_{ef} |\omega_e|$ при $b \gg |m|\delta$), а поправки $\omega_{mj}^{(2)}$ зростають за модулем. В такому випадку не виконується умова застосовності теорії збурень. Її можна застосувати для хвилеводів малих розмірів, що заповнено напівпровідниками з відносно малою концентрацією вільних електронів, коли $k_{ef} \gg 1$.

Як приклад розглянемо поширення ПХ у хвилеводі з перерізом $b \times a = 1 \text{ мм} \times 2 \text{ мм}$, який заповнено n -

напівпровідником із зазначеними вище параметрами. При обчисленні власної частоти обмежимося першими чотирма малими доданками. Відзначимо, що рівняння перерізу хвилеводу (5.1), якщо в його правій частині залишити тільки перші чотири малих доданки, дуже добре описує прямокутник, для якого $a = 2b$. Так площа перерізу хвилеводу зазначених розмірів, який побудовано із вказаною вище точністю, лишень на 4 % менша за площу відповідного прямокутника.

Виконаємо оцінки характеристик поперечної ПХ з азимутальним номером основної гармоніки $m = 1$ у НЧ діапазоні. Її частота $\omega \approx |\omega_e| (\Omega + \Delta\Omega_2 + \Delta\Omega_4 + \Delta\Omega_6 + \Delta\Omega_8) = 1.95 \times 10^{10} (0.914 - 0.034 - 1.05 \times 10^{-4} - 2.842 \times 10^{-3} - 2.132 \times 10^{-3}) = 1.707 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$, тобто поправки складають менше 4.3 % від основного доданка. Відзначимо, що її період $T = 3.681 \times 10^{-10} \text{ с}$ є малим у порівнянні з часом життя вільних електронів $\tau = 10^{-5} \text{ с}$, що підтверджує справедливість використаної нами моделі плазми без зіткнень. Властивості ПХ у такому хвилеводі є близькими до властивостей АПХ у круглому хвилеводі ефективного радіусу $R = 0.0766 \text{ см}$. Глибина проникнення поля цієї ПХ до плазми $n - \text{Ge } k_{\perp}^{-1} = 0.142 \text{ см}$ є більшою за R . Відповідне аналітичне значення власної частоти дорівнює $1.773 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$, що відрізняється від значення, яке отримано внаслідок числового розв'язання дисперсійного рівняння, менше, ніж на 1 %.

Числовий аналіз розподілу полів ПХ показує, що амплітуда магнітного компонента ПХ у прямокутному хвилеводі з розглянутими параметрами є на порядок більшою за амплітуди електричних полів. Розподіл аксіального компонента магнітного поля поперечних ПХ у перерізі хвилеводу показано на Рис. 10. Амплітуди сателітів $\propto \exp(-i\varphi)$ і $\propto \exp(-3i\varphi)$, що поширюються в напрямку, зворотному напрямку основної гармоніки, складають відповідно 4% і 0.1% від амплітуди основної гармоніки. Поширення сателітів іншої групи, що мають кутову залежність $\propto \exp(i(m+2j)\varphi)$, співпадає за напрямком поширення із основною гармонікою, але ці сателіти характеризуються меншою кутовою фазовою швидкістю. Амплітуди цих повільних сателітів є

більшими, ніж амплітуди протилежно спрямованих сателітів. Наприклад, амплітуди сателітів $\propto \exp(3i\varphi)$ і $\propto \exp(5i\varphi)$ складають

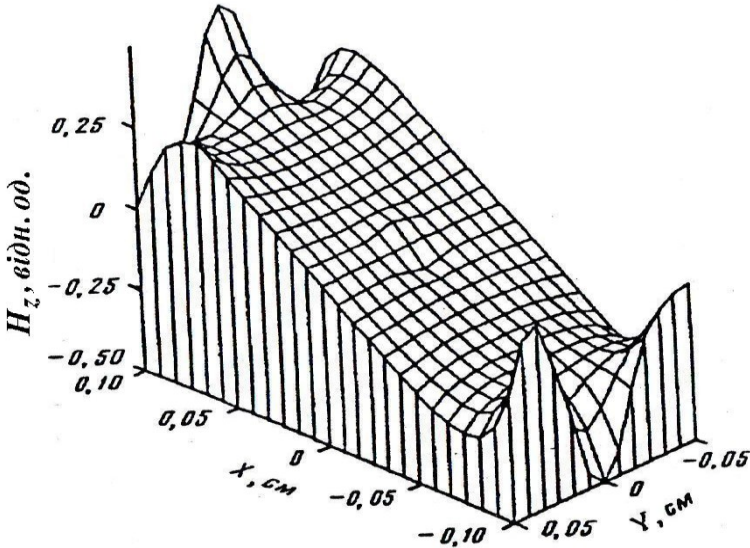


Рис. 10. Просторовий розподіл H_z складової поля поперечних ПХ з номером основної гармоніки $m=1$

18% і 1.2% від амплітуди основної гармоніки. Для ПХ, основна гармоніка яких характеризується азимутальним номером $m > 2$, має місце зворотне співвідношення між амплітудами швидких та повільних сателітів.

Поперечні електромагнітні ПХ поширюються також і поблизу поверхні металевого стрижня майже прямокутного перерізу, якого орієнтовано паралельно до зовнішнього магнітного поля й оточено товстим (у порівнянні з глибиною k_{\perp}^{-1} проникнення поля поперечних ПХ) шаром n -напівпровідника. Отже, для цього випадку також можна застосовувати запропонований метод та передбачити, що основні результати будуть співпадати з тими, що наведено у цьому підрозділі.

5.3. Поширення ПХ поперек осі магнітоактивного плазмового хвилеводу з діелектричним покриттям металевих стінок, які мають некруглий переріз

Дисперсійні властивості поперечних ПХ, які поширюються в металевому хвилеводі некруглого перерізу з круглою однорідною плазмовою вставкою в аксіальному сталому магнітному полі \vec{B}_0 , досліджено у [73] методом послідовних наближень. Це дослідження узагальнює результати досліджень, які подано у підрозділі 2.1, на випадок $B_0 \neq 0$. Вектори електричної індукції та напруженості електричного поля цих ПХ зв'язано тензором діелектричної проникливості холодної магнітоактивної плазми ε_i [1,2]. Геометрію задачі представлено на Рис. 1, при цьому $R_1 = a$, $\vec{B}_0 \parallel \vec{z}$.

Розв'язуючи рівняння Максвелла для незвичайно поляризованих поперечних ПХ в області, яку зайнято плазмою, знаходимо вирази для компонентів поля ПХ у вигляді рядів Фур'є (5.38). Складові електричного поля поперечних ПХ виражаються з рівнянь Максвелла через аксіальну складову магнітного поля хвилі H_z за формулами (5.37). В області, яку зайнято діелектриком, H_z записується через функцію Бесселя першого роду і функцію Неймана за допомогою формули (5.9), а компоненти електричного поля поперечних ПХ виражаються через H_z формулами (5.8). За нульове наближення візьмемо теорію АПХ [39], які поширюються в металевому магнітоактивному хвилеводі круглого перерізу. При $h_N=0$ АПХ із різними азимутальними номерами мод поширюються незалежно. Тоді їхнє магнітне поле можна записати у вигляді однієї гармоніки, а дисперсійне рівняння набуває форми дисперсійного рівняння для АПХ у випадку круглого хвилеводу [39].

Враховуючи у виразах для полів поперечних ПХ доданки $\propto h_n^2$, здобуваємо дисперсійне рівняння, звідки частоту по-

перечних ПХ можна знайти у вигляді суми (5.40). Використовуючи рекурентні співвідношення для циліндричних функцій, а також вважаючи діелектричний шар тонким, можна знайти поправку $\Delta\omega_N$ до частоти ПХ у спосіб, що використано в підрозділі 5.2. Нагадаємо, що при $B_0 \neq 0$ величина $\Delta\omega_N$ залежить від знака азимутального хвильового числа, у той час як для ізотропних хвилеводів спектри ПХ є виродженими відносно знака азимутального хвильового числа m .

Аналітичні вирази для $\Delta\omega_N$ мають простий вигляд у граничних випадках [73], так для широких ($k_{\perp}b, \kappa_g b \gg |m|$) хвилеводів:

$$\frac{\Delta\omega_N}{\omega_0} \approx -\frac{h_N^2}{16} \cdot \left\{ 1 - \frac{2k_{\perp}^2 R_0^2 (k_{\perp} R_0 + \varepsilon_2 m \varepsilon_1^{-1})}{(k_{\perp} R_0 + \varepsilon_2 m \varepsilon_1^{-1})^2 - \varepsilon_2^2 N^2 \varepsilon_1^{-2}} \right\}, \quad (5.46).$$

а для вузьких хвилеводів ($k_{\perp}b, \kappa_g b \ll 1$):

$$\frac{\Delta\omega_N}{\omega_0} = \frac{h_N^2}{16} \left\{ 1 - \frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)m^3}{\varepsilon_d(m^2 - N^2)} \right\}. \quad (5.47)$$

При $B_0 \rightarrow 0$ виразом (5.46) користуватися не можна, оскільки в ізотропному хвилеводі такі ПХ не існують. При збільшенні величини зовнішнього магнітного поля власна частота ПХ у металевому хвилеводі некруглого перерізу зменшується [73].

Більш повну інформацію про залежність $\Delta\omega_N$ від параметрів хвилеводної структури можна здобути числовими методами. Так знайдено, що зі зменшенням радіусу металевого хвилеводу і збільшенням кількості його гофрів величина $\Delta\omega_N$ збільшується, що призводить до зменшення власної частоти. Також поправка $\Delta\omega_N$ зростає при зменшенні товщини діелектричного шару та зменшенні діелектричної проникливості діелектрика.

5.4. Вплив форми поперечного перерізу межі поділу плазма-діелектрик на дисперсійні властивості АПХ в магнітоактивних хвилеводах круглого перерізу

Розглянемо дисперсійні властивості поперечних ПХ, що поширюються в ідеально провідній металевій камері, яка має форму круглого циліндра радіусом b . Усередині камери, що має тонке діелектричне покриття (проникливість $\varepsilon_d \geq 1$) внутрішньої стінки, утримується стовп холодної плазми. Зовнішнє однорідне статне магнітне поле спрямоване уздовж осі хвилеводу: $\vec{B}_0 \parallel \vec{Z}$. Хвилевід вважаємо однорідним уздовж осі циліндра: $\partial / \partial z \equiv 0$. Плазмовий шнур має довільний поперечний переріз, радіус якого $R_1(\varphi)$ змінюється уздовж азимутального кута φ за законом (5.2). Параметр гофрування межі плазма-діелектрик розглядаємо як малий параметр задачі $|\delta_n| \ll 1$, що дозволяє скористатися теорією збурень. Як показано у попередніх підрозділах, кожний з доданків у сумі (5.2) автономно визначає свою поправку до частоти АПХ з точністю до доданків $\propto \delta_n^2$.

Вектори електричної індукції та напруженості електричного поля вважаємо зв'язаними тензором ε_i діелектричної проникності холодної магнітоактивної плазми [1,2]. Обмежимося випадком плазми з однорідним радіальним профілем густини, бо слабка радіальна неоднорідність густини плазми [65,66] призводить лише до незначного збільшення (якщо величина густини зростає у напрямку до осі плазми) власної частоти АПХ.

У нульовому наближенні межу плазма-діелектрик вважаємо круглою та концентричною з металевою камерою. Для опису властивостей АПХ у нульовому наближенні використовуємо результати роботи [39]. Періодична просторова неоднорідність межі плазми (5.2) призводить до того, що АПХ поширюються у вигляді хвильового пакета. Цей пакет містить поряд з основною гармоні-

кою $\propto \exp(im\vartheta)$, нескінченну кількість сателітних гармонік $\propto \exp[i(m\pm j)\vartheta]$, $j=1,2,3\dots$ Відповідно до теорії поширення хвиль у середовищах з одновимірною періодичною неоднорідністю [146] і виходячи з досвіду розв'язання аналогічних задач [72,73,133,138,141,144] амплітуди сателітних гармонік є малими величинами в порівнянні з амплітудою основної гармоніки порядку h_n^j . Враховуємо у хвильовому пакеті тільки дві найближчі сателітні гармоніки $\propto \exp[i(m\pm N)\vartheta]$, оскільки врахування наступних сателітних гармонік дає внесок до поправки до власної частоти АПХ вище другого порядку.

Радіальна залежність амплітуд гармонік поля АПХ у діелектрику ($R_1 < r < R_2$) виражається через функції Бесселя першого роду та функції Неймана, а у плазмі - через модифіковану функцію Бесселя та її похідну за аргументом [136,137]. З точністю до доданків другого порядку малості крайові умови (5.3)-(5.5) набувають вигляду умов неперервності при переході крізь поверхню поділу середовищ, що визначається радіальною координатою $r=a$:

$$\{E_\vartheta(1-0.25 h^2 N^2) - E_r h N \sin(N\vartheta + \vartheta_N) + a h \cos(N\vartheta + \vartheta_N) \frac{\partial E_\vartheta}{\partial r} + 0.5 a^2 h^2 \cos^2(N\vartheta + \vartheta_N) \frac{\partial^2 E_\vartheta}{\partial r^2}\}_{a=0}, \quad (5.48)$$

$$\{B_z + a h \cos(N\vartheta + \vartheta_N) \frac{\partial B_z}{\partial r} + 0.5 a^2 h^2 \cos^2(N\vartheta + \vartheta_N) \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\}_{a=0}. \quad (5.49)$$

Дисперсійне рівняння в нульовому наближенні: $D^{(0)}=0$, - здобуваємо, застосувавши крайові умови на круглій межі плазма-діелектрик:

$$D^{(0)} \equiv \alpha_1^{(0)} \beta_2^{(0)} - \alpha_2^{(0)} \beta_1^{(0)}, \quad (5.50)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(0)} &= I_m(k_{\perp} a), \quad \alpha_2^{(0)} = -P_m(\kappa a), \\ P_m(\kappa r) &= J_m(\kappa r) N_m'(\kappa b) - J_m'(\kappa b) N_m(\kappa r), \\ \beta_1^{(0)} &= \frac{k}{\kappa^2} \left[\frac{m\mu}{a} I_m(k_{\perp} a) + k_{\perp} I_m'(k_{\perp} a) \right], \quad \beta_2^{(0)} = (\varepsilon_d)^{-0.5} P_m'(\kappa a). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Частоту $\omega^{(0)}$ АПХ, що є розв'язком рівняння (5.50), далі вважаємо відомою. Врахування доданків першого порядку малості в крайових умовах дозволяє визначити амплітуди сателітних гармонік АПХ. Аналіз отриманих виразів показує, що амплітуди сателітних гармонік АПХ не мають симетрії: $B_z^{(+)} \neq \pm B_z^{(-)}$. Виділивши в рівняннях (5.48), (5.49) доданки $\propto \exp(im\vartheta)$, одержимо дисперсійне рівняння поперечних ПХ з точністю до доданків другого порядку малості:

$$D^{(0)} + D_N^{(2)} = 0. \quad (5.52)$$

Тут $D_N^{(2)}$ – це величина другого порядку малості, явний вигляд якої не будемо наводити через його громіздкість (див. [147]). З аналізу рівняння (5.52) видно, що $\Delta\omega_N$ є також величиною другого порядку малості.

Аналітично дисперсійне рівняння (5.52) вдається дослідити тільки у певних граничних випадках. Наприклад, у випадку плазмового шнура великого радіусу ($a/\delta \gg |m|, N$) власна частота визначається в такий спосіб: $\omega = \omega^{(0)} + \Delta\omega$, де

$$\begin{aligned} \omega^{(0)} &\approx \sqrt{(1-2\Delta)\delta^4 m^2 \omega_e^2 - (2a^2\Delta - a^2\Delta^2 + 2a\delta)m^2 c^2 \Delta(3\Delta - 2)} \\ &+ (1-\Delta)\delta^2 m |\omega_e| \sqrt{\varepsilon_d} \sqrt{\varepsilon_d} \left[\sqrt{\varepsilon_d} (2a^2\Delta - a^2\Delta^2 + 2a\delta) \right], \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\Delta\omega_N \approx -h_N^2 \omega^{(0)} \frac{3m^2 \kappa^2 a^2 + 2\kappa^4 a^4 - 3m^4 + m^2 N^2}{4m^2 (N^2 - 4m^2) \Delta^2} \Big|_{\omega=\omega^{(0)}}. \quad (5.54)$$

Вираз (5.54) є зворотно пропорційним різниці $(N^2 - 4m^2)$. Це є математичним наслідком виродження спектрів АПХ у круглому хвилеводі без магнітного поля щодо знака азимутального хвильового числа. Докладний аналіз впливу форми межі плазми

на дисперсійні властивості АПХ у цьому (резонансному) випадку вимагає окремого дослідження, результати якого наведені в наступному підрозділі.

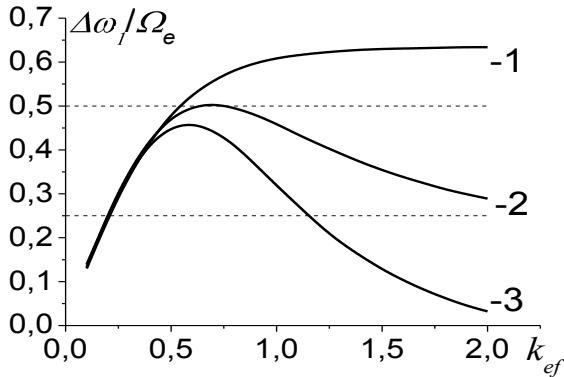


Рис. 11. Поправки до частот АПХ при $N=1$

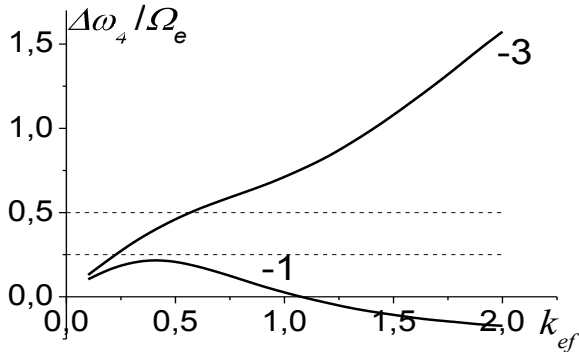


Рис. 12. Поправки до частот АПХ при $N=4$

Згідно (5.54) при $\delta > R_2 - a$ поправка до частоти зростає зі зменшенням ширини діелектричного прошарку. Однак, це збільшення обмежене нерівністю $\Delta > h_n$, окрім того, оскільки, магнітне поле \vec{B}_0 вважалось слабким, то при одержанні форму-

ли (5.54) вплив \bar{B}_0 на дисперсійні властивості АПХ у порівнянні із впливом діелектричного зазору не враховувався, що є справед-

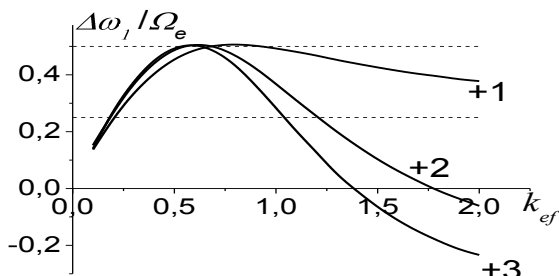


Рис. 13. Те саме, що на Рис. 11, але для додатних значень m

ливим при $\sqrt{R_2 - a} \gg |\omega_e| \sqrt{a} / (2\sqrt{|m|\Omega_e})$. Поправка до частоти АПХ має вигляд ряду $\sum_n \Delta\omega_n$, який збігається, якщо малий параметр δ_n зменшується при зростанні індексу підсумовування швидше, ніж $n^{-1.5}$ [147].

Результати числового дослідження величини $\Delta\omega_N$ наведено на Рис. 11–13. При цьому в якості безрозмірних параметрів було обрано: $\Delta\omega_N (h_N^2 \Omega_e)^{-1}$ та $k_{ef} = (mc)/(a\Omega_e)$, цифрами на рисунках позначено номери мод. Для широких хвилеводів ($k_{ef} \ll 1$) якісне та кількісне поведіння кривих слабо залежить від m . У випадку вузьких хвилеводів ($k_{ef} > 0.5$) спостерігається немонотонний хід кривих $\Delta\omega_1 (h_1^2 \Omega_e)^{-1}$. Чим більше модуль азимутального номера моди, тим менше значення k_{ef} , для якого досягається максимум на цих кривих, і тим швидше ці криві спадають в область від'ємних значень поправки до частоти АПХ. На Рис. 12 залежність $\Delta\omega_N (h_N^2 \Omega_e)^{-1}$ від k_{ef} показана для випадку $N=4 > |m|$. Видно, що для АПХ із $m=-3$ поправка $\Delta\omega_4 (h_4^2 \Omega_e)^{-1}$ не змінює свого знаку і за абсолютним значенням

помітно перевищує величину $\Delta\omega_1(h_1^2\Omega_e)^{-1}$. Числовий аналіз дисперсійного рівняння підтверджує аналітичні висновки про те, що поправка до частоти АПХ зростає зі зменшенням товщини діелектричного прошарку або ε_d та при збільшенні величини B_0 (при цьому залишається справедливим початкове припущення про відносну його слабкість). Встановлено, що абсолютна величина $\Delta\omega_N$ для хвиль, що поширюються в протилежних напрямках, є різною, це відповідає загальним теоретичним уявленням про властивості ПХ, які поширюються точно поперек \vec{B}_0 [8,9,13]. На Рис. 13 показано залежність $\Delta\omega_N(k_{ef})$ для АПХ із позитивними азимутальними номерами моди. Відзначимо, що власна частота АПХ із $m>0$ вище частоти АПХ із $m<0$ за інших рівних умов. Ця розбіжність мало позначається в широких хвилеводах, але вона збільшується при збільшенні $|m|$ та у хвилеводах з вузьким діелектричним прошарком. Оскільки АПХ характеризуються позитивною дисперсією, то при $k_{ef}>0.5$ криві $\Delta\omega_N(h_N^2\Omega_e)^{-1}$ для АПХ з $m>0$ спадають більш різко, ніж для АПХ з $m<0$.

Дослідження спектрального складу хвильового пакета, у вигляді якого ці електромагнітні хвилі поширюються уздовж поверхні плазмового стовпа, дозволило виявити наступне. Перше, амплітуди швидких сателітних гармонік є меншими за амплітуди повільних гармонік. Друге, амплітуди сателітних гармонік є більшими у широких хвилеводах. Третє, їхня величина зменшується зі зменшенням $|m|$. Але у вузьких хвилеводах з $N=1$ амплітуда стоячої сателітної гармоніки АПХ з номером $m=-1$ більша за амплітуду повільної гармоніки. Для хвилеводів великих розмірів (при $k_{ef}\rightarrow 0$) амплітуди сателітних гармонік перевищують амплітуду основної гармоніки, що обмежує застосовність отриманих результатів. Однак якщо зафіксувати не величину δ_N , а добуток $(a\delta_N)$ (абсолютну величину відхилення межі поділу середовищ від кола), тоді в залежності амплітуд сателітних гармонік від k_{ef} не спостерігається особливості при збільшенні

радіуса плазми [147].

Наведені тут результати становлять істотний інтерес для плазмової електроніки. Це зв'язано з відомими перевагами плазмових хвилеводів порівняно з вакуумними хвилеводами, а саме: збільшення граничного струму, можливості підвищення потужності сигналу, що генерується, та плавного регулювання його частоти.

5.5. Резонансний вплив відмінності форми поперечного перерізу межі поділу плазма-діелектрик на дисперсійні властивості АПХ в магнітоактивних хвилеводах круглого перерізу

Вплив форми поперечного перерізу межі плазми на дисперсійні властивості АПХ у нерезонансному випадку досліджено в попередньому підрозділі. При цьому величина поправки до власної частоти хвиль виявилася $\propto \delta_n^2$ (квадрат малого параметра задачі). Ці результати здобуто стандартними методами теорії збурень при використанні теорії АПХ у якості нульового наближення. Однак визначення впливу форми поперечного перерізу плазми на поширення хвиль із кутовим періодом, що вдвічі перевищує період неоднорідності межі плазми, потребує особливого підходу, бо це є вироджений випадок. Виродження спектрів збурень зустрічається в різних галузях фізики, і застосування методів послідовних наближень для їхнього дослідження має свої особливості [75]. У роботі [138] було розглянуто АПХ у гіротропних плазмових хвилеводах некруглого перетину. При цьому з'ясувалося, що поперечні хвильові збурення існують у вигляді двох стоячих хвиль із близькими частотами, внаслідок взаємодії яких виникають биття, а поправка до частоти АПХ виявляється більшою, ніж у нерезонансному випадку.

У цьому підрозділі розглянуто аналогічну задачу для випадку магнітоактивної плазми. Геометрія задачі та початкові припущення є такими саме, як у попередньому підрозділі. Для опису властивостей АПХ у нульовому наближенні скористаємося результатами роботи [39], коли АПХ із різними азимутальними

хвильовими числами поширюються незалежно один від одного. А періодична просторова неоднорідність межі плазми призводить до того, що АПХ поширюються у вигляді хвильового пакета, який містить поряд з основною гармонікою, нескінчену кількість сателітних гармонік. На відміну від попереднього підрозділу розглянемо випадок впливу відмінності форми перетину межі плазма-діелектрик (5.2) на частоту і спектральний склад такого хвильового пакета власних незвичайно поляризованих АПХ, у якому основні гармоніки характеризуються кутовим періодом, що вдвічі перевищує кутовий період неоднорідності межі [148]:

$$N=2|m|. \quad (5.55)$$

Саме така неоднорідність межі плазма-діелектрик знімає виродження спектрів АПХ щодо знака азимутального номера моди у гіротропних плазмових хвилеводах [138]. Але присутність навіть слабкого ($\Omega_e^2 \gg \varepsilon_0 \omega_e^2$) зовнішнього магнітного поля за інших рівних умов спричиняє сильніший вплив форми перетину межі плазми на дисперсійні властивості тих АПХ, для яких виконується умова (5.55), порівняно з випадком поширення цих хвиль із іншими значеннями азимутального номера.

Результати числового дослідження дисперсії АПХ у резонансному випадку (5.55) наведені на Рис. 14–16. Для зручності сприйняття кривих у якості безрозмірних параметрів були обрані такі величини: $\Delta\omega_N/(\Omega_e h_N^2)$ і k_{ef} . Відмінність форми перерізу плазми від кола призводить до зменшення власної частоти АПХ з $m < 0$ (за винятком моди $m=-1$ у випадку її поширення в широких хвилеводах $k_{ef} < 1$). Вона сильніше позначається на дисперсії АПХ у тонких хвилеводах, ніж при їхньому поширенні в широких хвилеводах. Виключення становить АПХ із азимутальним номером моди $m=-1$, для якої поправка є дуже малою (див. Рис. 15, 16).

Числовий аналіз дисперсійного співвідношення для власних поперечних електромагнітних хвиль показує, що поправка $\Delta\omega_N$ до частоти цих хвиль зростає при зменшенні товщини діелектричного прошарку, його проникливості ε_d та зовнішнього магнітного поля. Зміна знака азимутального хвильового числа m основної гармоніки АПХ (з негативного на позитивний) змі-

ною знак $\Delta\omega_N$ та трохи збільшує його абсолютну величину.

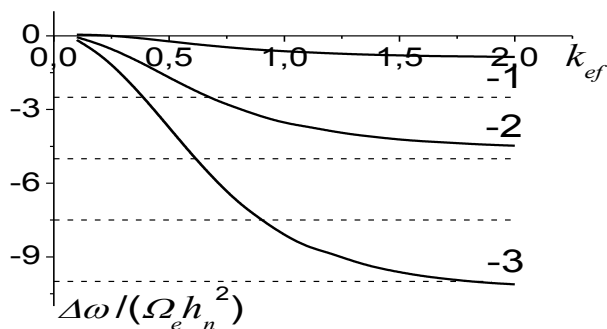


Рис. 14. Залежність поправки до частоти АПХ від k_{ef} , $Z=9$; $\varepsilon_d=1$; $\Delta=0.3$

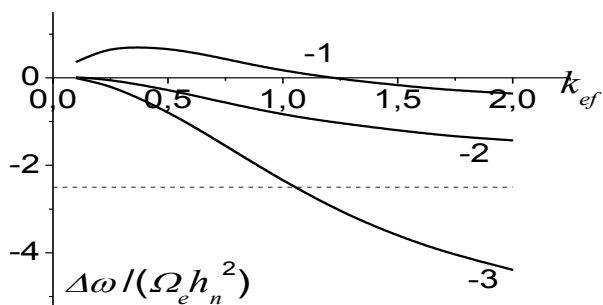


Рис. 15. Те саме, що на Рис. 14, але для $\varepsilon_d=5$

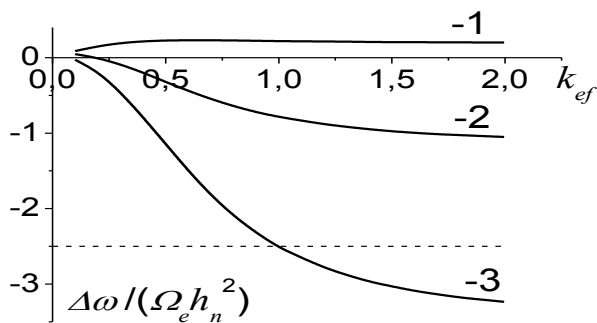


Рис. 16. Те саме, що на Рис. 14, але для $Z=3$

При збільшенні сталого магнітного поля (Рис.16) абсолютне значення $\Delta\omega_N$ при більших k_{ef} стало менше, ніж на Рис. 15. Для АПХ із азимутальним номером $m=-2$ з'явився вузький інтервал малих k_{ef} , для яких $\Delta\omega_N \in$ позитивною. Починаючи з певного малого значення зовнішнього магнітного поля, впливом B_0 на дисперсійні властивості АПХ у плазмі з некруглою межею плазми можна знехтувати та користуватися теорією АПХ у ізотропній плазмі. Це справедливо, якщо виконується наступна умова [138]:

$$\frac{|\omega_e|}{\Omega_e} \ll \frac{\delta_{2|m|}}{2} \sqrt{\frac{|m|}{\Delta}} \left[1 + \sqrt{\frac{a}{|m|\delta}} \varepsilon_d^{-1/4} \left(1 + \frac{a\Delta}{\delta} \right) \right]. \quad (5.56)$$

Зменшення ширини діелектричного шару призводить до дуже малих кількісних змін залежності $\Delta\omega_N$ від k_{ef} . Також слабо впливає на $|\Delta\omega_N|$ зміна знаку m , тому ці графіки не наведено.

На Рис. 17-19 показано залежність відносних амплітуд $Q^{(\pm)}$ сателітних гармонік, пропорційних $\exp [i(m \pm N)\varphi - i\omega t]$, від ефективного хвильового числа:

$$Q^{(\pm)} = A^{(\pm)} I_{m \pm N}(k_{\perp} a) / [h_1 A^{(0)} I_m(k_{\perp} a)]. \quad (5.57)$$

На них представлено залежності відносних амплітуд $Q^{(\pm)}$ від k_{ef} для тих же значень параметрів хвилеводу, які були використано при знаходженні величини поправки до частоти АПХ. Неперервною лінією показано залежність відносної амплітуди $Q^{(+)}(k_{ef})$ сателітної гармоніки, що пропорційна $\exp [i(m+N)\varphi]$, а штриховою лінією зображено криві $Q^{(-)}(k_{ef})$. Видно, що амплітуди цих сателітних гармонік помітно відрізняються одна від одної. Це пояснюється резонансним збільшенням (у порівнянні із загальним випадком $N \neq 2|m|$) амплітуди сателітної гармоніки, що поширюється з тією ж кутовою фазовою швидкістю, що й основна гармоніка, але в протилежному напрямку (саме цю гармоніку будемо

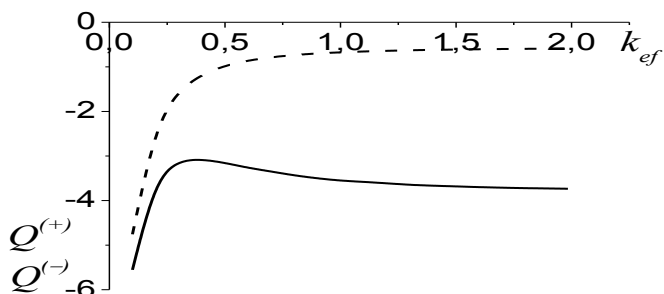


Рис. 17. Залежність амплітуд сателітних гармонік від k_{ef} при: $m = -1$, $\Omega_e = 9|\omega_e|$, $\epsilon_d = 1$, $\Delta = 0.3$, $N = 2$

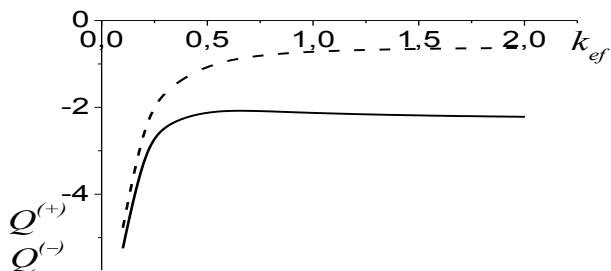


Рис. 18. Те саме, що на Рис. 17, але для: $m = -1$, $\Omega_e = 9|\omega_e|$, $\epsilon_d = 5$, $\Delta = 0.3$, $N = 2$

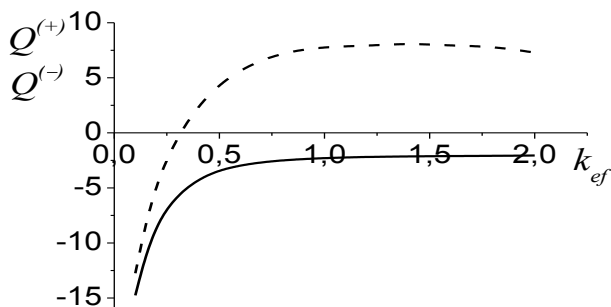


Рис. 19. Те саме, що на Рис. 17, але для: $m = +3$, $\Omega_e = 9|\omega_e|$, $\epsilon_d = 1$, $\Delta = 0.3$, $N = 6$

називати тут резонансною).

Рис. 17 показує помітне збільшення відносної амплітуди резонансної гармоніки при зростанні абсолютного значення азимутального номера моди. Значення параметрів хвилеводу відповідають Рис. 14, на якому показано збільшення абсолютної величини поправки до частоти при зростанні $|m|$. Збільшення діелектричної проникливості шару, що відокремлює плазму від металеві стінки, та величини B_0 супроводжується зменшенням абсолютної величини відносної амплітуди резонансної сателітної гармоніки $Q^{(+)}(k_{z\varphi})$ (Рис. 18). Числове дослідження спектрального складу хвильового пакета АПХ дозволило виявити такі його особливості: - амплітуди швидких сателітів менші за амплітуди повільних сателітів; - амплітуди сателітних гармонік більші у широких хвилеводах; - їхня абсолютна величина зменшується зі зменшенням $|m|$. Для позитивних значень азимутального номера m амплітуда резонансного (у цьому випадку це $Q^{(-)}$) сателіта при зменшенні радіуса плазмового стовпа переходить крізь нульове значення та стає позитивною для вузьких хвилеводів (Рис.19).

Скористаємося наведеними результатами для оцінки впливу еліптичності перетину плазмового шнура на дисперсійні властивості АПХ з $m=-1$. Для концентрації плазми $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, зовнішнього магнітного поля $B_0 \approx 160 \text{ Гс}$ у випадку плазми з радіусом $a = 3.4 \text{ см}$, товщини вакуумного шару 1 см АПХ поширюється із частотою $\nu^{(0)}=702 \text{ МГц}$, що вище електронної циклотронної частоти. Якщо частка малої та великої півосей еліпса становить 0.8 , то малий параметр задачі $\delta_2 \approx 1/9$, а поправка до частоти АПХ $\Delta \nu_2 \approx -8 \text{ МГц}$. Амплітуда сателітної гармоніки $\propto \exp(-i3\varphi)$ при цьому становить $\approx 30\%$ від амплітуди основної гармоніки. Сателітна гармоніка, поле якої $\propto \exp(i\varphi)$, поширюється в напрямку, що є протилежним напрямку поширення основної гармоніки, а її амплітуда становить близько 11% від амплітуди основної гармоніки [148].

Отже, у даному підрозділі показано можливість керуван-

ня частотним спектром і спектральним складом хвильового пакета зазначених власних мод шляхом вибору форми поперечного переріза шнура плазми. При цьому величина поправки до частоти АПХ приблизно обернено пропорційна B_0 та стає значно більшою ($\propto \delta_n$), ніж у нерезонансному випадку. Оцінюючи вплив просторової періодичної неоднорідності межі плазми на дисперсійні властивості АПХ, можна прийти до однозначного висновку: він є сильнішим, ніж вплив азимутального гофрування поверхні металевої камери, що досліджувався в роботі [73]. Це можна пояснити тим, що амплітуда АПХ є максимальною поблизу поверхні плазми та зменшується при наближенні до металевої стінки хвилеводу. Порівняння впливу просторової періодичної неоднорідності межі плазми, що перебуває в слабкому магнітному полі, на дисперсійні властивості АПХ із впливом аналогічної неоднорідності межі ізотропної плазми [138] свідчить про їхню подібність.

5.6. Поперечні ПХ у круглому металевому хвилеводі, який заповнено двома шарами різних n -напівпровідників

У цьому підрозділі досліджено вплив розбіжності електродинамічних властивостей напівпровідникових шарів, які повністю заповнюють круглий металевий хвилевід, на поширення поперечних ПХ [149]. Нехай симетричний уздовж осі Z металевий хвилевід круглого перерізу радіуса R буде повністю заповнений двома шарами різних напівпровідників n -типу. Один напівпровідниковий шар (з концентрацією n_{e1} вільних електронів, ефективною масою електронів M_1 і діелектричною проникливістю ґратки ε_{01}) заповнює верхню частину хвилеводу ($0 < \varphi < \pi$). Другий напівпровідниковий шар (n_{e2} – концентрація вільних електронів, M_2 – ефективна маса електронів провідності і ε_{02} – діелектрична проникливість кристалічної ґратки) заповнює нижню частину хвилеводу ($-\pi < \varphi < 0$). Зовнішнє магнітне поле спрямоване уздовж осі хвилеводу: $\vec{B}_0 \parallel \vec{z}$. Розглянемо у цьому підрозділі поширення E -моди, бо H -мода поверхневого типу у цьому випадку не поширюється [40]. Електродинамічні власти-

вості напівпровідникового плазмового середовища визначаються компонентами тензора діелектричної проникливості [1,2]. Періодичну кутову залежність компонентів ε_1 та ε_2 цього тензора зручно виразити через східчасту узагальнену функцію [149]:

$$\theta(\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(2j+1)\varphi}{2j+1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{якщо } 0 < \varphi < \pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{якщо } -\pi < \varphi < 0. \end{cases} \quad (5.58)$$

При використанні функції θ компоненти $\varepsilon_{1,2}$ цього тензора мають вигляд:

$$\varepsilon_{1,2} = \varepsilon_{1,2}^{(0)} + \varepsilon_{1,2}^{(1)} \theta(\varphi), \quad (5.59)$$

де

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2}^{(0)} &= 0.5[\varepsilon_{1,2}(n_1) + \varepsilon_{1,2}(n_2)], \\ \varepsilon_{1,2}^{(1)} &= 2[\varepsilon_{1,2}(n_1) - \varepsilon_{1,2}(n_2)]/\pi. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Розбіжність між властивостями напівпровідників вважається малою, $\left| \varepsilon_{1,2}^{(1)} \right| \ll \left| \varepsilon_{1,2}^{(0)} \right|$, це дозволяє скористатися методом послідовних наближень. За нульове наближення використовуємо дисперсійні властивості АПХ [40].

Для спрощення даного аналітичного розгляду слід залишити спочатку у Фур'є ряді (5.58) лише одну гармоніку $\propto \sin(N\varphi)$, а потім узагальнити здобуті результати на випадок нескінченного ряду (5.58). З урахуванням цього розв'язки рівнянь Максвелла для аксіального компонента магнітного поля хвилі шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} B_z = & \{ I_m(k_L^{(0)} r) + p(r) \} \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \left[F_+^{(1)}(r) e^{iN\varphi} + F_-^{(1)}(r) e^{-iN\varphi} + F_+^{(2)}(r) e^{i2N\varphi} \right. \\ & \left. + F_-^{(2)}(r) e^{-i2N\varphi} \right] \exp(im\varphi - i\omega t), \quad N=2j+1, \end{aligned} \quad (5.61)$$

де $p(r)$ - поправка другого порядку малості ($p \propto \varepsilon_1^{(1)2} I_m(k_{\perp}^{(0)} r)$) до амплітуди основної гармоніки, $F_{\pm}^{(1)}$ і $F_{\pm}^{(2)}$ - амплітуди перших і других сателітних гармонік ПХ, $k_{\perp}^{(0)} = k^2 [(\mu^{(0)})^2 - 1] \varepsilon_1^{(0)}$, $\mu^{(0)} = \varepsilon_2^{(0)} / \varepsilon_1^{(0)}$.

Для обчислення амплітуд $F_{\pm}^{(1)}$ скористаємося рівняннями Максвелла:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{dF_{\pm}^{(1)}}{d\xi} - \left[1 + \frac{(m \pm N)^2}{\xi^2} \right] F_{\pm}^{(1)} = g^{(\pm)}, \quad \xi = k_{\perp}^{(0)} r, \quad (5.62)$$

де

$$g^{(\pm)} = \frac{c^2}{2i\omega^2} (N_{\perp}^{-2})^{(1)} I_m(\xi) \left(\frac{m}{r^2} \mp \frac{k_{\perp}^{(0)2}}{N} \right) - \frac{ic^2 k_{\perp}^{(0)}}{2\omega^2 r} I'_m(\xi) \left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(1)}, \quad (5.63)$$

$(N_{\perp}^{-2})^{(1)}$ і $(\mu/N_{\perp}^2)^{(1)}$ - поправки першого порядку, які обумовлено двошаровістю хвилеводного заповнення,

$$(N_{\perp}^{-2})^{(1)} = (N_{\perp}^{-2})^{(0)} \cdot \left[\frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_1^{(0)}} - 2 \frac{\varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} \right], \quad (5.64)$$

$$\left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(1)} = \left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(0)} \cdot \left[\frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} - 2 \frac{\varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} \right]. \quad (5.65)$$

Розв'язок рівняння (5.62) знаходимо методом варіації сталої, а константи інтегрування визначаємо з крайових умов (5.3)-(5.5). Розв'язання задачі в першому наближенні за слабкою неоднорідністю напівпровідникового заповнення круглого хви-

леводу не змінює амплітуду основної гармоніки хвилі, тому власна частота ПХ в цьому наближенні не відрізняється від свого значення, обчисленого в нульовому наближенні. Визначити амплітуди $F_{\pm}^{(2)}$ других сателітних гармонік ПХ можна аналогічно тому, як визначено амплітуди $F_{\pm}^{(1)}$.

Щоб знайти поправку $p(r)$ до амплітуди основної гармоніки ПХ, підставимо вирази (61) для поля хвилі B_z з урахуванням уже відомих амплітуд $F_{\pm}^{(1)}$ перших сателітних гармонік і (59) для компонентів тензора ε_{ij} до рівнянь Максвелла і виділимо в них доданки другого порядку малості, які є пропорційними до $\exp(im\varphi)$. Тоді для цієї поправки $p(r)$ дістаємо наступне рівняння,

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{dp}{d\xi} - \left[1 + \frac{m^2}{\xi^2} \right] p = -L, \quad (5.66)$$

де права частина дорівнює

$$\begin{aligned} L = & \frac{c^2}{\omega^2 r} \left(N_{\perp}^{-2} \right)^{(1)} \frac{1}{2iN} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \left(F_{-}^{(1)} - F_{+}^{(1)} \right) \\ & + \frac{c^2}{\omega^2} \left(N_{\perp}^{-2} \right)^{(2)} k_{\perp}^2 I_m(\xi) \\ & - \frac{c^2}{\omega^2 r^2} \left(N_{\perp}^{-2} \right)^{(1)} \frac{1}{2iN} \left[(m-N)^2 F_{-}^{(1)} - (m+N)^2 F_{+}^{(1)} \right] \\ & + \frac{c^2 i}{2\omega^2 r^2} \left(N_{\perp}^{-2} \right)^{(1)} \left[(m+N) F_{+}^{(1)} + (m-N) F_{-}^{(1)} \right] \\ & + \frac{ic^2}{2\omega^2 r} \left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(1)} \left[\frac{d}{dr} \left(F_{+}^{(1)} + F_{-}^{(1)} \right) \right]; \end{aligned} \quad (5.67)$$

поправка $(N_{\perp}^{-2})^{(2)}$ другого порядку малості дорівнює,

$$(N_{\perp}^{-2})^{(2)} = (N_{\perp}^{-2})^{(0)}$$

$$\times \left[\frac{\varepsilon_1^{(1)2} - \varepsilon_2^{(1)2}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} + 4 \left(\frac{\varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} \right) - 2 \frac{\varepsilon_1^{(1)} \varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} \right]. \quad (5.68)$$

Розв'язок рівняння (5.66), який є обмеженим на осі хвилеводу, має наступний вигляд,

$$p = K_m(\xi) \int_0^\xi LI_m(\xi) \xi d\xi - I_m(\xi) \int_{k_\perp R}^\xi LK_m(\xi) \xi d\xi + A_2 I_m(\xi). \quad (5.69)$$

Константа інтегрування A_2 в (5.69) відіграє роль поправки до нормувального множника, що у нульовому наближенні був обраний рівним одиниці, тому її знаходять не з крайових умов, а з умови, яка є аналогічною умові нормування хвильової функції в квантовій механіці [75],

$$\int_0^R \left[2pI_m(z) + |F_+^{(1)}|^2 + |F_-^{(1)}|^2 \right] r dr = 0. \quad (5.70)$$

Вона означає, що енергія магнітного поля хвилі, яку обчислено з урахуванням доданків другого порядку малості, збігається зі значенням, яке обчислено в нульовому наближенні. Разом із тим, вигляд дисперсійного рівняння, яке отримано нижче з урахуванням доданків другого порядку малості, не залежить від значення константи A_2 .

Крайова умова на круглій металевій поверхні для основної гармоніки азимутального компонента електричного поля хвилі з урахуванням доданків другого порядку малості набуває у

другому наближенні вигляду [149]:

$$D^{(0)} + D^{(2)} = 0, \quad (5.71)$$

де

$$\begin{aligned} D^{(2)} = & \left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(0)} mp + \left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(1)} \frac{(m-N)F_{-}^{(1)} - (m+N)F_{+}^{(1)}}{2iN} \\ & + \left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(2)} mI_m(\xi) \\ & + (N_{\perp}^{-2})^{(0)} R \frac{dp}{dr} + (N_{\perp}^{-2})^{(1)} \frac{R}{2iN} \frac{d}{dr} (F_{-}^{(1)} - F_{+}^{(1)}) \\ & + (N_{\perp}^{-2})^{(2)} zI'_m(\xi) \Big|_{\substack{r=R \\ \omega=\omega_m}}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Поправка $(\mu N_{\perp}^{-2})^{(2)}$ в (5.72), що має другий порядок малості, дорівнює:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(2)} = & \left(\frac{\mu}{N_{\perp}^2} \right)^{(0)} \left[\frac{\varepsilon_1^{(1)2} - \varepsilon_2^{(1)2}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} + 4 \left(\frac{\varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} \right)^2 \right. \\ & \left. - 2 \frac{\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_2^{(0)} \varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)2} - \varepsilon_1^{(0)2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Вираз (5.72) містить дві групи доданків. Одна група складається з доданків, які є пропорційними до поправок другого порядку малості $(\mu N_{\perp}^2)^{(2)}$ (див. формулу (5.73)), або $(N_{\perp}^{-2})^{(2)}$ (див. формулу (68)). Доданки другої групи явно залежать від номера N Фур'є - гармоніки і є пропорційними до другого ступеню поправок першого порядку малості $(N_{\perp}^{-2})^{(1)}$ (див. формулу (64)) та/чи $(\mu/N_{\perp}^2)^{(1)}$ (див. формулу (65)). При визначенні власної частоти ПХ зазвичай досить врахувати в $D^{(2)}$ доданки другої групи

тільки з $N=1$. Якщо все-таки при цьому поправка до частоти виявляється недостатньо малою, тоді до неї варто додати наступний доданок другої групи з $N=3$ і т.д.

Власну частоту ω ПХ, що поширюються в просторово неоднорідних хвильоводах великих розмірів, $k_{\perp}R \gg |m|$, можна порахувати в наступний спосіб: $\omega = \omega_m^{(0)} + \omega_m^{(2)}$, де в НЧ діапазоні поправка, що обумовлена неоднорідністю плазмового наповнення, дорівнює

$$\omega_m^{(2)} \approx \frac{3}{4N^2} \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} \left(\frac{2\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} - \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_1^{(0)}} \right) \omega_m^{(0)},$$

$$\omega_m^{(0)} = \frac{m\delta}{R} |\omega_{ce}|. \quad (5.74)$$

У ВЧ діапазоні поправка до частоти поперечних ПХ за цих умов визначається у наступний спосіб:

$$\omega_m^{(2)} \approx -\frac{3}{4} \frac{\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)} N^2} \omega_m^{(0)}, \quad \omega_m^{(0)} = \sqrt{\omega_{uh}^2 + \frac{m^2 c^2}{R^2}}. \quad (5.75)$$

З аналізу виразів (5.74) та (5.75) видно, що у широких хвильоводах, у яких глибина k_{\perp}^{-1} проникнення поля до плазми є малою в порівнянні з радіусом хвильоводу, даний підхід цілком можна застосовувати, бо розв'язок має вигляд ряду, який швидко сходиться. Неоднорідність напівпровідникового заповнення унеможливає поширення азимутальних ПХ у вузьких хвильоводах [149], у яких глибина проникнення хвилі до плазми є великою в порівнянні з радіусом хвильоводу, бо вже у нульовому наближенні їхня власна частота наближається до свого граничного значення, а групова швидкість хвилі прямує до нуля при зменшенні радіуса хвильоводу.

5.7. Поперечні ПХ в металевому хвилеводі прямокутного перерізу, який заповнено двома шарами n -напівпровідників

ПХ на межі магнітоактивної плазми з металом уперше були виявлені [15] у n - напівпровідниковому зразку саме прямокутного перерізу. Тому теоретичне вивчення дисперсійних властивостей таких ПХ природно почалося з моделі плазмового півпростору, що межує з металом [150,151]. При подальшому розвитку цієї моделі було досліджено ПХ у плоскопаралельному шарі, обмеженому металом [142], і далі - у двошаровій плазмовій структурі, обмеженій металом [152]. Однак наступний крок - врахування скінченності обох поперечних розмірів - зіштовхнувся з неможливістю поділу змінних у декартових координатах. Тому дисперсійні властивості ПХ, що поширюються поперек осі плазмового хвилеводу квадратного [141], а потім і прямокутного [144] перерізу, було досліджено на основі теорії АПХ [40], що поширюються поперек осі симетрії циліндричного хвилеводу круглого перерізу. При цьому виявилось, що навіть у випадку хвилеводу, що має своїм поперечним перерізом прямокутник, сторони якого розрізняються в два рази, застосування методу послідовних наближень дає можливість у широкому діапазоні значень параметрів хвилеводів визначати частоту ПХ із точністю до кількох відсотків уже в нульовому наближенні [40].

У цьому підрозділі досліджено поперечні електромагнітні ПХ у металевому хвилеводі майже прямокутного перерізу, який повністю заповнено двома плоскопаралельними шарами n -напівпровідників. Нехай симетричний уздовж осі Z металевий хвилевід прямокутного перерізу $a \times (b+d)$ буде повністю заповнений двома шарами різних напівпровідників n -типу. Один напівпровідниковий шар (з концентрацією n_{e1} вільних електронів, ефективною масою електронів M_1 і діелектричною проникливістю ґратки \mathcal{E}_{01}) прямокутного поперечного перерізу $a \times (0.5b+d)$ заповнює верхню частину хвилеводу. Другий напівпровідниковий шар (n_{e2} - концентрація вільних електронів, M_2 - ефективна маса електронів провідності і \mathcal{E}_{02} - діелектрична про-

никливість кристалічної ґратки) прямокутного перерізу $a \times 0.5b$ заповнює нижню частину хвилеводу. Зовнішнє магнітне поле \vec{B}_0 спрямоване уздовж осі хвилеводу.

Початок координат зручно розташувати у центрі відтинку, що розділяє ці два напівпровідникові шари. Вісь X направлено уздовж зазначеної межі поділу, при цьому вісь Y служить вісю симетрії задачі. Рівняння для прямокутної утворюючої в циліндричній системі координат r, φ, z має вигляд [149]:

$$R_2 = R \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{2n} \cos 2n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2n+1} \sin(2n+1)\varphi \right), \quad (5.76)$$

де середній радіус хвилеводу дорівнює

$$R = R(d=0) + \frac{1}{2\pi} \left\{ a \ln \left| \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_0} \frac{1 - \sin \varphi_0}{1 - \sin \varphi_1} \right| + (b+2d) \ln \frac{1 + \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} + b \ln \frac{\sin \varphi_0}{1 + \cos \varphi_0} \right\}, \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{b}{a}; \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{b+2d}{a},$$

$$R(d=0) = \frac{a}{2\pi} \ln \frac{1 + \sin \varphi_0}{1 - \sin \varphi_0} + \frac{b}{2\pi} \ln \frac{1 + \cos \varphi_0}{1 - \cos \varphi_0}. \quad (5.77)$$

Усі коефіцієнти Фур'є δ_{2n} та σ_{2n+1} у рівнянні (5.76) виражаються через елементарні функції, при цьому відрізняються від нуля тільки коефіцієнти з парними номерами при косинусах і коефіцієнти з непарними номерами при синусах.

Якщо ширини шарів несильно розрізняються, тоді коефіцієнти σ_{2n+1} є малими в порівнянні з коефіцієнтами δ_{2n} : $\sigma_{2n+1} \sim \delta_{2n} d/b$. Числовий аналіз [144] показав, що за умови $0.4a < (b+d) < 2.5a$ коефіцієнти δ_{2n} є достатньо малими, тому можна користуватися методом послідовних наближень. При цьому властивості досліджуваних ПХ є близькими до властивостей АПХ, що поширюються в круглому хвилеводі з ефективним радіусом (5.77). Електродинамічні властивості напівпровідникового середовища визначаються компонентами тензора діелектричної проникливості ε_k [1,2,9]. Вважаємо, що розбіжність між

властивостями напівпровідників є малою, $\left| \varepsilon_{1,2}^{(1)} \right| \ll \left| \varepsilon_{1,2}^{(0)} \right|$, це дозволяє скористатися методом послідовних наближень для дослідження впливу неоднорідності середовища на дисперсійні властивості поперечних ПХ. Дисперсійне рівняння для них здобувається за допомогою крайової умови (5.5).

Якщо напівпровідникові шари мають однакову товщину, то врахування того факту, що хвилевід має прямокутний, а не круглий, переріз, призводить до виникнення поправок до частоти цих ПХ тільки наступного порядку малості: $\sim \delta_{2n}(\varepsilon_1^{(1)})^2$. Тому для дослідження дисперсійних властивостей ПХ у прямокутних хвилеводах, повністю заповнених двома напівпровідниковими шарами рівної товщини, слід скористатися матеріалом з підрозділу 5.3.

Якщо ж шари напівпровідникового заповнення мають різну товщину, то в рівнянні (5.76) прямокутної утворюючої виникають малі Фур'є - гармоніки з непарними номерами, їхні амплітуди дорівнюють [149]:

$$\sigma_N = \frac{1}{R\pi} \left[a \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sin N\varphi}{\cos \varphi} d\varphi + \left(\frac{b}{2} + d \right) \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} \frac{\sin N\varphi}{\sin \varphi} d\varphi - \frac{b}{2} \int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} \frac{\sin N\varphi}{\sin \varphi} d\varphi \right]. \quad (5.78)$$

У граничному випадку $d \ll b$ перші амплітуди σ_N можна приблизно обчислити за наступними формулами:

$$\sigma_1 \approx (\pi - 2\varphi_1)d / (\pi R), \quad (5.79)$$

$$\sigma_3 \approx \frac{d}{\pi R} \left[\frac{8a^3b}{(a^2 + b^2)^2} - \frac{12ab}{a^2 + b^2} + \pi - 2\varphi_1 \right]. \quad (5.80)$$

Щоб визначити вплив розбіжності в товщині шарів на власну частоту ПХ, слід підставити до крайової умови (5) вирази

для полів з точністю до доданків першого порядку малості за неоднорідністю напівпровідникового заповнення. Виділивши у (5.5) доданки $\propto \exp(im\varphi)$, здобудемо дисперсійне рівняння даних ПХ у наступному вигляді [149]:

$$D^{(0)} + D_d^{(1+1)} = 0. \quad (5.81)$$

Розв'язок $\omega_m^{(0)}$ дисперсійного рівняння в нульовому наближенні:

$$D_m^{(0)}(\omega_m^{(0)}) = [m\mu_m(k_{\perp}^{(0)}R) + k_{\perp}^{(0)}RI'_m(k_{\perp}^{(0)}R)]N_{\perp}^{-2} = 0, \quad (5.82)$$

- вважаємо відомим, тут $N_{\perp}^2 = (ck_{\perp}^{(0)}/\omega)^2$. Малий доданок $D_d^{(1+1)}$ є пропорційним як до малої різниці у товщині шарів напівпровідникового заповнення, так і до першого ступеню неоднорідності напівпровідникового заповнення,

$$D_d^{(1+1)} = \frac{R\sigma_N}{2iN_{\perp}^2} \left\{ \frac{\mu^{(0)}}{R} [(m+N)\varepsilon_+^{(1)} - (m-N)\varepsilon_-^{(1)}] + \mu^{(0)} \left[(m-N)\frac{d\varepsilon_-^{(1)}}{dr} - (m+N)\frac{d\varepsilon_+^{(1)}}{dr} \right] + R\frac{d^2}{dr^2} (\varepsilon_-^{(1)} - \varepsilon_+^{(1)}) \right\} \Big|_{r=R; \omega=\omega_m^{(0)}}. \quad (5.83)$$

У випадку поширення НЧ ПХ у широкому хвилеводі, $k_{\perp}R \gg |m|$, поправка $\omega_d^{(1+1)}$ до власної частоти, що обумовлена неоднорідністю плазмового наповнення хвилеводу, дорівнює:

$$\omega_d^{(1+1)} = \frac{\sigma_N}{N} (k_{\perp}R) \left[\frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_1^{(0)}} - 2\frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} \right] \omega_m^{(0)}, \quad (5.84)$$

а для ВЧ ПХ:

$$\omega_d^{(l+1)} = \frac{\sigma_N}{N} \varepsilon_1^{(l)} (k_{\perp} R) \omega_m^{(0)}. \quad (5.85)$$

Якщо ж ПХ поширюються у вузькому $k_{\perp} R \ll |m|$ хвилеводі, то поправка $\omega_d^{(l+1)}$ в НЧ діапазоні частот дорівнює:

$$\omega_d^{(l+1)} = \frac{\sigma_N}{4} \left(\frac{2\delta}{R} \right)^{N+2} (m + N - l) m \frac{\varepsilon_2^{(l)} + \varepsilon_1^{(l)}}{\varepsilon_1^{(0)}} \omega_m^{(0)}, \quad (5.86)$$

і у ВЧ діапазоні частот

$$\omega_d^{(l+1)} = -\frac{\sigma_N}{32} (|m| + N + l) \left(\frac{2\delta}{R} \right)^{N+2} |m| (\varepsilon_2^{(l)} - \varepsilon_1^{(l)}) \omega_m^{(0)}. \quad (5.87)$$

Поправки до власних частот цих ПХ обумовлені двома факторами: відхиленням форми перерізу хвилеводу від кола, а також відмінністю електродинамічних властивостей напівпровідникових шарів. Аналіз виразів (5.84) – (5.87) показує, що запропонований підхід не можна застосовувати для дослідження дисперсійних властивостей ПХ у вузьких хвилеводах. Якщо властивості напівпровідникових шарів у широких хвилеводах слабо розрізняються, тобто виконуються нерівності:

$$\left| \frac{\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} \left(\frac{2\varepsilon_2^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} - \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_1^{(0)}} \right) \right| \ll 7 \frac{R\Omega_e}{c}, \quad (5.88)$$

у випадку поперечних НЧ ПХ та

$$\left| \frac{\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(1)}}{\varepsilon_2^{(0)}} \right| \ll 7 \frac{k_{\perp} R \omega_e^2}{\Omega_e^2}, \quad (5.89)$$

у випадку ВЧ ПХ, тоді відмінність їхніх дисперсійних властивостей від властивостей АПХ обумовлена, в основному, відмінністю форми перерізу хвилеводу від кола [144]. Оскільки коефіціє-

нти Фур'є в рівнянні (5.76) прямокутної утворюючої є малими, то розбіжність діелектричних властивостей напівпровідникових шарів може виявитися важливішою. У цьому випадку стають справедливими сильні нерівності, зворотні умовам (5.88) та (5.89), і дисперсійні властивості розглянутих тут поперечних ПХ є аналогічними властивостям поперечних ПХ у круглому хвилеводі з двошаровим напівпровідниковим заповненням.

За рівних інших умов вплив неоднорідності напівпровідникового заповнення сильніше позначається у випадку шарів різної товщини. Якщо товщини цих шарів розрізняються настільки, що виконується нерівність [149]:

$$\sigma_N \gg \varepsilon_2^{(1)} c / (\varepsilon_2^{(0)} R \omega_{pe}), \quad (5.90)$$

тоді відмінність дисперсійних властивостей цих ПХ від властивостей АПХ, що поширюються в круглому хвилеводі, визначається спільним впливом двох факторів: розбіжністю розмірів і електродинамічних властивостей шарів.

Відзначимо також, що дані поперечні електромагнітні ПХ можуть поширюватися також і поблизу поверхні широкого, $k_{\perp} R \gg |m|$, металевого стрижня майже прямокутного перерізу, який орієнтовано паралельно до зовнішнього магнітного поля і який лежить на плоскій межі поділу двох товстих, порівняно з глибиною k_{\perp}^{-1} проникнення поля ПХ, шарів n -напівпровідників. Розподіл полів поперечних ПХ і значення їхньої власної частоти можна визначити в цьому випадку, використавши вже перевірену на задачах даного розділу методику.