

Дифференциальная геометрия.
Базовый курс лекций.

Ямпольский А.Л.

Оглавление

1	Общие положения	7
1.1	Гладкие многообразия.	7
1.2	Локальная параметризация подмногообразий в $\mathbb{R}^n$	8
1.3	Явная параметризация.	10
1.4	Неявно заданные регулярные подмногообразия в $\mathbb{R}^n$	12
1.5	Преобразование базисов	13
1.5.1	Преобразование координат касательного вектора при замене параметров	14
1.6	Понятие регулярной поверхности	15
1.6.1	Кривые на поверхности	19
1.6.2	Касательное пространство.	20
2	Теория кривых	23
2.1	Основные положения теории кривых	23
2.1.1	Понятие регулярной кривой.	23
2.1.2	Касательная к кривой.	27
2.1.3	Расширение класса кривых.	29
2.1.4	Натуральная параметризация	30
2.2	Кривизна кривой	31
2.3	Репер Френе, трехгранник Френе.	37
2.4	Кручение кривой в E^3 . Формулы Френе.	42
2.5	Основная теорема теории кривых в E^3	47
2.6	Элементы геометрии плоских кривых	49
2.6.1	Ориентированная кривизна плоской кривой.	49
2.6.2	Основная теорема теории кривых на плоскости.	52
2.6.3	Овалы	53
2.6.4	Огибающая семейства плоских кривых.	57
2.7	Соприкосновение кривых и поверхностей	67
2.8	Формулы Френе для кривой в E^n	71
3	Теория поверхностей	73
3.1	Первая фундаментальная форма поверхности	73
3.1.1	Дифференциальная запись первой фундаментальной формы	75
3.1.2	Преобразование матрицы I фундаментальной формы при замене параметров	76

3.1.3	Первые фундаментальные формы некоторых поверхностей. . . .	76
3.2	Длина дуги кривой на поверхности	84
3.3	Угол между кривыми на поверхности	87
3.4	Площадь (m- мерный объем) области на поверхности	88
3.5	Отображение поверхностей. Изометрия	92
3.6	Конформные отображения	99
3.7	Вторая фундаментальная форма поверхности.	101
3.8	Соприкасающийся параболоид поверхности	106
3.9	Сферическое (Гауссово) отображение.	108
3.10	Гауссова кривизна поверхности.	111
3.11	Репер Дарбу. Деривационные формулы Дарбу.	114
3.12	Нормальная кривизна	118
3.12.1	Теорема Менье	118
3.12.2	Главные кривизны и главные направления	120
3.12.3	Индикатриса Дюпена.	125
3.12.4	Формула Эйлера	127
3.13	Омбилические точки. Вполне омбилические поверхности.	128
3.14	Геодезическое кручение поверхности. Линии кривизны	130
3.15	Асимптотические линии. Сопряженные сети.	135
3.16	Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии	136
3.17	Третья фундаментальная форма поверхности	138
3.18	Эквидистантные поверхности	140
3.19	Поверхности нулевой Гауссовой кривизны	143
3.20	Основные уравнения теории поверхностей.	149
3.20.1	Деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена.	149
3.20.2	Уравнения Гаусса и Кодацци. Терема Бонне.	151
3.21	Геодезические линии.	153
3.21.1	Внутреннее уравнение геодезической линии.	153
3.21.2	Полугеодезические системы координат.	158
3.21.3	Метрики постоянной кривизны	162
3.21.4	Поверхности вращения постоянной Гауссовой кривизны.	164
3.21.5	Окружности Гаусса. Теорема Бертрана-Пьюизе.	169
3.21.6	Окружности Дарбу	171
3.21.7	Геодезические как локально кратчайшие	173
3.21.8	Геодезические как экстремали функционала длины	174
3.22	Минимальные поверхности	179
3.22.1	Специальные минимальные поверхности в E^3	180
3.23	Ковариантный дифференциал векторного поля	188
3.24	Формула Гаусса-Бонне	190
3.24.1	Интегральная формула Гаусса. Теорема Якоби.	201
4	Тензоры в дифференциальной геометрии	205
4.1	Определение и примеры тензорных полей	205
4.2	Алгебраические операции над тензорами	208
4.3	Тензоры в некоординатном базисе	210
4.4	Дифференцирование тензора	212

4.5	Тензор кривизны	218
4.5.1	Тензор Риччи и скалярная кривизна	223
4.6	Дифференциальные операторы Бельтрами	223

Глава 1

Общие положения

1.1 Гладкие многообразия.

Определение 1.1.1 Многообразием размерности n называется связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность гомеоморфную $\mathbb{R}^n$.

Атласом на многообразии M^n называется набор открытых множеств $\{U_\alpha\}$ и гомеоморфизмов $\{\varphi_\alpha\}$ таких, что

- $M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$;
- каждый φ_{α} является гомеоморфизмом U_{α} на $\mathbb{R}^n$ ($U_{\alpha} \xrightarrow{\varphi_{\alpha}} \mathbb{R}^n$);
- если $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$, то $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является гомеоморфизмом.

Пара $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ называется *локальной картой*, φ_{α} называется *координатным гомеоморфизмом*, $\varphi_{\alpha\beta}$ называются *гомеоморфизмами склейки*. Таким образом, каждой точке многообразия, лежащей в локальной карте U_{α} , ставится в соответствие набор чисел $(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n)$, который называется *локальными координатами точки* в карте U_{α} . Так как φ_{α} – гомеоморфизм, то φ_{α}^{-1} отображает $\mathbb{R}^n$ в $U_{\alpha} \subset M$. Отображение φ_{α}^{-1} называется *локальной параметризацией M в локальной карте U_{α}* . Заметим, что ввиду счетности базы, атлас на многообразии можно выбрать так, что число его локальных карт не более чем счетно.

Если Q принадлежит пересечению U_{α} и U_{β} , то Q можно поставить в соответствие два набора параметров: $(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n)$ и $(y_{\beta}^1, \dots, y_{\beta}^n)$. Тогда гомеоморфизм склейки

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

является отображением арифметических пространств и задается набором из n непрерывных функций

$$y_{\beta}^i = y_{\beta}^i(x_{\alpha}^1, \dots, x_{\alpha}^n).$$

Определение 1.1.2 Многообразие называется *гладким класса C^k* , если существует атлас $\mathcal{A} = \{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ такой, что $\varphi_{\alpha\beta} \in C^m$ ($m \geq k$) для любых α, β таких, что $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$.

При $k = 0$ многообразие называется топологическим. Гладкие многообразия, в отличие от топологических, обладают свойством, позволяющим аналитически определить, является ли отображение склейки гомеоморфизмом (на самом деле даже *диффеоморфизмом*, то есть гладким, взаимно-однозначным отображением с гладким обратным). Такое средство дает *теорема об обратном отображении*, хорошо известная из анализа.

Теорема 1.1.1 Пусть $f : \mathbb{R}^n(x) \rightarrow \mathbb{R}^n(y)$ C^k -гладкое отображение, заданное набором гладких функций

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

Если в точке $p(x_p^1, \dots, x_p^n) \in M$ определитель матрицы Якоби

$$\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right) (p) \neq 0,$$

то существует окрестность U_p точки p такая, что в этой окрестности данное отображение обратимо и обратное к нему так же гладко класса регулярности C^k .

1.2 Локальная параметризация подмногообразий в $\mathbb{R}^n$.

Напомним следующее определение из курса топологии.

Определение 1.2.1 Подмножество F топологического пространства M называется подмногообразием, если F является многообразием в индуцированной топологии.

Мы будем рассматривать подмногообразия в $\mathbb{R}^n$. Пусть $F^k \subset \mathbb{R}^n$ подмногообразие. Обозначим через $(x^1, \dots, x^n)$ декартовы прямоугольные координаты в $\mathbb{R}^n$. Точке $p \in F^k$ соответствует набор декартовых координат $(x^1, \dots, x^n)$. Но, так как F^k – подмногообразие, то существует локальный гомеоморфизм φ некоторой ее индуцированной окрестности $W = U \cap F^k \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$ (U – окрестность точки в $\mathbb{R}^n$). Обозначим через $(u^1, \dots, u^k)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^k$. Тогда $\varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R}^k) = W \subset U$, а значит отображение $\varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ задается в виде

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^k) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.1)$$

Отображение (1.1) называется *локальной параметризацией* F^k (в окрестности точки $p \in F$). В пространстве $\mathbb{R}^n$, каждой его точке можно поставить в соответствие радиус-вектор этой точки. Тогда локальную параметризацию (1.1) можно записать в виде вектор-функции

$$\vec{r} = \vec{r}(u^1, \dots, u^k), \quad (1.2)$$

которая называется *векторной локальной параметризацией* подмногообразия в $F^k \subset \mathbb{R}^n$.

Аналитическим условием, обеспечивающим локальную обратимость¹ и гладкость для гладкого отображения (1.1), является его регулярность. Сформулируем это понятие в более широком контексте.

¹В смысле наличия отображения из $W = U \cap F^k$ на $\mathbb{R}^k$

Определение 1.2.2 Гладкое отображение $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *регулярным* в точке $p \in \mathbb{R}^k$, если ранг матрицы Якоби этого отображения в точке p максимален (т.е., равен $\min(k, n)$).

Пусть U_p – окрестность точки p в точках которой отображение f регулярно. При $k < n$ отображение называется *локальной иммерсией* (погружением); при $k > n$ отображение называется *локальной субмерсией* (наложением); при $k = n$ отображение называется *локальным диффеоморфизмом*.

Определение 1.2.3 Связное подмножество F в $\mathbb{R}^n$ называется *параметризованным регулярным подмногообразием*, если для любой точки $p \in F$ существует $U_p = W_p \cap F$ и такая локальная параметризация $\vec{r} : D(u^1, \dots, u^k) \rightarrow W_p \subset \mathbb{R}^n$, что ранг матрицы Якоби отображения $\vec{r}$ равен k .

Если локально отображение $\vec{r}$ задается как

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(u^1 \dots u^k) \\ &\vdots \\ x^n &= x^n(u^1 \dots u^k) \end{aligned}$$

то условие регулярности

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} \dots \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \dots \frac{\partial x^n}{\partial u^k} \end{pmatrix} = k$$

Если $k = 1$, то это подмногообразие называется *регулярной кривой*, а если $k = 2$ – *регулярной поверхностью*. Если $n > 3$ и $k = n - 1$, то подмногообразие называется *гиперповерхностью*.

Пример 1.2.1 Рассмотрим отображение

$$\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad I = (0, 2\pi).$$

заданное в виде

$$\vec{r} = \{\cos t, \sin t\} \sim \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Матрица Якоби:

$$\partial \vec{r} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Ее ранг равен 1 для всех t , так как $(x'_t)^2 + (y'_t)^2 \equiv 1$

Пример 1.2.2 $\vec{r} : D^2(u, v) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Здесь $D^2 = \mathbb{R}^2$, так как отображение определено и взаимно однозначно во всех точках $\mathbb{R}$. Матрица Якоби имеет вид:

$$\partial \vec{r} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \quad rg(\partial \vec{r}) = 2$$

Это поверхность эллиптического параболоида.

Пример 1.2.3 Рассмотрим $\vec{r} : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ вида

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases}$$

Здесь $D^2 = \{0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\}$ – открытый прямоугольник на плоскости $\mathbb{R}^2$. Матрица Якоби

$$(\partial \vec{r}) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ -\sin u & 0 \end{pmatrix}$$

Ее ранг может быть меньше 2 только в случае, когда столбцы матрицы пропорциональны. Рассмотрим вектор-функции, составленные из столбцов матрицы Якоби, а именно,

$$\begin{aligned} \partial_u \vec{r} &= \{ \cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u \} \\ \partial_v \vec{r} &= \{ -\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0 \} \end{aligned}$$

Тогда условие пропорциональности столбцов будет эквивалентно условию коллинеарности этих вектор-функций, что в свою очередь выражается в виде

$$\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = 0.$$

Вычислим

$$\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = \{\sin^2 u \cos v, -\sin^2 u \sin v, \sin u \cos v\} = \sin u \{\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u\}$$

Так как $\sin u|_{D^2} \neq 0$, то $rg(\partial \vec{r}) = 2$ и параметризация регулярна. Данная поверхность есть часть единичной сферы.

1.3 Явная параметризация.

Определение 1.3.1 Пусть F^k – подмногообразие в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что подмногообразие F^k допускает явную параметризацию в окрестности точки $p \in F^k$, если существует окрестность $U_p \subset F^k$, являющаяся графиком гладкого отображения $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, то есть

$$U_p = \{(x, y) \mid y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{n-k}\}.$$

Теорема 1.3.1 Если F^k – регулярное параметризованное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$, то для любой точки $p \in F^k$ есть окрестность U_p для которой существует явная параметризация.

Доказательство. Пусть точка $p \in F^k$. Пусть U_p – окрестность p для которой существует регулярная параметризация

$$\vec{r} : D^k(u^1 \dots u^k) \rightarrow U_p.$$

Выпишем это отображение в координатах:

$$\begin{cases} x^1 = & x^1(u^1 \dots u^k) \\ \vdots & \\ x^k = & x^k(u^1 \dots u^k) \\ x^{k+1} = & x^{k+1}(u^1 \dots u^k) \\ \vdots & \\ x^n = & x^n(u^1 \dots u^k) \end{cases}$$

Будем считать, что ранг этого отображения достигается на первых k строках, то есть, будем считать, что

$$\left. \operatorname{rg} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right) \right|_{D^k} = k, \quad i, j = 1, \dots, k$$

Обозначим через $\bar{p}$ точку в $\mathbb{R}^k$ с координатами $(u_p^1, \dots, u_p^k)$. Положим

$$x_p^i = x^i(u_p^1, \dots, u_p^k).$$

Тогда в некоторой окрестности $V(x_p) \subset \mathbb{R}^k$ существует обратное отображение

$$u : V(x_p) \rightarrow V_{\bar{p}} \subset U_p$$

записываемое в координатной форме как

$$u : \begin{cases} u^1 = u^1(x^1 \dots x^k) \\ \vdots \\ u^k = u^k(x^1 \dots x^k) \end{cases}$$

Причем, эти функции имеют тот же класс регулярности, что и исходные функции $x^i = x^i(u^1 \dots u^k)$. Подставляя эти функции в координатное выражение параметризации, получаем

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1 \\ x^2 &= x^2 \\ &\dots \\ x^k &= x^k \\ x^{k+1} &= f^1(x^1, \dots, x^k) \\ &\dots \\ x^n &= f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) \end{aligned}$$

что завершает доказательство. ■

1.4 Неявно заданные регулярные подмногообразия в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($n > m$) гладкое отображение. Точка $q \in \mathbb{R}^m$ называется *регулярным значением* отображения f , если ранг матрицы Якоби отображения f во всех точках $p \in f^{-1}(q)$ максимален².

Теорема 1.4.1 Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($n > m$) – гладкое отображение. Пусть $q \in \mathbb{R}^m$ – регулярное значение для f . Тогда каждая связная компонента $f^{-1}(q)$ является параметризованным подмногообразием $\mathbb{R}^n$ размерности $n - m$.

Доказательство. Покажем только, что в окрестности каждой точки из прообраза регулярного значения, подмножество $f^{-1}(q)$ может быть задано как график гладкого отображения.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – гладкое отображение. Пусть $q \in \mathbb{R}^m$ – регулярное значение. Пусть $p \in f^{-1}(q)$. Зададим наше отображение в координатах:

$$f : \begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ y^m = f^m(x^1, \dots, x^n) \end{cases}$$

Матрица Якоби выпишется как

$$\partial f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^m} & \frac{\partial f^m}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Будем считать, что

$$\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) \Big|_p \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Тогда существует окрестность U_p точки p такая, что

$$\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) \Big|_{U_p} \neq 0$$

По теореме о неявном отображении существует решение уравнения

$$f(x^1, \dots, x^m; x^{m+1}, \dots, x^n) = 0$$

в виде

$$f(\varphi^1(x^{m+1}, \dots, x^n), \varphi^2(x^{m+1}, \dots, x^n), \dots, \varphi^m(x^{m+1}, \dots, x^n), x^{m+1} \dots x^n) = 0$$

где $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ – гладкие функции. Значит решение уравнения:

$$f(x^1 \dots x^m, x^{m+1} \dots x^n) = 0$$

² т.е., равен m

может быть представлено в виде:

$$\begin{cases} x^1 = \varphi^1(x^{m+1} \dots x^n) \\ \vdots \\ x^m = \varphi^m(x^{m+1} \dots x^n) \\ x^{m+1} = x^{m+1} \\ \vdots \\ x^n = x^n \end{cases}$$

то есть, в виде графика отображения $\varphi : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Следовательно, каждая связанная компонента множества $f^{-1}(q)$ является параметризованным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ размерности $n - m$.

■

Определение 1.4.1 *Неявно заданным регулярным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ называется полный прообраз регулярного значения гладкого отображения $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Размерность этого подмногообразия равна $n - m$.*

Требование регулярности существенно в силу следующей теоремы.

Теорема 1.4.2 (Уитни). *Для любого замкнутого подмножества $F \subset \mathbb{R}^n$ существует C^∞ – гладкое отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, такое, что $F = f^{-1}(0)$.*

К примеру, без условия регулярности, подмножество

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

может иметь вид, мало напоминающий интуитивное представление о кривой. Взять хотя бы подмножество F на плоскости, состоящее из точек с целочисленными координатами или Канторovo множество.

1.5 Преобразование базиса касательного пространства при замене параметров

Пусть поверхность F^m параметризована двумя областями параметров $\mathcal{D}^m(u^1, \dots, u^m)$ и $\mathcal{G}(v^1, \dots, v^m)$ и пусть этим областям отвечают параметризации

$$\vec{r} = \vec{r}(u^1, \dots, u^m), \quad \vec{\rho} = \vec{\rho}(v^1, \dots, v^m).$$

Обозначим через $u = u(v)$ диффеоморфизм $u : \mathcal{G}^m \rightarrow \mathcal{D}^m$ вида

$$\begin{cases} u^1 = u^1(v^1, \dots, v^m), \\ \dots\dots\dots \\ u^m = u^m(v^1, \dots, v^m). \end{cases}$$

В произвольной точке $q \in F^m$ пространство $T_q F^m$ содержит две системы базисов $\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}$ и $\partial_1 \vec{\rho}, \dots, \partial_m \vec{\rho}$.

Составим формальные матрицы-строки,

$$\partial \vec{r} = (\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}) \quad \text{и} \quad \partial \vec{\rho} = (\partial_1 \vec{\rho}, \dots, \partial_m \vec{\rho}).$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.5.1 Пусть регулярная поверхность F^m параметризована двумя вектор-функциями $\vec{r} = \vec{r}(u)$ и $\vec{\rho} = \vec{\rho}(v)$ над областями параметров $\mathcal{D}^m(u)$ и $\mathcal{G}(v)$ соответственно. И пусть $u : \mathcal{G}^m \rightarrow \mathcal{D}^m$ локальный диффеоморфизм. Тогда

$$\partial \vec{r} = \partial \vec{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right),$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)$ — матрица Якоби преобразования координат.

Доказательство. Так как $u : \mathcal{G}^m \rightarrow \mathcal{D}^m$ локальный диффеоморфизм, то он задает перепараметризацию а поверхности и мы можем записать

$$\vec{\rho}(v^1, \dots, v^m) = \vec{r}(u^1(v^1, \dots, v^m), \dots, u^m(v^1, \dots, v^m)).$$

Тогда, по правилу дифференцирования сложной функции, найдем

$$\partial_i \vec{\rho} = \partial_k \vec{r} \frac{\partial u^k}{\partial v^i},$$

что в матричной форме записи переписывается в виде

$$(\partial_1 \vec{\rho}, \dots, \partial_m \vec{\rho}) = (\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}) \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^1}{\partial v^m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial u^m}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial v^m} \end{pmatrix}$$

или в свернутом виде

$$\partial \vec{\rho} = \partial \vec{r} \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right).$$

■

1.5.1 Преобразование координат касательного вектора при замене параметров

Пусть $\vec{X}$ касательный вектор к поверхности F^m в произвольной ее точке. Так как вектор-функции $\partial_i \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}$ определяют базис касательного пространства поверхности F^m в каждой ее точке, то имеет место разложение

$$\vec{X} = X^1 \partial_1 \vec{r} + \dots + X^m \partial_m \vec{r}.$$

В этом разложении вектор $\vec{X}$ представлен как вектор в E^{m+p} , имеет $m+p$ координат, которые мы будем называть внешними координатами вектора $\vec{X}$.

Поставим в соответствие вектору $\vec{X}$ набор параметров $(X^1, \dots, X^m)$ записанных в виде вектора-столбца:

$$\vec{X} \rightarrow \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{bmatrix} = X.$$

Этот набор параметров мы будем называть *внутренними координатами* касательного вектора $\vec{X}$. Используя внутренние координаты вектора, его разложение по базису касательного пространства данной параметризации, скажем $\vec{r} = \vec{r}(u)$, примет вид

$$\vec{X} = \partial \vec{r} X.$$

Утверждение 1.5.2 Пусть регулярная поверхность F^m параметризована двумя вектор-функциями $\vec{r} = \vec{r}(u)$ и $\vec{\rho} = \vec{\rho}(v)$ над областями параметров $\mathcal{D}^m(u)$ и $\mathcal{G}(v)$ соответственно. И пусть $u : \mathcal{G}^m \rightarrow \mathcal{D}^m$ локальный диффеоморфизм. Обозначим через $X(u)$ и $X(v)$ внутренние координаты одного и того же вектора относительно систем координат $\mathcal{D}^m(u)$ и $\mathcal{G}^m(v)$ соответственно. Тогда

$$X(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) X(v),$$

Доказательство. Пусть $\vec{X}$ произвольный касательный вектор к поверхности. Тогда его разложения по базисам двух параметризаций будут иметь вид

$$\vec{X} = X^1(u) \partial_1 \vec{r} + \dots + X^m(u) \partial_m \vec{r}, \quad \vec{X} = X^1(v) \partial_1 \vec{\rho} + \dots + X^m(v) \partial_m \vec{\rho}$$

или в матричной записи

$$\vec{X} = \partial \vec{r} X(u), \quad \vec{X} = \partial \vec{\rho} X(v).$$

Мы получили два разложения одного и того же вектора в E^{m+p} и, следовательно, получаем равенство

$$\partial \vec{r} X(u) = \partial \vec{\rho} X(v).$$

Пользуясь формулой преобразования базисов касательного пространства, продолжим

$$\partial \vec{r} X(u) = \partial \vec{\rho} X_v = \partial \vec{r} \frac{\partial u}{\partial v} X(v).$$

Отсюда немедленно заключаем

$$X(u) = \frac{\partial u}{\partial v} X(v).$$

■

1.6 Понятие регулярной поверхности и касательного пространства.

Напомним некоторые понятия, относящиеся к геометрии поверхностей.

Определение 1.6.1 Элементарной поверхностью $F^m \subset \mathbb{R}^{m+p}$ называется образ открытого шара $\mathcal{D}^m \subset \mathbb{R}^m$ при его топологическом отображении в $\mathbb{R}^{m+p}$.

переводит $\mathcal{D}^m$ в точку, а значит не является гомеоморфизмом. На уравнения (1.3) необходимо наложить дополнительное условие, чтобы по отображениям φ_i восстанавливался гомеоморфизм φ . Исключение составляет случай, когда отображение $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$ имеет вид

$$\varphi(u) = (u, h(u)).$$

где $u \in \mathcal{D}^m$. В этом случае отображение φ задает биекцию между $\mathcal{D}^m$ и графиком Γ_h отображения $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Отображение h непрерывно (гладко) тогда и только тогда, когда отображение $\varphi : \mathcal{D}^m \rightarrow \Gamma_h$, заданное по формуле $\varphi(u) = (u, h(u))$, является гомеоморфизмом (диффеоморфизмом) $\mathcal{D}^m$ на график отображения h , то есть

$$\mathcal{D}^m \xrightarrow{\varphi} \varphi(\mathcal{D}^m) = \Gamma_h.$$

Таким образом, графики гладких отображений дают пример элементарных поверхностей, которые называются *явно заданными*.

Определение 1.6.2 *Говорят, что отображение $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$ задает поверхность F^m над областью $\mathcal{D}^m \subset \mathbb{R}^m$ явно, если $\varphi|_{\mathcal{D}^m}$ имеет вид диагонального произведения*

$$\varphi|_{\mathcal{D}^m} = id \times h,$$

где $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ гладкое отображение, а $id : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – тождественное отображение.

Укажем теперь критерий, позволяющий локально задавать элементарные поверхности или, что то же самое, локально восстанавливать гомеоморфизм по его координатному выражению.

Утверждение 1.6.1 *Пусть $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$, заданное своими компонентами $\varphi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$, и $\varphi \in C^k$ ($k \geq 1$). Если в точке $u_0 \in \mathbb{R}^m$ ранг матрицы Якоби*

$$\operatorname{rg} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \Big|_{u_0} = m,$$

то существует окрестность A_{u_0} точки u_0 и локальный диффеоморфизм $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ такие, что

$$(\varphi \circ \psi)|_{A_{u_0}} = id \times h,$$

где $h \in C^k$.

Иными словами, выбором новой локальной параметризации, подмножество $\varphi(A_{u_0}) \subset \mathbb{R}^{m+p}$ может быть представлено в виде графика гладкого отображения с сохранением порядка гладкости.

Доказательство. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+p} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. Представим это отображение в виде диагонального произведения $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ полагая

$$\varphi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u)),$$

где $\varphi_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, а $\varphi_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Так как

$$\operatorname{rg} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \Big|_{u_0} = m,$$

то не нарушая общности, будем считать, что

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right) \Big|_{u_0=0} \neq 0.$$

Тогда существует окрестность A_{u_0} , такая что $\det \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right) \Big|_{A_{u_0}=0} \neq 0$.

По теореме об обратном отображении существует отображение

$$\psi: \mathbb{R}^m \leftarrow \mathbb{R}^m,$$

такое что $(\varphi_1 \circ \psi)|_{A_{u_0}} = id$, при этом $\psi \in \mathcal{C}^k$ и является локальным диффеоморфизмом. Тогда имеем

$$\varphi \circ \psi = (\varphi_1 \circ \psi, \varphi_2 \circ \psi) = (id, h),$$

т.е. $(\varphi \circ g)|_{A_{u_0}} = id \times h$, $h \in \mathcal{C}^k$, что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Доказанное утверждение является основой для определения регулярной поверхности.

Определение 1.6.3 Подмножество $F^m \subset \mathbb{R}^{m+p}$ называется *регулярной параметризованной поверхностью размерности m класса $\mathcal{C}^k$* , если у каждой точки $q \in F^m$ этого множества существует окрестность $V_q \subset \mathbb{R}^{m+p}$ и диффеоморфизм $\varphi: \mathcal{D}^m \subset \mathbb{R}^m \rightarrow F^m \cap V_q = W_q$, что $\varphi \in \mathcal{C}^k$ и

$$\operatorname{rg} \varphi|_{\mathcal{D}^m} = m.$$

Отображение φ называется *регулярной параметризацией поверхности F^m в окрестности W_q* .

Непосредственно из определения следует, что регулярная поверхность локально может быть задана как график некоторого отображения.

В дифференциальной геометрии отображение $\varphi: \mathcal{D}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$ принято задавать в виде вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u^1, \dots, u^m)$, откладывая вектор $\vec{r}$ с координатами

$$\{\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u)\}$$

от начала координат отождествлять образ $\varphi(\mathcal{D}^m)$ с годографом этой вектор-функции. Вместо

$$\varphi: \begin{cases} x^1 &= \varphi_1(u^1, \dots, u^m); \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ x^{n+p} &= \varphi_{m+p}(u^1, \dots, u^m) \end{cases}$$

пишут

$$\vec{r} = \vec{r}(u) = \{\varphi_1(u), \dots, \varphi_{m+p}(u)\}.$$

По определению полагаем, что $\vec{r}(u) \in \mathcal{C}^k$ если $\varphi_i \in \mathcal{C}^s$, $(s \geq k)$. Образ вектор-функции $\vec{r}$ называется ее *годографом*.

Обозначим

$$\partial_i \vec{r} = \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^i} \right\} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Утверждение 1.6.2 *Регулярность параметризации $\vec{r}: \mathcal{D}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$ эквивалентна линейной независимости системы вектор-функций*

$$\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}.$$

Доказательство. Столбцы матрицы Якоби отображения $\vec{r}$

$$\partial \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^m} \end{pmatrix}$$

составлены из вектор-функций $\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}$, а значит, если $\text{rg} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) = m$, то векторы $\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}$ линейно независимы. ■

Регулярную поверхность можно получить, используя теорему о прообразе регулярного значения отображения.

Утверждение 1.6.3 *Пусть $f: \mathbb{R}^{m+p} \rightarrow \mathbb{R}^p$ — гладкое отображение и пусть $y_0 \in \mathbb{R}^p$ — регулярное значение отображения f . Тогда $f^{-1}(y_0)$ — регулярная параметризованная поверхность.*

Такие поверхности называются заданными *неявно*.

1.6.1 Кривые на поверхности

Определение 1.6.4 *Пусть $F^m \subset \mathbb{R}^{m+p}$ — поверхность. Кривой на поверхности F^m называется непрерывное отображение $\sigma: [a, b] \rightarrow F^m$, являющееся локальным гомеоморфизмом на свой образ.*

Пусть $\varphi: \mathcal{D}^m \rightarrow \varphi(\mathcal{D}^m) \subset \mathbb{R}^{m+p}$ локальный гомеоморфизм. Тогда отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{D}^m$ заданное как $\gamma = \varphi^{-1} \circ \sigma$, есть кривая в области параметров $\mathcal{D}^m$. И наоборот, если $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{D}^m$ — кривая в области параметров, то $\sigma = \varphi \circ \gamma: [a, b] \rightarrow F^m$ — кривая на поверхности. Таким образом, кривую на поверхности можно представить кривой в области параметров и наоборот, любую кривую из области параметров можно поднять на поверхность.

Уравнение кривой на поверхности, представленное уравнением кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{D}^m$ в области параметров называется **внутренним параметрическим уравнением** кривой на поверхности F^m .

Запишем внутренне уравнение кривой на поверхности в виде

$$\gamma: \begin{cases} u^1 = u^1(t), \\ \dots\dots\dots \\ u^m = u^m(t). \end{cases}$$

Зададим F^m вектор-функцией $\vec{r}: \mathcal{D}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$. Тогда **внешним параметрическим уравнение кривой** называется уравнение

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u(t)) \quad \sim \quad \vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma.$$

Внутреннее уравнение кривой задает эту кривую безотносительно к пространству, в котором лежит рассматриваемая поверхность. Оно связывает внутренние локальные координаты точек поверхности. Переход к внешнему уравнению кривой означает задание кривой, лежащей на поверхности, как кривой в объемлющем евклидовом пространстве.

Утверждение 1.6.4 *Кривая $\vec{\gamma}(t)$ регулярна как кривая в E^{m+p} тогда и только тогда, когда регулярна кривая $\gamma(t)$ как кривая в области параметров регулярной поверхности.*

Доказательство. Действительно, касательный вектор к кривой в области параметров имеет вид

$$\gamma' = \left\{ \frac{du^1}{dt}, \dots, \frac{du^m}{dt} \right\}.$$

Для касательного вектора кривой $\vec{\gamma}$ получаем

$$\vec{\gamma}' = \partial_i \vec{r} \frac{du^i}{dt}.$$

Теперь очевидно, что если $|\vec{\gamma}'| \neq 0$, то и $|\gamma'| \neq 0$ в силу линейной независимости векторов $\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r}$ и наоборот.

■

1.6.2 Касательное пространство.

Определение 1.6.5 *Касательным пространством к поверхности $F^m \subset E^{m+p}$ в точке $q \in F^m$ называется линейное пространство $T_q F^m \subset E^{m+p}$, содержащее касательные векторы ко всем регулярным кривым $\gamma \subset F^m$, проходящим через точку q .*

Утверждение 1.6.5 *Пусть F^m — регулярная поверхность, $q \in F^m$. Тогда в точке q существует касательное пространство, причем*

$$T_q F^m = \text{Lin}(\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r})(q).$$

Доказательство. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(u^1, \dots, u^m)$ — локальная параметризация F^m и пусть точке q соответствуют координаты $(u_q^1, \dots, u_q^m)$. Пусть γ — регулярная кривая на F^m , проходящая через точку q , то есть

$$\gamma: [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow F^m,$$

причем $\gamma(t_0) = q$. Запишем внутреннее уравнение кривой γ

$$\gamma: \begin{cases} u^1 = u^1(t), \\ \dots\dots\dots \\ u^m = u^m(t). \end{cases}$$

Тогда внешнее уравнение кривой γ имеет вид

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u^1(t), \dots, u^m(t)).$$

Касательный вектор кривой $\vec{\gamma}$ в точке q находим как касательный вектор к кривой в E^{m+p} по обычному правилу, дифференцируя вектор-функцию $\vec{\gamma}(t)$

$$\vec{\gamma}'(t_0) = \partial_i \vec{r}(q) \frac{du^i}{dt}(t_0).$$

Следовательно,

$$\vec{\gamma}'(t_0) \in \text{Lin}(\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r})(q).$$

И обратно, если рассмотреть произвольный вектор

$$\vec{a} = a^1 \partial_1 \vec{r}(q) + \dots + a^m \partial_m \vec{r}(q) \in \text{Lin}(\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r})(q).$$

то кривая в области параметров вида

$$\gamma : \begin{cases} u^1 = a^1 t + u_q^1, \\ \dots\dots\dots \\ u^m = a^m t + u_q^m, \end{cases}$$

задает на поверхности регулярную кривую

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(a^1 t + u_q^1, \dots, a^m t + u_q^m),$$

проходящую через точку $q \in F^m$ при $t = 0$. Причем

$$\vec{\gamma}'(0) = a^1 \partial_1 \vec{r}(q) + \dots + a^m \partial_m \vec{r}(q) = \vec{a}.$$

Следовательно,

$$T_q F^m = \text{Lin}(\partial_1 \vec{r}(q), \dots, \partial_m \vec{r}(q))$$

■

Следствие 1.6.1 Уравнение касательного пространства к F^m в точке q , как аффинного подпространства в E^{m+p} , имеет вид

$$\vec{R} = \vec{r}(q) + t^i \partial_i \vec{r}(q),$$

где $\vec{r} = \vec{r}(u_1, \dots, u^m)$ — параметризация F^m .

Глава 2

Теория кривых

2.1 Основные положения теории кривых.

2.1.1 Понятие регулярной кривой.

Редукция определения регулярного параметризованного подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ к размерности 1 дает определение регулярной параметризованной кривой.

Определение 2.1.1 Связное подмножество $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ называется *регулярной кривой* класса C^k ($k \geq 1$), если каждая точка $p \in \gamma$ имеет окрестность $W_p \subset \mathbb{R}^n$ в которой $\gamma \cap W_p$ допускает параметризацию

$$\vec{r}: (\alpha_p, \beta_p) \rightarrow \gamma \cap W_p$$

такую, что $\vec{r}(t) \in C^k$ и $\vec{r}'_t \neq \vec{0}$ для всех $t \in (\alpha_p, \beta_p)$.

Параметризация, указанная в Определении 2.1.1, называется *регулярной параметризацией* кривой γ . Частным случаем регулярной кривой является так называемая элементарная кривая.

Определение 2.1.2 Подмножество $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ называется *элементарной кривой*, если γ гомеоморфно открытому интервалу в $\mathbb{R}^1$.

Ясно, что всякая регулярная кривая является локально-элементарной.

Пусть M произвольная точка в $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x^1, \dots, x^n)$. Вектор $\vec{r}_M$, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой M называется *радиус-вектором* точки M . Его координаты численно равны координатам точки M

$$\vec{r}_M = \{x^1, \dots, x^n\}.$$

Следовательно, точки регулярной кривой в каждой координатной окрестности могут быть заданы при помощи *вектор-функции* $\vec{r}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданной на интервале (a, b) , в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\} \quad t \in (a, b). \quad (2.1)$$

Задание кривой в виде (2.1) называется *векторным параметрическим уравнением* кривой. Говорят, так же, что вектор-функция (2.1) задает *параметризацию* кривой

на интервале (a, b) . Множество точек, описываемое концом вектор-функции $\vec{r}(t)$, т.е. множество точек γ , называется *годографом* вектор-функции $\vec{r}(t)$.

Выбор параметризации кривой в значительной степени произволен. Пусть γ – кривая и вектор-функция $\vec{r}(t)$ задает ее параметризацию (гомеоморфизм) на интервале $I = (a, b)$, то есть

$$\gamma = \vec{r}(I).$$

Пусть g – гомеоморфизм некоторого интервала $J = (c, d)$ на интервал (a, b) так, что

$$t = g(\theta) \quad \theta \in (c, d), \quad (2.2)$$

причем $g(J) = I$. Тогда вектор-функция

$$\vec{\rho}(\theta) = \vec{r}(g(\theta)) \quad (2.3)$$

является гомеоморфизмом $\vec{\rho} : J \rightarrow \gamma$, заданным на интервале (c, d) . Говорят, что отображение (2.2) определяет переход к новому параметру, а вектор-функция (2.3) задает новую параметризацию γ .

Вектор-функция (2.1) может быть расписана по координатам в виде

$$\begin{cases} x^1 = \varphi_1(t) \\ \dots\dots\dots \\ x^n = \varphi_n(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

Задание кривой в виде (2.4) называется *скалярным параметрическим уравнением* кривой.

Если функции $\varphi_i(t) \in C^m$ ($m \geq k$), то говорят, что вектор-функция $\vec{r}(t) \in C^k$ и что параметрически заданная кривая (2.1) имеет параметризацию класса C^k .

Утверждение 2.1.1 Если кривая γ допускает регулярную параметризацию, то γ допускает бесконечно много других регулярных параметризаций.

Доказательство. Пусть $\vec{r}(t)$ — регулярная параметризация γ , причем

$$\vec{r} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{r}'_t|_{(a,b)} \neq \vec{0}.$$

Рассмотрим произвольный интервал (c, d) . Все интервалы гомеоморфны между собой. Рассмотрим сюръективную гладкую функцию $g : (c, d) \rightarrow (a, b)$, такую что $g \in C^k$ и $g'_\theta \neq 0$, для любого $\theta \in (c, d)$. Тогда $t = g(\theta)$ и вектор-функция $\vec{\rho} = \vec{r}(g(\theta))$ такова, что $\vec{\rho}(c, d) = \vec{r}(a, b) = \gamma$. При этом $\vec{\rho}'_\theta = \vec{r}'_t g'_\theta \neq \vec{0}$. Поэтому $\vec{\rho}(\theta)$ — новая регулярная параметризация γ .

■

Явно заданные кривые

Рассмотрим *плоские* кривые. Явное задание плоской кривой имеет вид

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

Явно заданную кривую можно представить параметрическим уравнением вида

$$\vec{r}(t) = \{t, f(t)\}$$

или, в параметрической форме

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Если $f \in C^k$, то кривая γ — регулярная, поскольку $\vec{r}'_t = \{1, f'\} \neq \{0, 0\}$ при всех допустимых значениях параметра.

В пространстве, явное задание регулярной кривой имеет вид

$$\vec{r}(t) = \{t, f(t), g(t)\}$$

или, в параметрической форме

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t) \\ z = g(t). \end{cases}$$

Если $f, g \in C^k$, то кривая γ — регулярная, поскольку $\vec{r}'_t = \{1, f', g'\} \neq \{0, 0, 0\}$ при всех допустимых значениях параметра.

Примеры.

1. Парабола.

$$\vec{r}(t) \begin{cases} x = t, \\ y = t^2. \end{cases}$$

Эта кривая явно задана над всей областью определения.

2. "Верхняя" полуокружность окружности.

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \end{cases} \quad -1 < t < 1.$$

Вся окружность не гомеоморфна интервалу, но каждая ее точка может быть включена в некоторую открытую полуокружность, которая может быть задана явно, то есть в виде графика функции.

3. Простая винтовая линия.

$$\begin{cases} x = a \sin t, \\ y = a \cos t, \\ z = bt \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

Аналогично, подмножество

$$\gamma = \{(t, y^2, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n \mid y^2 = f_2(t), \dots, y^n = f_n(t)\}$$

называется *явно заданной кривой* в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что если $f_i \in C^k$, то γ — регулярная кривая и

$$\vec{r}(t) = \{t, f_2(t), \dots, f_n(t)\}$$

ее регулярная параметризация на общем интервале определения функций f_i .

Редукцией Теоремы 1.3.1 к рассматриваемому случаю является следующее утверждение.

Утверждение 2.1.2 В окрестности каждой своей точки регулярная кривая класса C^k может быть задана явно при помощи отображения того же класса регулярности.

Неявно заданные регулярные кривые.

Неявно заданной кривой на плоскости называется множество точек, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0,$$

для некоторой функции $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Определение 2.1.3 Подмножество $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ называется регулярной класса C^k ($k \geq 2$), неявно заданной кривой на плоскости, если $F \in C^k$ и в каждой точке $p \in \gamma$

$$F_x^2(p) + F_y^2(p) \neq 0.$$

Редукция Теоремы 1.4.1 к этому случаю формулируется следующим образом.

Утверждение 2.1.3 В окрестности любой точки $p \in \gamma$ неявно заданная регулярная кривая класса C^k может быть задана явно при помощи функции того же класса регулярности.

Доказательство. Пусть

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

неявно заданная регулярная кривая, причем $F \in C^k$. Пусть точка $p \in \gamma$ и $F_x^2 + F_y^2|_p \neq 0$. Тогда существует окрестность U_p в которой $F_x^2 + F_y^2|_{U_p} \neq 0$. Предположим, что $F_y|_{U_p} \neq 0$. По известной теореме из анализа, в окрестности U_p определена функция $y = f(x) \in C^k$, такая, что

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

Это означает, что в окрестности U_p

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\},$$

что и завершает доказательство. ■

В пространстве неявное задание регулярной кривой можно интерпретировать как линию пересечения двух регулярных поверхностей.

Упражнение 2.1.1 Пусть $F(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$ две функции класса C^k ($k \geq 2$). Предположим, что $\text{grad } F \nparallel \text{grad } \Phi$. Покажите, что каждая связная компонента множества

$$\gamma = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0, \Phi(x, y, z) = 0\} \quad (2.5)$$

является регулярной класса C^k кривой в E^3 . Кривая, заданная в виде (2.5) называется неявно заданной кривой в пространстве.

2.1.2 Касательная к кривой.

Пусть γ параметрически заданная кривая, а $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — ее параметризация. Пусть $P \in \gamma$, причем точке P соответствует значение параметра $t = t_0$. Определим левую U_- и правую U_+ полуокрестности точки P следующим образом

$$U_- = \{t : t_0 - \epsilon < t \leq t_0\},$$

$$U_+ = \{t : t_0 < t \leq t_0 + \epsilon\}.$$

Левой (правой) *секущей* γ в точке P называется луч $\overrightarrow{PQ_-}$ (соответственно, $\overrightarrow{PQ_+}$), где $Q_- \in U_-$ (соответственно, $Q_+ \in U_+$).

Если существует предел

$$l_- = \lim_{Q_- \rightarrow P} \overrightarrow{PQ_-},$$

то предельный луч l_- называется *левой полукасательной* кривой γ в точке P . Аналогично, если существует предел

$$l_+ = \lim_{Q_+ \rightarrow P} \overrightarrow{PQ_+},$$

то предельный луч l_+ называется *правой полукасательной* кривой γ в точке P .

- Если объединение $l = l_- \cup l_+$ является прямой, то эта прямая l называется *касательной* к γ в точке P .
- Если $l_- = l_+ = l$, то точка P называется *точкой возврата* на γ , а соответствующий луч l называется *полукасательной* в точке P .
- В остальных случаях точка P называется *угловой*.

Утверждение 2.1.4 В любой точке регулярной кривой $\gamma \in C^1$ существует единственная касательная.

Доказательство. Пусть $P \in \gamma$ и пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ регулярная параметризация γ в окрестности точки P . Пусть точке P соответствует значение параметра $t = t_0$. Тогда точкам левой полуокрестности будут соответствовать значения параметра вида

$$Q_- \hookrightarrow t_0 + \Delta t_- \quad (\Delta t_- < 0),$$

а правой — вида

$$Q_+ \hookrightarrow t_0 + \Delta t_+ \quad (\Delta t_+ < 0).$$

Тогда векторы

$$\overrightarrow{PQ_-} = \vec{r}(t_0 + \Delta t_-) - \vec{r}(t_0) \quad \text{и} \quad \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t_-) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t_-}$$

коллинеарны и противоположно направлены, а векторы

$$\overrightarrow{PQ_+} = \vec{r}(t_0 + \Delta t_+) - \vec{r}(t_0) \quad \text{и} \quad \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t_+) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t_+}$$

коллинеарны и сонаправлены. Так как $\vec{r}(t) \in C^1$, то

$$\lim_{Q_{\pm} \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t_{\pm}) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t_{\pm}} = \vec{r}'(t_0),$$

а значит предельные положения лучей $\overrightarrow{PQ}_+$ и $\overrightarrow{PQ}_-$ дополняют друг друга до прямой, являющейся касательной к γ в точке P .

■

Запишем уравнение касательной к кривой, заданной в параметрической форме. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ регулярная параметризация кривой и P – точка на кривой, соответствующая значению параметра $t = t_0$. Радиус-вектором точки P будет вектор $\vec{r}(t_0)$. Обозначим через $\vec{R} = \{x, y, z\}$ радиус-векторы точек в $\mathbb{R}^3$. *Направляющим вектором касательной* в точке P является вектор $\vec{r}'(t_0)$. В таком случае уравнение касательной запишется очевидным образом в виде

$$\vec{R}(\theta) = \vec{r}(t_0) + \theta \vec{r}'(t_0),$$

где θ параметр на прямой.

В канонической форме уравнение касательной запишется как

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Заметим, что уравнение касательной, записанное в векторной форме, от размерности пространства не зависит. В E^n уравнение касательной для регулярной кривой имеет вид

$$\frac{x_1 - x_1(t_0)}{x'_1(t_0)} = \dots = \frac{x_n - x_n(t_0)}{x'_n(t_0)}.$$

Пусть $\gamma : F(x, y) = 0$ неявно заданная регулярная кривая на плоскости, причем точке P соответствует точка (x_0, y_0) , тогда вектор

$$\vec{N} = \{F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)\}$$

ортогонален вектору касательной к γ . Действительно, если $x = x(t), y = y(t)$ параметрическое уравнение кривой γ в окрестности точки P , то имеет место тождество

$$F(x(t), y(t)) \equiv 0.$$

Дифференцируя, найдем

$$F_x x'_t + F_y y'_t \equiv 0$$

и так как $\{x'_t, y'_t\}$ есть вектор касательной к γ , то вектор $\vec{N} = \{F_x, F_y\}$ есть вектор нормали касательной. Значит, уравнение касательной в точке P можно записать в виде

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0) = 0.$$

Для неявно заданной кривой в пространстве, аналогичные рассуждения показывают, что направляющий вектор касательной коллинеарен векторному произведению градиентов функций, задающих кривую. Поэтому, для кривой

$$\gamma = \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

направляющий вектор касательной

$$\vec{T} = \text{grad}(F) \times \text{grad}(\Phi),$$

что позволяет написать уравнение касательной в произвольной точке $(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$.

2.1.3 Расширение класса кривых.

Наряду с регулярными кривыми, объектом рассмотрения в дифференциальной геометрии являются кривые, имеющие конечное число нерегулярных точек.

Определение 2.1.4 Пусть γ — параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$, $\vec{r}(t)$ — ее параметризация. Точка P , отвечающая параметру $t = t_0$ называется особой точкой параметризации, если $\vec{r}'(t_0) = 0$. Если $\vec{r}'(P) = 0$ для любой локальной параметризации γ , то точка P называется особой точкой параметризованной кривой.

Если рассматривать параметр t как время, а вектор-функцию $\vec{r}(t)$ как траекторию движения точки, то вектор-функцию $\vec{r}'(t)$ можно рассматривать как вектор скорости точки на траектории движения. В точках с нулевой производной происходит "остановка" движения. Такие точки называются точками возврата. В них происходит мгновенное изменение направления движения на противоположное. Для параметризации плоской кривой достаточно высокого порядка гладкости, можно дать признак, отличающий точки нерегулярности параметризации от точек нерегулярности самой кривой.

Упражнение 2.1.2 Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t) \in C^\infty$ параметризация кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что существует значение параметра t_0 такое, что $\vec{r}'(t_0) = \vec{0}$. Пусть p — порядок первой ненулевой производной вектор-функции $\vec{r}^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$. Пусть q — порядок первой ненулевой производной $\vec{r}^{(q)}(t_0) \nparallel \vec{r}^{(p)}(t_0)$. Доказать, что

1. Если p — нечетно, то точка $P = \vec{r}(t_0)$ — регулярная точка кривой γ . При этом,
 - (а) Если q четно, то P — "обычная" точка и $\vec{r}^{(p)}(t_0)$ — направляющий вектор касательной.
 - (б) Если q нечетно, то точка P — точка перегиба и $\vec{r}^{(p)}(t_0)$ — направляющий вектор касательной.
2. Если p четно, то точка P — особая. При этом,
 - (а) Если q четно, то P — точка возврата первого рода и $\vec{r}^{(p)}(t_0)$ — направляющий вектор полукасательной.
 - (б) Если q нечетно, то P — точка возврата второго рода и $\vec{r}^{(p)}(t_0)$ — направляющий вектор полукасательной.

Для неявно заданных плоских кривых особые точки определяются следующим образом.

Определение 2.1.5 Пусть γ — неявно заданная кривая и $F(x, y) = 0$ — ее неявное уравнение. Точка (x_0, y_0) на γ называется особой точкой неявного задания кривой, если

$$F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0$$

Особая точка неявного задания не всегда является особой точкой на параметризованной кривой.

Достаточно грубый способ исследования особых точек плоской неявно заданной кривой дают следующие соображения. Пусть (x_0, y_0) - особая точка для уравнения $F(x, y) = 0$. Будем полагать, что $F \in C^k$ и $(k \geq 2)$. Переносом начала координат в точку (x_0, y_0) можно добиться того, что особая точка будет иметь координаты $(0, 0)$. При этом $F(0, 0) = 0, F'_x(0, 0) = 0, F'_y(0, 0) = 0$. Разложим $F(x, y)$ по формуле Тейлора

$$F(x, y) = F(0, 0) + F_x(0, 0)x + F_y(0, 0)y + F_{xx}(0, 0)x^2 + 2F_{xy}(0, 0)xy + F_{yy}(0, 0)y^2 + o(x^2 + y^2) = F_{xx}(0, 0)x^2 + 2F_{xy}(0, 0)xy + F_{yy}(0, 0)y^2 + o(x^2 + y^2)$$

Предположим, что в точке $(0, 0)$

$$F_{xx}^2 + F_{xy}^2 + F_{yy}^2 \neq 0.$$

Тогда с точностью до малых второго порядка

$$F(x, y) = 0 \quad \sim \quad F_{xx}(0, 0)x^2 + 2F_{xy}(0, 0)xy + F_{yy}(0, 0)y^2 = 0$$

То есть множество решения уравнения $F(x, y) = 0$ с точностью до малых второго порядка эквивалентно распадающейся кривой 2-го порядка, то есть паре прямых.

Если $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 > 0$, то это пара пересекающихся мнимых прямых. На кривой получаем **изолированную** точку.

Если $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 < 0$, то это пара действительных пересекающихся прямых. На кривой получаем точку самопересечения, или **узловую** точку

Если $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 = 0$, то это пара совпадающих прямых. На кривой получаем либо точку **возврата**, либо точку **самокасания** разных видов.

Более точное описание таких точек требует более "длинного" Тейлоровского разложения и дополнительного исследования [3]. Мы оставляем это за пределами рассмотрения, ограничиваясь классом регулярных кривых.

2.1.4 Натуральная параметризация

Пусть $\gamma \in C^1$ регулярная кривая в E^n и $\vec{r} = \vec{r}(t) \in C^1$ ее регулярная параметризация на промежутке (a, b) . Из курса анализа известно, что в этом случае кривая спрямляема и длина дуги кривой на промежутке $(t_0, t) \subset (a, b)$ выражается интегралом

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{r}'(\theta)| d\theta.$$

Рассмотрим этот интеграл как интеграл с переменным верхним пределом. Тогда, как известно, функция $s(t)$ будет гладкой, причем

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| > 0, \quad t \in (a, b),$$

поскольку γ регулярная кривая и $\vec{r}(t)$ ее регулярная параметризация. Следовательно, $s(t)$ монотонная гладкая функция на (a, b) , а значит существует обратная функция $t = t(s)$, причем $t'_s \neq 0$.

Таким образом, s можно принять в качестве нового регулярного параметра на кривой и она может быть параметризована вектор-функцией вида

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(t(s)).$$

Определение 2.1.6 *Параметризация кривой параметром "длина дуги" называется натуральной параметризацией кривой.*

Упражнение 2.1.3 *Параметр t на регулярной кривой $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$ является натуральным тогда и только тогда, когда*

$$|\vec{r}'(t)| \equiv 1.$$

Используя натуральный параметр, в окрестности точки $P \in \gamma$ можно ввести внутреннюю локальную координату. Точке $Q_- \in U_-$ поставим в соответствие длину дуги PQ_- со знаком "–" а точке $Q_+ \in U_+$ поставим в соответствие длину дуги PQ_+ со знаком "+". Тогда точке P будет соответствовать значение параметра $s = 0$.

Натуральный параметр является очень удобным для исследования свойств регулярной кривой. Однако на практике натурально параметризовать кривую достаточно сложно. Например, попытка вычислить длину дуги эллипса приводит к эллиптическим интегралам, не представимым в виде элементарных функций. Тем более затруднено нахождение обратной функции $t = t(s)$. Поэтому в дальнейшем, используя натуральный параметр, мы будем находить необходимые выражения для случая произвольной параметризации или неявного задания кривой, легко применимые для практических вычислений.

2.2 Кривизна кривой.

Пусть γ регулярная кривая в E^n . Параметризовав ее натурально, получим на кривой единичное касательное векторное поле $\vec{\tau}(s)$. При смещении вдоль кривой поле $\vec{\tau}(s)$ может изменяться только по направлению, так как длина его фиксирована. "Отслеживая" это изменение, можно получить количественную меру искривленности линии. Такая количественная мера называется кривизной.

Определение 2.2.1 *Пусть γ регулярная кривая и точка $P \in \gamma$. Рассмотрим точку Q близкую к P . Обозначим через Δs длину дуги PQ и рассмотрим в точке P и Q единичные векторы касательной $\vec{\tau}(P)$ и $\vec{\tau}(Q)$. Угол между этими единичными векторами обозначим через $\Delta\theta$. Если существует предел*

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|} = k,$$

то величина k называется кривизной кривой в точке P .

Утверждение 2.2.1 *В каждой точке регулярной кривой $\gamma \in C^2$ существует кривизна. Причем*

- $k(s) = |\vec{r}''(s)|$ для натуральной параметризации,
- $k(t) = \frac{\sqrt{|\vec{r}_t'|^2 |\vec{r}_t''|^2 - \langle \vec{r}_t', \vec{r}_t'' \rangle^2}}{|\vec{r}_t'|^3}$ для произвольной регулярной параметризации.

Обе формулы инвариантны относительно размерности пространства.

Доказательство. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(s)$ натуральная параметризация γ в окрестности точки P , которой соответствует значение параметра $s = s_0$, $\vec{\tau}(P) = \vec{r}'(s_0)$. Пусть точке Q соответствует значение параметра $s_0 + \Delta s$. Тогда $\vec{\tau}(Q) = \vec{r}'(s_0 + \Delta s)$. Обозначим через $\Delta\theta$ угол между векторами $\vec{\tau}(P)$ и $\vec{\tau}(Q)$. Легко видеть, что

$$|\vec{\tau}(Q) - \vec{\tau}(P)| = |\vec{\tau}(s_0 + \Delta s) - \vec{\tau}(s_0)| = 2 \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).$$

Заметим, что в силу регулярности вектор-функции $\vec{r}(t)$, в точке P существует и единственная касательная. Значит $\vec{\tau}(Q) \rightarrow \vec{\tau}(P)$ при $|\Delta s| \rightarrow 0$, то есть

$$\vec{\tau}(s_0 + \Delta s) \xrightarrow{|\Delta s| \rightarrow 0} \vec{\tau}(s_0).$$

Следовательно, $|\Delta\theta| \rightarrow 0$ при $|\Delta s| \rightarrow 0$.

Рассмотрим предельное равенство

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\vec{\tau}(s_0 + \Delta s) - \vec{\tau}(s_0)|}{|\Delta s|} = \lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|}.$$

Так как $\gamma \in C^2$, то предел слева существует и равен $|\vec{\tau}'(s)| = |\vec{r}''(s)|$. Значит существует и предел справа, причем

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} \sim \lim_{|\Delta s| \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|} = k(s_0).$$

Таким образом, если $\vec{r}(s)$ натуральная параметризация кривой, то

$$k(s) = |\vec{r}''(s)|.$$

Пусть $\vec{r}(t) \in C^2$ произвольная регулярная параметризация кривой. Перейдем к натуральному параметру и зададим кривую вектор-функцией

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(t(s)).$$

Тогда

$$\vec{\rho}'_s = \vec{r}'_t \frac{dt}{ds}.$$

Но $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'_t|$, откуда имеем

$$\vec{\rho}'_s = \frac{\vec{r}'_t}{|\vec{r}'_t|}, \quad \vec{\rho}''_s = \left(\frac{\vec{r}'_t}{|\vec{r}'_t|} \right)'_t \frac{dt}{ds}.$$

Заметим, что

$$|\vec{r}_t|_t' = \left(\sqrt{\langle \vec{r}_t, \vec{r}_t \rangle} \right)'_t = \frac{\langle \vec{r}_t, \vec{r}_t' \rangle}{|\vec{r}_t|}.$$

Тогда

$$\vec{\rho}_s'' = \left(\frac{\vec{r}_t'}{|\vec{r}_t|} \right)'_t \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}_t'' |\vec{r}_t| - \vec{r}_t' |\vec{r}_t|_t'}{|\vec{r}_t|^2} \frac{1}{|\vec{r}_t|} = \frac{\vec{r}_t'' |\vec{r}_t| - \vec{r}_t' \frac{\langle \vec{r}_t, \vec{r}_t' \rangle}{|\vec{r}_t|}}{|\vec{r}_t|^3}$$

и, следовательно,

$$k = |\vec{\rho}_s''| = \frac{\left| \vec{r}_t'' |\vec{r}_t| - \vec{r}_t' \frac{\langle \vec{r}_t, \vec{r}_t' \rangle}{|\vec{r}_t|} \right|}{|\vec{r}_t|^3} = \frac{\sqrt{|\vec{r}_t''|^2 |\vec{r}_t|^2 - 2 \langle \vec{r}_t'', \vec{r}_t' \rangle^2 + \langle \vec{r}_t', \vec{r}_t' \rangle^2}}{|\vec{r}_t|^3} = \frac{\sqrt{|\vec{r}_t''|^2 |\vec{r}_t|^2 - \langle \vec{r}_t'', \vec{r}_t' \rangle^2}}{|\vec{r}_t|^3}.$$

■

Следствие 2.2.1 Кривизна плоской кривой класса C^2 , заданной уравнениями

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

вычисляется по формуле

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \vec{r}_t' &= \{x', y'\}, & \vec{r}_t'' &= \{x'', y''\}, \\ |\vec{r}_t'|^2 &= (x')^2 + (y')^2, & |\vec{r}_t''|^2 &= (x'')^2 + (y'')^2, & \langle \vec{r}_t', \vec{r}_t'' \rangle &= x'x'' + y'y''. \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \sqrt{|\vec{r}_t''|^2 |\vec{r}_t'|^2 - \langle \vec{r}_t'', \vec{r}_t' \rangle^2} &= \\ \sqrt{[(x')^2 + (y')^2][(x'')^2 + (y'')^2] - (x'x'' + y'y'')^2} &= \sqrt{(x'y'' - x''y')^2} = \\ &= |x'y'' - x''y'|. \end{aligned}$$

■

Упражнение 2.2.1 Кривизна кривой γ класса C^2 в E^3 , заданной уравнениями

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

вычисляется по формуле

$$k = \frac{|[\vec{r}'_t, \vec{r}''_t]|}{|\vec{r}'_t|^3} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2}}{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Кривизна является функцией, отличающей прямые линии от "кривых".

Утверждение 2.2.2 Регулярная кривая $\gamma \in C^2$ является (частью) прямой тогда и только тогда, когда $k \equiv 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Если же $k \equiv 0$, то параметризовав кривую натурально на интервале (s_1, s_2) , получим $k(s) = |\vec{r}''_s| \equiv 0$. Поэтому $\vec{r}(s) = \vec{a}s + \vec{b}$, где $\vec{a}, \vec{b}$ постоянные векторы, а это уравнение прямой на интервале (s_1, s_2) . ■

Для неявно заданной плоской кривой имеет место следующая формула

Упражнение 2.2.2 Пусть γ – плоская C^2 регулярная неявно заданная кривая и

$$F(x, y) = 0$$

ее уравнение. Покажите, что в произвольной точке кривой,

$$k = \frac{|F''_{xx}F_y'^2 - 2F''_{xy}F_x'F_y' + F''_{yy}F_x'^2|}{(F_x'^2 + F_y'^2)^{3/2}}.$$

Указание: Покажите, что кривую γ можно параметризовать так, что

$$\vec{r}'_t = \{-F'_y, F'_x\} := \vec{T}.$$

Покажите, далее, что

$$\vec{r}^{(p)}(t) = \nabla_{\vec{T}}^{(p-1)} \vec{T},$$

где

$$\nabla_{\vec{T}} \vec{T} = \vec{T}^i \nabla_i \vec{T} := T^i \partial_i \vec{T} = T^1 \partial_1 \vec{T} + T^2 \partial_2 \vec{T} := T^1 \partial_x \vec{T} + T^2 \partial_y \vec{T}.$$

Формулу для вычисления кривизны неявно заданной кривой можно получить из других соображений, имеющих далеко идущие обобщения. Пусть $\vec{\xi} = \{\xi^1(x, y), \xi^2(x, y)\}$ – единичное векторное поле на плоскости. *Дивергенцией* векторного поля ξ называется функция

$$\operatorname{div}(\xi) = \partial_x \xi^1 + \partial_y \xi^2.$$

Интегральной траекторией поля $\vec{\xi}$ называется кривая, являющаяся решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'_t = \xi^1(x(t), y(t)), \\ y'_t = \xi^2(x(t), y(t)). \end{cases}$$

При фиксировании начальных данных, интегральная траектория определена однозначно. Следовательно, решение указанной системы составляет семейство не пересекающихся интегральных траекторий, каждая из которых определяется выбором начальных данных задачи Коши.

Для единичного векторного поля $\vec{\xi}$, поле $\vec{\xi}^\perp = \{-\xi^2, \xi^1\}$ ортогонально $\vec{\xi}$ и так же единично. Его интегральные траектории образуют *семейство ортогональных траекторий* поля $\vec{\xi}$. Пусть $\{x(t), y(t)\}$ параметризация интегральных траекторий векторного поля $\xi^\perp$. В силу единичности поля $\xi^\perp$, параметр t является для этих траекторий натуральным. Эти траектории являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'_t = -\xi^2(x(t), y(t)), \\ y'_t = \xi^1(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Для вторых производных получаем выражения

$$\begin{cases} x''_t = -\partial_x \xi^2 x' - \partial_y \xi^2 y' = \xi^2 \partial_x \xi^2 - \xi^1 \partial_y \xi^2, \\ y''_t = \partial_x \xi^1 x' + \partial_y \xi^1 y' = -\xi^2 \partial_x \xi^1 + \xi^1 \partial_y \xi^1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x'_t y''_t - x''_t y'_t &= -\xi^2(-\xi^2 \partial_x \xi^1 + \xi^1 \partial_y \xi^1) - \xi^1(\xi^2 \partial_x \xi^2 - \xi^1 \partial_y \xi^2) = \\ &= (\xi^2)^2 \partial_x \xi^1 - \xi^2 \xi^1 \partial_y \xi^1 - \xi^1 \xi^2 \partial_x \xi^2 + (\xi^1)^2 \partial_y \xi^2 = \\ &= (1 - (\xi^1)^2) \partial_x \xi^1 - \xi^2 \xi^1 \partial_y \xi^1 - \xi^1 \xi^2 \partial_x \xi^2 + (1 - (\xi^2)^2) \partial_y \xi^2 = \\ &= \operatorname{div}(\vec{\xi}) - \xi^1(\xi^1 \partial_x \xi^1 + \xi^2 \partial_x \xi^2) - \xi^2(\xi^1 \partial_y \xi^1 + \xi^2 \partial_y \xi^2) = \\ &= \operatorname{div}(\vec{\xi}) - \xi^1 \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} ((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2)}_1 - \xi^2 \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} ((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2)}_1 = \operatorname{div}(\vec{\xi}). \end{aligned}$$

В силу натуральности параметра, получаем *выражение для кривизны ортогональных траекторий поля $\vec{\xi}$* в виде

$$k = |\operatorname{div}(\vec{\xi})|.$$

В качестве следствия, находим, что для неявно заданной кривой $F(x, y) = 0$, формула для вычисления ее кривизны приводится к виду

$$k = \left| \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} \right) \right| = \left| \partial_x \left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \right) \right|.$$

В качестве примера, рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Ее неявное уравнение имеет вид $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Для такой кривой $\operatorname{grad} F = \{2x, 2y\}$. Нормированный градиент имеет вид

$$\xi = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\}.$$

Тогда

$$\frac{d\xi^1}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{d\xi^2}{dy} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

и как следствие

$$k = \operatorname{div}(\xi) = \frac{x^2 + y^2 - x^2 + x^2 + y^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

В точках окружности $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, а значит $k = \operatorname{div}(\xi)|_{x^2+y^2=R^2} = \frac{1}{R}$.

Сферическая индикатриса кривой.

Пусть γ — кривая в E^n ($n \geq 2$). Пусть $\vec{r} = \vec{r}(s)$ — ее натуральная параметризация, $\vec{\tau}(s) = \vec{r}'(s)$ — единичное касательное векторное поле на γ .

Рассмотрим кривую γ^* , радиус-вектор которой $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$ задается вектор-функцией $\vec{\tau}$, а именно:

$$\gamma^* : \vec{\rho} = \vec{\tau}(s).$$

Так как $|\vec{\tau}| = 1$, то $\gamma^* \subset S^n$.

Заметим, что s в общем случае не является натуральным на кривой γ^* , так как

$$\vec{\rho}'_s = \vec{\tau}'_s = k\vec{\nu},$$

а значит $|\vec{\rho}'_s| = k$.

Определение 2.2.2 Подмножество $\gamma^* \subset S^n$, образованное голографом единичной вектор-функции касательных кривой $\gamma \subset E^n$ называется сферическим образом или сферической индикатрисой кривой γ .

Сравнение длин бесконечно малого отрезка кривой и его сферического образа приводит к естественному геометрическому описанию кривизны кривой.

Утверждение 2.2.3 Пусть $\gamma \in \mathcal{C}^2$ — регулярная кривая. В окрестности каждой точки, в которой кривизна $k > 0$, сферический образ γ^* кривой γ является регулярной кривой. Если s^* — натуральный параметр на γ^* , а s — натуральный параметр на γ , то

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s^*}{\Delta s}.$$

Доказательство. Поскольку γ^* задается вектор-функцией $\vec{\rho}(s) = \vec{\tau}(s)$, то

$$\vec{\rho}'_s = k\vec{\nu}(s) \neq 0,$$

так как $k > 0$. Значит кривая γ^* регулярна и s — регулярный параметр на γ^* .

Пусть некоторой точке P на кривой γ соответствует значение параметра $s = s_0$. Рассмотрим окрестность точки P , точкам которой отвечают значения параметра параметра $s = s_0 + \Delta s$. Тогда,

$$\Delta s = \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} ds, \quad \Delta s^* = \int_{s_0}^{s_0+\Delta s} k ds = k(\sigma)\Delta s, \quad \sigma \in (s_0, s_0 + \Delta s).$$

Отсюда немедленно получаем,

$$\frac{\Delta s^*}{\Delta s} = k(\sigma).$$

Перейдя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s^*}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} k(\sigma) = k(s_0) = k(P).$$

■

Задачи.

- Пусть γ — регулярная замкнутая кривая в E^3 с кривизной $k > 0$. Тогда кривая γ^* не уместается ни в одной открытой полусфере. Если γ^* уместается в замкнутой полусфере, то γ — плоская кривая.
- (**Неравенство Фенхеля**) Пусть γ — регулярная замкнутая кривая в E^3 . Доказать, что

$$\int_{\gamma} k ds \geq 2\pi,$$

причем равенство достигается для плоской кривой, гомеоморфной окружности.

- Пусть γ^* — кривая на сфере $\mathcal{S}^2$, не уместающаяся ни в одной открытой полусфере. Тогда существует замкнутая регулярная кривая $\gamma \subset E^3$ такая, что γ^* — ее сферическая индикатриса касательных.

2.3 Репер Френе, трехгранник Френе.

Пусть $\gamma \in C^2$ регулярная, натурально параметризованная кривая в E^3 , и пусть в точке $P \in \gamma$ кривизна $k(P) \neq 0$. Тогда $|\vec{r}''(P)| \neq 0$ и можно определить вектор

$$\vec{\nu}(P) = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|}(P).$$

Вектор $\vec{\nu}$ однозначно определен во всех точках кривой, где $k \neq 0$, и называется *единичным вектором главной нормали*. Совокупность всех единичных векторов главных нормалей образует векторное поле $\vec{\nu}(s)$ вдоль кривой, называемое *полем векторов главных нормалей*. Очевидно, что

$$\vec{\nu}(s) = \frac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}''(s)|}.$$

Единичные векторы касательной $\vec{\tau}$ и главной нормали $\vec{\nu}$ определяют единичное векторное поле β как

$$\beta = \vec{\tau} \times \vec{\nu}.$$

Векторное поле β называется *единичным векторным полем бинормалей* кривой.

Определение 2.3.1 *Тройка единичных взаимно перпендикулярных векторных полей на кривой*

$$\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \beta(s)$$

называется репером Френе.

В каждой точке регулярной кривой с ненулевой кривизной, векторы репера Френе однозначно определяют три прямые. Одна из них – **касательная**. Она проходит в направлении вектора $\vec{\tau}$. Прямая, проходящая через точку на кривой в направлении:

- вектора главной нормали $\vec{\nu}$, называется **главной нормалью**;
- вектора бинормали β , называется **бинормалью**.

Векторы репера Френе также определяют три плоскости:

- плоскость векторов $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ называется **соприкасающейся плоскостью**;
- плоскость векторов $(\vec{\tau}, \beta)$ называется **спрямляющей плоскостью**;
- плоскость векторов $(\vec{\nu}, \beta)$ называется **нормальной плоскостью**;

Соприкасающаяся, спрямляющая и нормальная плоскости образуют **трехгранник Френе**, или *сопровождающий трехгранник* вдоль кривой.

Не представляет труда написать уравнения ребер и граней трехгранника Френе для натурально параметризованной кривой.

Ребра трехгранника:

- $\vec{\rho}(\theta) = \vec{r}(s) + \theta \vec{\tau}(s)$ – касательная;
- $\vec{\rho}(\theta) = \vec{r}(s) + \theta \vec{\nu}(s)$ – главная нормаль;
- $\vec{\rho}(\theta) = \vec{r}(s) + \theta \beta(s)$ – бинормаль.

Здесь $\vec{\rho}$ – радиус-вектор точки на соответствующей прямой.

Грани трехгранника:

- $\langle \vec{R} - \vec{r}(s), \beta(s) \rangle = 0$ – соприкасающаяся плоскость;
- $\langle \vec{R} - \vec{r}(s), \vec{\nu}(s) \rangle = 0$ – спрямляющая плоскость;
- $\langle \vec{R} - \vec{r}(s), \vec{\tau}(s) \rangle = 0$ – нормальная плоскость.

Здесь $\vec{R} = \{x, y, z\}$ – радиус вектор точки на соответствующей плоскости.

Чтобы написать уравнения ребер и граней трехгранника Френе для *произвольной регулярной параметризации*, воспользуемся следующим наблюдением.

Утверждение 2.3.1 Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ регулярная параметризация кривой γ . Тогда

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{r}'_t & \uparrow\uparrow & \vec{\tau} \\ \vec{B} &= \vec{r}'_t \times \vec{r}''_t & \uparrow\uparrow & \beta \\ \vec{N} &= \vec{B} \times \vec{T} & \uparrow\uparrow & \vec{\nu} \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть s – натуральный параметр на данной кривой. Тогда

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'_t| > 0.$$

Отсюда,

$$\vec{r}'_t = \vec{r}'_s \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \frac{ds}{dt}$$

а значит

$$\vec{r}'_t \uparrow\uparrow \vec{\tau}.$$

Далее,

$$\vec{r}''_t = \vec{\tau}'_s \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \vec{\tau} \frac{d^2s}{dt^2} = \vec{\nu} k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \vec{\tau} \frac{d^2s}{dt^2}.$$

а значит вектор $\vec{r}''_t$ лежит в соприкасающейся плоскости кривой.

Более того, рассмотрим преобразование перехода от базиса $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ к паре векторов $(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t)$. В матричной записи

$$(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t) = (\vec{\tau}, \vec{\nu}) \begin{pmatrix} \frac{ds}{dt} & \frac{d^2s}{dt^2} \\ 0 & k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы перехода

$$\det \begin{pmatrix} \frac{ds}{dt} & \frac{d^2s}{dt^2} \\ 0 & k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \end{pmatrix} = k \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 > 0,$$

а значит векторы $(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t)$ линейно не зависимы и ориентированы одинаково с базисом $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$. Поэтому

$$\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{r}'_t \times \vec{r}''_t.$$

Теперь очевидно, что

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} \uparrow\uparrow \vec{\nu}.$$

■

Замечание. При замене параметра $t = t(\theta)$ векторы репера Френе $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ меняются следующим образом:

$$\vec{T}(t) = \vec{T}(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right), \quad \vec{N}(t) = \vec{N}(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad \vec{B}(t) = \vec{B}(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^3$$

Действительно,

$$\vec{r}'_t = \vec{r}'_\theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right), \quad \vec{r}''_t = \vec{r}''_\theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \vec{r}'_\theta \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right).$$

Значит,

$$\vec{T}(t) = \vec{T}(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right), \quad \vec{B}(t) = \vec{r}'_t \times \vec{r}''_t = \vec{r}'_\theta \times \vec{r}''_\theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^3 = \vec{B}(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^3.$$

Наконец,

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) = \vec{B}(\theta) \times \vec{T}(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^4 = \vec{N}(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^4.$$

В частности, при замене внутренней ориентации (направления обхода) на кривой, что соответствует условию

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right) < 0,$$

направление векторов $\vec{T}$ и $\vec{B}$ изменяется на противоположное, в то время как направление вектора $\vec{N}$ остаются неизменным (инвариантным).

Учитывая результат Предложения 2.3.1, для произвольной регулярной параметризации кривой получаем:

Утверждение 2.3.2 Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ произвольная регулярная параметризация регулярной кривой γ . Тогда уравнения ребер и граней трехгранника Френе можно записать в виде:

Ребра трехгранника.

- $\vec{\rho}(\theta) = \vec{r}(t) + \theta \vec{T}(t)$ – касательная;
- $\vec{\rho}(\theta) = \vec{r}(t) + \theta \vec{N}(t)$ – главная нормаль;
- $\vec{\rho}(\theta) = \vec{r}(t) + \theta \vec{B}(t)$ – бинормаль.

Здесь $\vec{\rho}$ – радиус-вектор точки на соответствующей прямой.

Грани трехгранника:

- $\langle \vec{R} - \vec{r}(t), \vec{B}(t) \rangle = 0$ – соприкасающаяся плоскость;
- $\langle \vec{R} - \vec{r}(t), \vec{N}(t) \rangle = 0$ – спрямляющая плоскость;
- $\langle \vec{R} - \vec{r}(t), \vec{T}(t) \rangle = 0$ – нормальная плоскость.

Здесь $\vec{R} = \{x, y, z\}$ – радиус вектор точки на соответствующей плоскости.

Геометрические свойства соприкасающейся плоскости.

Геометрическое значение единичного вектора бинормали, а заодно и соприкасающейся плоскости содержится в следующем утверждении.

Утверждение 2.3.3 Регулярная кривая класса $\mathcal{C}^2$ с кривизной $k \neq 0$ является плоской тогда и только тогда, когда $\vec{\beta}$ постоянная вектор-функция на кривой.

Доказательство. Пусть γ плоская кривая и $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ее натуральная параметризация. Зафиксируем на γ произвольную точку $P \leftrightarrow s = s_0$. Тогда γ лежит в плоскости $\pi : \langle \vec{R} - \vec{r}(s_0), \vec{n} \rangle = 0$ ($|\vec{n}| = 1$), а значит,

$$\langle \vec{r}(s) - \vec{r}(s_0), \vec{n} \rangle \equiv 0.$$

Дифференцируя дважды по параметру s , получим

$$\langle \vec{\tau}, \vec{n} \rangle \equiv 0, \quad k \langle \vec{\nu}, \vec{n} \rangle \equiv 0.$$

Так как $k \neq 0$, то $\vec{n} \perp \vec{\tau}, \vec{\nu}$. Тогда $\vec{n} = \pm \vec{\beta}$, а значит $\vec{\beta}$ постоянная вектор-функция на кривой.

Обратно, пусть $\vec{\beta}' \equiv 0$. Зафиксируем некоторую точку $P \in \gamma$ и пусть $P \leftrightarrow s = s_0$. Рассмотрим плоскость

$$\langle \vec{R} - \vec{r}(s_0), \vec{\beta} \rangle = 0.$$

Отклонение $h(s)$ точки кривой от этой плоскости есть следующая величина

$$h(s) = \langle \vec{r}(s) - \vec{r}(s_0), \vec{\beta} \rangle.$$

Тогда

$$h'_s = \langle \vec{\tau}, \vec{\beta} \rangle \equiv 0,$$

так как $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$ есть векторы репера Френе по условию. Значит $h(s) = \text{const}$. Но $h(s_0) = 0$, следовательно $h \equiv 0$. ■

Соприкасающаяся плоскость "плотно примыкает" к точкам кривой в следующем смысле.

Утверждение 2.3.4 Пусть $\pi(P)$ соприкасающаяся плоскость кривой $\gamma \in C^2$ в точке $P \in \gamma$. Обозначим через $h(Q)$ отклонение точки $Q \in \gamma$ от плоскости $\pi(P)$, а через d — расстояние от Q до P . Тогда

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{h}{d^2} = 0.$$

Доказательство. Уравнение соприкасающейся плоскости в точке P имеет вид $\langle \vec{R} - \vec{r}(P), \vec{\beta}(P) \rangle = 0$. Тогда

$$h(s) = \langle \vec{r}(s) - \vec{r}(s_0), \vec{\beta}(s_0) \rangle,$$

$$d = |\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0)|.$$

Раскладывая вектор-функцию $\vec{r}(s)$ по формуле Тейлора, получим

$$\vec{r}(s) - \vec{r}(s_0) = \vec{r}'(s_0)\Delta s + \frac{1}{2}\vec{r}''(s_0)\Delta s^2 + o(\Delta s^2) = \Delta s \vec{\tau}(s_0) + \frac{1}{2}k\Delta s^2 \vec{\nu} + o(\Delta s^2).$$

$$d = |\vec{r}'(s_0)\Delta s + o(\Delta s)| = |\vec{\tau}(s_0)\Delta s + o(\Delta s)|.$$

Поэтому, $h(s) = o(\Delta s^2)$, а $d^2 \sim \Delta s^2$, следовательно,

$$\frac{h(s)}{d^2} \xrightarrow{\Delta s \rightarrow 0} 0. \quad \blacksquare$$

Упражнение 2.3.1 Если все соприкасающиеся плоскости регулярной кривой проходят через фиксированную точку, то кривая лежит в некоторой плоскости. Докажите.

Упражнение 2.3.2 Если все нормальные плоскости данной кривой проходят через фиксированную точку, то кривая лежит на некоторой сфере с центром в этой точке. Докажите.

Упражнение 2.3.3 Опишите класс кривых, все спрямляющие плоскости которых проходят через фиксированную точку.

2.4 Кручение кривой в E^3 . Формулы Френе.

Определение 2.4.1 Пусть $\gamma \subset E^3$ регулярная кривая и P, Q — две близкие точки на γ . Обозначим через $\Delta\theta$ угол между соприкасающимися плоскостями $\pi(P)$ и $\pi(Q)$. Если существует предел

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|} = \kappa(P),$$

то $\kappa(P)$ называется кручением кривой в точке P .

Утверждение 2.4.1 В каждой точке P регулярной кривой $\gamma \in C^3$, в которой кривизна $k(P) \neq 0$, существует кручение. Причем

$$\kappa(s) = |\vec{\beta}_s'| = \frac{|(\vec{r}_s', \vec{r}_s'', \vec{r}_s''')|}{k^2},$$

где s — натуральный параметр, и

$$\kappa = \frac{|(\vec{r}_t', \vec{r}_t'', \vec{r}_t''')|}{|[\vec{r}_t', \vec{r}_t'']|^2} = \frac{|(\vec{r}_t', \vec{r}_t'', \vec{r}_t''')|}{|\vec{r}_t'|^2 |\vec{r}_t''|^2 - \langle \vec{r}_t', \vec{r}_t'' \rangle^2}$$

для произвольной регулярной параметризации $\vec{r}(t)$.

Доказательство. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(s)$ натуральная параметризация γ , причем $P \leftrightarrow s = s_0$, $Q \leftrightarrow s_0 + \Delta s$. Тогда угол между соприкасающимися плоскостями в точках P и Q равен углу между бинормальными в этих точках. Поэтому,

$$|\vec{\beta}(s_0 + \Delta s) - \vec{\beta}(s_0)| = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}.$$

Поскольку кривая $\gamma \in C^3$ и $k(P) \neq 0$, то в точке P существует единственная соприкасающаяся плоскость. Поэтому если $\Delta s \rightarrow 0$, то $\Delta\theta \rightarrow 0$, а значит имеем,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\vec{\beta}(s_0 + \Delta s) - \vec{\beta}(s_0)|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

Если предел слева существует, то в таком случае получим

$$|\vec{\beta}_s'| = \kappa(s_0).$$

Покажем, что если $k(P) \neq 0$ и $\gamma \in C^3$, то предел слева существует. Действительно,

$$\vec{\beta}(s) = [\vec{r}(s), \vec{v}(s)] = \left[\vec{r}_s', \frac{1}{k} \vec{r}_s'' \right].$$

Заметим, что $k = |\vec{r}_s''|$ и следовательно существует $k' = \frac{\langle \vec{r}_s'', \vec{r}_s''' \rangle}{|\vec{r}_s''|}$. Так как $\vec{r} \in C^3$ и $k \neq 0$, то существует

$$\vec{\beta}_s' = \left[\vec{r}_s'', \frac{1}{k} \vec{r}_s'' \right] + \left[\vec{r}_s', \frac{1}{k} \vec{r}_s''' \right] + \left[\vec{r}_s', -\frac{k'}{k^2} \vec{r}_s'' \right].$$

Итак,

$$\kappa = |\vec{\beta}_s'|.$$

Найдем выражение κ через радиус-вектор кривой γ . Так как $\vec{\beta}_s' \perp \vec{\beta}$, то $\vec{\beta}_s' = a\vec{\tau} + b\vec{\nu}$. Но так как

$$\vec{\beta}' = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]' = [\vec{\tau}', \vec{\nu}] + [\vec{\tau}, \vec{\nu}'] = [k\vec{\nu}, \vec{\nu}] + [\vec{\tau}, \vec{\nu}'] = [\vec{\tau}, \vec{\nu}'],$$

то $\vec{\beta}_s' \perp \vec{\tau}$. Следовательно, $a \equiv 0$. Значит,

$$\vec{\beta}_s' = b\vec{\nu}.$$

И так как $|\vec{\beta}_s'| = \kappa$, то $\vec{\beta}_s' = \pm \kappa \vec{\nu}$. Таким образом,

$$\kappa = |\langle \vec{\beta}_s', \vec{\nu} \rangle| = |\langle [\vec{\tau}, \vec{\nu}_s'], \vec{\nu} \rangle| = \left| \left\langle \left[\vec{r}_s', \left(\frac{1}{k} \vec{r}_s'' \right)' \right], \frac{1}{k} \vec{r}_s'' \right\rangle \right| = \frac{|(\vec{r}_s', \vec{r}_s'', \vec{r}_s''')|}{k^2}.$$

Если параметризация не натуральная, то переходя к натуральной параметризации $\vec{\rho}(s) = \vec{r}(t(s))$, получим

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_s' &= \vec{r}_t' \frac{dt}{ds}; \quad \vec{\rho}_s'' = \vec{r}_t'' \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \vec{r}_t' \frac{d^2t}{ds^2}; \\ \vec{\rho}_s''' &= \vec{r}_t''' \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 + 2\vec{r}_t'' \frac{dt}{ds} \frac{d^2t}{ds^2} + \vec{r}_t' \frac{d^3t}{ds^3}. \end{aligned}$$

Так как $|\vec{r}_t'| = \frac{ds}{dt}$, то прямым вычислением находим

$$(\vec{\rho}_s', \vec{\rho}_s'', \vec{\rho}_s''') = (\vec{r}_t', \vec{r}_t'', \vec{r}_t''') \left(\frac{dt}{ds} \right)^6 = (\vec{r}_t', \vec{r}_t'', \vec{r}_t''') \frac{1}{|\vec{r}_t'|^6}.$$

Так как для ненатуральной параметризации

$$k = \frac{|\vec{r}_t', \vec{r}_t''|}{|\vec{r}_t'|^3},$$

то

$$\kappa = \frac{|(\vec{r}_t', \vec{r}_t'', \vec{r}_t''')|}{|\vec{r}_t', \vec{r}_t''|^2}.$$

■

Кручение является функцией, различающей плоские и пространственные кривые.

Утверждение 2.4.2 *Регулярная кривая $\gamma \in C^3$ является плоской тогда и только тогда, когда $\kappa \equiv 0$.*

Доказательство. Предположим, что $\kappa \equiv 0$. Тогда параметризовав γ натурально, получим

$$|\vec{\beta}'| = 0.$$

И, следовательно, $\vec{\beta}$ — постоянная вектор-функция. Тогда по Предложению 2.3.3 γ — плоская кривая. Обратное тривиально.

■

Следствие 2.4.1 *Пусть $\vec{r}(t) \in C^3$ — регулярная параметризация γ . Тогда γ — плоская тогда и только тогда, когда*

$$(\vec{r}_t', \vec{r}_t'', \vec{r}_t''') = 0.$$

Ориентированное кручение кривой.

Напомним, что для кручения мы получили выражение

$$\kappa = |\langle \vec{\beta}', \vec{\nu} \rangle|.$$

Выясним геометрический смысл величины под знаком модуля. Производная $\vec{\beta}'$ определяет направление и скорость мгновенного поворота $\vec{\beta}$ в плоскости $\vec{\nu}, \vec{\beta}$. Припишем знак кручению, пользуясь правилом

$$\kappa_{or} = \begin{cases} \kappa & \text{если } \vec{\beta}' \uparrow \downarrow \vec{\nu}; \\ -\kappa & \text{если } \vec{\beta}' \uparrow \uparrow \vec{\nu}. \end{cases}$$

Геометрически это означает, что мы считаем кручение положительным, если мгновенный поворот вектора $\vec{\beta}$ осуществляется против часовой стрелки в плоскости $\vec{\nu}, \vec{\beta}$, если наблюдать его с конца вектора $\vec{\tau}$.

Таким образом,

$$\kappa_{or} = -\langle \vec{\beta}', \vec{\nu} \rangle.$$

Отсюда находим,

$$\vec{\beta}' = -\kappa_{or} \vec{\nu}.$$

Такой выбор знака кручения согласуется с ориентацией пространства в следующем смысле.

Утверждение 2.4.3 Пусть γ — кривая и $\vec{r}(t)$ — ее регулярная параметризация. Тогда

$$\kappa_{or} = \frac{(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t, \vec{r}'''_t)}{|\vec{r}'_t, \vec{r}''_t|^2}.$$

Доказательство. Поскольку $\vec{\beta} = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]$, то

$$\vec{\beta}' = [\vec{\tau}', \vec{\nu}] + [\vec{\tau}, \vec{\nu}'] = [\vec{\tau}, \vec{\nu}'].$$

Следовательно, при натуральной параметризации

$$\kappa_{or} = -(\vec{\tau}, \vec{\nu}', \vec{\nu}) = (\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\nu}').$$

Перейдем к произвольному параметру t . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= |\vec{r}'_t|, \\ \vec{\tau} &= \frac{\vec{r}'_t}{|\vec{r}'_t|}, \\ \vec{\nu} &= \frac{1}{k} \vec{\tau}'_t \frac{dt}{ds} = \frac{1}{k} \frac{\vec{r}''_t |\vec{r}'_t| - \vec{r}'_t \frac{\langle \vec{r}'_t, \vec{r}''_t \rangle}{|\vec{r}'_t|}}{|\vec{r}'_t|^2} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{k} \frac{\vec{r}''_t}{|\vec{r}'_t|^2} + Lin(\vec{r}'); \\ \vec{\nu}' &= \frac{1}{k} \frac{\vec{r}'''_t}{|\vec{r}'_t|^2} \frac{dt}{ds} + Lin(\vec{r}', \vec{r}'') = \frac{1}{k} \frac{\vec{r}'''_t}{|\vec{r}'_t|^3} + Lin(\vec{r}', \vec{r}''), \end{aligned}$$

где Lin означает линейную комбинацию соответствующих векторов. Так как для произвольного параметра

$$k = \frac{|[\vec{r}'_t, \vec{r}''_t]|}{|\vec{r}'_t|^3},$$

то следовательно,

$$\kappa_{or} = \frac{(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t, \vec{r}'''_t)}{k^2 |\vec{r}'_t|^6} = \frac{(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t, \vec{r}'''_t)}{\frac{|[\vec{r}'_t, \vec{r}''_t]|^2}{|\vec{r}'_t|^6} |\vec{r}'_t|^6} = \frac{(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t, \vec{r}'''_t)}{|[\vec{r}'_t, \vec{r}''_t]|^2}.$$

■

Следствие 2.4.2 $\kappa_{or} > 0$ тогда и только тогда, когда $(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t, \vec{r}'''_t) > 0$, т.е. если тройка векторов $\vec{r}'_t, \vec{r}''_t, \vec{r}'''_t$ ориентирована положительно.

Условимся в дальнейшем использовать кручение со знаком.

Утверждение 2.4.4 (Формулы Френе) Пусть $\gamma \in C^3$ регулярная кривая, параметризованная натурально. Обозначим через $\vec{\tau}, \vec{\nu}$ и β единичные векторные поля касательной, главной нормали и бинормали. Тогда имеют место формулы

$$\begin{cases} \vec{\tau}' = k\vec{\nu} \\ \vec{\nu}' = -k\vec{\tau} + \kappa\beta \\ \beta' = -\kappa\vec{\nu} \end{cases} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \\ \beta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{\nu} \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Поскольку γ — натурально параметризованная кривая, то по определению $\vec{\tau}' = k\vec{\nu}$. По выбору знака кручения, $\beta' = -\kappa\vec{\nu}$. Так как $|\vec{\nu}| = 1$, то $\vec{\nu}' \perp \vec{\nu}$ и

$$\vec{\nu}' = a\vec{\tau} + b\beta.$$

Коэффициенты a и b найдем, дифференцируя тождества $\langle \vec{\nu}, \vec{\tau} \rangle = 0$, $\langle \vec{\nu}, \beta \rangle = 0$, а именно,

$$a = \langle \vec{\nu}', \vec{\tau} \rangle = -\langle \vec{\nu}, \vec{\tau}' \rangle = -k, \quad b = \langle \vec{\nu}', \beta \rangle = -\langle \vec{\nu}, \beta' \rangle = \kappa.$$

■

Если кривая плоская, то $\kappa \equiv 0$ и формулы Френе запишутся проще.

Утверждение 2.4.5 (Формулы Френе для плоской кривой) Пусть γ — регулярная натурально параметризованная кривая класса C^2 с кривизной $k > 0$. Для производных единичных векторов касательной $\vec{\tau}(s)$ и главной нормали $\vec{\nu}(s)$ имеют место формулы

$$\begin{cases} \vec{\tau}' = k\vec{\nu}, \\ \vec{\nu}' = -k\vec{\tau}. \end{cases}$$

Формулы Френе позволяют определить локальную структуру регулярной кривой в терминах проекции кривой на грани сопровождающего трехгранника.

Утверждение 2.4.6 В окрестности каждой своей точки p общего положения ($k > 0, \kappa \neq 0$), проекции кривой на плоскости репера Френе с точностью до бесконечно малых порядка $m \geq 2$ имеют вид:

- $y = \frac{1}{2}k(p)x^2$ в проекции на соприкасающуюся плоскость;
- $z = \frac{1}{6}k(p)\kappa(p)x^3$ в проекции на спрямляющую плоскость;
- $\begin{cases} y = \frac{1}{2}k(p)s^2 \\ z = \frac{1}{6}k(p)\kappa(p)s^3 \end{cases}$ в проекции на нормальную плоскость.

Доказательство. Пусть γ — регулярная класса C^2 кривая, $\vec{r} = \vec{r}(s)$ — ее натуральная параметризация. Точке p поставим в соответствие значение параметра $s = 0$. Свяжем с точкой p декартову прямоугольную систему координат, направив ось Ox вдоль $\vec{\tau}$, ось Oy — вдоль $\vec{\nu}$, ось Oz — вдоль β . Тогда по разложению Тейлора, в окрестности точки p имеем:

$$\vec{r}(s) = \underbrace{\vec{r}(0)}_{=\vec{0}} + \vec{r}'(0)s + \frac{1}{2}\vec{r}''(0)s^2 + \frac{1}{6}\vec{r}'''(0)s^3 + \vec{o}(s^2).$$

Так как

$$\begin{aligned} \vec{r}'(0) &= \vec{\tau}(0) \\ \vec{r}''(0) &= \vec{\tau}'(0) = k(0)\vec{\nu}(0), \\ \vec{r}'''(0) &= k'(0)\vec{\nu}(0) + k(0)(-k(0)\vec{\tau}(0) + \kappa(0)\beta(0)) \end{aligned}$$

то

$$\vec{r}(s) = s\vec{\tau}(0) + \frac{1}{2}k(0)s^2\vec{\nu}(0) + \frac{1}{6}(k'(0)\vec{\nu}(0) - k^2(0)\vec{\tau}(0) + k(0)\kappa(0)\beta(0))s^3 + \vec{o}(s^2).$$

Так как векторы репера Френе являются единичными векторами выбранной системы координат, то с точностью до малых более высокого порядка, проекции кривой на плоскости репера Френе имеют вид:

- $\begin{cases} x = s \\ y = \frac{1}{2}k(0)s^2 \end{cases}$ в проекции на соприкасающуюся плоскость;
- $\begin{cases} x = s \\ z = \frac{1}{6}k(0)\kappa(0)s^3 \end{cases}$ в проекции на спрямляющую плоскость;
- $\begin{cases} y = \frac{1}{2}k(0)s^2 \\ z = \frac{1}{6}k(0)\kappa(0)s^3 \end{cases}$ в проекции на нормальную плоскость.

что и завершает доказательство. ■

Следствие 2.4.3 Вектор главной нормали кривой направлен внутрь выпуклости проекции кривой на соприкасающуюся плоскость. В частности, если кривая **плоская**, то в окрестности каждой точки $P \in \gamma$, в которой $k(P) > 0$, регулярная кривая γ класса C^2 является локально выпуклой. Вектор главной нормали всегда направлен внутрь выпуклости кривой.

Доказательство. Достаточно заметить, что проекция кривой на соприкасающуюся плоскость является параболой с положительным старшим коэффициентом, при этом $\vec{U}$ направлен как раз в сторону положительной полуоси Oy .

Если кривая плоская, то ее соприкасающаяся плоскость в точности совпадает с плоскостью, содержащей эту кривую. Независимо от параметризации (см. Предложение 2.3.1), вектор главной нормали направлен внутрь области, ограниченной параболой.

■

2.5 Основная теорема теории кривых в E^3 .

Всякая регулярная кривая имеет определенные кривизну и кручение. Оказывается, что эти функции образуют полный набор инвариантов кривой в том смысле, что полностью ее определяют.

Теорема 2.5.1 Пусть $k(s) > 0$, $\kappa(s)$ — непрерывные функции параметра s . Тогда в E^3 существует единственная с точностью до движения кривая γ , такая, что

- a) s — ее натуральный параметр,
- b) $k(s)$, $\kappa(s)$ — ее кривизна и кручение.

Доказательство. [2] Обозначим через $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}$ — три неизвестные вектор-функции. Поскольку k, κ заданы, то формально можем составить систему

$$\begin{cases} \vec{\xi}' = k\vec{\eta}, \\ \vec{\eta}' = -k\vec{\xi} + \kappa\vec{\zeta}, \\ \vec{\zeta}' = -\kappa\vec{\eta}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Это автономная система дифференциальных уравнений и, как известно, при фиксированных начальных условиях, эта система имеет единственное решение. Покажем, что это решение состоит из трех единичных, взаимно-ортогональных вектор-функций, ориентация которых может быть выбрана положительной.

Введем рассмотрение 6 функций:

$$\begin{aligned} f_1 &= \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle; & f_2 &= \langle \vec{\eta}, \vec{\eta} \rangle; & f_3 &= \langle \vec{\zeta}, \vec{\zeta} \rangle; \\ g_1 &= \langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle; & g_2 &= \langle \vec{\xi}, \vec{\zeta} \rangle; & g_3 &= \langle \vec{\eta}, \vec{\zeta} \rangle, \end{aligned}$$

где $\vec{\xi}, \vec{\zeta}, \vec{\eta}$ — решение уравнений (2.6). Тогда найдем

$$\begin{cases} f_1' = 2\langle \vec{\xi}, \vec{\xi}' \rangle = 2k\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle = 2kg_1; \\ f_2' = 2\langle \vec{\eta}, \vec{\eta}' \rangle = 2\langle \vec{\eta}, -k\vec{\xi} + \kappa\vec{\zeta} \rangle = -2kg_1 + 2\kappa g_3; \\ f_3' = 2\langle \vec{\zeta}, \vec{\zeta}' \rangle = -2\kappa\langle \vec{\zeta}, \vec{\eta} \rangle = -2\kappa g_3; \\ g_1' = \langle \vec{\xi}', \vec{\eta} \rangle + \langle \vec{\xi}, \vec{\eta}' \rangle = \langle k\vec{\eta}, \vec{\eta} \rangle + \langle \vec{\xi}, -k\vec{\xi} + \kappa\vec{\zeta} \rangle = k(f_2 - f_1) + \kappa g_2; \\ g_2' = \langle \vec{\xi}', \vec{\zeta} \rangle + \langle \vec{\xi}, \vec{\zeta}' \rangle = \langle k\vec{\eta}, \vec{\zeta} \rangle + \langle \vec{\xi}, -\kappa\vec{\eta} \rangle = kg_3 - \kappa g_1; \\ g_3' = \langle \vec{\eta}', \vec{\zeta} \rangle + \langle \vec{\eta}, \vec{\zeta}' \rangle = \langle -k\vec{\xi} + \kappa\vec{\zeta}, \vec{\zeta} \rangle + \langle \vec{\eta}, -\kappa\vec{\eta} \rangle = -kg_2 + \kappa(f_3 - f_2). \end{cases} \quad (2.7)$$

Это снова автономная система и она также имеет единственное решение, при фиксированных начальных данных. Положим

$$\begin{cases} f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 1, \\ g_1(0) = g_2(0) = g_3(0) = 0. \end{cases}$$

А теперь заметим, что эти функции удовлетворяют и самой системе (2.7). Следовательно, они и определяют ее единственное решение. Таким образом, для всех s

$$\begin{cases} |\xi|^2 = |\eta|^2 = |\zeta|^2 = 1, \\ \langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \zeta \rangle = \langle \eta, \zeta \rangle = 0. \end{cases}$$

Более того, $(\xi, \eta, \zeta) = \text{const}$ вдоль решения. Действительно,

$$(\xi, \eta, \zeta)' = (\xi', \eta, \zeta) + (\xi, \eta', \zeta) + (\xi, \eta, \zeta') \equiv 0.$$

Выберем $(\xi, \eta, \zeta)|_{s=0} = +1$.

Если теперь $\xi(s)$ — решение, то вектор-функция

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \xi(t) dt + \vec{r}_0$$

определяет кривую, удовлетворяющую условиям

- $|\vec{r}'_s| = 1$, а значит s — натуральный параметр на кривой, а поле ξ — единичное касательное векторное поле на кривой;
- $\vec{r}''_s = \xi'_s = k\eta$, а значит k — кривизна и η — поле главных нормалей, а поле $\zeta = [\xi, \eta]$ — поле векторов бинормали кривой;
- кручение этой кривой $\tilde{\kappa} = -\langle \eta', \zeta \rangle = -\langle -k\xi + \kappa\zeta, \zeta \rangle = \kappa$.

Таким образом, кривая с заданными начальными условиями определена однозначно.

Пусть есть два набора начальных условий: $\{P, \xi_P, \eta_P, \zeta_P\}$, а также $\{Q, \xi_Q, \eta_Q, \zeta_Q\}$. Каждое из этих условий определяет кривую или γ_P или γ_Q .

Совместим P и Q параллельным переносом, а реперы ξ_P, η_P, ζ_P и ξ_Q, η_Q, ζ_Q совместим поворотом и, возможно, симметрией. В силу единственности решения дифференциальных уравнений, кривые γ_P и γ_Q так же совмещаются. Таким образом, кривая определена однозначно с точностью до движения в пространстве.

■

Доказанная теорема позволяет определять кривые в пространстве, наперед задавая их кривизну и кручение.

Определение 2.5.1 *Задание кривой в виде $k = k(s) > 0$, $\kappa = \kappa(s)$ называется натуральным уравнением кривой в пространстве.*

Очевидно, что плоская кривая определится функцией кривизны k и условием $\kappa \equiv 0$.

2.6 Элементы геометрии плоских кривых

2.6.1 Ориентированная кривизна плоской кривой.

Поскольку направление главной нормали кривой в общей точке определено однозначно, то на ориентированной плоскости кривизне кривой можно естественным образом приписать знак.

Определение 2.6.1 Пусть γ плоская кривая с кривизной $k > 0$. Ориентированной кривизной k_{or} кривой γ называется функция

$$k_{or} = \begin{cases} +k, & \text{если репер } (\vec{\tau}, \vec{\nu}) \text{ ориентирован положительно,} \\ -k, & \text{если репер } (\vec{\tau}, \vec{\nu}) \text{ ориентирован отрицательно.} \end{cases}$$

Для выяснения знака ориентированной кривизны не обязательно нужно переходить к натуральному параметру, так как согласно Предложению 2.3.1 (см. доказательство) в точках кривой γ с кривизной $k > 0$, векторы $(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t)$ линейно не зависимы и ориентация репера $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ совпадает с ориентацией базиса $(\vec{r}'_t, \vec{r}''_t)$. В качестве следствия этого наблюдения, получаем

Утверждение 2.6.1 Пусть $\gamma \in C^2$ регулярная плоская кривая, параметризованная вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t), y(t)\}$. Ориентированная кривизна кривой γ вычисляется по формуле

$$k_{or} = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

Доказательство. Вычислим

$$\vec{r}'_t = \{x', y'\}, \quad \vec{r}''_t = \{x'', y''\}.$$

Кривизна кривой вычисляется по формуле

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

Значит, в точках с ненулевой кривизной векторы $\vec{r}'$ и $\vec{r}''$ линейно независимы и образуют базис, ориентация которого согласована с ориентацией репера $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ и который который ориентирован положительно, если

$$\det \begin{pmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{pmatrix} > 0.$$

Значит, $k_{or} = +k$ если $x'y'' - y'x'' > 0$ и $k_{or} = -k$ если $x'y'' - y'x'' < 0$. Следовательно, используя результат Следствия 2.2.1, получим

$$k_{or} = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}, \quad \text{если } (x'y'' - y'x'') > 0;$$

$$k_{or} = -\frac{-(x'y'' - x''y')}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}, \quad \text{если } (x'y'' - y'x'') < 0.$$

Таким образом,

$$k_{or} = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

■

Рассмотрим на ориентированной плоскости регулярную кривую γ и введем в рассмотрение *угловую функцию* $\alpha(P)$ как *ориентированный угол* между единичным вектором касательной $\vec{\tau}(P)$ в каждой точке $P \in \gamma$ и фиксированным направлением на плоскости. Не уменьшая общности, будем считать, что это направление совпадает с положительным направлением оси Ox декартовой прямоугольной системы координат xOy . Если γ параметризована параметром $t \in (a, b)$, то $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ так же является функцией этого параметра.¹

Утверждение 2.6.2 Пусть γ это C^2 -регулярная кривая на ориентированной плоскости, параметризованная натурально. Если $\alpha(s)$ – угловая функция, то

$$k = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|, \quad k_{or} = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Доказательство. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(s)$ натуральная параметризация γ . Тогда $\vec{r}' = \vec{\tau}$ – единичный направляющий вектор касательной. По определению угловой функции,

$$\vec{r}' = \{\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)\}.$$

Тогда

$$\vec{r}'' = \{-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s)\} \frac{d\alpha}{ds}.$$

Отсюда,

$$k = |\vec{r}''| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|.$$

Ориентированная кривизна

$$k_{or} = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{d\alpha}{ds}.$$

■

Замечание. Положительность ориентированной кривизны означает рост угловой функции и наоборот. Поэтому, на участках с положительной кривизной касательный вектор закручивается в *направлении вектора главной нормали*, а в точках с отрицательной кривизной – в противоположную сторону.

При изменении внутренней ориентации на кривой или изменении ориентации на плоскости знак ориентированной кривизны изменяется на противоположный. Это дает возможность локально *согласовать* внутреннюю ориентацию на кривой с ориентацией плоскости, что приводит к следующему определению.

Определение 2.6.2 Внутренняя локальная ориентация на регулярной кривой называется индуцированной, если ориентация репера $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ положительна.

¹Функция α является многозначной, так как ориентированный угол между направлениями определяется с точностью до целого кратного угла 2π . Выбором начального значения определяется непрерывная ветвь этой функции, которая и участвует в дальнейших рассмотрениях.

Индукцированная ориентация всегда существует и, в случае выбора на кривой индуцированной ориентации, можно не различать кривизну и ориентированную кривизну. На кривой с индуцированной ориентацией $k_{or} = k \geq 0$.

Интегральная кривизна плоской кривой.

Определение 2.6.3 Пусть γ — регулярная плоская кривая класса C^2 . Величина

$$\omega(\gamma) = \int_{\gamma} k_{or} ds,$$

называется ориентированной (или относительной) интегральной кривизной γ , а величина

$$|\omega|(\gamma) = \int_{\gamma} k ds,$$

называется абсолютной интегральной кривизной γ .

Геометрический смысл интегральной кривизны проясняет следующее утверждение.

Утверждение 2.6.3 Пусть γ — кривая на плоскости, причем A — начальная точка кривой, B — конечная точка. Тогда

$$\omega(\gamma) = \alpha(B) - \alpha(A).$$

Доказательство. Пусть γ параметризована натурально так, что $A \leftrightarrow (s = 0)$, $B \leftrightarrow (s = l)$, где l — длина кривой (на заданном промежутке). Тогда

$$\omega(\gamma) = \int_{\gamma} k_{or} ds = \int_0^l \frac{d\alpha}{ds} ds = \int_0^l d\alpha = \alpha(l) - \alpha(0) = \alpha(B) - \alpha(A).$$

■

Геометрически, это означает, что *относительная интегральная кривизна плоской кривой равна суммарному ориентированному углу поворота касательной при обходе данного участка кривой.*

Что же касается абсолютной интегральной кривизны, то она может быть выражена через относительную в следующем виде.

Утверждение 2.6.4 Пусть γ — регулярная плоская кривая класса C^2 с заданным направлением обхода (внутренней ориентацией). Тогда

$$\gamma = \left(\bigcup_i \gamma_i^+ \right) \cup \left(\bigcup_k \gamma_k^- \right),$$

где γ_i^+ — дуги с индуцированной ориентацией, а γ_k^- — дуги с ориентацией, противоположной индуцированной. Абсолютная интегральная кривизна кривой γ равна

$$|\omega|(\gamma) = \sum_i \omega(\gamma_i^+) - \sum_k \omega(\gamma_k^-).$$

Доказательство тривиально. Геометрически, *абсолютная интегральная кривизна кривой равна суммарному углу поворота касательной при обходе кривой без учета ориентации*, то есть знака приращения угловой функции.

Указанные геометрические интерпретации интегральной кривизны позволяют *определить* интегральную кривизну плоской кривой даже для *кусочно-регулярной кривой*.

Определение 2.6.4 Пусть $\gamma = \bigcup_i \gamma_i$ кусочно-регулярная кривая на плоскости с фиксированным направлением обхода. Интегральной относительной кривизной γ называется величина

$$\omega(\gamma) = \sum_i \omega(\gamma_i) + \sum_i (\pi - \alpha_i),$$

где $\omega(\gamma_i)$ — интегральные кривизны регулярных частей кривой, а α_i — ориентированные углы между полукасательными в угловых точках.

Например, если γ есть треугольник, то $\omega(\gamma) = 3\pi - \pi = 2\pi$.

2.6.2 Основная теорема теории кривых на плоскости.

Теорема существования 2.5.1 допускает упрощение и уточнение для случая плоской кривой и ориентированной кривизны.

Утверждение 2.6.5 Пусть $k(s)$ — непрерывная функция параметра $s \in [a, b]$. Тогда на плоскости существует единственная, с точностью до движения, кривая для которой k — функция ее ориентированной кривизны, а s — ее натуральный параметр.

Доказательство. Пусть $k(s)$ — заданная функция. Введем в рассмотрение функцию

$$\alpha(s) = \int_a^s k(t) dt + \alpha_0. \quad (2.8)$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{d\alpha}{ds} = k(s).$$

Будем искать на плоскости кривую для которой $\alpha(s)$ — угловая функция для вектора касательной.

Пусть $\vec{r} = \{x(s), y(s)\}$ — радиус-вектор искомой кривой, тогда по постановке задачи

$$\begin{cases} x' = \cos \alpha(s), \\ y' = \sin \alpha(s). \end{cases}$$

Значит, функции $x(s)$ и $y(s)$ могут быть легко найдены интегрированием

$$\begin{cases} x(s) = \int_0^s \cos \alpha(s) ds + x_0, \\ y(s) = \int_0^s \sin \alpha(s) ds + y_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

При этом, кривая определяется с точностью до параллельного переноса (2.9) и поворота (2.8), то есть собственного движения.

■

Определение 2.6.5 Радиусом кривизны R плоской кривой называется функция

$$R = \frac{1}{k},$$

где k – кривизна этой кривой.

Используя радиус кривизны, уравнения (2.9) могут быть переписаны относительно параметра α в виде

$$\begin{cases} x(\alpha) = \int_0^\alpha R(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha + x_0, \\ y(\alpha) = \int_0^\alpha R(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha + y_0, \end{cases}$$

Для этого достаточно заметить, что

$$ds = \frac{ds}{d\alpha} d\alpha = R d\alpha.$$

Например, если $R(\alpha) = R_0 = \text{const}$, то кривая с постоянной кривизной $k = 1/R_0$ является окружностью радиуса R_0 .

2.6.3 Овалы.

Локальная выпуклость кривой не гарантирует ее выпуклости. То есть локальная выпуклость не гарантирует того, что данная кривая ограничивает выпуклую фигуру на плоскости. Но при дополнительном требовании на кривую, быть гомеоморфной окружности, выпуклость кривой можно обеспечить. Такие кривые называются *оовами*.

Определение 2.6.6 Овалом называется плоская регулярная замкнутая кривая без самопересечений, с кривизной $k > 0$.

Упражнение 2.6.1 Покажите, что овал ограничивает выпуклую фигуру, т.е. является выпуклой кривой "в целом".

Простейшим примером овала является эллипс. Овалы имеют ряд характерных геометрических свойств "в целом". Некоторые из них мы рассмотрим в этом разделе.

Определение 2.6.7 Вершиной овала класса C^3 называется точка локального экстремума функции $k(s)$.

Теорема 2.6.1 Пусть γ — овал класса C^3 , тогда он имеет по крайней мере четыре вершины.

Доказательство. Пусть γ — овал, $\vec{r} = \vec{r}(s)$ его натуральная параметризация. Тогда $k(s)$ — непрерывная функция на окружности $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Окружность компактна и по теореме Вейерштрасса функция $k(s)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Пусть $M_1, M_2 \in S^1$:

$$\begin{aligned} k(M_1) &= \min k(s), \\ k(M_2) &= \max k(s). \end{aligned}$$

Так как $\gamma \in C^3$, то $k(s) \in C^1$, а значит в точках экстремума

$$k'(M_1) = 0, \quad k'(M_2) = 0.$$

Так что на овале имеем по крайней мере две вершины.

Если точки локального максимума и локального минимума не являются изолированными, то $k' = 0$ на некотором интервале. Следовательно, вершин бесконечно много и доказывать нечего. Поэтому будем считать, что вершины овала изолированы, т.е. в точках M_1 и M_2 есть перемена знака производной.

Пусть в точке M_1 происходит перемена знака производной с $(-)$ на $(+)$, а в точке M_2 с $(+)$ на $(-)$. Предположим, что других точек перемен знака нет. Тогда на соответствующих дугах

$$\begin{aligned} k'(M_1 M_2) &\geq 0, \\ k'(M_2 M_1) &\leq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим прямую $M_1 M_2$. Так как овал ограничивает выпуклую фигуру, то эта прямая пересекает овал только в точках M_1 и M_2 . Следовательно, точки дуг $\widehat{M_1 M_2}$ и $\widehat{M_2 M_1}$ находятся в различных полуплоскостях относительно прямой $M_1 M_2$. Запишем уравнение прямой $M_1 M_2$ в виде

$$\langle \vec{R}, \vec{a} \rangle + D = 0 \quad (|\vec{a}| = 1).$$

Тогда функция отклонения точек овала от этой прямой примет вид

$$h(s) = \langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle + D.$$

Предположим, что для всех точек дуги $\widehat{M_1 M_2}$ отклонение $h(s) > 0$. Тогда для точек дуги $\widehat{M_2 M_1}$ отклонение $h(s) < 0$.

Рассмотрим функцию

$$f(s) = k'(s) h(s).$$

Тогда $f(s) \geq 0$ для всех точек овала, причем $f(s) = 0$ только в изолированных точках, а значит

$$\int_0^l f(s) ds > 0,$$

где l — длина овала.

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 \int_0^l f(s) ds &= \int_0^l (\langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle + D) k'(s) ds = \\
 &= \int_0^l \langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle k'(s) ds + D \int_0^l k'(s) ds = \int_0^l \langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle k'(s) ds + k(s) \Big|_0^l = \\
 &= k \langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle \Big|_0^l - \int_0^l k \langle \vec{r}, \vec{a} \rangle ds = \int_0^l \langle -k\vec{r}, \vec{a} \rangle ds = \int_0^l \langle \vec{v}', \vec{a} \rangle ds = \\
 &= \int_0^l \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle' ds = \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle \Big|_0^l = 0.
 \end{aligned}$$

В этих вычислениях мы использовали периодичность (с периодом l) функций $k(s)$, $\langle \vec{r}(s), \vec{a} \rangle$, $\langle \vec{v}, \vec{a} \rangle$ и вторую формулу Френе.

Мы пришли к противоречию предположив, что у функции $k'(s)$ нет других точек перемены знака. Следовательно, на какой-то дуге существует как минимум две точки с переменной знака $k'(s)$, то есть еще две вершины.

■

Следствие 2.6.1 *Если число вершин овала конечно, то оно четно.*

Определение 2.6.8 *Шириной овала называется расстояние между его параллельными касательными.*

Пусть γ — натурально параметризованный овал. Обозначим через $\alpha(s)$ — угол между касательной к овалу γ и осью Ox . Тогда выбрав на овале индуцированную ориентацию, получим

$$k = \frac{d\alpha}{ds} > 0$$

для всех точек овала. Тогда овал γ может быть параметризован в целом параметром α . Положим

$$\vec{\rho}(\alpha) = \vec{r}(s(\alpha))$$

и пусть $\omega(\alpha)$ — ширина овала, выраженная как функция параметра α .

Определение 2.6.9 *Опорной функцией овала γ называется отклонение начала координат от касательной к овалу.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.6.1 *Пусть $h(\alpha)$ — опорная функция овала класса C^4 , параметризованного угловым параметром α . Тогда для радиуса кривизны овала $R(\alpha)$ справедлива формула*

$$R(\alpha) = h(\alpha) + h''(\alpha).$$

Доказательство. Выберем на овале индуцированную ориентацию. Тогда

$$\frac{d\alpha}{ds} = k > 0,$$

а значит, овал можно параметризовать параметром α . Пусть $\vec{r} = \vec{r}(\alpha)$ — параметризация овала параметром α . По формулам Френе,

$$\vec{r}'_s = k\vec{\nu} = \frac{d\alpha}{ds}\vec{\nu}, \quad \vec{\nu}'_s = k\vec{\tau} = -\frac{d\alpha}{ds}\vec{\tau}.$$

Значит, относительно параметра α ,

$$\vec{\tau}'_\alpha = \vec{\nu}, \quad \vec{\nu}'_\alpha = -\vec{\tau}.$$

Для опорной функции h получим выражение

$$h(\alpha) = -\langle \vec{r}, \vec{\nu} \rangle,$$

Тогда

$$h'_\alpha = -\langle \vec{r}'_\alpha, \vec{\nu} \rangle - \langle \vec{r}, \vec{\nu}'_\alpha \rangle = \langle \vec{r}, \vec{\tau} \rangle,$$

$$h'' = \langle \vec{r}'_\alpha, \vec{\tau} \rangle + \langle \vec{r}, \vec{\tau}'_\alpha \rangle = \langle \vec{r}'_s \frac{ds}{d\alpha}, \vec{\tau} \rangle + \langle \vec{r}, \vec{\nu} \rangle = R + \langle \vec{r}, \vec{\nu} \rangle = R - h.$$

Откуда $h'' + h = R$.

■

Утверждение 2.6.6 Если γ — овал класса C^4 , то его длина может быть найдена по формуле

$$l = \int_0^\pi \omega(\alpha) d\alpha.$$

Доказательство. Пусть γ — овал. Для упрощения рассуждений, разместим овал так, чтобы он охватывал начало координат и выберем на нем индуцированную ориентацию. Тогда начало координат окажется в "верхней" полуплоскости относительно каждой касательной, а значит $h(\alpha) > 0$ для всех точек овала и более того,

$$\omega(\alpha) = h(\alpha) + h(\alpha + \pi).$$

Запишем выражение для длины овала

$$\begin{aligned} l &= \int_0^l ds = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{d\alpha} d\alpha = \int_0^{2\pi} R(\alpha) d\alpha = \int_0^{2\pi} (h(\alpha) + h''(\alpha)) d\alpha = \int_0^{2\pi} h(\alpha) d\alpha + \\ &\quad \int_0^{2\pi} h''(\alpha) d\alpha = \int_0^{2\pi} h(\alpha) d\alpha + h'(\alpha) \Big|_0^{2\pi} = \int_0^\pi h(\alpha) d\alpha + \int_\pi^{2\pi} h(\alpha) d\alpha = \\ &\quad \int_0^\pi h(\alpha) d\alpha + \int_0^\pi h(\alpha + \pi) d\alpha = \int_0^\pi (h(\alpha) + h(\alpha + \pi)) d\alpha = \int_0^\pi \omega(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

■

Задачи.

- Доказать, что регулярная кривая класса C^2 , гомеоморфная окружности, с кривизной $k > 0$ является выпуклой кривой.
- Докажите теорему о длине овала для овалов класса C^2 .
Указание: Покажите, что $\omega(\alpha) = \langle \vec{\rho}(\alpha + \pi) - \vec{\rho}(\alpha), \vec{\nu}(\alpha) \rangle$.
- Точки овала, в которых касательные к овалу параллельны называются *противоположными*. Докажите, что отрезок, соединяющий противоположные точки на овале *постоянной ширины* ортогонален касательным в этих точках.
- Пусть γ — овал и $\vec{\tau}$ — единичное касательное векторное поле на γ . Докажите, что $\vec{\tau}'' \parallel \vec{\tau}$ по крайней мере в 4-х точках.
- Пусть γ — плоская кривая, гомеоморфная окружности. Пусть $L(\gamma)$ — ее длина, $Q(\gamma)$ — площадь области, ограниченной кривой γ . Тогда

$$L^2 \geq 4\pi Q.$$

2.6.4 Огибающая семейства плоских кривых.

Определение 2.6.10 Пусть $f : \mathbb{R}^2(x, y) \times \mathbb{R}^1(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^1$ — гладкое отображение. Если при каждом фиксированном значении параметра α уравнение

$$f(x, y; \alpha) = 0$$

определяет регулярную кривую на плоскости, то говорят, что на плоскости задано семейство регулярных кривых $\{\gamma_\alpha\}$, параметризованное параметром α .

Формально, семейство регулярных кривых можно записать в виде

$$\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y; \alpha) = 0, f_x^2 + f_y^2 \neq 0 \right\}_{\alpha \in \mathbb{R}}. \quad (2.10)$$

Семейство $\{\gamma_\alpha\}$ можно рассматривать как результат проектирования на плоскость (x, y) семейства сечений $\alpha = \alpha_0$ поверхности $f(x, y; \alpha) = 0$. Заметим, что в силу определения (2.10),

$$f^{-1}(0) = \left\{ (x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y; \alpha) = 0 \right\}$$

есть гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^3$ размерности $3 - 1 = 2$, то есть $F^2 = f^{-1}(0)$ — гладкая 2-мерная поверхность в $\mathbb{R}^3$. Вектором нормали поверхности F^2 является вектор

$$\vec{N} = \{f_x, f_y, f_\alpha\}.$$

Действительно, для любой кривой $\gamma \subset F$, заданной в виде

$$\gamma = \{x(t), y(t), \alpha(t)\}$$

имеем

$$f(x(t), y(t), \alpha(t)) \equiv 0.$$

Поэтому

$$f_x x_t' + f_y y_t' + f_\alpha \alpha_t' = 0,$$

а значит плоскость с вектором нормали $\vec{N}$ содержит касательные ко всем регулярным кривым, проходящим через фиксированную точку.

Определение 2.6.11 Множеством складки на поверхности $F = f^{-1}(0)$ называется множество

$$\Sigma = \{(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, \alpha) = 0, f_\alpha(x, y, \alpha) = 0\}.$$

Определение 2.6.12 Дискриминантным множеством семейства регулярных кривых $\{\gamma_\alpha\}$, заданных уравнением $f(x, y, \alpha) = 0$ где $f \in C^1$, называется множество вида

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \alpha : f(x, y, \alpha) = 0, \partial_\alpha f(x, y, \alpha) = 0\}.$$

Множество $\mathcal{D}$ — есть проекция на плоскость (x, y) множества точек на поверхности $F = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$, в которых касательная плоскость вертикальна, то есть $\mathcal{D} = \pi(\Sigma)$.

Определение 2.6.13 Пусть $\{\gamma_\alpha\}$ — семейство регулярных кривых на плоскости, заданное уравнением $f(x, y, \alpha) = 0$. Регулярная кривая $\Gamma = \{x(t), y(t)\} \subset \mathbb{R}^2$ называется *локальной огибающей* семейства $\{\gamma_\alpha\}$, если существует функция $\alpha = \alpha(t)$, такая что выполнены следующие условия:

- $f(x(t), y(t), \alpha(t)) \equiv 0$;
- при каждом фиксированном значении параметра $t = t_0$ соответствующая кривая семейства $\gamma_{\alpha(t_0)}$ и кривая $\Gamma(t_0)$ имеют общую касательную.
- $\alpha_t' \neq 0$ на всем интервале изменения параметра t .

Утверждение 2.6.7 Если огибающая Γ семейства $\{\gamma_\alpha\}$ существует, то $\Gamma \subset \mathcal{D}$.

Доказательство. Действительно, условие

$$f(x(t), y(t), \alpha(t)) \equiv 0,$$

немедленно влечет

$$f_x x_t' + f_y y_t' + f_\alpha \alpha_t' = 0.$$

Но так как γ_α и Γ имеют общую касательную, то

$$f_x x_t' + f_y y_t' = 0.$$

В силу условия $\alpha_t' \neq 0$, получаем $f_\alpha(x(t), y(t), \alpha(t)) \equiv 0$. Таким образом

$$\{(x(t), y(t), \alpha(t)) : f(x, y, \alpha) = 0, f_\alpha(x, y, \alpha) = 0\} \subset \Sigma,$$

а значит $\Gamma \subset \pi(\Sigma) = \mathcal{D}$. ■

Доказанное утверждение можно интерпретировать так: Если семейство $\{\gamma_\alpha\}$ имеет огибающую, то множество складки Σ — регулярная кривая, касательная к которой не горизонтальна. Верно и обратное.

Утверждение 2.6.8 Пусть $\{\gamma_\alpha\}$ — семейство плоских регулярных кривых, заданное уравнением $f(x, y, \alpha) = 0$. Если $\Sigma = \{x(t), y(t), \alpha(t)\}$ — регулярная кривая на $F^2 = f^{-1}(0)$, то на каждом интервале, где касательная к Σ не горизонтальна, кривая $\Gamma = \pi(\Sigma)$ — огибающая семейства $\{\gamma_\alpha\}$.

Доказательство. Пусть Σ — регулярная кривая и на интервале $t \in (a, b)$ касательная к Σ не горизонтальна. Тогда $\alpha'_t \neq 0$ на (a, b) . Из тождества

$$f(x(t), y(t), \alpha(t)) \equiv 0$$

следует

$$f_x x'_t + f_y y'_t + f_\alpha \alpha'_t = 0.$$

Так как в точках Σ выполнено f'_α для всех $t \in (a, b)$, то

$$f_x(x(t), y(t))x'_t + f_y(x(t), y(t))y'_t = 0,$$

т.е. для каждого t кривые $\gamma_{\alpha(t)}$ и $\Gamma = \pi(\Sigma)$ имеют общую касательную при $t \in (a, b)$. ■

Осталось ответить на вопрос, при каком условии множество складки является регулярной кривой. Тем самым мы можем дать достаточное условие существования огибающей.

Утверждение 2.6.9 Пусть $\{\gamma_\alpha\}$ — семейство регулярных кривых на плоскости, заданное уравнением $f(x, y, \alpha) = 0$. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вида

$$\varphi(x, y, \alpha) = (f(x, y, \alpha), f_\alpha(x, y, \alpha)).$$

Если матрицы Якоби отображения φ равен 2, то множество складки Σ является регулярной кривой. На любом интервале, где касательная к Σ не горизонтальна, $\Gamma = \pi(\Sigma)$ — огибающая данного семейства.

Доказательство.

Если $\text{rg } \varphi_* = 2$, то φ — субмерсия, а значит $\varphi^{-1}(0) = \Sigma$ — гладкая вложенная кривая в $\mathbb{R}^3$, причем $\Sigma \subset F^2 = f^{-1}(0)$. Пусть эта кривая имеет параметризацию вида $\Sigma = \{x(t), y(t), \alpha(t)\}$. Если $\alpha'_t \neq 0$ (условие не горизонтальности), то мы попадаем в условия предыдущего утверждения. ■

Следствие 2.6.2 Пусть $f(x, y, \alpha) = 0$ — уравнение регулярного семейства $\{\gamma_\alpha\}$, и пусть

$$\det \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ f_{x\alpha} & f_{y\alpha} \end{pmatrix} \Big|_\Sigma \neq 0$$

тогда существует огибающая семейства $\{\gamma_\alpha\}$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим матрицу Якоби

$$\varphi_* = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_\alpha \\ f_{x\alpha} & f_{y\alpha} & f_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}$$

Т.к. $\operatorname{rg} \varphi_* = 2$ и достигается на первых столбцах, то по теореме о неявном отображении, локально существует решение системы

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f_\alpha(x, y, \alpha) = 0, \end{cases}$$

в виде гладких функций

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ \alpha = t. \end{cases}$$

Очевидно, что в этом случае функция прикрепления $\alpha(t)$, имеет вид $\alpha = t$, а значит $\alpha'_t = 1 > 0$

■

Следствие 2.6.3 Пусть $\{\gamma_\alpha\}$ — семейство плоских кривых, заданных уравнением

$$f(x, y, \alpha) = 0 \quad (f \in \mathcal{C}^2).$$

Если

$$f_{\alpha\alpha}|_\Sigma \neq 0,$$

то Σ — регулярная кривая и если касательная к Σ не горизонтальна, то $\Gamma = \pi(\Sigma)$ — огибающая.

Доказательство. Матрица Якоби отображения φ в точках множества Σ имеет вид

$$\varphi_* = \begin{pmatrix} f_x & f_y & 0 \\ f_{\alpha x} & f_{\alpha y} & f_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}$$

Если $f_{\alpha\alpha} \neq 0$, то $\operatorname{rg} \varphi_* = 2$, т.к. $f_x^2 + f_y^2 \neq 0$. Пусть, например, $f_y|_\Sigma \neq 0$, тогда система

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f_\alpha(x, y, \alpha) = 0, \end{cases}$$

может быть разрешима относительно α и y в виде

$$\begin{cases} y = y(x), \\ \alpha = \alpha(x), \end{cases}$$

где $y(x), \alpha(x)$ — гладкие функции класса C^2 . Тогда кривая

$$\Gamma = \pi(\Sigma) = \{(x, y) | y = y(x)\}$$

является регулярной кривой на плоскости, а функция $\alpha = \alpha(x)$ задает закон прикрепления кривых к огибающей.

■

Рассмотрим несколько примеров.

Огибающая однопараметрического семейства прямых**Утверждение 2.6.10** Пусть γ_α

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - h(\alpha) = 0$$

семейство прямых на плоскости, параметризованное α . Тогда огибающая этого семейства существует и ее уравнение имеет вид

$$\vec{r}(\alpha) = h\vec{n} + h'\vec{t},$$

где $\vec{n} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ поле единичных нормалей семейства, $\vec{t} = \frac{d\vec{n}}{d\alpha} = \{-\sin \alpha, \cos \alpha\}$.

Доказательство. Пусть $\vec{r} = \{x, y\}$. Тогда уравнение семейства запишется в виде

$$f(x, y, \alpha) = \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle - h(\alpha) = 0.$$

Соответственно,

$$f_\alpha(x, y, \alpha) = \langle \vec{r}, \vec{t} \rangle - h'(\alpha) = 0.$$

Так как $\langle \vec{n}, \vec{t} \rangle = 0$, то $\vec{r}$ легко находится из полученной системы

$$\vec{r}(\alpha) = h\vec{n} + h'\vec{t},$$

что и требовалось. ■

Заметим, что вектор скорости огибающей

$$\vec{r}' = h'\vec{n} + h\vec{t} - h'\vec{n} + h''\vec{t} = (h + h'')\vec{t}$$

Если обозначить через s натуральный параметр на огибающей, то из геометрического смысла параметра α заключаем, что

$$\frac{d\alpha}{ds} = k,$$

где k – кривизна огибающей. Заметим так же, что $h(\alpha)$ не что иное как опорная функция огибающей. Отсюда

$$\frac{1}{k} = |h + h''|,$$

что дает выражение для кривизны огибающей через ее опорную функцию. Ранее эта формула была получена для овалов. Осталось заметить, что регулярная кривая является огибающей семейства своих касательных. Значит полученная формула верна для любой регулярной кривой, а не только для овалов.

Рассмотрим теперь семейство прямых, заданных уравнением общего вида

$$A(\alpha)x + B(\alpha)y + C(\alpha) = 0.$$

Утверждение 2.6.11 *Огибающая семейства прямых*

$$A(\alpha)x + B(\alpha)y + C(\alpha) = 0.$$

существует на каждом промежутке изменения параметра α где вектор-функции $\vec{N} = \{A, B\}$ и $\vec{N}' = \{A', B'\}$ не коллинеарны. Параметрическое уравнение огибающей имеет вид:

$$\begin{cases} x(\alpha) = -\left(\frac{C}{B}\right)' / \left(\frac{A}{B}\right)' \\ y(\alpha) = -\left(\frac{C}{A}\right)' / \left(\frac{B}{A}\right)' \end{cases}$$

Доказательство. Огибающую семейства находим как решение системы

$$\begin{cases} A(\alpha)x + B(\alpha)y = -C(\alpha) \\ A'(\alpha)x + B'(\alpha)y = -C'(\alpha) \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\begin{cases} x(\alpha) = -\frac{CB' - C'B}{AB' - A'B} = -\left(\frac{C}{B}\right)' / \left(\frac{A}{B}\right)' \\ y(\alpha) = -\frac{AC' - A'C}{AB' - A'B} = -\left(\frac{C}{A}\right)' / \left(\frac{B}{A}\right)' \end{cases}$$

Условие существования однозначного решения

$$AB' - A'B \neq 0 \quad \text{или} \quad \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

■

Эволюта и эвольвента

Определение 2.6.14 *Эволютой плоской кривой γ называется огибающая семейства ее нормалей.*

Утверждение 2.6.12 *На каждом участке регулярной кривой где кривизна $k \neq 0$ существует эволюта. Ее параметрическое уравнение имеет вид*

- $\vec{\rho} = \vec{r}(s) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(s)$ для натурально параметризованной кривой;
- $\vec{\rho} = \vec{r}(t) + \frac{1}{k_{or}}\vec{n}(t)$, где k_{or} – ориентированная кривизна кривой и

$$\vec{n}(t) = \frac{\{-y'(t), x'(t)\}}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}}$$

единичный положительно ориентированный вектор нормали кривой $\vec{r}(t)$.

Доказательство. Запишем уравнение семейства нормалей кривой в виде:

$$f(x, y; s) = \langle \vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{\tau}(s) \rangle = 0,$$

где $\vec{\rho} = \{x, y\}$ радиус-вектор точки на нормали. Составим уравнение дискриминантного множества:

$$\begin{cases} \langle \vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{\tau}(s) \rangle = 0, \\ -1 + k \langle \vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{\nu}(s) \rangle = 0. \end{cases}$$

Отсюда немедленно находим:

$$\vec{\rho} - \vec{r}(s) = \frac{1}{k} \vec{\nu}(s),$$

или

$$\vec{\rho} = \vec{r}(s) + \frac{1}{k} \vec{\nu}(s).$$

Пусть теперь $\vec{r} = \vec{r}(t)$ произвольная регулярная параметризация кривой. Обозначим

$$\vec{T} = \{x'_t, y'_t\}, \quad \vec{N} = \{-y'_t, x'_t\}$$

положительно ориентированный подвижный репер вдоль кривой. Тогда

- $\vec{N} \uparrow\uparrow \vec{\nu}$ если репер $(\vec{T}, \vec{N})$ ориентирован одинаково с репером $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$
- $\vec{N} \uparrow\downarrow \vec{\nu}$ если репер $(\vec{T}, \vec{N})$ ориентирован противоположно реперу $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$

В первом случае $k_{or} = k$, во втором $k_{or} = -k$. Но тогда в любом случае

$$\frac{1}{k_{or}} \vec{N} \uparrow\uparrow \frac{1}{k} \vec{\nu}.$$

Нормируя вектор $\vec{N}$, получим

$$\frac{1}{k_{or}} \vec{n} = \frac{1}{k} \vec{\nu},$$

что и требовалось. ■

Эволюта имеет и другое, *геометрическое свойство*. Рассмотрим плоскую регулярную кривую γ , кривизна которой $k > 0$, параметризованную натурально с помощью вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ($s \in (0, L)$). Рассмотрим отображение $\vec{\rho}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вида

$$\vec{\rho}(s, t) = \vec{r}(s) + t \vec{\nu}(s).$$

Столбцы матрицы Якоби этого отображения имеют вид

$$\begin{cases} \vec{\rho}_s = (1 - kt) \vec{\tau}, \\ \vec{\rho}_t = \vec{\nu}. \end{cases}$$

Это отображение является локальным диффеоморфизмом области $D = (0, L) \times (0, \frac{1}{k})$ на область $\vec{\rho}(D)$, а значит в окрестности кривой γ параметры (s, t) определяют локальную систему координат на плоскости, которая называется локальной *полугеодезической системой координат с базовой кривой* γ . Если же $t = \frac{1}{k}$, то наступает падение ранга этого отображения. Множество точек нерегулярности описывается уравнением

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{k} \vec{\nu}(s).$$

Следовательно, *эволюта есть множество точек нерегулярности полугеодезической системы координат, построенной на γ .*

Определение 2.6.15 Эвольвентой плоской кривой γ называется такая кривая Γ , эволютой которой является кривая γ .

Утверждение 2.6.13 Для данной регулярной кривой γ существует однопараметрическое семейство ее эвольвент. Семейство эвольвент кривой γ задается вектор-функцией вида

- $\vec{\rho}(s, c) = \vec{r}(s) + (c - s)\vec{\tau}(s)$, если $\vec{r} = \vec{r}(s)$ — вектор-функция, задающая натуральную параметризацию кривой γ и c — параметр семейства.
- $\vec{\rho}(t, c) = \vec{r}(t) + \left(c - \int_{t_0}^t |\vec{r}'(\theta)| d\theta\right) \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$, если $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — вектор-функция, задающая произвольную регулярную параметризацию кривой γ и c — параметр семейства.

Доказательство. Обозначим через $\vec{\rho}(s)$ радиус-вектор эвольвенты, приняв в качестве параметра натуральный параметр кривой γ . По определению эвольвенты,

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(s) + \lambda(s)\vec{\tau}(s),$$

где $\vec{\tau}(s)$ — единичный вектор касательной к γ и $\lambda(s)$ — некоторая функция. Дифференцируя, находим

$$\vec{\rho}' = \vec{\tau} + \lambda'\vec{\tau} + \lambda k\vec{\nu} = (1 + \lambda')\vec{\tau} + \lambda k\vec{\nu}.$$

Так как направляющий вектор касательной к Γ коллинеарен вектору нормали кривой γ , то функция $\lambda(s)$ должна удовлетворять уравнению

$$\lambda' + 1 = 0.$$

Отсюда находим $\lambda(s) = c - s$, где c — константа интегрирования.

Вывод формулы в случае произвольной регулярной параметризации очевиден.

■

Упражнение 2.6.2 Докажите, что для плоской кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

уравнение эволюты запишется в виде

$$\begin{cases} \tilde{x} = x(t) - \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'} y', \\ \tilde{y} = y(t) + \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'} x', \end{cases}$$

Упражнение 2.6.3 Пусть γ — регулярная кривая, γ^* — ее эволюта. Найти кривые, удовлетворяющие свойству $(\gamma^*)^* = \gamma$.

Каустики

Очевидным образом, эволюта допускает следующую интерпретацию из геометрической оптики: *Эволюта есть огибающая семейства лучей, исходящих из точечных источников, расположенных на плоской кривой γ* . На точках эволюты "фокусируются" лучи, исходящие по нормали от точек на кривой. В геометрической оптике такие точечные множества называются *каустиками*. Каустика возникает так же в следующей задаче.

Задача. *На плоскую кривую γ с кривизной $k > 0$, падает пучок параллельных лучей, имеющих направление вектора $\vec{a}$ ($|\vec{a}| = 1$). Найти огибающую семейства отраженных лучей.*

Покажем, что огибающая семейства отраженных лучей (каустика) задается уравнением

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{\langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle}{2k} (-\vec{\tau} \langle \vec{a}, \vec{\tau} \rangle + \vec{\nu} \langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle), \quad (2.11)$$

где $\vec{r}$ радиус-вектор натуральной параметризации γ , $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ – векторы ее репера Френе.

Обозначим угол между падающим лучем и вектором главной нормали через φ . Тогда

$$\cos \varphi = \langle -\vec{a}, \vec{\nu} \rangle, \quad \sin \varphi = \langle -\vec{a}, \vec{\tau} \rangle,$$

то есть направляющий вектор семейства падающих лучей разложится по векторам репера Френе в виде

$$-\vec{a} = \sin \varphi \vec{\tau} + \cos \varphi \vec{\nu}.$$

По законам оптики, отраженный луч имеет направление

$$\vec{b} = -\sin \varphi \vec{\tau} + \cos \varphi \vec{\nu}.$$

Векторы нормали семейства отраженных лучей запишутся в виде

$$\vec{n} = \cos \varphi \vec{\tau} + \sin \varphi \vec{\nu},$$

а само семейство будет задано уравнением

$$f(x, y, s) = \langle \vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{n}(s) \rangle = 0,$$

где $\vec{\rho} = \{x, y\}$ – радиус-вектор точек на отраженном луче. Огибающую будем искать из системы

$$\begin{cases} \langle \vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{n}(s) \rangle = 0, \\ \frac{d}{ds} \langle \vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{n}(s) \rangle = 0. \end{cases}$$

Имеем:

$$\frac{d}{ds} \langle \vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{n}(s) \rangle = -\langle \vec{\tau}, \vec{n} \rangle + \langle \vec{\rho} - \vec{r}(s), \frac{d\vec{n}(s)}{ds} \rangle.$$

В свою очередь,

$$\frac{d\vec{n}(s)}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} \vec{b} + \cos \varphi (k\vec{\nu}) + \sin \varphi (-k\vec{\tau}) = \left(k + \frac{d\varphi}{ds} \right) \vec{b}.$$

Таким образом находим, что

$$\left(k + \frac{d\varphi}{ds} \right) \langle \vec{\rho} - \vec{r}(s), \vec{b} \rangle = \cos \varphi$$

Так как $\vec{n}$ и $\vec{b}$ единичны и взаимно ортогональны, то уравнение огибающей находится в виде

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{\cos \varphi}{\left(k + \frac{d\varphi}{ds}\right)} \vec{b} = \vec{r} + \frac{\cos \varphi}{\left(k + \frac{d\varphi}{ds}\right)} (-\sin \varphi \vec{\tau} + \cos \varphi \vec{\nu}).$$

Заметим теперь, что φ — это угол между главной нормалью и фиксированным направлением $\vec{a}$, а значит $\frac{d\varphi}{ds} = k$. Тогда

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{\langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle}{2k} (-\langle \vec{a}, \vec{\tau} \rangle \vec{\tau} + \langle \vec{a}, \vec{\nu} \rangle \vec{\nu}),$$

что и требовалось.

Задачи.

- Запишите уравнение каустики (2.11) для произвольной регулярной параметризации кривой.
- Пусть $\{\gamma_\alpha\}$ — семейство плоских кривых. Обозначим через G — подмножество на плоскости, покрываемое семейством $\{\gamma_\alpha\}$. Тогда $\partial G \subset \mathcal{D}$.
- Пусть $\{\gamma_\alpha\}$ — семейство плоских кривых. Рассмотрим множество P вида

$$P = \{P_\alpha \in \mathbb{R}^2 | P_\alpha = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \gamma_\alpha \cap \gamma_{\alpha+\Delta\alpha}\}.$$

Доказать, что $P \subset \mathcal{D}$.

- Из начала координат на плоскую кривую γ падает пучок световых лучей. Покажите, что огибающая семейства отраженных лучей задается уравнением

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{\langle \vec{r}, \vec{\nu} \rangle}{2k|\vec{r}|^2 + \langle \vec{r}, \vec{\nu} \rangle} (-\vec{\tau} \langle \vec{r}, \vec{\tau} \rangle + \langle \vec{r}, \vec{\nu} \rangle \vec{\nu}),$$

где $\vec{r}$ радиус-вектор натуральной параметризации γ , $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ — векторы ее репера Френе. Выпишите уравнение каустики для случая произвольной регулярной параметризации.

- Пусть семейство плоских кривых задано уравнением

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ \varphi(\alpha, \beta) = 0. \end{cases}$$

Покажите, что точки дискриминантного множества этого семейства удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ \varphi(\alpha, \beta) = 0, \\ \frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, \beta)} = 0. \end{cases}$$

2.7 Соприкосновение кривых и поверхностей.

Пусть γ_1 и γ_2 — две регулярные плоские кривые, имеющие общую точку, т.е. $\gamma_1 \cap \gamma_2 = P$. В силу регулярности, в окрестности точки P имеют место локальные задания кривых γ_1 и γ_2 в виде

$$\begin{aligned}\gamma_1 : \vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t), y(t)\} & \quad P \leftrightarrow t = t_0, \\ \gamma_2 : \varphi(x, y) = 0 & \quad P \leftrightarrow (x_0, y_0).\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \varphi(x(t), y(t)),$$

Тогда, очевидно, $f(t_0) = 0$.

Определение 2.7.1 Кривые $\gamma_1 \in C^\infty$ и $\gamma_2 \in C^\infty$ имеют в точке P соприкосновение порядка m , если для функции $f(t) = \varphi(x(t), y(t))$ имеют место равенства

$$f(t_0) = f'(t_0) = \dots = f^{(m)}(t_0) = 0, \quad f^{(m+1)}(t_0) \neq 0.$$

Упражнение 2.7.1 Покажите, что регулярная кривая имеет со своей касательной соприкосновение порядка $m \geq 1$.

Упражнение 2.7.2 Покажите, что регулярная кривая имеет со своей соприкасающейся плоскостью соприкосновение порядка $m \geq 2$.

Вид регулярной плоской кривой в окрестности точки с ненулевой кривизной моделируется определенной параболой в следующем смысле.

Утверждение 2.7.1 Пусть $\gamma — C^2$ регулярная плоская кривая и $P \in \gamma$, причем кривизна $k(P) > 0$. Тогда существует парабола с вершиной в точке P , имеющая с γ соприкосновение порядка $m \geq 2$.

Доказательство. В окрестности точки P введем следующую систему координат. Пусть $\vec{r}(s)$ натуральная параметризация кривой. Выберем ее так, что $P \leftrightarrow s = 0$. Параллельным переносом начала координат можно добиться выполнения условия $\vec{r}(0) = \vec{0}$. Специализируем дополнительно систему координат так, что ось Ox направим вдоль $\vec{r}'(0)$, ось Oy вдоль $\vec{r}''(0)$. Тогда параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s) \end{cases}$$

кривой γ , будут удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}x(0) &= 0, & y(0) &= 0, \\ x'(0) &= 1, & y'(0) &= 0, \\ x''(0) &= 0, & y''(0) &= k(0).\end{aligned}$$

Рассмотрим параболу $\tilde{\gamma}$ заданную параметрически в виде

$$\tilde{\gamma} : \begin{cases} x = t, \\ y = \frac{1}{2} k(0) t^2. \end{cases}$$

Запишем ее уравнение в неявной форме

$$y = \frac{1}{2} k(0) x^2$$

и составим функцию $f(s) = y(s) - \frac{1}{2} k(0) x^2(s)$. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(0) &= (y' - kx x')|_{s=0} = 0, \\ f''(0) &= (y'' - k(x')^2 - kx x'')|_{s=0} = 0, \end{aligned}$$

что и означает соприкосновение порядка $m \geq 2$

■

Соприкасающаяся окружность плоской кривой

Пусть γ — плоская кривая и $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ее натуральная параметризация.

Определение 2.7.2 *Окружность, проходящую через точку P на кривой, и имеющую с кривой в точке P соприкосновение порядка $m \geq 2$ называется соприкасающейся окружностью кривой в точке P . Ее центр называется центром кривизны кривой, а радиус — радиусом кривизны кривой в точке P .*

Утверждение 2.7.2 *Геометрическое место центров кривизны плоской кривой совпадает с эволютой.*

Доказательство. Уравнение окружности на плоскости имеет вид

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = a^2,$$

где r_0 — координаты центра окружности и a — ее радиус.

Пусть точке P на кривой соответствует значение параметра $s = s_0$. Рассмотрим функцию

$$f(s) = \langle \vec{r}(s) - \vec{r}_0, \vec{r}(s) - \vec{r}_0 \rangle - a^2$$

Условие соприкосновения *нулевого* порядка запишется в виде

$$f(s_0) = 0$$

и означает, что окружность проходит через точку P . Положение центра и радиус такой окружности не определены.

Условие соприкосновения *первого* порядка запишется в виде

$$\begin{cases} f(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2} f'_s(s_0) = \langle \vec{r}'(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = 0 \end{cases}$$

означает, что окружность, имеющая соприкосновение с кривой порядка $m \geq 1$ расположена так, что ее центр находится на главной нормали кривой в точке P , но ее радиус не определен.

Условие соприкосновения *второго* порядка запишется в виде

$$\begin{cases} f(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2}f'_s(s_0) = \langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = 0, \\ \frac{1}{2}f''_s(s_0) = k(s_0)\langle \vec{\nu}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что окружность, имеющая с кривой соприкосновение порядка $m \geq 2$ определяется однозначно. Ее центр расположен на главной нормали, а радиус равен $\frac{1}{k}$. Более того, $\vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 = -\frac{1}{k}\vec{\nu}(s_0)$ или

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\vec{\nu}(s_0).$$

Это значит, что центр кривизны лежит на эволюте рассматриваемой кривой. В силу произвола выбора точки P , значение s_0 можно заменить на произвольный параметр s точек кривой и мы получим уравнение всей эволюты, а именно,

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{\nu}(s),$$

где $\vec{\rho}(s)$ — координата центра соприкасающейся окружности для текущего значения параметра s .

■

Соприкасающаяся сфера кривой.

Определение 2.7.3 Пусть γ — регулярная кривая. Сфера S^2 называется соприкасающейся сферой γ в точке $P \in \gamma$, если S^2 и γ имеют в точке P соприкосновение порядка $m \geq 3$.

Утверждение 2.7.3 Если в некоторой точке $P \in \gamma$ кривизна $k(P) > 0$ и кручение $\varkappa \neq 0$, то соприкасающаяся сфера существует и единственна. Ее центр находится в точке

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(P) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(P) - \frac{k'}{k^2\varkappa}\beta(P),$$

а радиус равен

$$R = \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{k'}{k^2\varkappa}\right)^2}$$

Доказательство. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(s)$ — натуральная параметризация кривой γ , а сфера задана в таком виде:

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r} - \vec{r}_0 \rangle = R^2.$$

Предположим, что точке $P \in \gamma$ соответствует значение параметра $s = s_0$. Составим функцию

$$f(s) = \langle \vec{r}(s) - \vec{r}_0, \vec{r}(s) - \vec{r}_0 \rangle - R^2.$$

Кривая и сфера имеют в точке P соприкосновение порядка $m \geq 0$, если

$$f(s_0) = 0,$$

то есть $P = \gamma \cap S^2$.

Кривая и сфера имеют в точке P соприкосновение порядка $m \geq 1$, если

$$\begin{cases} f(s_0) = 0; \\ \frac{1}{2}f'(s_0) = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \langle \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle - R^2 = 0 \\ \langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = 0. \end{cases}$$

Это означает, что сфера проходит через точку P и ее центр лежит в нормальной плоскости.

Кривая и сфера имеют в точке P соприкосновение порядка $m \geq 2$, если

$$\begin{cases} f(s_0) = 0, \\ f'(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2}f''(s_0) = 0, \end{cases} \sim \begin{cases} \langle \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle - R^2 = 0 \\ \langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = 0 \\ 1 + \frac{1}{k} \langle \vec{\nu}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \langle \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle - R^2 = 0 \\ \langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = 0 \\ \langle \vec{\nu}, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = -\frac{1}{k}. \end{cases}$$

Это значит, что центр сферы находится на прямой, перпендикулярной к соприкасающейся плоскости, и проходящей через точку на главной нормали кривой, которая находится на расстоянии $\frac{1}{k}$ от точки P .

Наконец, в случае соприкосновения $m \geq 3$, имеем

$$\begin{cases} f(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2}f'(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2}f''(s_0) = 0, \\ \frac{1}{2}f'''(s_0) = 0. \end{cases} \sim \begin{cases} \langle \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle - R^2 = 0, \\ \langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = 0, \\ \langle \vec{\nu}, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = -\frac{1}{k}, \\ \langle -k\vec{\tau} + \kappa\beta, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle + \langle \vec{\nu}, \vec{\tau} \rangle - \frac{k'}{k^2} = 0. \end{cases}$$

или, окончательно,

$$\begin{cases} \langle \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0, \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle - R^2 = 0, \\ \langle \vec{\tau}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = 0, \\ \langle \vec{\nu}(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = -\frac{1}{k}, \\ \langle \beta(s_0), \vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 \rangle = \frac{k'}{k^2\kappa}. \end{cases}$$

Мы получили разложение вектора $\vec{r}(s_0) - \vec{r}_0$ по трем векторам $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \beta$ с коэффициентами $0, -\frac{1}{k}, \frac{k'}{k^2\kappa}$, то есть мы можем записать

$$\begin{aligned}\vec{r}(s_0) - \vec{r}_0 &= -\frac{1}{k}\vec{\nu}(s_0) + \frac{k'}{k^2\kappa}\beta(s_0), \\ \vec{r}_0 &= \vec{r}(s_0) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(s_0) - \frac{k'}{k^2\kappa}\beta(s_0), \\ R &= \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{k'}{k^2\kappa}\right)^2}.\end{aligned}$$

■

Упражнение 2.7.3 Доказать, что кривая, у которой $k \neq 0, \kappa \neq 0$ лежит на сфере тогда и только тогда, когда

$$\frac{\kappa}{k} = \left(\frac{k'}{k^2\kappa}\right)'.$$

В качестве следствия, для любой замкнутой кривой на сфере

$$\int \frac{\kappa}{k} ds = 0.$$

Упражнение 2.7.4 Геометрическое место центров соприкасающихся сфер называется эволютой пространственной кривой. Запишите уравнение эволюты пространственной кривой для случая произвольной регулярной параметризации.

2.8 Формулы Френе для кривой в E^n .

Репер Френе и формулы Френе для кривой на плоскости и в пространстве имеют естественное обобщение на случай достаточно регулярной кривой в E^n .

Теорема 2.8.1 Пусть γ — кривая в E^n класса C^∞ . Пусть $\vec{r} = \vec{r}(s)$ — ее натуральная параметризация. Тогда вдоль γ существует поле ортонормированных векторов $(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n)$, удовлетворяющее формулам вида

$$\begin{cases} \vec{\xi}_1' = k_1 \vec{\xi}_2, \\ \vec{\xi}_i' = -k_{i-1} \vec{\xi}_{i-1} + k_i \vec{\xi}_{i+1}, & i = 2, \dots, n-1; \\ \vec{\xi}_n' = -k_{n-1} \vec{\xi}_{n-1}. \end{cases}$$

Функции k_i называются кривизнами кривой, а векторы $\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n$ называются векторами репера Френе.

Доказательство. Рассмотрим на кривой γ единичное векторное поле касательных векторов $\vec{r}_s'$ и положим $\xi_1 = \vec{r}_s'$. Вычислим $\vec{\xi}_1'$ и предположим, что $\vec{\xi}_1' \neq 0$. Тогда положим

$$k_1 = |\vec{\xi}_1'|; \quad \xi_2 = \frac{1}{k_1} \vec{\xi}_1'.$$

Получим первую формулу Френе, а именно

$$\vec{\xi}_1' = k_1 \vec{\xi}_2.$$

Осуществим дальнейшее построение репера Френе индуктивно. Вычислим $\vec{\xi}_2'$. В силу единичности вектора $\vec{\xi}_2$, имеем

$$\vec{\xi}_2' = a \vec{\xi}_1 + \vec{\eta},$$

где $\vec{\eta} \perp \text{Lin}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2)$. Легко видеть, что

$$a = \langle \vec{\xi}_2', \vec{\xi}_1 \rangle = -\langle \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_2' \rangle = -k_1.$$

Предположим, что $\vec{\eta} \neq 0$. Тогда положим

$$|\vec{\eta}| = k_2; \quad \vec{\xi}_3 = \frac{1}{k_2} \vec{\eta}.$$

Следовательно,

$$\vec{\xi}_2' = -k_1 \vec{\xi}_1 + k_2 \vec{\xi}_3.$$

Вычислим $\vec{\xi}_3'$.

$$\vec{\xi}_3' = a_1 \vec{\xi}_1 + a_2 \vec{\xi}_2 + \vec{\eta},$$

где $\vec{\eta} \perp \text{Lin}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3)$. Тогда

$$a_1 = \langle \vec{\xi}_3', \vec{\xi}_1 \rangle = -\langle \vec{\xi}_3, \vec{\xi}_1' \rangle = -k \langle \vec{\xi}_3, \vec{\xi}_2 \rangle = 0,$$

$$a_2 = \langle \vec{\xi}_3', \vec{\xi}_2 \rangle = -\langle \vec{\xi}_3, \vec{\xi}_2' \rangle = -k_2,$$

$$\vec{\xi}_3' = -k_2 \vec{\xi}_2 + \vec{\eta}.$$

Положим,

$$k_3 = |\vec{\eta}|, \quad \vec{\xi}_4 = \frac{1}{k_3} \vec{\eta}.$$

Тогда

$$\vec{\xi}_3' = -k_2 \vec{\xi}_2 + k_3 \vec{\xi}_4.$$

Продолжая этот процесс, мы найдем все векторы репера Френе. Последняя формула будет иметь вид

$$\vec{\xi}_n' = -k_{n-1} \vec{\xi}_{n-1} + \vec{\eta},$$

где $\vec{\eta} \perp \text{Lin}(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n)$, а значит $\eta = 0$.

■

Замечание. Кривая в E^n не обязана иметь все кривизны не равными 0. Можно показать, что если некоторая кривизна $k_m = 0$ ($m \leq n$), то кривая лежит в плоскости E^m . Заметим, так же, что кривизна k_1 соответствует кривизне кривой в E^3 , а кривизна k_2 соответствует кручению кривой в E^3 .

Упражнение 2.8.1 Покажите, что высшие кривизны кривой, параметризованной произвольным регулярным параметром t , вычисляются по формуле

$$k_i = \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} \frac{B_{i-1} B_{i+1}}{B_i^2},$$

где $B_i = \sqrt{\text{Gram}(\vec{r}'(t), \dots, \vec{r}^{(i)}(t))}$ – квадратный корень из определителя матрицы Грама, построенной по производным вектор-функции $\vec{r}(t)$ до порядка $i \geq 1$, а $B_0 := 1$ по определению.

Глава 3

Теория поверхностей

3.1 Первая фундаментальная форма поверхности

Пусть F^m поверхность в E^{m+p} . Выберем в E^{m+p} декартову прямоугольную систему координат. Пусть два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в E^n ($n = m + p$) разложены по ортонормированному базису

$$\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + \cdots + a^n \vec{e}_n, \quad \vec{b} = b^1 \vec{e}_1 + \cdots + b^n \vec{e}_n.$$

Тогда их скалярное произведение вычислится по формуле

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a^i b^i.$$

Поставим в соответствие векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор-столбцы

$$\vec{a} \rightarrow \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = a, \quad \vec{b} \rightarrow \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} = b.$$

Тогда относительно прямоугольной декартовой системы координат скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ может быть записано в виде

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a^i b^i = [b^1, \dots, b^n] \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = b^t a,$$

где $(\cdot)^t$ означает транспонирование.

Утверждение 3.1.1 Пусть $F^m \subset E^{m+p}$ поверхность и пусть $\vec{X}, \vec{Y}$ — касательные векторы к F^m с внутренними координатами X и Y соответственно. Тогда

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = Y^t g X,$$

где

$$g = (g_{ik}) = \left(\langle \partial_i \vec{r}, \partial_k \vec{r} \rangle \right).$$

матрица Грама системы базисных векторов касательного пространства.

Доказательство. Разложим

$$\vec{X} = X^1 \partial_1 \vec{r} + \dots + X^m \partial_m \vec{r}, \quad \vec{Y} = Y^1 \partial_1 \vec{r} + \dots + Y^m \partial_m \vec{r}.$$

Правые части этих разложений соответствуют координатам векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ относительно ортонормированного базиса в пространстве E^{m+p} . Поэтому можем записать

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = (\partial \vec{r} Y)^t (\partial \vec{r} X) = Y^t (\partial \vec{r})^t (\partial \vec{r}) X.$$

Рассмотрим радиус-вектор, задающий поверхность

$$\vec{r}(u) = \{\varphi_1(u^1, \dots, u^m), \dots, \varphi_{m+p}(u^1, \dots, u^m)\}.$$

Тогда, расписывая в столбцы элементы матрицы $\partial \vec{r} = (\partial_1 \vec{r}, \dots, \partial_m \vec{r})$, получим

$$\partial \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^m} \end{pmatrix}, \quad (\partial \vec{r})^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^m} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\partial \vec{r})^t (\partial \vec{r}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u^m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{m+p}}{\partial u^m} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_1 \vec{r} \rangle & \cdots & \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_m \vec{r} \rangle \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle \partial_m \vec{r}, \partial_1 \vec{r} \rangle & \cdots & \langle \partial_m \vec{r}, \partial_m \vec{r} \rangle \end{pmatrix} = \left(\langle \partial_i \vec{r}, \partial_k \vec{r} \rangle \right) = g. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = Y^t g X.$$

■

Матрица $g = (g_{ik}) = \left(\langle \partial_i \vec{r}, \partial_k \vec{r} \rangle \right)$ симметрична и определяет *квадратичную форму на касательных пространствах к поверхности*, записываемую во внутренних координатах касательных векторов в виде

$$g(X, X) = X^t g X = g_{ik} X^i X^k.$$

Эта форма положительно определена (так как выражает квадрат длины касательного вектора к поверхности) и называется **первой фундаментальной формой поверхности** F^m .

Соответствующая билинейная форма

$$g(X, Y) = Y^t g X = g_{ik} X^i Y^k$$

определяет скалярное произведение касательных векторов.

3.1.1 Дифференциальная запись первой фундаментальной формы

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(u^1, \dots, u^m)$ — параметризация поверхности. Рассмотрим дифференциал вектор-функции

$$d\vec{r} = \partial_i \vec{r} du^i$$

как касательный вектор к поверхности с бесконечно малыми внутренними координатами

$$d\vec{r} \longrightarrow \begin{pmatrix} du^1 \\ \vdots \\ du^m \end{pmatrix} = dr.$$

Тогда

$$|d\vec{r}|^2 = g(dr, dr) = g_{ik} du^i du^k$$

и, таким образом, дифференциальная форма $g_{ik} du^i du^k$ выражает квадрат длины дифференциала радиус-вектора параметризации поверхности.

Пусть теперь $\gamma \subset F^m$ — произвольная кривая на поверхности с внутренним уравнением

$$\gamma : \begin{cases} u^1 = u^1(t); \\ \dots\dots\dots \\ u^m = u^m(t). \end{cases}$$

Тогда ее внешнее уравнение имеет вид

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u^1(t), \dots, u^m(t)).$$

Пусть s — элемент длины дуги на γ , тогда

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{\gamma}'| dt.$$

Отсюда, $\frac{ds}{dt} = |\vec{\gamma}'|$. Но $\vec{\gamma}' = \partial_i \vec{r} \frac{du^i}{dt}$, а значит

$$\vec{\gamma}' \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{du^1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du^m}{dt} \end{pmatrix} = \gamma'.$$

Поэтому

$$|\vec{\gamma}'|^2 = g(\gamma', \gamma') = g_{ik} \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ik} \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt},$$

то есть

$$ds^2 = g_{ik} du^i du^k.$$

Таким образом, дифференциальная форма $g_{ik} du^i du^k$ выражает квадрат длины дифференциала длины дуги произвольной регулярной кривой на поверхности.

Традиционно, первую фундаментальную форму записывают именно в таком, дифференциальном виде.

3.1.2 Преобразование матрицы I фундаментальной формы при замене параметров

Утверждение 3.1.2 Пусть $g(u)$ матрица первой фундаментальной формы поверхности F^m в параметризации

$$\vec{r} : \mathcal{D}^m(u) \rightarrow E^{m+p},$$

а $g(v)$ матрица первой фундаментальной формы в параметризации

$$\vec{\rho} : \mathcal{G}^m(v) \rightarrow E^{m+p}.$$

Пусть $\varphi : \mathcal{G}^m \rightarrow \mathcal{D}^m$ диффеоморфизм перепараметризации, заданный системой функций $u^i = u^i(v^1, \dots, v^m)$ с матрицей Якоби $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)$. Тогда

$$g(v) = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^t g(u(v)) \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию перепараметризующую поверхность

$$\vec{\rho}(v) = \vec{r}(u(v)).$$

Тогда, как мы знаем,

$$\partial \vec{\rho} = \partial \vec{r} \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right).$$

Следовательно,

$$g(v) = (\partial \vec{\rho})^t (\partial \vec{\rho}) = \left(\partial \vec{r} \frac{\partial u}{\partial v}\right)^t \left(\partial \vec{r} \frac{\partial u}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^t g(u(v)) \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right).$$

■

3.1.3 Первые фундаментальные формы некоторых поверхностей.

1. Плоскость $E^2 \subset E^3$.

Рассмотрим плоскость в E^3 заданную в параметрической форме

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы. Тогда

$$\partial_1 \vec{r} = \vec{a}, \quad \partial_2 \vec{r} = \vec{b}.$$

Поэтому

$$g_{11} = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2, \quad g_{12} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle, \quad g_{22} = \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = |\vec{b}|^2.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичны и взаимно ортогональны, то первая фундаментальная форма плоскости запишется в виде

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

2. Сфера $S^2(R) \subset E^3$

Параметризуем сферу радиус-вектором

$$\vec{r} = R\{\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \partial_1 \vec{r} &= R\{\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u\}, \\ \partial_2 \vec{r} &= R\{-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0\}. \end{aligned}$$

Для коэффициентов первой фундаментальной формы получим

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_1 \vec{r} \rangle = R^2, \\ g_{12} &= \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r} \rangle = 0, \\ g_{22} &= \langle \partial_2 \vec{r}, \partial_2 \vec{r} \rangle = R^2 \sin^2 u. \end{aligned}$$

Таким образом, первая фундаментальная форма сферы в данной параметризации

$$ds^2 = R^2(du^2 + \sin^2 u dv^2).$$

Перейдем к другой параметризации

$$\begin{cases} u = u^*/R \\ v = v^* \end{cases}$$

Матрица Якоби этого преобразования имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} g^* &= J^t g(u^*/R, v^*) J = \\ &= \begin{pmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2(u^*/R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2(u^*/R) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, в новых координатах

$$ds^2 = (du^*)^2 + R^2 \sin^2(u^*/R)(dv^*)^2.$$

3. **Гиперболическая плоскость H^2 .** Пусть $E^{3,1}$ — псевдоевклидово пространство с метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

В псевдоевклидовом пространстве скалярное произведение векторов

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

вычисляется по формуле

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3.$$

В этом псевдоевклидовом пространстве рассмотрим поверхность, образованную вращением гиперболической окружности $x^2 - z^2 = -R^2$ мнимого радиуса R вокруг оси Oz . Параметризация такой окружности имеет вид

$$\begin{cases} x = R \operatorname{sh} u, \\ z = R \operatorname{ch} u, \end{cases}$$

а параметризация соответствующей поверхности, задающей сферу мнимого радиуса R , имеет вид

$$\begin{cases} x = R \operatorname{sh} u \cos v; \\ y = R \operatorname{sh} u \sin v; \\ z = R \operatorname{ch} u \end{cases}$$

Эта поверхность называется *гиперболической плоскостью H^2* . Гиперболическая плоскость не компактна и представляется поверхностью двуполостного гиперболоида вращения

$$x^2 + y^2 - z^2 = -R^2.$$

Для радиус-вектора гиперболической плоскости имеем

$$\begin{cases} \vec{r} = \{R \operatorname{sh} u \cos v, R \operatorname{sh} u \sin v, R \operatorname{ch} u\}, \\ \partial_1 \vec{r} = R \{\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{sh} u\}, \\ \partial_2 \vec{r} = R \operatorname{sh} u \{-\cos v, \sin v, 0\}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$g_{11} = \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_1 \vec{r} \rangle = R^2 (\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u) = R^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = R^2 \operatorname{sh}^2 u.$$

Следовательно, I фундаментальная форма гиперболической плоскости в такой параметризации имеет вид

$$ds^2 = R^2 du^2 + R^2 \operatorname{sh}^2 u dv^2.$$

Переходя к новым параметрам

$$\begin{cases} u^* = Ru, \\ v^* = v \end{cases}$$

можно записать I фундаментальную форму гиперболической плоскости в виде

$$ds^2 = (du^*)^2 + R^2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{u^*}{R} \right) (dv^*)^2.$$

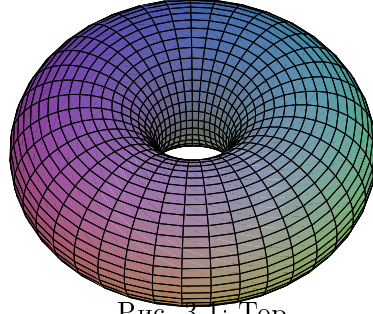


Рис. 3.1: Тор.

4. **Тор** $T^2 = S^1 \times S^1 \subset E^3$, как поверхность вращения.

Рассмотрим поверхность, образованную вращением окружности, радиуса b , лежащей в плоскости (x, z) , центр которой находится в точке $(a, 0)$ ($a > b$) вокруг оси Oz . Параметризация такого тора имеет вид

$$\vec{r} = \{(a + b \sin u) \cos v, (a + b \sin u) \sin v, b \cos u\},$$

где u – угол между радиусом, проведенным к точке на окружности, и осью Oz , а v – параметр вращения.

Вычислим

$$\begin{aligned}\partial_1 \vec{r} &= \{b \cos v \cos u, b \sin v \cos u, -b \sin u\}, \\ \partial_2 \vec{r} &= \{-\sin v(a + b \sin u), \cos v(a + b \sin u), 0\}\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}g_{11} &= \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_1 \vec{r} \rangle = b^2, \\ g_{12} &= \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r} \rangle = 0, \\ g_{22} &= \langle \partial_2 \vec{r}, \partial_2 \vec{r} \rangle = (a + b \sin u)^2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$ds^2 = b^2 du^2 + (a + b \sin u)^2 dv^2.$$

Замена параметров

$$\begin{cases} u = u^*/b \\ v = v^* \end{cases}$$

приводит к выражению

$$ds^2 = (du^*)^2 + (a + b \sin(u^*/b))^2 (dv^*)^2.$$

5. **Тор Клиффорда** $T^2 = S^1 \times S^1 \subset E^4$.

Эта поверхность параметризуется радиусом-вектором

$$\vec{r} = \{a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v\}.$$

Найдем

$$\begin{aligned}\partial_1 \vec{r} &= a\{-\sin u, \cos u, 0, 0\}, \\ \partial_2 \vec{r} &= b\{0, 0, -\sin v, \cos v\}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}g_{11} &= \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_1 \vec{r} \rangle = a^2, \\ g_{12} &= \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r} \rangle = 0, \\ g_{22} &= \langle \partial_2 \vec{r}, \partial_2 \vec{r} \rangle = b^2\end{aligned}$$

и матрица I фундаментальной формы примет вид

$$g = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$ds^2 = a^2 du^2 + b^2 dv^2.$$

Заметим, что тор Клиффорда имеет такую же I фундаментальную форму как и плоскость, но лежит в 3-х мерной сфере радиуса $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

6. **Произведение двух кривых.** Рассмотрим две кривые γ_1 и γ_2 , каждая из которых лежит в своей двумерной плоскости, скажем $\gamma_1 \subset E_{(1)}^2$ и $\gamma_2 \subset E_{(2)}^2$. Подмножество

$$\gamma_1 \times \gamma_2 \in E^4 = E_{(1)}^2 \times E_{(2)}^2$$

называется (прямым) *произведением кривых* γ_1 и γ_2 .

Если кривые γ_1 и γ_2 регулярны, то их произведение является двумерной регулярной поверхностью в E^4 . Действительно, пусть

$$\vec{r}_1 = \{x^1(u), x^2(u), 0, 0\}$$

натуральная параметризация кривой γ_1 и

$$\vec{r}_2 = \{0, 0, x^3(v), x^4(v)\}$$

натуральная параметризация кривой γ_2 . Тогда параметризация поверхности $\gamma_1 \times \gamma_2$ примет вид

$$\vec{r} = \{x^1(u), x^2(u), x^3(v), x^4(v)\}.$$

Легко видеть, что

$$\partial_1 \vec{r} = \{\vec{\tau}_1, 0\}, \quad \partial_2 \vec{r} = \{0, \vec{\tau}_2\},$$

где $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ единичные векторы касательных соответствующих кривых. Поэтому

$$g_{11} = |\partial_1 \vec{r}|^2 = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = |\partial_2 \vec{r}|^2 = 1$$

и I фундаментальная форма поверхности принимает вид

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Таким образом, поверхность, образованная прямым произведением двух кривых несет плоскую метрику.

7. **Общая поверхность вращения.** Пусть γ плоская кривая и l — прямая, лежащая в этой же плоскости. Поверхность, образованная кривой γ при вращении плоскости вокруг прямой l называется поверхностью вращения с осью вращения l .

Запишем уравнение поверхности вращения в специальной системе координат. Ось Oz направим вдоль оси вращения, а ось Ox Декартовой прямоугольной системы координат расположим в плоскости кривой γ . Наконец, ось Oy направим перпендикулярно плоскости кривой γ .

Пусть параметрическое уравнение кривой γ имеет вид

$$\gamma : \begin{cases} x = f(u), \\ z = g(u), \end{cases}$$

Тогда параметрическое уравнение поверхности вращения запишется в виде

$$\begin{cases} x = f(u) \cos v, \\ y = f(u) \sin v, \\ z = g(u) \end{cases}$$

или в векторной форме

$$\vec{r} = \{f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)\}.$$

Вычислим производные

$$\begin{aligned} \partial_1 \vec{r} &= \{f' \cos v, f' \sin v, g'\}, \\ \partial_2 \vec{r} &= \{-f \sin v, f \cos v, 0\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$g_{11} = (x')^2 + (z')^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = f^2(u).$$

И следовательно,

$$ds^2 = [(f')^2 + (g')^2] du^2 + f^2(u) dv^2.$$

Если u — *натуральный параметр* на профильной кривой, то

$$(f')^2 + (g')^2 = 1$$

и тогда

$$ds^2 = du^2 + f^2(u) dv^2.$$

8. **Поверхность переноса.** Пусть γ_1 и γ_2 две плоские кривые, расположенные в двух пересекающихся плоскостях Π_1 и Π_2 . Пусть $O = \gamma_2 \cap \Pi_1$. Поверхность, образованная кривой γ_1 при параллельном смещении плоскости Π_1 вдоль кривой γ_2 (точка O движется по кривой γ_2 и определяет смещение плоскости Π_1 как твердого тела) называется *поверхностью переноса*. Уравнение поверхности переноса записывается в виде

$$\vec{r} = \vec{\rho}_1(u) + \vec{\rho}_2(v),$$

где $\vec{\rho}_1$ и $\vec{\rho}_2$ параметрические уравнения кривых γ_1 и γ_2 соответственно. Легко видеть, что

$$\partial_1 \vec{r} = \vec{\rho}'_1; \quad \partial_2 \vec{r} = \vec{\rho}'_2.$$

Тогда I фундаментальная форма имеет вид

$$ds^2 = |\vec{\rho}'_1|^2 du^2 + 2\langle \vec{\rho}'_1, \vec{\rho}'_2 \rangle dudv + |\vec{\rho}'_2|^2 dv^2.$$

Если u и v *натуральные параметры* на соответствующих кривых, то

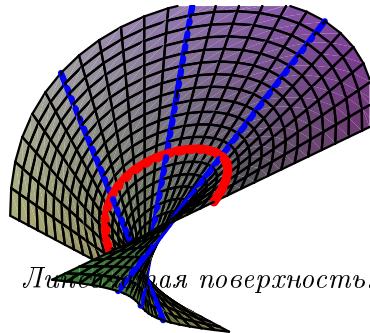
$$|\vec{\rho}'_1| = |\vec{\rho}'_2| = 1, \quad \langle \vec{\rho}'_1, \vec{\rho}'_2 \rangle = \cos \omega(u, v),$$

где $\omega(u, v)$ – угол между касательными векторами координатных линий. В этом случае I фундаментальная форма поверхности переноса запишется в виде

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega dudv + dv^2.$$

Координатная сеть с I фундаментальной формой такого вида называется *Чебышевской* а функция $\omega = \omega(u, v)$ называется *сетевым углом*.

9. **Общая линейчатая поверхность.** Пусть γ – кривая в пространстве и $\vec{a}$ – единичное векторное поле на γ . Поверхность, образованная семейством прямых, проходящих через точки кривой γ в направлении соответствующего вектора $\vec{a}$ называется *линейчатой поверхностью*. При этом кривая γ называется *направляющей*, а сами прямые – *образующими* линейчатой поверхности.



Пусть вектор-функция

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(v)$$

задает натуральную параметризацию направляющей. Тогда уравнение линейчатой поверхности запишется в виде

$$\vec{r} = \vec{\rho}(v) + u \vec{a}(v).$$

Следовательно,

$$\partial_1 \vec{r} = \vec{a}, \quad \partial_2 \vec{r} = \vec{\rho}' + v \vec{a}'.$$

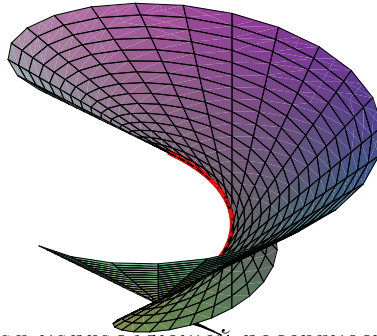
Тогда коэффициенты первой фундаментальной формы примут вид

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = \langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle = \cos \omega, \quad g_{22} = 1 + 2\langle \vec{\rho}', \vec{a}' \rangle v + v^2 |\vec{a}'|^2,$$

а значит

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega \, du dv + (1 + 2 \langle \vec{\rho}', \vec{a}' \rangle v + v^2 |\vec{a}'|^2) dv^2.$$

10. **Торс (поверхность касательных).**



Торс. В точках направляющей поверхность не регулярна.

Эта поверхность является частным случаем линейчатой поверхности при $\vec{a} = \vec{\rho}'$. Тогда $\vec{a}' = k\vec{v}$, $\omega = 0$ и I фундаментальная форма торса примет вид

$$ds^2 = du^2 + 2 \, du dv + (1 + k^2 v^2) dv^2.$$

11. **Цилиндрическая поверхность.** Эта поверхность является частным случаем линейчатой поверхности при $\vec{a}' = 0$ и, одновременно, частным случаем поверхности переноса если γ_2 является прямой линией. Параметрическое уравнение цилиндрической поверхности в обоих случаях можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{\rho}(v) + u\vec{a}, \quad \vec{a} = \text{const}, \quad |\vec{a}| = 1.$$

Поэтому I фундаментальная форма цилиндрической поверхности примет вид

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega \, du dv + dv^2, \quad \omega = \omega(u).$$

12. **Явно заданная поверхность.** Поверхность, заданная в виде графика функции $z = f(x, y)$ называется *явно заданной*. Ее параметрическое уравнение легко записывается в виде

$$\vec{r} = \{x, y, f(x, y)\}$$

Поэтому

$$\partial_1 \vec{r} = \{1, 0, f_x\}, \quad \partial_2 \vec{r} = \{0, 1, f_y\}$$

И первая квадратичная форма явно заданной поверхности примет вид

$$ds^2 = (1 + f_x^2) dx^2 + 2 f_x f_y \, dx dy + (1 + f_y^2) dy^2.$$

3.2 Длина дуги кривой на поверхности

Утверждение 3.2.1 Пусть $\vec{r}: \mathcal{D}^m(u) \rightarrow F^m$ — регулярная параметризация поверхности F^m , $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{D}^m$ — внутреннее уравнение кривой $\tilde{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ на F^m . Обозначим через γ' — касательное векторное поле γ . Тогда длина кривой $\tilde{\gamma}$ на промежутке $[t_1, t_2]$ вычисляется по формуле

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma', \gamma')} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}(u(t)) \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt}} dt,$$

где (g_{ik}) — матрица первой фундаментальной формы, $u = u(t)$ — параметризация γ .

Доказательство. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(u^1, \dots, u^m)$ — регулярная параметризация F^m . Зададим в области параметров кривую

$$\gamma: \begin{cases} u^1 = u^1(t); \\ \dots\dots\dots \\ u^m = u^m(t). \end{cases}$$

Обозначим

$$\gamma' = \begin{bmatrix} \frac{du^1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du^m}{dt} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим кривую $\tilde{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ на поверхности. Ее параметрическое уравнение как кривой в E^{m+p} запишется в виде

$$\tilde{\gamma}(t) = \vec{r}(u^1(t), \dots, u^m(t)).$$

Очевидно, что

$$\tilde{\gamma}' = \frac{du^1}{dt} \partial_1 \vec{r} + \dots + \frac{du^m}{dt} \partial_m \vec{r}$$

или в матричной форме записи

$$\tilde{\gamma}' = \partial \vec{r} \cdot \gamma'.$$

Для кривой в евклидовом пространстве

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} |\tilde{\gamma}'| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\langle \tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}' \rangle} dt.$$

Однако

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}' \rangle &= (\tilde{\gamma}')^t (\tilde{\gamma}') = \\ &= (\partial \vec{r} \gamma')^t (\partial \vec{r} \gamma') = (\gamma')^t (\partial \vec{r})^t (\partial \vec{r}) \gamma' = (\gamma')^t g_{\gamma(t)} \gamma' = g_{\gamma(t)}(\gamma', \gamma'). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma', \gamma')} dt.$$

Заметим, что в координатной форме

$$g_{\gamma(t)}(\gamma', \gamma') = g_{ik}(u(t)) \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt}.$$

Поэтому мы можем так же записать

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}(u(t)) \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt}} dt.$$

■

Утверждение 3.2.2 *Длина кривой не зависит от параметризации поверхности.*

Доказательство. Пусть заданы две регулярные параметризации F^m

$$\begin{cases} \vec{r}: \mathcal{D}^m \rightarrow F^m & \text{в виде } \vec{r} = \vec{r}(u^1, \dots, u^m); \\ \vec{\rho}: \mathcal{G}^m \rightarrow F^m & \text{в виде } \vec{\rho} = \vec{\rho}(v^1, \dots, v^m). \end{cases}$$

Пусть $\varphi: \mathcal{G}^m \rightarrow \mathcal{D}^m$ локальный диффеоморфизм, заданный набором функций $u^i = u^i(v^1, \dots, v^m)$ ($i = 1, \dots, m$), так что

$$\vec{\rho}(v^1, \dots, v^m) = (\vec{r} \circ \varphi)(v^1, \dots, v^m) = \vec{r}(u^1(v^1, \dots, v^m), \dots, u^m(v^1, \dots, v^m)).$$

Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{G}^m$ кривая в области параметров $\mathcal{G}^m$, заданная в виде

$$\gamma: \begin{cases} v^1 = v^1(t); \\ \dots\dots\dots \\ v^m = v^m(t). \end{cases}$$

Тогда

$$l(\vec{\rho} \circ \gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\gamma}(\gamma', \gamma')} dt,$$

где g – матрица первой фундаментальной формы поверхности относительно параметров $(v^1, \dots, v^m)$

Пусть теперь $\sigma = \varphi \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{D}^m$ кривая в области параметров $\mathcal{D}^m$, соответствующая кривой γ по диффеоморфизму, то есть

$$\sigma: \begin{cases} u^1 = u^1(v^1(t), \dots, v^m(t)); \\ \dots\dots\dots \\ u^m = u^m(v^1(t), \dots, v^m(t)); \end{cases}$$

Тогда

$$l(\vec{r} \circ \sigma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\tilde{g}_\sigma(\sigma', \sigma')} dt,$$

где $\tilde{g}$ – матрица первой фундаментальной формы поверхности относительно параметров $(u^1, \dots, u^m)$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции,

$$\frac{du^i}{dt} = \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \frac{dv^k}{dt}$$

или в матричной записи

$$\sigma' = \frac{\partial u}{\partial v} \gamma'.$$

Согласно формулам преобразования коэффициентов первой фундаментальной формы, имеем

$$\begin{aligned} g_\gamma(\gamma', \gamma') &= (\gamma')^t g_\gamma \gamma' = (\gamma')^t \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^t g((\varphi \circ \gamma)(t)) \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) \gamma' = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial v} \gamma' \right)^t \tilde{g}(\sigma(t)) \left(\frac{\partial u}{\partial v} \gamma' \right) = (\sigma')^t \tilde{g}_\sigma \sigma' = \tilde{g}_\sigma(\sigma', \sigma') \end{aligned}$$

Таким образом,

$$l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma).$$

■

Примеры.

1. **Длина окружности на сфере.** Рассмотрим в качестве поверхности двумерную сферу $S^2(R)$ радиуса R , а в качестве кривой на сфере – окружность радиуса r , определяемую как геометрическое место точек сферы, удаленных от фиксированной точки на расстоянии r . При этом в качестве расстояния между точками на сфере примем длину меньшей дуги большого круга сферы, проходящего через эти точки.

Так как длина кривой не зависит от параметризации поверхности, то выберем параметризацию, удобную для вычислений. Ось Oz направим из центра сферы к центру окружности, а плоскость xOy расположим в плоскости, перпендикулярной выбранной оси Oz , и проходящей через центр сферы. Относительно такой Декартовой системы координат, параметризацию сферы можно выбрать так, что

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2 \frac{u}{R} dv^2.$$

При этом окружность, с центром в точке $(0, 0, 1)$ радиуса r , получит внутреннюю параметризацию вида

$$\gamma : \begin{cases} u = r, \\ v = t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Заметим, что

$$\gamma' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$g_r(\gamma', \gamma') = R^2 \sin^2 \frac{r}{R}$$

и для длины окружности получим

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} R \sin \frac{r}{R} dt = 2\pi R \sin \frac{r}{R}.$$

В сравнении с длиной окружности того же радиуса на Евклидовой плоскости заметим

$$\frac{l(\gamma)}{2\pi r} = \frac{\sin(r/R)}{r/R} < 1$$

Заметим, так же, что если $\frac{r}{R} \ll 1$, то $l(\gamma) \approx 2\pi r$.

2. **Длина окружности на гиперболической плоскости.** На гиперболической плоскости с метрикой

$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sh}^2(u/R) dv^2$$

рассмотрим окружность

$$\begin{cases} u = r, \\ v = t \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Вычисляя подобно случаю сферы, находим

$$l(r) = 2\pi R \operatorname{sh} \frac{r}{R}.$$

В сравнении с длиной окружности того же радиуса на Евклидовой плоскости заметим

$$\frac{l(\gamma)}{2\pi r} = \frac{\operatorname{sh}(r/R)}{r/R} > 1$$

Заметим, аналогично, что если $\frac{r}{R} \ll 1$, то $l(\gamma) \approx 2\pi r$.

3.3 Угол между кривыми на поверхности

Напомним, что *углом* между кривыми на поверхности называется меньший из углов между касательными к кривым в их общей точке.

Утверждение 3.3.1 Пусть $\vec{r}: \mathcal{D}^m(u) \rightarrow F^m$ — регулярная параметризация поверхности F^m , $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathcal{D}^m$ и $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathcal{D}^m$ — внутренние уравнения кривых $\vec{\gamma}_1 = \vec{r} \circ \gamma_1$ и $\vec{\gamma}_2 = \vec{r} \circ \gamma_2$ на F^m . Пусть $\gamma_1 \cap \gamma_2 = q$ и $\tilde{q} = \vec{r}(q)$. Обозначим через γ_1' и γ_2' — касательные векторные поля кривых γ_1 и γ_2 соответственно. Тогда

$$\cos(\vec{\gamma}_1 \wedge \vec{\gamma}_2)(\tilde{q}) = \frac{|g(\gamma_1', \gamma_2')|}{\sqrt{g(\gamma_1', \gamma_1')g(\gamma_2', \gamma_2')}}(q).$$

Доказательство. Достаточно заметить, что если φ – искомый угол, то

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{\gamma}_1' \wedge \vec{\gamma}_2')|(\tilde{q}) = \frac{|\langle \vec{\gamma}_1', \vec{\gamma}_2' \rangle|}{\sqrt{\langle \vec{\gamma}_1', \vec{\gamma}_1' \rangle \langle \vec{\gamma}_2', \vec{\gamma}_2' \rangle}}(\tilde{q}).$$

Из определения I фундаментальной формы немедленно следует, что

$$\begin{aligned} \langle \vec{\gamma}_1', \vec{\gamma}_2' \rangle(\tilde{q}) &= g(\gamma_1', \gamma_2')(q), \\ \langle \vec{\gamma}_1', \vec{\gamma}_1' \rangle(\tilde{q}) &= g(\gamma_1', \gamma_1')(q), \\ \langle \vec{\gamma}_2', \vec{\gamma}_2' \rangle(\tilde{q}) &= g(\gamma_2', \gamma_2')(q). \end{aligned}$$

■

Упражнение 3.3.1 Доказать, что угол между кривыми не зависит от параметризации поверхности.

Доказанное утверждение позволяет выяснить геометрический смысл коэффициентов первой фундаментальной формы.

Диагональные элементы

$$g_{ii} = |\partial_i \vec{r}|^2$$

выражают квадрат длины вектора, касательного к соответствующей координатной линии. *Внедиагональные элементы* определяют угол между касательными векторами соответствующих координатных линий

$$\cos \varphi_{ik} = \frac{g_{ik}}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{kk}}} \quad (i \neq k).$$

Упражнение 3.3.2 Доказать, что на поверхности с первой фундаментальной формой

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

линии, делящие пополам углы между координатными линиями, могут быть найдены из уравнений

$$\sqrt{E} du = \pm \sqrt{G} dv.$$

3.4 Площадь (m- мерный объем) области на поверхности

Пусть $F^m \subset E^{m+p}$ поверхность и $\vec{r} = \vec{r}(u^1, \dots, u^m)$ — ее регулярная параметризация

$$\vec{r}: \mathcal{D}(u) \rightarrow E^{m+p}.$$

Напомним, что если $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ — система векторов в E^N , то объем параллелепипеда с ребрами $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ можно найти по формуле

$$\left[\text{Vol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m) \right]^2 = \det(\text{Gram}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)),$$

где $\text{Gram}(\cdot)$ означает матрицу Грама системы векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$.

Например, в E^3 объем системы из трех векторов равен их смешанному произведению и легко проверить, что

$$\text{Vol}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} = \sqrt{\det(\text{Gram}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3))}.$$

Рассмотрим систему векторов

$$\vec{d}_1 = du^1 \partial_1 \vec{r}, \dots \quad \vec{d}_m = du^m \partial_m \vec{r}.$$

Эти векторы лежат в касательной плоскости поверхности, линейно независимы и имеют бесконечно малую длину. Другими словами, они образуют параллелепипед с бесконечно малым объемом.

Определение 3.4.1 *Элементом площади или m- мерного объема поверхности F^m называется бесконечно малая величина*

$$dV = \text{Vol}(\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_m).$$

Суммируя элементы объема, получим объем области на поверхности.

Определение 3.4.2 *Пусть $\vec{r} : \mathcal{D}^m \rightarrow E^{m+p}$ – элементарная регулярная поверхность и $\Omega \subset \mathcal{D}^m$ измеримая подобласть в $\mathcal{D}^m$ такая, что $\bar{\Omega} \subset \mathcal{D}^m$. Объемом области $\vec{r}(\Omega) \subset F^m$ называется величина*

$$\text{Vol}(\vec{r}(\Omega)) = \int_{\Omega} dV.$$

Замечания.

- Если граница области $\partial\Omega$ имеет меру ноль, то

$$\int_{\Omega} dV = \int_{\bar{\Omega}} dV$$

- Если Ω не компактна, то $\int_{\Omega} dV$ нужно понимать в несобственном смысле.

Утверждение 3.4.1 *Пусть $F^m \subset E^{m+p}$, параметризованная вектор-функцией $\vec{r} : \mathcal{D}^m(u) \rightarrow E^{m+p}$ и $g = (g_{ik})$ – матрица первой фундаментальной формы F^m . Тогда*

$$\text{Vol}(\vec{r}(\Omega)) = \int_{\Omega} \sqrt{\det g} du^1 \dots du^m.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся результатом из линейной алгебры, а именно, формулой объема n -мерного параллелепипеда в пространстве E^N . Если $\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_m$ векторы, направленные вдоль сторон параллелепипеда, то его объем

$$V = \sqrt{\det \left(\text{Gram}(\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_m) \right)}.$$

Элементы матрицы Грама имеют вид $\langle \vec{d}_i, \vec{d}_k \rangle = \langle du^i \partial_i \vec{r}, du^k \partial_k \vec{r} \rangle$. Выпишем матрицу Грама поэлементно:

$$\text{Gram}(\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_m) = \begin{bmatrix} g_{11} du^1 du^1 & \cdots & g_{1m} du^1 du^m \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{m1} du^m du^1 & \cdots & g_{mm} du^m du^m \end{bmatrix}$$

Так как при вычислении определителя мы можем выносить общий множитель строки или столбца, то легко находим

$$\det \left(\text{Gram}(\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_m) \right) = \det \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{bmatrix} (du^1 \dots du^m)^2.$$

Следовательно,

$$dV = \sqrt{\det g} du^1 \dots du^m$$

и

$$\text{Vol}(\vec{r}(\Omega)) = \int_{\Omega} \sqrt{\det g} du^1 \dots du^m.$$

■

Утверждение 3.4.2 *Объем области на поверхности не зависит от параметризации поверхности.*

Доказательство. Предположим, что есть две параметризации :

$$\begin{aligned} \vec{r}: \mathcal{D}(u) &\rightarrow F^m, \\ \vec{\rho}: \mathcal{G}(v) &\rightarrow F^m, \end{aligned}$$

причем задан диффеоморфизм $u = u(v): \mathcal{G}^m \rightarrow \mathcal{D}^m$ с матрицей Якоби $\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)$. Тогда имеем

$$g(v) = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^t g(u(v)) \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right),$$

и

$$\det g(v) = \det g(u(v)) \det^2 \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right).$$

А следовательно,

$$\int_{\mathcal{G}(v)} \sqrt{\det g(v)} dv^1 \dots dv^m = \int_{\mathcal{G}(v)} \sqrt{\det g(u(v))} \left| \det \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right) \right| dv^1 \dots dv^m = \int_{\mathcal{D}(u)} \sqrt{\det g(u)} du^1 \dots du^m.$$

Последнее равенство есть формула замены переменных в кратном интеграле.

■

Примеры.

- **Площадь круга на сфере.** Рассмотрим сферу $S^2(R) \subset E^3$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

параметризованную сферическими полярными координатами.

Первая квадратичная форма сферы в такой параметризации имеет вид

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2(u/R) dv^2.$$

Тогда элемент площади сферы

$$dS = R \sin(u/R) du dv.$$

Круг радиуса r , с центром в полюсе, задается системой неравенств

$$D^2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq r; \\ 0 \leq v \leq 2\pi. \end{cases}$$

Площадь круга на сфере $\Omega = \tilde{r}(D^2)$ будет равна

$$S(\Omega) = \int_0^{2\pi} dv \int_0^r R \sin(u/R) du = -2\pi R^2 \cos \frac{u}{R} \Big|_0^r = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{r}{2R}.$$

Если $\frac{r}{R} \ll 1$, то $S(\Omega) \approx \pi r^2$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{S(\Omega)}{\pi r^2} = \frac{4\pi R^2 \sin^2(r/2R)}{\pi r^2} = \left[\frac{\sin(r/2R)}{(r/2R)} \right]^2 < 1,$$

так как $\frac{\sin x}{x} < 1$ для всех $x > 0$.

- **Площадь круга на гиперболической плоскости.** Рассмотрим гиперболическую плоскость $H^2(R) \subset E^{3,1}$ как поверхность

$$x^2 + y^2 - z^2 = -R^2,$$

параметризованную сферическими полярными координатами.

Первая квадратичная форма гиперболической плоскости в такой параметризации имеет вид

$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sh}^2(u/R) dv^2.$$

Тогда элемент площади гиперболической плоскости имеет вид

$$dS = R \operatorname{sh}(u/R) du dv.$$

Круг радиуса r , с центром в полюсе, задается системой неравенств

$$D^2 : \begin{cases} 0 \leq u \leq r; \\ 0 \leq v \leq 2\pi. \end{cases}$$

Площадь круга на гиперболической плоскости $\Omega = \vec{r}(D^2)$ будет равна

$$S(\Omega) = \int_0^{2\pi} dv \int_0^r R \operatorname{sh}(u/R) du = 2\pi R^2 \operatorname{ch} \frac{u}{R} \Big|_0^r = 4\pi R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2R}.$$

Если $\frac{r}{R} \ll 1$, то $S(\Omega) \approx \pi r^2$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{S(\Omega)}{\pi r^2} = \frac{4\pi R^2 \operatorname{sh}^2(r/2R)}{\pi r^2} = \left[\frac{\operatorname{sh}(r/2R)}{(r/2R)} \right]^2 > 1,$$

так как $\frac{\operatorname{sh} x}{x} > 1$ для всех $x > 0$.

Замечание. Элемент площади поверхности $F^2 \subset E^3$ можно представить в виде:

$$dS = \left| [\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}] \right| du^1 du^2.$$

Действительно, с геометрической точки зрения

$$\left| [\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}] \right| du^1 du^2 = \left| [du^1 \partial_1 \vec{r}, du^2 \partial_2 \vec{r}] \right|$$

есть площадь параллелограмма, натянутого на векторы

$$\vec{d}_1 = du^1 \partial_1 \vec{r} \quad \text{и} \quad \vec{d}_2 = du^2 \partial_2 \vec{r}.$$

3.5 Отображение поверхностей. Изометрия

Определение 3.5.1 Пусть F_1^m и F_2^m две элементарные поверхности в евклидовом пространстве E^{m+p} . Говорят, что задано отображение

$$\Phi: F_1^m \rightarrow F_2^m$$

одной поверхности на другую, если определено однозначное соответствие

$$F_1^m \ni q \rightarrow \Phi(q) \in F_2^m.$$

Отображение Φ называется **непрерывным**, если Φ непрерывно относительно индуцированных топологий на F_1^m и F_2^m . Если Φ — гомеоморфизм, то поверхности F_1^m и F_2^m называются **гомеоморфными**.

Пусть $\mathcal{D}_1^m$ и $\mathcal{D}_2^m$ области параметров поверхностей F_1^m и F_2^m соответственно. То есть определены гомеоморфизмы

$$\begin{aligned} f_1: \mathcal{D}_1^m &\rightarrow f_1(\mathcal{D}_1^m) = F_1^m, \\ f_2: \mathcal{D}_2^m &\rightarrow f_2(\mathcal{D}_2^m) = F_2^m. \end{aligned}$$

Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_1^m & \xrightarrow{\Phi} & F_2^m \\ \uparrow f_1 & & \uparrow f_2 \\ \mathcal{D}_1^m & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{D}_2^m. \end{array}$$

с замыкающим отображением

$$\varphi = f_2^{-1} \circ \Phi \circ f_1: \mathcal{D}_1^m \rightarrow \mathcal{D}_2^m.$$

Если Φ — непрерывно (является гомеоморфизмом), то φ непрерывно (является гомеоморфизмом) как композиция непрерывных отображений (гомеоморфизмов).

Верно и в некотором смысле обратное утверждение. А именно, зададим непрерывное отображение

$$\varphi: \mathcal{D}_1^m \rightarrow \mathcal{D}_2^m.$$

Тогда отображение $\Phi = f_2 \circ \varphi \circ f_1^{-1}$ будет непрерывным отображением

$$\Phi: F_1^m \rightarrow F_2^m.$$

Если φ гомеоморфизм, то и Φ — гомеоморфизм.

Отображение φ называется **координатным (параметрическим) выражением** отображения $\Phi: F_1^m \rightarrow F_2^m$.

Пусть теперь F_1^m и F_2^m две элементарные *регулярные* класса C^k поверхности в евклидовом пространстве E^{m+p} .

Определение 3.5.2 Отображение $\Phi: F_1^m \rightarrow F_2^m$ двух регулярных элементарных поверхностей класса C^k называется **диффеоморфизмом класса C^s** или **C^s -диффеоморфизмом**, если его координатное выражение $\varphi = f_2^{-1} \circ \Phi \circ f_1: \mathcal{D}_1^m \rightarrow \mathcal{D}_2^m$ является диффеоморфизмом класса C^s . Две поверхности называются **C^s -диффеоморфными**, если существует C^s -диффеоморфизм $\Phi: F_1^m \rightarrow F_2^m$.

Очевидно, что в определении C^s -диффеоморфизма $s \leq k$.

Простейшим, но важным, примером диффеоморфизма является диффеоморфизм, действующий по равенству координат. Для его определения, рассмотрим две поверхности, параметризованные одной и той же областью параметров. Например, зададим

$$\mathcal{D}^2 : \left\{ -\infty \leq x \leq +\infty, \quad -\infty \leq y \leq +\infty \right\}$$

и две вектор-функции

$$\vec{r} = \{x, y, x^2 + y^2\}, \quad \vec{\rho} = \{x, y, x^2 - y^2\}.$$

Эти вектор функции задают соответственно поверхности эллиптического E и гиперболического H параболоидов. Отображение

$$\Phi : E \rightarrow H,$$

действующее по равенству координат, строится на основе тождественного отображения

$$\varphi = id : \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}^2.$$

Точке $A \in E$ с координатами (x, y) ставится в соответствие точка $B \in H$ с теми же координатами. Само отображение $\Phi : E \rightarrow H$ выпишется в виде

$$\Phi(x, y, x^2 + y^2) = (x, y, x^2 - y^2).$$

Оказывается, что в общем случае диффеоморфизм поверхностей сводится к диффеоморфизму, действующему по равенству координат.

Утверждение 3.5.1 Пусть $\Phi : F_1^m \rightarrow F_2^m$ — диффеоморфизм. Тогда существует такая параметризация поверхности F_2^m , что Φ является диффеоморфизмом, действующим по равенству координат.

Доказательство. Действительно, пусть f_1 и f_2 регулярные параметризации (локальные диффеоморфизмы)

$$f_1 : \mathcal{D}_1 \rightarrow f(\mathcal{D}_1),$$

$$f_2 : \mathcal{D}_2 \rightarrow f(\mathcal{D}_2).$$

Тогда определен координатный диффеоморфизм $\varphi : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$. Запишем

$$\Phi = f_2 \circ \varphi \circ f_1^{-1}.$$

Теперь заметим, что

$$f_2 \circ \varphi : \mathcal{D}_1 \rightarrow F_2^m$$

есть в точности параметризация поверхности F_2^m областью параметров $\mathcal{D}_1$ с диффеоморфизмом φ в качестве диффеоморфизма перепараметризации.

Положим $\tilde{f}_2 = f_2 \circ \varphi$. Тогда отображение Φ запишется в виде

$$\Phi = \tilde{f}_2 \circ f_1^{-1} = \tilde{f}_2 \circ id_{\mathcal{D}_1} \circ f_1^{-1}.$$

А следовательно, координатное выражения отображение Φ станет тождественным, т.е. действующим по равенству координат. ■

Пусть $\gamma \subset F_1^m$ кривая на F_1^m и $\Phi : F_1^m \rightarrow F_2^m$ — диффеоморфизм. Тогда $\tilde{\gamma} = \Phi \circ \gamma$ является кривой на F_2^m и мы говорим, что кривая $\tilde{\gamma}$ соответствует γ при диффеоморфизме Φ .

Определение 3.5.3 *Отображение $\Phi: F_1^m \rightarrow F_2^m$ двух элементарных поверхностей называется **изометрией**, если*

a) Φ — диффеоморфизм;

b) Φ сохраняет длины соответствующих кривых, то есть $l_{F_1}(\gamma) = l_{F_2}(\Phi \circ \gamma)$.

Утверждение 3.5.2 *Две элементарные поверхности F_1^m и F_2^m изометричны тогда и только тогда, когда при диффеоморфизме, действующем по равенству координат, матрицы их первых квадратичных форм совпадают.*

Доказательство. Действительно, пусть F_1^m и F_2^m изометричны поверхности и пусть

$$\begin{aligned}\vec{r}: \mathcal{D}^m &\rightarrow F_1^m, \\ \vec{\rho}: \mathcal{D}^m &\rightarrow F_2^m\end{aligned}$$

их регулярные параметризации над общей областью параметров $\mathcal{D}^m$. Обозначим через g и $\tilde{g}$ матрицы первых фундаментальных форм поверхностей F_1^m и F_2^m соответственно.

Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{D}^m$ кривая в области параметров. Тогда $\tilde{\gamma}_1 = \vec{r}(\gamma) \subset F_1^m$ и $\tilde{\gamma}_2 = \vec{\rho}(\gamma) \subset F_2^m$ являются соответствующими кривыми на поверхностях. Как мы знаем,

$$l_{F_1}(\tilde{\gamma}_1) = \int_{t_0}^t \sqrt{g(\gamma', \gamma')} dt, \quad l_{F_2}(\tilde{\gamma}_2) = \int_{t_0}^t \sqrt{\tilde{g}(\gamma', \gamma')} dt.$$

Поскольку поверхности изометричны, то имеет место тождество

$$l_{F_1}(\tilde{\gamma}_1) \equiv l_{F_2}(\tilde{\gamma}_2)$$

или

$$\int_{t_0}^t \sqrt{g(\gamma', \gamma')} dt \equiv \int_{t_0}^t \sqrt{\tilde{g}(\gamma', \gamma')} dt.$$

Следовательно, $g(\gamma', \gamma') \equiv \tilde{g}(\gamma', \gamma')$. Так как

$$g(\gamma', \gamma') = g_{ik} \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt}, \quad \tilde{g}(\gamma', \gamma') = \tilde{g}_{ik} \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt},$$

то

$$(g_{ik} - \tilde{g}_{ik}) \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt} \equiv 0,$$

откуда и следует равенство матриц первых квадратичных форм. ■

Примеры.

1. **Сфера и плоскость не изометричны.** Для доказательства, параметризуем сферу и плоскость одной областью параметров

$$\mathcal{D}: \left\{ 0 \leq u \leq \pi R, \quad 0 \leq v \leq 2\pi \right\}$$

при помощи локальных диффеоморфизмов

$$\vec{r} : \mathcal{D} \rightarrow E^3, \quad \vec{\rho} : \mathcal{D} \rightarrow E^3$$

вида

$$S^2(R) : \vec{r}(u, v) = R \{ \sin(u/R) \cos v, \sin(u/R) \sin v, \cos(u/R) \}$$

$$E^2 : \vec{\rho}(u, v) = \{ u \cos v, u \sin v, 0 \}$$

В области параметров рассмотрим кривую

$$\gamma : \begin{cases} u = r, \\ v = t \end{cases}$$

Эта кривая переходит в окружность на сфере с центром в точке $(0, 0, R)$ и радиуса r , а на плоскости – в окружность радиуса r с центром в точке $(0, 0, 0)$. Длина этой окружности на сфере равна

$$l(S^1) = 2\pi R \sin \frac{r}{R},$$

а на плоскости

$$l(S^1) = 2\pi r.$$

Длины кривых не равны, следовательно поверхности не изометричны.

Этот же вывод следует из вида первых фундаментальных форм

$$S^2(R) : ds^2 = du^2 + R^2 \sin^2(u/R) dv^2;$$

$$E^2 : ds^2 = du^2 + u^2 dv^2.$$

2. Гиперболическая плоскость и Евклидова плоскость не изометричны.

Доказательство аналогично предыдущему.

$$H^2(R) : ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sh}^2(u/R) dv^2,$$

$$E^2 : ds^2 = du^2 + u^2 dv^2.$$

3. Торс и плоскость локально изометричны. Параметризуем торс вектор-функцией

$$\vec{r} = \vec{\rho}(v) + u\vec{\tau}(v),$$

где $\vec{\rho} = \vec{\rho}(v)$ – натуральная параметризация γ , над областью параметров

$$\mathcal{D} = \{ 0 < u < +\infty, \quad 0 < v < L_0 \},$$

где L_0 выбрано так, чтобы на участке $[0, L_0]$ кривизна кривой $k(\gamma) > 0$.

Тогда

$$\partial_1 \vec{r} = \vec{\tau}, \quad \partial_2 \vec{r} = \vec{\tau} + u k \vec{\nu};$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1 + u^2 k^2, \quad g_{12} = 0$$

и первая фундаментальная форма тора примет вид

$$d\sigma^2 = du^2 + 2 du dv + (1 + u^2 k^2) dv^2.$$

Согласно основной теореме теории кривых, для заданной функции $k(v)$ произвольного параметра v , на плоскости существует кривая γ^* , кривизна которой $k^* = k$ и параметр v является натуральным параметром на γ^* , то есть $s^* = v$. Пусть $\vec{\rho} = \vec{\rho}(v)$ ее параметризация.

В окрестности кривой γ^* зададим отображение $\vec{\varphi} : \mathcal{D}^2 \rightarrow E^2$

$$\vec{\varphi} = \vec{\rho}(v) + u \vec{\tau}^*(v).$$

Матрица Якоби этого отображения составлена из столбцов

$$\partial \vec{\varphi}_1 = \vec{\tau}^*(v), \quad \partial \vec{\varphi}_2 = \vec{\tau}^*(v) + k(v) \vec{\nu}^*,$$

а значит в области $\mathcal{D}$ отображение $\vec{\varphi}$ является диффеоморфизмом. Относительно новых параметров u и v первая фундаментальная форма плоскости имеет вид:

$$d\sigma^2 = du^2 + 2 du dv + (1 + k^2 u^2) dv^2,$$

что и требуется для локальной изометричности.

4. Для любого прямого геликоида существует локально изометричный ему катеноид.

Прямой геликоид — это поверхность, образованная движением прямой вдоль перпендикулярной ей прямой с одновременным поворотом на угол, пропорциональный скорости движения. В соответствующей системе координат параметризация геликоида имеет вид

$$\begin{cases} x = u \cos v; \\ y = u \sin v; \\ z = av. \end{cases}$$

Область параметров на прямом геликоиде зададим в виде

$$\mathcal{G}^2 = (-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

Вычислим его первую фундаментальную форму.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \{u \cos v, u \sin v, av\}, \\ \partial_1 \vec{r} &= \{\cos v, \sin v, 0\}, \\ \partial_2 \vec{r} &= \{-u \sin v, u \cos v, a\}, \\ g_{11} &= 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2 + u^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2) dv^2 \tag{3.1}$$

Катеноид— это поверхность вращения, образованная вращением графика гиперболического косинуса $x = \operatorname{ch} z$ вокруг оси Oz . Рассмотрим катеноид, имеющий параметризацию вида

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch}(t/a) \cos \alpha, \\ y = a \operatorname{ch}(t/a) \sin \alpha, \\ z = t. \end{cases}$$

Локальную область параметров на катеноиде с такой параметризацией можно выбрать в виде

$$\mathcal{D}^2 = (-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

Найдем первую фундаментальную форму.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \{a \operatorname{ch}(t/a) \cos \alpha, a \operatorname{ch}(t/a) \sin \alpha, t\}, \\ \partial_1 \vec{r} &= \{\operatorname{sh}(t/a) \cos \alpha, \operatorname{sh}(t/a) \sin \alpha, 1\}, \\ \partial_2 \vec{r} &= \{-a \operatorname{ch}(t/a) \sin \alpha, a \operatorname{ch}(t/a) \cos \alpha, 0\}, \\ g_{11} &= 1 + \operatorname{sh}^2(t/a) = \operatorname{ch}^2(t/a), \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2 \operatorname{ch}^2(t/a). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2(t/a) dt^2 + a^2 \operatorname{ch}^2(t/a) d\alpha^2.$$

Рассмотрим отображение $\varphi: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{G}^2$ вида:

$$\begin{cases} u = a \operatorname{sh}(t/a), \\ v = \alpha. \end{cases}$$

Матрица Якоби этого отображения

$$J = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t/a) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

невырождена для всех (t, α) , так как

$$\det J = \operatorname{ch} \frac{t}{a} \geq 1.$$

Поэтому $\varphi: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{G}^2$ является диффеоморфизмом во всей области определения. При этом

$$\begin{aligned} du &= \operatorname{ch}(t/a) dt, \\ dv &= dt. \end{aligned}$$

Относительно новых параметров (над областью $\mathcal{G}$) первая фундаментальная форма катеноида принимает вид

$$ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)dv^2 \quad (3.2)$$

Сравнивая (3.1) и (3.2) замечаем, что над одной и той же областью параметров, первые фундаментальные формы катеноида и геликоида совпадают. Следовательно это локально изометричные поверхности.

3.6 Конформные отображения

Определение 3.6.1 *Отображение*

$$\Phi: F_1^m \rightarrow F_2^m$$

называется **конформным**, если оно сохраняет углы между соответствующими кривыми. Две диффеоморфные поверхности называются **конформно эквивалентными**, если существует конформный диффеоморфизм.

Критерием существования конформного диффеоморфизма служит следующее утверждение.

Утверждение 3.6.1 *Две поверхности (F_1^m, g_1) и (F_2^m, g_2) конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда при диффеоморфизме действующим по равенству координат матрицы их первых фундаментальных форм пропорциональны, то есть*

$$g_1 = \lambda g_2.$$

В качестве примера покажем, что **двумерная сфера и плоскость конформно эквивалентны**.

Выберем параметризацию сферы с первой фундаментальной формой

$$S^2(R): \quad ds_1^2 = R^2 du^2 + R^2 \sin^2(u/R) dv^2$$

над областью параметров

$$\mathcal{D}^2 = (0, \pi) \times (0, 2\pi).$$

Выберем параметризацию плоскости

$$E^2: \quad ds_2^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

над областью параметров

$$\mathcal{G}^2 = (0, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

Параметризуем сферу параметрами r и φ . Для этого заметим, что

$$\frac{r}{R} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{u}{2},$$

то есть

$$r = R \operatorname{ctg} \frac{u}{2}.$$

Итак, имеем отображение $\mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{G}^2$ в виде

$$\begin{cases} r = R \operatorname{ctg}(u/2), \\ \varphi = v. \end{cases}$$

Матрица Якоби этого отображения имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\frac{R}{2\sin^2(u/2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и значит отображение является диффеоморфизмом при $0 < u < 2\pi$. Относительно новых координат метрика плоскости $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ выразится по известному правилу

$$\begin{pmatrix} -\frac{R}{2\sin^2(u/2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \operatorname{ctg}^2(u/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{R}{2\sin^2(u/2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -\frac{R^2}{4\sin^4(u/2)} & 0 \\ 0 & R^2 \operatorname{ctg}^2(u/2) \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sin^4(u/2)} \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 u \end{pmatrix}.$$

То есть

$$g_{\text{пл}} = \frac{1}{4\sin^4 \frac{u}{2}} g_{\text{сф}}.$$

Найдем обратное преобразование:

$$g_{\text{сф}} = 4\sin^4(u/2) g_{\text{пл}}.$$

Но,

$$\sin^2(u/2) = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(u/2)} = \frac{R^2}{R^2 + r^2}.$$

Следовательно,

$$g_{\text{сф}} = \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

В декартовых координатах

$$g_{\text{сф}} = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2} (dx^2 + dy^2).$$

Оказывается, что данный результат является общим для всех двумерных поверхностей.

Теорема 3.6.1 *Всякая двумерная регулярная поверхность конформно эквивалентна плоскости.*

Это означает, что первая фундаментальная форма поверхности может быть приведена к виду:

$$ds^2 = \Lambda(dx^2 + dy^2),$$

где $\Lambda > 0$ или, эквивалентно,

$$ds^2 = e^{2A}(dx^2 + dy^2),$$

где $A = A(x, y)$.

3.7 Вторая фундаментальная форма поверхности.

В дальнейших рассуждениях будем полагать, что $F^2 \subset E^3$ — регулярная поверхность класса не менее C^2 .

Пусть $\vec{r}: \mathcal{D}^2 \rightarrow E^3$ — ее регулярная параметризация. Тогда определены и линейно независимы две вектор-функции $\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}$, которые образуют базис касательной плоскости к поверхности в любой ее точке.

(Единичный) вектор нормали касательной плоскости называется (единичным) вектором нормали поверхности в данной точке.

Единичный вектор нормали поверхности будем обозначать через $\vec{n}$. В каждой точке вектор $\vec{n}$ определен с точностью до направления. Однако в пределах одной координатной окрестности (локальной карты) этот вектор в каждой точке $q \in \mathcal{D}^2$ может быть определен однозначно по правилу

$$\vec{n}(q) = \frac{[\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}]}{||[\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}]||}(q).$$

Полученная вектор-функция $\vec{n}: \mathcal{D}^2 \rightarrow E^3$ вида

$$\vec{n} = \frac{[\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}]}{||[\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}]||}.$$

называется *единичным нормальным векторным полем* на поверхности F^2 над областью $\mathcal{D}^2$. Ясно, что если $\vec{r} \in C^k$, то $\vec{n} \in C^{k-1}$.

Если F^2 — ориентируема, то векторное поле $\vec{n}$ может быть выбрано глобально. Действительно, ориентируемость поверхности означает возможность покрыть поверхность локальными картами так, что преобразование базисов

$$\partial \vec{\rho}(v) = \partial \vec{r}(u) J$$

при замене параметров будет осуществляться с положительным якобианом, то есть $\det J > 0$. Но тогда

$$[\partial_1 \vec{\rho}, \partial_2 \vec{\rho}](v) = [\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}](u) \det J,$$

что означает

$$\vec{n}(v) = \vec{n}(u).$$

Таким образом, на поверхности определяется глобальное единичное нормальное векторное поле (не зависящее от параметризации поверхности).

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ — регулярная параметризация F^2 . Рассмотрим две близкие точки q и $q + \Delta q$ на этой поверхности с координатами (u^1, u^2) и $(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$. В силу C^2 регулярности вектор-функции $\vec{r}$, можно воспользоваться разложением Тейлора вектор-функции $\vec{r}$ в окрестности точки q до второго порядка, а именно

$$\begin{aligned} \vec{r} = \vec{r}(q) + \partial_1 \vec{r}(q) du^1 + \partial_2 \vec{r}(q) du^2 + \frac{1}{2} [\partial_{11} \vec{r}(q) (du^1)^2 + 2 \partial_{12} \vec{r}(q) du^1 du^2 + \\ \partial_{22} \vec{r}(q) (du^2)^2] + o((du^1)^2 + (du^2)^2). \end{aligned}$$

Величина

$$h(du^1, du^2) = \langle \vec{r} - \vec{r}(q), \vec{n}(q) \rangle = \frac{1}{2} [b_{11}(q)(du^1)^2 + 2b_{12}(q)du^1 du^2 + b_{22}(q)(du^2)^2] + o((du^1)^2 + (du^2)^2), \quad (3.3)$$

где $b_{ik}(q) = \langle \partial_{ik} \vec{r}, \vec{n} \rangle(q)$, выражает отклонение точки с бесконечно малыми координатами (du^1, du^2) от касательной плоскости к F^2 в точке q .

Удвоенная главная часть разложения (3.3) является квадратичной формой на дифференциалах координат и называется **второй фундаментальной формой поверхности**. Матрица

$$B = (b_{ik})_{i,k=1,2} = \left(\langle \partial_{ik} \vec{r}, \vec{n} \rangle \right)_{i,k=1,2}, \quad (3.4)$$

составленная из коэффициентов этой формы, называется *матрицей второй фундаментальной формы*. Матрица B симметрична.

Очевидно, что вторая фундаментальная форма поверхности может быть выписана с использованием дифференциала вектор-функции $\vec{r}$ в виде

$$\langle d^2 \vec{r}, \vec{n} \rangle = \sum_{i,k=1}^2 b_{ik} du^i du^k. \quad (3.5)$$

Напомним, что $d\vec{r} = \partial_1 \vec{r} du^1 + \partial_2 \vec{r} du^2$ можно рассматривать касательный вектор к поверхности с бесконечно малыми внутренними координатами $\{du^1, du^2\}$. В этом смысле (3.5) рассматривается как отображение

$$B: T_q F^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

действующее по правилу:

$$B(d\vec{r}, d\vec{r}) = b_{ik} du^i du^k.$$

На векторах с конечными координатами вида $\vec{X} = X^1 \partial_1 \vec{r} + X^2 \partial_2 \vec{r}$ значение второй фундаментальной формы вычисляется по правилу

$$B(\vec{X}, \vec{X}) = b_{ik} X^i X^k = X^t B X,$$

где $X = \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix}$ — внутренние координаты вектора $\vec{X}$, записанные в столбец, а B — матрица (3.4) второй фундаментальной формы. С алгебраической точки зрения, это действительно симметричная квадратичная форма, которая каждому вектору касательного пространства поверхности ставит в соответствие вещественное число. Заметим, что для вычисления значения второй фундаментальной формы на данном касательном векторе достаточно знать только внутренние координаты этого вектора.

Выражение для дифференциальной записи второй фундаментальной формы может быть преобразовано к виду

$$B(d\vec{r}, d\vec{r}) = -\langle d\vec{r}, d\vec{n} \rangle. \quad (3.6)$$

Действительно, так как $\langle d\vec{r}, \vec{n} \rangle = 0$, то взяв дифференциал получим

$$d\langle d\vec{r}, \vec{n} \rangle = \langle d^2\vec{r}, \vec{n} \rangle + \langle d\vec{r}, d\vec{n} \rangle = 0,$$

что и завершает доказательство.

Как следствие, элементы матрицы второй фундаментальной формы можно вычислить по формуле

$$b_{ik} = -\langle \partial_i \vec{r}, \partial_k \vec{n} \rangle. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) удобно записывать в матричной форме, используя матрицы Якоби отображений $\vec{r}$ и $\vec{n}$. Для этого рассмотрим вектор-функции

$$\vec{r} = \{x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)\}$$

и

$$\vec{n} = \{n^1(u^1, u^2), n^2(u^1, u^2), n^3(u^1, u^2)\}$$

как отображения

$$\vec{r}: \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \rightarrow E^3$$

$$\vec{n}: \mathcal{D}^2(u^1, u^2) \rightarrow E^3$$

и выпишем их матрицы Якоби

$$(\partial \vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{pmatrix}, \quad (\partial \vec{n}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial n^1}{\partial u^1} & \frac{\partial n^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial n^2}{\partial u^1} & \frac{\partial n^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial n^3}{\partial u^1} & \frac{\partial n^3}{\partial u^2} \end{pmatrix}.$$

Так как скалярное произведение в формулах (3.7) вычисляется относительно ортонормированного базиса, то с очевидностью находим следующее выражение для матрицы второй фундаментальной формы:

$$B = -(\partial \vec{r})^t \cdot (\partial \vec{n}). \quad (3.8)$$

Утверждение 3.7.1 Пусть F^2 — регулярная поверхность. Пусть

$$\vec{r}: \mathcal{D}^2(u) \rightarrow E^3 \quad \text{и} \quad \vec{\rho}: \mathcal{G}^2(v) \rightarrow E^3$$

две локальные параметризации поверхности F^2 . Обозначим через

$$\varphi: \mathcal{G}^2(v) \rightarrow \mathcal{D}^2(u)$$

диффеоморфизм перепараметризации с матрицей Якоби $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$.

Тогда матрица второй фундаментальной формы при замене координат преобразуется следующим образом

$$B(v) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^t B(\varphi(v)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right).$$

или, эквивалентно,

$$b_{ik}(v) = b_{\alpha\beta}(\varphi(v)) \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial v^k}.$$

Доказательство. Заметим, что если $\vec{n}(u)$ поле нормалей поверхности относительно параметризации над областью параметров $\mathcal{D}$, то

$$\vec{m} = \vec{n}(\varphi(v)) = (\vec{n} \circ \varphi)(v)$$

поле нормалей поверхности относительно параметризации над областью параметров $\mathcal{G}$. Действительно, для векторов базиса касательной плоскости относительно новых параметров находим:

$$\partial_i \vec{\rho} = \partial_\alpha \vec{r} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^i},$$

а значит $\langle \partial_i \vec{\rho}, \vec{n}(\varphi(v)) \rangle = 0$.

Для доказательства основного утверждения, воспользуемся выражением (3.8) и тем фактом, что матрица Якоби композиции отображений равна произведению соответствующих матриц Якоби. Тогда имеем,

$$\begin{aligned} B(v) &= -(\partial \rho)^t \cdot (\partial \vec{m}) = -(\partial(\vec{r} \circ \varphi))^t \cdot (\partial(\vec{n} \circ \varphi)) = \\ &= -\left[(\partial \vec{r}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right]^t \cdot \left[(\partial \vec{n}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^t (\partial \vec{r})^t \cdot (\partial \vec{n}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^t B(\varphi(v)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Расписывая покомпонентно полученное матричное выражение, найдем

$$b_{ik}(v) = b_{\alpha\beta}(\varphi(v)) \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial v^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial v^k}.$$

■

Следствие 3.7.1 Ранг матрицы второй фундаментальной формы не зависит от выбора локальных координат. В частности, если вторая фундаментальная форма поверхности равна нулю в одной системе координат, то она равна нулю и в любой другой системе координат.

Доказательство. Воспользуемся неравенством Сильвестра:

если матрица A имеет размер $m \times k$, а матрица B имеет размер $k \times p$, то для ранга их произведения имеет место неравенство

$$\text{rg}(A) + \text{rg}(B) - k \leq \text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B)).$$

В частности, если $k \leq m, k \leq p$ и $\text{rg}(A) = k$, то $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B)$. Для нашего случая, $k = m = p = 2$, $\text{rg} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = 2$ и, дважды применив неравенство Сильвестра, легко получаем

$$\text{rg}(B(v)) = \text{rg} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^t B(\varphi(v)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] = \text{rg}(B(\varphi(v))).$$

Но так как $\varphi(v) = u$ по определению диффеоморфизма φ , то окончательно можем записать

$$\text{rg}(B(v)) = \text{rg}(B(u)).$$

■

Геометрический смысл условия $B \equiv 0$ проясняет следующее утверждение.

Утверждение 3.7.2 Если F^2 регулярная поверхность класса C^2 и $B \equiv 0$, то F^2 — плоскость.

Доказательство. Так как F^2 — регулярная поверхность, то в окрестности каждой своей точки поверхность ее можно задать явно, в виде графика функции $z = f(x, y)$. В параметрической форме

$$\vec{r} = \{x, y, f(x, y)\}.$$

Проведем необходимые вычисления

$$\begin{aligned}\partial_1 \vec{r} &= \{1, 0, f_x\}, & \partial_2 \vec{r} &= \{0, 1, f_y\}, \\ \partial_{11} \vec{r} &= \{0, 0, f_{xx}\}, & \partial_{22} \vec{r} &= \{0, 0, f_{yy}\}, & \partial_{12} \vec{r} &= \{0, 0, f_{xy}\}.\end{aligned}$$

Найдем поле единичных нормалей:

$$[\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}] = \{-f_x, -f_y, 1\}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \{-f_x, -f_y, 1\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}b_{11} &= \langle \partial_{11} \vec{r}, \vec{n} \rangle = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ b_{12} &= \langle \partial_{12} \vec{r}, \vec{n} \rangle = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ b_{22} &= \langle \partial_{22} \vec{r}, \vec{n} \rangle = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Откуда

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Но если $B \equiv 0$, то $f_{xx} = f_{yy} = f_{xy} = 0$, а следовательно $f(x, y) = ax + by + c$. То есть, локальная параметризация поверхности с необходимостью имеет вид

$$z = ax + by + c.$$

А это уравнение плоскости. Поскольку при замене координат или, что то же самое, при переходе к другой локальной карте сохраняется тождество $B \equiv 0$, то в другой локальной карте мы так же получаем плоскость. А так как поверхность гладкая и в каждой точке имеет единственную касательную плоскость, то вся поверхность является плоскостью.

■

Наблюдение. Вторая фундаментальная форма дает первый отличительный признак искривленной поверхности, то есть поверхности, отличной от плоскости.

3.8 Соприкасающийся параболоид поверхности

Пусть F^2 — регулярная поверхность и $q \in F^2$. Параметризуем поверхность в окрестности точки q явно, при этом плоскость XOY разместим в касательной плоскости к поверхности в точке q , ось Ox направим вдоль $\partial_1 \vec{r}$, ось Oy вдоль $\partial_2 \vec{r}$, а ось Oz вдоль вектора нормали в этой точке. Тогда наша поверхность будет задана следующим образом

$$z = f(x, y),$$

а точке q будет соответствовать начало координат $(0, 0, 0)$. В частности, это означает, что $f(q) = 0$.

Покажем, что $f_x(q) = 0, f_y(q) = 0$. Действительно, переходя к параметрическому заданию поверхности, запишем

$$\vec{r} = \{x, y, f(x, y)\}$$

и, в силу выбора направления осей координат, в точке q имеем

$$\partial_1 \vec{r} = \{1, 0, f_x(q)\} = \{1, 0, 0\}, \quad \partial_2 \vec{r} = \{0, 1, f_y(q)\} = \{0, 1, 0\}.$$

Следовательно, $f_x(q) = 0, f_y(q) = 0$.

Запишем разложение $f(x, y)$ до второго порядка, в окрестности точки $(0, 0)$ считая x, y малыми. Тогда имеем

$$z = f(q) + f_x(q)x + f_y(q)y + \frac{1}{2}[f_{xx}(q)x^2 + 2f_{xy}(q)xy + f_{yy}(q)y^2] + o(x^2 + y^2).$$

С учетом предыдущих вычислений получаем

$$z = \frac{1}{2}[f_{xx}(q)x^2 + 2f_{xy}(q)xy + f_{yy}(q)y^2] + o(x^2 + y^2).$$

Рассмотрим поверхность второго порядка

$$z_1 = f_{xx}(q)x^2 + 2f_{xy}(q)xy + f_{yy}(q)y^2 \quad (3.10)$$

Это параболоид, который обладает тем свойством, что

$$2z - z_1 = o(x^2 + y^2).$$

То есть параболоид (3.10) моделирует поверхность F^2 в окрестности точки q с точностью до малых второго порядка и называется **соприкасающимся параболоидом поверхности** в точке q .

Тип параболоида (3.10) определяется знаком инварианта

$$I_2 = f_{xx}(q)f_{yy}(q) - f_{xy}^2(q).$$

- Если $f_{xx}(q)f_{yy}(q) - f_{xy}^2(q) > 0$, то соприкасающийся параболоид **эллиптический**;

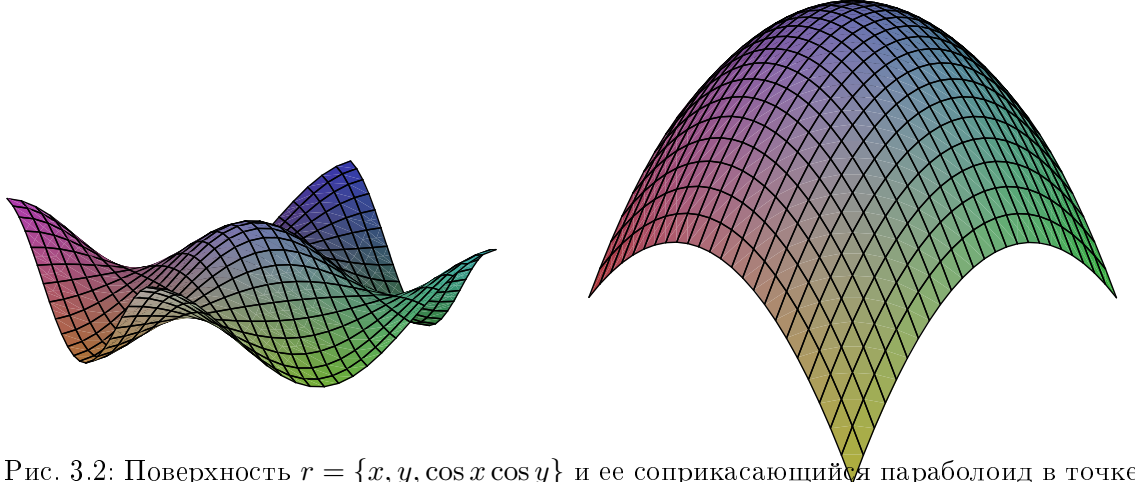


Рис. 3.2: Поверхность $r = \{x, y, \cos x \cos y\}$ и ее соприкасающийся параболоид в точке $(0,0)$

- Если $f_{xx}(q)f_{yy}(q) - f_{xy}^2(q) < 0$, то соприкасающийся параболоид **гиперболический**;
- Если $f_{xx}(q)f_{yy}(q) - f_{xy}^2(q) = 0$, но $f_{xx}^2 + f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \neq 0$, то соприкасающийся параболоид вырождается в **параболический цилиндр**;
- Если $f_{xx}(q)f_{yy}(q) - f_{xy}^2(q) = 0$ и $f_{xx}^2 + f_{xy}^2 + f_{yy}^2 = 0$, то соприкасающийся параболоид вырождается в **плоскость**.

Оказывается, что для определения типа соприкасающегося параболоида не нужно находить явную параметризацию поверхности, а достаточно знать ее вторую фундаментальную форму. Более того, тип соприкасающегося параболоида определяется самой поверхностью и не зависит от ее параметризации.

Теорема 3.8.1 *В каждой точке регулярной поверхности тип соприкасающегося параболоида полностью определяется ее второй фундаментальной формой в этой точке и не зависит от параметризации поверхности.*

Доказательство. Пусть q – точка на регулярной поверхности. Параметризуем поверхность в некоторой окрестности этой точки явно в виде $z = f(x, y)$, специализируя систему координат как в начале этого раздела. Тогда вторая фундаментальная форма поверхности в точке q вычислится по формуле (3.9) и примет вид

$$B = \begin{pmatrix} f_{xx}(q) & f_{xy}(q) \\ f_{xy}(q) & f_{yy}(q) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в точке q инвариант I_2 соприкасающегося параболоида равен определителю второй фундаментальной формы в этой точке, то есть

$$I_2 = \det B(q)$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что при замене системы координат

$$\tilde{B} = J^t B J,$$

где J – матрица Якоби преобразования (см Предложение 3.7.1). Поэтому

$$\det \tilde{B} = (\det J)^2 \det B,$$

а значит знак определителя, или его обращение в нуль, не зависит от выбора системы координат. По Следствию 3.7.1, обращение всей матрицы второй фундаментальной формы в нуль так же не зависит от выбора координат. Следовательно,

- Если $\det B(q) > 0$, то соприкасающийся параболоид **эллиптический**;
- Если $\det B(q) < 0$, то соприкасающийся параболоид **гиперболический**;
- Если $\det B(q) = 0$, но $B(q) \neq 0$, то соприкасающийся параболоид вырождается в **параболический цилиндр**;
- Если $B(q) = 0$, то соприкасающийся параболоид вырождается в **плоскость**.

■

Доказанная теорема показывает корректность следующей классификации точек регулярной поверхности.

Определение 3.8.1 Точка q регулярной поверхности называется

- **эллиптической**, если в этой точке соприкасающийся параболоид поверхности является эллиптическим;
- **гиперболической**, если в этой точке соприкасающийся параболоид поверхности является гиперболическим;
- **параболической**, если в этой точке соприкасающийся параболоид поверхности вырождается в параболический цилиндр;
- **точкой уплющения**, если в этой точке соприкасающийся параболоид поверхности вырождается в плоскость.

Эллиптические и гиперболические называются *невырожденными* точками поверхности, а параболические и точки уплющения — *вырожденными*.

3.9 Сферическое (Гауссово) отображение.

Пусть, как и ранее, $\vec{n}$ поле единичных нормалей в области $\mathcal{D}^2(u)$, параметризующей поверхность $F^2 \subset E^3$.

Определение 3.9.1 Сферическим образом поверхности F^2 в области $\mathcal{D}^2$ называется гомограф вектор-функции $\vec{n}$.

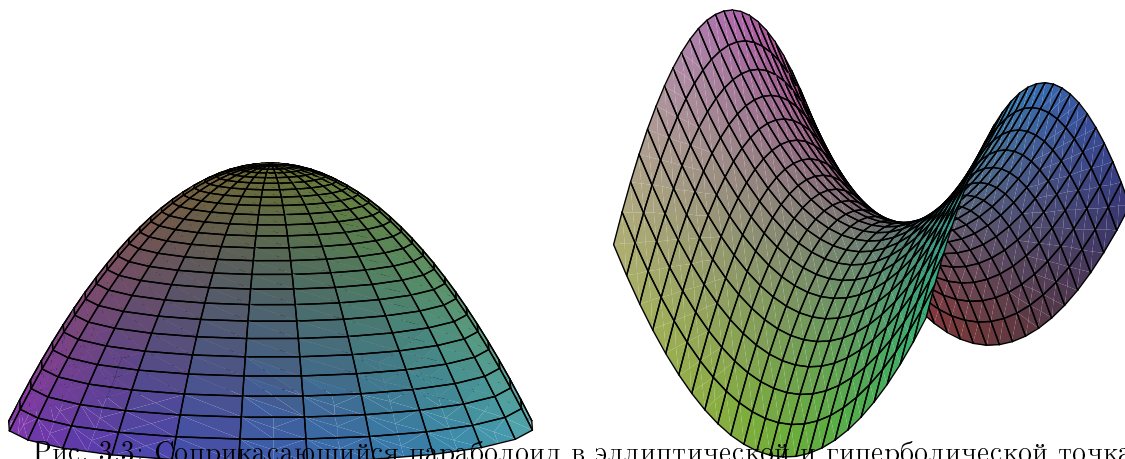


Рис. 3.3: Соприкасающийся параболоид в эллиптической и гиперболической точках

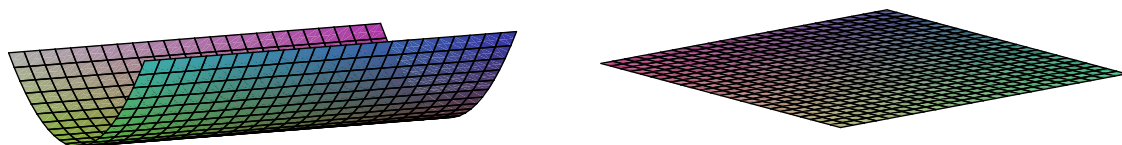


Рис. 3.4: Соприкасающийся параболоид в параболической точке и точке уплощения

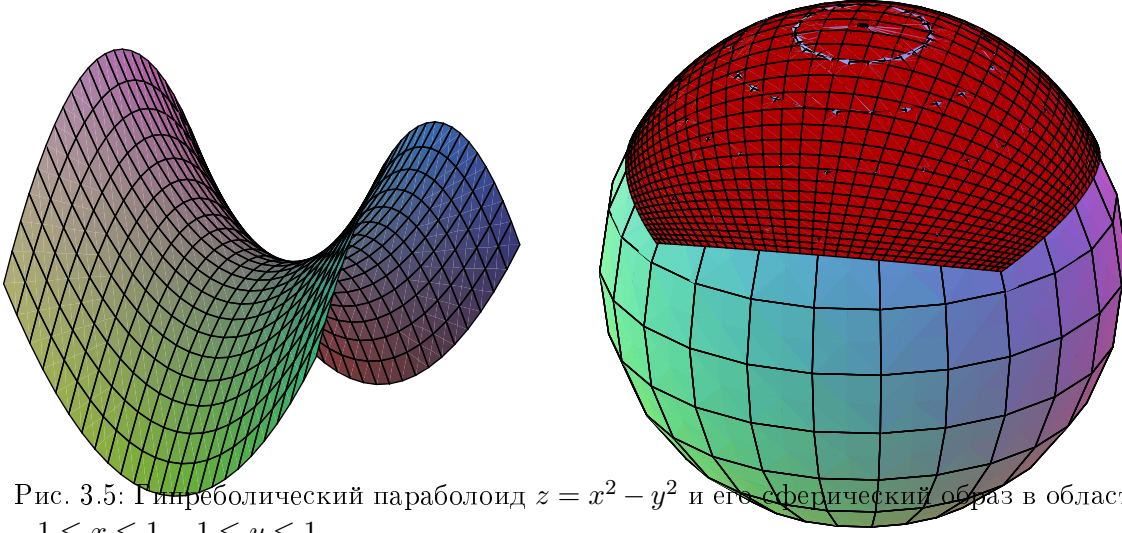


Рис. 3.5: Гиперболический параболоид $z = x^2 - y^2$ и его сферический образ в области $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

Геометрически, сферический образ образуется множеством концов векторов единичных нормалей над областью $\vec{r}(\mathcal{D}^2)$ после совмещения их начал путем параллельного переноса с началом координат в E^3 .

Определение 3.9.2 Сферическим отображением поверхности F^2 в области $\mathcal{D}^2$ называется отображение

$$\vec{n} : \mathcal{D}^2 \rightarrow S^2 \subset E^3,$$

задаваемое вектор-функцией $\vec{n}$

Если поверхность ориентируема, то сферическое отображение и сферический образ поверхности определены глобально.

Легко заметить, что для регулярной поверхности сферическое отображение в общем случае не является регулярным, то есть ранг матрицы Якоби $\partial \vec{n}$ этого отображения не максимален. Например, в случае, когда F^2 есть плоскость, вектор-функция $\vec{n}$ постоянна, а значит $\text{rg}(\partial \vec{n}) = 0$. Сферическим образом плоскости является единственная точка на единичной сфере.

Утверждение 3.9.1 Ранг сферического отображения поверхности равен рангу второй фундаментальной формы.

Доказательство. В каждой точке поверхности, векторы $\vec{n}, \partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}$ образуют базис пространства, а так как $|\vec{n}| \equiv 1$, то $\partial_k \vec{n} \perp \vec{n}$, а значит справедливо разложение

$$\partial_k \vec{n} = -a_k^1 \partial_1 \vec{r} - a_k^2 \partial_2 \vec{r} = -a_k^i \partial_i \vec{r}$$

Введем в рассмотрение матрицу $A = (a_k^i)$, составленную из коэффициентов разложения. Тогда матрица Якоби сферического отображения выпишется через матрицу

Якоби отображения параметризации и матрицу A в виде

$$(\partial \vec{n}) = -(\partial \vec{r}) \cdot A. \quad (3.11)$$

Так как поверхность регулярна, то ранг матрицы $(\partial \vec{r})$ максимален (равен 2) и из неравенства Сильвестра заключаем, что

$$\text{rg}(\partial \vec{n}) = \text{rg}(A).$$

Домножая слева равенство (3.11) на $(\partial \vec{r})^t$ и используя выражение (3.8), находим

$$-B = -(\partial \vec{r})^t (\partial \vec{r}) \cdot A = -gA.$$

Следовательно,

$$A = g^{-1}B, \quad (3.12)$$

где g и g^{-1} – матрица первой фундаментальной формы поверхности и ее обратная. Так как g невырождена, то окончательно имеем

$$\text{rg}(\partial \vec{n}) = \text{rg}(A) = \text{rg}(B).$$

■

Матрица (3.12) называется *матрицей Вейнгартена*. Разложение (3.11) называется *разложением Вейнгартена*.

3.10 Гауссова кривизна поверхности.

Пусть F^2 регулярная поверхность, параметризованная вектор-функцией

$$\vec{r}: \mathcal{D}^2 \rightarrow E^3$$

и предположим, что в некоторой окрестности U_q точки $q \in \mathcal{D}^2$ Гауссово отображение регулярно, то есть

$$\text{rg} \partial \vec{n}|_{U_q} = 2.$$

Заметим, что в силу Предложения 3.9.1 это означает, что $\det B|_{U_q} \neq 0$. Обозначим через $\tilde{g}$ первую фундаментальную форму сферического образа поверхности. Тогда, очевидно,

$$\tilde{g} = (\partial \vec{n})^t \cdot (\partial \vec{n})$$

Обозначим через dS элемент площади поверхности, а через $d\omega$ – элемент площади сферического образа $\vec{n}(F^2)$. Тогда

$$dS = \sqrt{\det g}, \quad d\omega = \sqrt{\det \tilde{g}}.$$

Используя разложение Вейнгартена (3.11), находим

$$\tilde{g} = (\partial \vec{n})^t \cdot (\partial \vec{n}) = (\partial \vec{r} A)^t \cdot (\partial \vec{r} A) = A^t (\partial \vec{r})^t \cdot (\partial \vec{r}) A = A^t g A.$$

Следовательно,

$$\det \tilde{g} = (\det A)^2 \det g.$$

Поэтому,

$$d\omega = |\det A| dS.$$

Таким образом, в окрестности U_q площадь сферического образа $\omega(\vec{n}(U_q))$ вычислится как

$$\omega(\vec{n}(U_q)) = \int_{U_q} d\omega = \int_{U_q} |\det A| dS.$$

Припишем площади сферического образа знак по следующему правилу. Положим

$$\tilde{\omega}(\vec{n}(U_q)) = \begin{cases} +\omega(\vec{n}(U_q)) & \text{если } \det A > 0, \\ -\omega(\vec{n}(U_q)) & \text{если } \det A < 0. \end{cases}$$

Сравнивая это определение с разложением (3.11) заметим, что площади сферического образа приписывается знак $+$, если сферическое отображение согласует ориентации в касательных плоскостях поверхности и ее сферического образа, и знак $-$ в противном случае. Будем называть $\tilde{\omega}$ ориентированной площадью сферического образа. Таким образом,

$$\tilde{\omega}(\vec{n}(U_q)) = \int_{U_q} \det A dS. \quad (3.13)$$

Следующее определение является ключевым в геометрии.

Определение 3.10.1 Гауссовой кривизной поверхности F^2 в невырожденной точке $\vec{r}(q) \in F^2$ называется предел отношения ориентированной площади сферического образа $\vec{n}(U_q)$ малой окрестности $U_q \subset \mathcal{D}^2$ точки q к площади окрестности $\vec{r}(U_q)$ при стягивании окрестности U_q к точке q . Формально,

$$K(q) = \lim_{U_q \rightarrow q} \frac{\tilde{\omega}(\vec{n}(U_q))}{S(\vec{r}(U_q))}.$$

Если точка $\vec{r}(q)$ вырождена, то положим $K(q) = 0$.

Из предыдущих вычислений легко следует

Утверждение 3.10.1 Гауссова кривизна поверхности является непрерывной функцией $K : \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ на области параметров поверхности и вычисляется по формуле

$$K = \det A(q) = \frac{\det B}{\det g}(q)$$

Доказательство. Действительно, применяя теорему о среднем для интегралов в соотношении (3.13), легко находим

$$\tilde{\omega}(\vec{n}(U_q)) = \det A(q') S(\vec{r}(u_q)),$$

где $q' \in U_q$. Следовательно,

$$\frac{\tilde{\omega}(\vec{n}(U_q))}{S(\vec{r}(U_q))} = \det A(q').$$

Переходя к пределу при $U_q \rightarrow q$, получим требуемую формулу. Непрерывность Гауссовой кривизны следует из того, что $\det g \neq 0$. Очевидно, что в вырожденных точках формула так же верна.

■

Следствие 3.10.1 Гауссова кривизна не зависит от параметризации поверхности.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathcal{D}^2(u)$ и $\mathcal{D}^2(v)$ две области параметров и $\varphi : \mathcal{D}^2(v) \rightarrow \mathcal{D}^2(u)$ диффеоморфизм перепараметризации с матрицей Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$g(v) = J^t g(\varphi(v)) J, \quad B(v) = J^t B(\varphi(v)) J$$

и, следовательно,

$$\det B(v) = (\det J)^2 \det B(\varphi(v)), \quad \det g(v) = (\det J)^2 \det g(\varphi(v)).$$

Вспоминая, что $\varphi(v) = u$, немедленно получаем

$$K(v) = K(\varphi(v)) \equiv K(u).$$

■

Замечание. Гауссова кривизна в невырожденных и в вырожденных точках может быть определена через меры соответствующих по сферическому отображению подмножеств, а именно,

$$K = \lim_{U_q \rightarrow q} \frac{\text{mes}(\vec{n}(U_q))}{\text{mes}(\vec{r}(U_q))}$$

Поскольку знак Гауссовой кривизны совпадает со знаком определителя второй квадратичной формы, то тип точки (тип соприкасающегося параболоида) определяется знаком Гауссовой кривизны, а именно, точка q на поверхности является

- **эллиптической**, тогда и только тогда, когда $K(q) > 0$;
- **гиперболической**, тогда и только тогда, когда $K(q) < 0$;
- **параболической** или точкой уплощения, тогда и только тогда, когда $K(q) = 0$;

Примеры.

- **Гауссова кривизна явно заданной поверхности.** Матрицы первой и второй фундаментальных форм явно заданной поверхности имеют вид

$$g = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

- **Гауссова кривизна сферы радиуса R .** Пусть $\vec{r}$ радиус-вектор сферы радиуса R с центром в начале координат. Тогда ее единичное нормальное векторное поле (направленное внутрь сферы) легко находится как $\vec{n} = -\frac{1}{R}\vec{r}$. А значит

$$\partial \vec{n} = -\frac{1}{R} \partial \vec{r}.$$

Домножая слева на $(\partial \vec{r})^t$ и используя (3.8), находим

$$B = \frac{1}{R} g,$$

а значит

$$\det B = \frac{1}{R^2} \det g,$$

то есть

$$K = \frac{1}{R^2}.$$

3.11 Репер Дарбу. Деривационные формулы Дарбу.

Пусть

$$\gamma : I \rightarrow \mathcal{D}^2$$

внутреннее уравнение кривой на регулярной поверхности F^2 , параметризованной вектор-функцией

$$\vec{r} : \mathcal{D}^2 \rightarrow E^3.$$

Тогда ее внешнее уравнение, как кривой в E^3 , запишется как композиция

$$\vec{\gamma}(t) = (\vec{r} \circ \gamma)(t) = \vec{r}(\gamma(t)) \quad t \in I.$$

Заметим, что, используя правило дифференцирования композиции отображений, находим

$$\vec{\gamma}' = \partial \vec{r} \cdot \gamma'.$$

Выберем на кривой натуральную параметризацию, то есть такую, что

$$|\vec{\gamma}'| = \sqrt{g(\gamma', \gamma')} \equiv 1.$$

Тогда $\vec{\gamma}'$ будет единичным касательным векторным полем вдоль $\vec{\gamma}$.

Ограничение поля нормалей поверхности на кривую $\vec{\gamma}$ составляет единичное векторное поле

$$\vec{n}(s) = \vec{n} \circ \gamma$$

Векторное поле

$$\vec{\nu}_g(s) = \vec{n}(s) \times \vec{\gamma}'(s)$$

называется *полем геодезических нормалей* кривой $\vec{\gamma}$.

Тройка единичных взаимно ортогональных векторных полей

$$\vec{\tau} = \vec{\gamma}'(s), \quad \vec{\nu}_g(s), \quad \vec{n}(s)$$

в точках кривой $\vec{\gamma}$ на поверхности называется **репером Дарбу** этой кривой.

Разложим производные по натуральному параметру векторных полей репера Дарбу по векторам этого же репера. В силу единичности рассматриваемых полей, получим:

$$\vec{\tau}' = c_1^2 \vec{\nu}_g + c_1^3 \vec{n},$$

$$\vec{\nu}_g' = c_2^1 \vec{\tau} + c_2^3 \vec{n},$$

$$\vec{n}' = c_3^1 \vec{\tau} + c_3^2 \vec{\nu}_g.$$

Поскольку векторы репера Дарбу попарно ортогональны, то легко видеть, что матрица коэффициентов такого разложения кососимметрична, то есть $c_2^1 = -c_1^2$, $c_3^1 = -c_1^3$, $c_3^2 = -c_2^3$. Поэтому коэффициенты c_1^2, c_1^3, c_2^3 полностью определяют это разложение.

Коэффициент c_1^2 называется *геодезической кривизной* кривой и обозначается k_g ;

Коэффициент c_1^3 называется *нормальной кривизной* кривой и обозначается k_n ;

Коэффициент c_2^3 называется *геодезическим кручением* кривой и обозначается κ_g ;

В этих обозначениях *разложение Дарбу* принимает вид

$$\begin{aligned}\vec{\tau}' &= k_g \vec{\nu}_g + k_n \vec{n}, \\ \vec{\nu}_g' &= -k_g \vec{\tau} + \kappa_g \vec{n}, \\ \vec{n}' &= -k_n \vec{\tau} - \kappa_g \vec{\nu}_g.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Поскольку $\vec{\tau}' = \vec{\gamma}''$ есть вектор кривизны кривой и по формулам Френе

$$\vec{\gamma}'' = k\vec{\nu},$$

где $\vec{\nu}$ вектор главной нормали кривой и k – ее кривизна, то $|k_g|$ есть модуль проекции вектора кривизны кривой $\vec{\gamma}$ на касательную плоскость поверхности, а $|k_n|$ есть модуль проекции вектора кривизны кривой на нормаль к поверхности.

Вектор $k_g \vec{\nu}_g$ называется *вектором геодезической кривизны* кривой, а вектор $k_n \vec{n}$ называется *вектором нормальной кривизны* кривой.

Разложение (3.14)₁ можно переписать в виде

$$k\vec{\nu}(s) = k_g \vec{\nu}_g(s) + k_n \vec{n}(s),\tag{3.15}$$

откуда следует, что кривизна кривой, ее геодезическая и нормальная кривизны связаны между собой очевидным соотношением

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2.\tag{3.16}$$

Обозначим через θ угол между векторами $\vec{\nu}(s)$ и $\vec{n}(s)$. Тогда из разложения (3.15) следует

$$k_g = k \sin \theta, \quad k_n = k \cos \theta.\tag{3.17}$$

Определение 3.11.1 Кривая на поверхности называется *геодезической*, если ее геодезическая кривизна $k_g(s) \equiv 0$.

Определение 3.11.2 Кривая на поверхности называется *асимптотической*, если ее нормальная кривизна $k_n(s) \equiv 0$.

Определение 3.11.3 Кривая на поверхности называется *линией кривизны*, если ее геодезическое кручение $\kappa_g \equiv 0$ ¹.

Из этих определений и соотношений (3.14), (3.15) и (3.16) следует несколько качественных результатов:

- Если поверхность содержит прямую, то эта прямая является одновременно и геодезической и асимптотической линией на поверхности.
- Линия на поверхности с кривизной $k \neq 0$ является геодезической тогда и только тогда, когда ее вектор кривизны коллинеарен вектору нормали поверхности вдоль кривой. Например, отсюда следует, что большие круги на сфере являются геодезическими.
- Линия на поверхности с кривизной $k \neq 0$ является асимптотической тогда и только тогда, когда ее вектор кривизны лежит в касательной плоскости поверхности вдоль кривой.
- Линия на поверхности является линией кривизны тогда и только тогда, когда производная поля нормалей поверхности вдоль кривой коллинеарна касательному к кривой векторному полю (см. Теорему Родрига)
- Любая линия на плоскости является линией кривизны, так как $\vec{n}' = 0$. На сфере радиуса R

$$\vec{n} \circ \gamma = \frac{1}{R} \vec{r} \circ \gamma = \frac{1}{R} \vec{\gamma},$$

а значит

$$(\vec{n} \circ \gamma)' = -\frac{1}{R} \vec{\gamma}' = -\frac{1}{R} \vec{\tau}.$$

Из разложения Дарбу немедленно получаем

$$k_n = \frac{1}{R}, \quad \kappa_g = 0.$$

Значит любая C^1 -гладкая линия на сфере является линией кривизны, а ее нормальная кривизна $\frac{1}{R}$.

Легко заметить, что реперы Френе и Дарбу для кривой на поверхности имеют общий вектор – вектор касательной к кривой, а значит векторы $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$ лежат в плоскости векторов $\vec{n}$ и $\vec{\nu}_g$. Обозначим через θ угол между векторами $\vec{\nu}$ и $\vec{n}$. Из определений реперов Френе и Дарбу следует разложение:

$$\begin{cases} \vec{\nu} = \cos \theta \vec{n} + \sin \theta \vec{\nu}_g \\ \vec{\beta} = \sin \theta \vec{n} - \cos \theta \vec{\nu}_g \end{cases}$$

¹Ниже будет дано эквивалентное, но более геометрическое определение линий кривизны

Дифференцирование и применение формул Френе слева и формул Дарбу справа приводит к равенствам

$$\begin{cases} -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta} = -(k_n \cos \theta + k_g \sin \theta)\vec{\tau} + (-\theta' + \kappa_g)\vec{\beta} \\ -\kappa\vec{\nu} = (\theta' - \kappa_g)\vec{\nu} + (-k_n \sin \theta + k_g \cos \theta)\vec{\tau} \end{cases}$$

Принимая во внимание (3.17), получим единственное нетривиальное соотношение

$$\kappa_g = \kappa + \frac{d\theta}{ds}, \quad (3.18)$$

проясняющее связь геодезического кручения кривой и ее кручения как кривой в пространстве. В частности, если рассматриваемая кривая является геодезической линией, то $\theta = 0$, а значит $\kappa_g = \kappa$. Другими словами, **геодезическое кручение геодезической линии равно ее пространственному кручению**. Это обстоятельство оправдывает термин *геодезическое кручение*. Справедливости ради, заметим, что таким же свойством обладает любая кривая, вектор кривизны которой образует постоянный угол с вектором нормали поверхности. В частности, это верно и для асимптотических линий, для которых $\theta = \frac{\pi}{2}$

Упражнение 3.11.1 Если $\vec{\gamma}$ плоская геодезическая на поверхности, то $\vec{\gamma}$ – линия кривизны.

Отметим еще один качественный результат, принадлежащий Иохимсталью.

Теорема 3.11.1 (Иохимсталь) Пусть F_1 и F_2 две поверхности и $\vec{\gamma} = F_1 \cap F_2$ – линия их пересечения. В предположении регулярности этой линии, обозначим через $\alpha(s)$ угол между полями нормалей $n_1(s)$ и $n_2(s)$ поверхностей F_1 и F_2 в точках этой линии. Тогда

- если $\alpha = \text{const}$ и линия является линией кривизны на одной из поверхностей, то она будет линией кривизны и на другой.
- если линия является линией кривизны на обеих поверхностях, то $\alpha = \text{const}$.

Теорема Иохимсталя является немедленным следствием следующей леммы.

Лемма 3.11.1 Пусть F_1 и F_2 две поверхности и $\vec{\gamma} = F_1 \cap F_2$ – линия их пересечения. В предположении регулярности этой линии, обозначим через $\alpha(s)$ ориентированный (в нормальной плоскости линии) угол между полями нормалей $n_1(s)$ и $n_2(s)$ поверхностей F_1 и F_2 в точках этой линии. Геодезические кручения линии пресечения $\kappa^{(1)}$ и $\kappa^{(2)}$ относительно поверхностей F_1 и F_2 соответственно, связаны соотношением:

$$\kappa_g^{(2)} = \kappa_g^{(1)} + \frac{d\alpha}{ds}$$

Доказательство. Обозначим через $\theta^{(1)}(s)$ и $\theta^{(2)}(s)$ ориентированные углы между главной нормалью кривой и полями нормалей $n_1(s)$ и $n_2(s)$ соответственно. Тогда, по правилу сложения ориентированных углов,

$$\theta^{(1)} + \alpha = \theta^{(2)}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\theta^{(1)}}{ds} + \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\theta^{(2)}}{ds}.$$

Пространственное кручение линии пересечения поверхностей связано с кручениями $\kappa_g^{(1)}$ и $\kappa_g^{(2)}$ соотношением (3.18). Поэтому

$$\kappa = \kappa_g^{(1)} - \frac{d\theta^{(1)}}{ds} = \kappa_g^{(2)} - \frac{d\theta^{(2)}}{ds}.$$

Отсюда

$$\kappa_g^{(1)} - \frac{d\theta^{(1)}}{ds} = \kappa_g^{(2)} - \frac{d\theta^{(1)}}{ds} - \frac{d\alpha}{ds},$$

а значит

$$\kappa_g^{(2)} = \kappa_g^{(1)} + \frac{d\alpha}{ds}.$$

■

Ясно, что $\kappa_g^{(2)} = \kappa_g^{(1)}$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \text{const}$, что и влечет доказательство теоремы Иоахимсталя. Угол α может быть и нулем, то есть, теорема применима и к касанию поверхностей вдоль кривой.

Простейшее применение теоремы Иоахимсталя таково: *Если плоскость или сфера пересекают поверхность под постоянным углом, то линия пересечения является линией кривизны на поверхности.*

3.12 Нормальная кривизна кривой на поверхности

В данном разделе мы рассмотрим некоторые вопросы геометрии поверхностей, связанные с нормальной кривизной кривых на поверхности.

3.12.1 Теорема Менье

Обозначим через B_γ ограничение матрицы второй фундаментальной формы поверхности на кривую γ , то есть положим $B_\gamma = B \circ \gamma$.

Аналогично, обозначим через g_γ ограничение матрицы первой фундаментальной формы поверхности на кривую γ , то есть положим $g_\gamma = g \circ \gamma$.

Положим, далее,

$$B_\gamma(\gamma', \gamma') \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma')^t (B_\gamma) \gamma', \quad g_\gamma(\gamma', \gamma') \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma')^t (g_\gamma) \gamma',$$

Утверждение 3.12.1 *Нормальная кривизна кривой на поверхности вычисляется по формуле*

$$k_n(s) = B_\gamma(\gamma', \gamma')$$

для натурально параметризованной кривой и

$$k_n(t) = \frac{B_\gamma(\gamma'_t, \gamma'_t)}{g_\gamma(\gamma'_t, \gamma'_t)},$$

для случая не натуральной параметризации кривой.

Доказательство. Пусть $\gamma(s)$ внутреннее уравнение натурально параметризованной кривой $\vec{\gamma}(s)$. Из соотношения (3.15) следует, что

$$k_n(s) = \langle \vec{\gamma}'', \vec{n}(s) \rangle = -\langle \vec{\gamma}', \vec{n}'(s) \rangle.$$

Поскольку

$$\vec{\gamma}(s) = (\vec{r} \circ \gamma)(s), \quad \vec{n}(s) = (\vec{n} \circ \gamma)(s),$$

то, используя правила дифференцирования и разложение Вейнгартена (3.11), найдем

$$\vec{\gamma}' = (\partial \vec{r}) \gamma', \quad \vec{n}' = (\partial \vec{n}) \gamma' = -(\partial \vec{r}) A \gamma'.$$

Поэтому,

$$k_n(s) = -\langle \vec{\gamma}', \vec{n}' \rangle(s) = -(\vec{\gamma}')^t (\vec{n}') = \gamma' (\partial \vec{r})^t (\partial \vec{r}) A \gamma' = (\gamma')^t (g_\gamma A_\gamma) \gamma' = (\gamma')^t B_\gamma \gamma' = B_\gamma (\gamma', \gamma').$$

Если теперь $t = t(s)$ произвольная регулярная параметризация кривой, то

$$\gamma' = \gamma'_t \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma'_t}{|\gamma'_t|_g} = \gamma'_t \frac{1}{\sqrt{g_\gamma(\gamma'_t, \gamma'_t)}}.$$

Поэтому окончательно,

$$k_n(t) = \frac{B_\gamma(\gamma'_t, \gamma'_t)}{g_\gamma(\gamma'_t, \gamma'_t)}$$

■

Следствием найденной формулы является

Теорема 3.12.1 (Менье) Пусть q – фиксированная точка на поверхности и $\vec{X} \in T_q F^2$ некоторый фиксированный касательный вектор в точке q . Обозначим через θ – угол между вектором нормали к поверхности и вектором главной нормали произвольной регулярной кривой $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$, проходящей через точку q в направлении вектора $\vec{X} = \partial \vec{r} \cdot X$. Если $k(q, \vec{\gamma})$ кривизна кривой $\vec{\gamma}$ в точке q , то

$$k_n(q, \vec{\gamma}) = k(q, \vec{\gamma}) \cos \theta = \frac{B_q(X, X)}{g_q(X, X)}$$

Доказательство. Действительно, если точка фиксирована, то

$$(B \circ \gamma)(q) = B_q$$

независимо от выбора кривой γ . Если к тому же кривая касается вектора X , то $\vec{\gamma}'(q) = \lambda(\gamma) \vec{X}$, что эквивалентно $\partial \vec{r} \cdot \gamma'(q) = \lambda(\gamma) \partial \vec{r} \cdot X$, а значит $\gamma'(q) = \lambda(\gamma) X$. Поэтому для произвольной кривой рассматриваемого семейства

$$k \cos \theta = k_n(\gamma(q)) = \frac{\lambda^2(\gamma) X^t B_q X}{\lambda^2(\gamma) X^t g_q X} = \frac{B_q(X, X)}{g_q(X, X)}.$$

■

Теорема Менье показывает, что нормальная кривизна всех кривых, проходящих через данную точку в данном направлении одинакова, а значит, является характеристикой точки и направления на поверхности, а не собственно кривой. Это дает основание для следующего определения.

Определение 3.12.1 *Нормальной кривизной поверхности в точке $q \in F^2$ в направлении вектора $\vec{X} \in T_q F^2$ называется число*

$$k_n(q, X) = \frac{B_q(X, X)}{g_q(X, X)},$$

где $B_q(X, X)$ и $g_q(X, X)$ значения второй и первой фундаментальных форм в точке q на внутренних координатах вектора $\vec{X}$.

Замечание. Нормальная кривизна поверхности не зависит от ее параметризации. Если $u = \varphi(v)$ диффеоморфизм замены параметров, то координаты касательного вектора преобразуются по формуле $X(u) = JX(v)$, а матрицы первой и второй квадратичных форм преобразуются по формулам $B(u) = J^t B(v) J$ и $g(u) = J^t g(v) J$, где $J = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)$ – матрица Якоби преобразования координат. Значит

$$k_n(q, X(v)) = \frac{X^t(v) B_q(v) X(v)}{X^t(v) g_q(v) X(v)} = \frac{X^t(v) J^t B_q(u) J X(v)}{X^t(v) J g_q(u) J X(v)} = \frac{X^t(u) B_q(u) X(u)}{X^t(u) g_q(u) X(u)} = k_n(q, X(u)).$$

Ясно, что по самому определению *нормальная кривизна поверхности равна нормальной кривизне произвольной кривой проходящей через заданную точку в заданном направлении*. Наиболее естественной кривой такого сорта является *нормальное сечение* поверхности, получаемое как пересечение с поверхностью плоскости, натянутой на вектор нормали в рассматриваемой точке и заданное направление. Следовательно, справедливо

Утверждение 3.12.2 *С точностью до знака, нормальная кривизна поверхности в данной точке и данном направлении равна кривизне нормального сечения поверхности в этом направлении.*

Замечание. При изменении направления вектора нормали поверхности вторая фундаментальная форма изменит знак. Поэтому всегда можно выбрать нормаль так, что кривизна нормального сечения будет **равна** нормальной кривизне поверхности в выбранной точке.

В *эллиптической точке* вторая фундаментальная форма положительно определена. Поэтому нормальная кривизна во всех направлениях положительна (или отрицательна). В свою очередь, это означает что все нормальные сечения отклоняются от касательной плоскости в одно полупространство. В *гиперболической точке* вторая фундаментальная форма не определена по знаку. Есть направления как с положительной, так и с отрицательной нормальной кривизной. Значит, есть сечения, отклоняющиеся от касательной плоскости в различные полупространства. В *параболической точке* в одном из направлений вектор кривизны нормального сечения исчезает.

3.12.2 Главные кривизны и главные направления на поверхности.

Поскольку в фиксированной точке поверхности нормальная кривизна поверхности зависит только от касательного направления, то (нормируя вектор, задающий это

направление) нормальная кривизна может рассматриваться как непрерывная (и даже гладкая) функция

$$k_n(q) : S^n \rightarrow \mathbb{R}$$

на единичной окружности ($n = 2$) или единичной сфере, если ($n > 2$).

Определение 3.12.2 *Критические значения функции нормальной кривизны $k_n(q) : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ называются главными кривизнами поверхности в точке q . Соответствующие критические точки называются главными направлениями.*

При $n = 2$ имеется ровно два критических значения – наибольшее и наименьшее – существование которых гарантируется теоремой Вейерштрасса для непрерывной функции на компакте. Таким образом, *двумерная поверхность имеет в каждой точке две главных кривизны* (возможно равные).

Теорема 3.12.2 *Главные кривизны и главные направления являются собственными числами и собственными векторами матрицы Вейнгартена.*

Доказательство. Очевидным образом задача сводится к задаче нахождения условного экстремума функции $k_n(q, X) = B_q(X, X)$ при связи $g_q(X, X) = 1$. Составим функцию Лагранжа

$$F(X) = B_q(X, X) - \lambda(g_q(X, X) - 1) = b_{ik}(q)X^iX^k - \lambda(g_{ik}(q)X^iX^k - 1).$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X^i} F(X) = b_{ik}(q)X^k - \lambda g_{ik}(q)X^k = (b_{ik}(q) - \lambda g_{ik}(q))X^k.$$

Следовательно, критические точки функции нормальной кривизны удовлетворяют матричному уравнению (относительно вектора X)

$$(B_q - \lambda g_q)X = 0.$$

Учитывая условие связи (единичность вектора X), а так же *факт существования* главных кривизн, находим множители Лагранжа как корни многочлена

$$\det(B - \lambda g)_q = 0.$$

В силу невырожденности матрицы g , последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\det(g^{-1}B - \lambda E)_q = 0, \quad \text{то есть} \quad \det(A_q - \lambda E) = 0.$$

Таким образом, множители Лагранжа есть собственные числа матрицы Вейнгартена в точке q .

Легко показать, что множители Лагранжа в точности *равны* главным кривизнам. Действительно, пусть λ корень характеристического уравнения матрицы A . Пусть X_λ соответствующий собственный вектор, то есть решение системы уравнений

$$(A_q - \lambda E)X_\lambda = 0 \quad \sim \quad g_q(A_q - \lambda E)X_\lambda = 0 \quad \sim \quad B_qX_\lambda = \lambda g_qX_\lambda.$$

Умножая слева полученное равенство на X_λ^t , находим

$$X_\lambda^t B_q X_\lambda = \lambda X_\lambda^t g_q X_\lambda \sim B_q(X_\lambda, X_\lambda) = \lambda g_q(X_\lambda, X_\lambda).$$

Из условия связи следует, что $g_q(X_\lambda, X_\lambda) = 1$, а значит $k_n(q, X_\lambda) = B_q(X_\lambda, X_\lambda) = \lambda$. Таким образом, главные кривизны поверхности в точке $q \in F^2$ есть корни многочлена

$$\det(A_q - \lambda E) = 0 \sim \det(B_q - \lambda g_q) = 0,$$

а соответствующие главные направления в точке $q \in F^2$ есть решения системы

$$(A_q - \lambda E)X_\lambda = 0 \sim (B_q - \lambda g_q)X_\lambda = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание. Из доказательства Теоремы 3.12.2 ясно, что главные кривизны поверхности являются функциями точки, а главные направления образуют в общем случае пару векторных полей на поверхности. Их свойства будут рассмотрены ниже. Обычно, **главные кривизны на поверхности обозначаются** k_1 и k_2 .

Как отмечалось выше, нормальная кривизна поверхности не зависит от ее параметризации. Значит, и главные кривизны от параметризации поверхности не зависят. Замена параметризации поверхности приводит к линейному преобразованию базиса касательной плоскости поверхности, однако главные направления инвариантны относительно этого преобразования.

Утверждение 3.12.3 *Главные кривизны и главные направления не зависят от параметризации поверхности.*

Доказательство. Пусть $u = \varphi(v)$ диффеоморфизм перепараметризации и пусть $J = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$ матрица Якоби этого преобразования. Тогда $B(v) = J^t B(u) J$, $g(v) = J^t g(u) J$, в то время, как для координат касательных векторов формула преобразования координат записывается в виде $X(u) = JX(v)$. Поэтому, для матрицы Вейнгартена соответствующая формула преобразования запишется как

$$A(v) = J^{-1} g^{-1}(u) (J^t)^{-1} J^t B(u) J = J^{-1} A(u) J,$$

а значит

$$\det(A(v) - \lambda(v)E) = \det(J^{-1} A(\varphi(v)) J - \lambda(v) J^{-1} J) = \det(A(\varphi(v)) - \lambda(v)E).$$

Следовательно, $\lambda(v) = \lambda(\varphi(v))$, то есть $\lambda(v) = \lambda(u)$ в точках, соответствующих по диффеоморфизму $u = \varphi(v)$. Что касается главных направлений, то имеем

$$A(v)X_\lambda(v) = J^{-1} A(u) J J^{-1} X_\lambda(u) = J^{-1} A(u) X_\lambda(u).$$

Пусть $X_\lambda(u)$ главное направление на поверхности относительно параметризации (u) . Тогда $A(u)X_\lambda(u) = \lambda(u)X_\lambda$, а следовательно,

$$A(v)X_\lambda(v) = J^{-1} \lambda(u) X_\lambda(u) = \lambda(v) X(v),$$

то есть вектор $X(v)$ является главным направлением в параметризации (v) . ■

Утверждение 3.12.4 Матрица Вейнгартена определяет поле поточечно линейных симметричных операторов $A_q : T_q F^2 \rightarrow T_q F^2$, отвечающее полю вторых фундаментальных форм. Все его собственные значения вещественны и собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.²

Доказательство. Матрица Вейнгартена имеет размер 2×2 и с этой матрицей связывается линейное преобразование $A_q : T_q F^2 \rightarrow T_q F^2$, действующий в каждом касательном пространстве $T_q F^2$ по правилу: $X_q \rightarrow A_q X_q$. Так как q – произвольная точка на поверхности, то на самом деле матрица Вейнгартена определяет поле линейных операторов A . Пусть X, Y два касательных векторных поля на поверхности. Тогда

$$B(X, Y) = Y^t B X = Y^t g A X = \langle A X, Y \rangle_g,$$

а это значит, что оператор Вейнгартена является оператором второй фундаментальной формы. В силу ее симметричности,

$$\langle A X, Y \rangle_g = B(X, Y) = B(Y, X) = \langle A Y, X \rangle_g. \quad (3.19)$$

Значит A определяет поле симметричных линейных операторов. Известно, что спектр симметричного вещественного линейного оператора вещественен. Покажем, что аналогичное утверждение верно в применении к полю линейных операторов. Пусть λ и X_λ собственное значение и соответствующий собственный вектор (предположительно невещественные) поля операторов Вейнгартена. Поскольку матрица A вещественна, то мы можем записать $A X_\lambda = \lambda X_\lambda$, $A \bar{X}_\lambda = \bar{\lambda} \bar{X}_\lambda$, где черта означает комплексное сопряжение. Тогда с одной стороны, $\langle A X_\lambda, \bar{X}_\lambda \rangle_g = \lambda \langle X_\lambda, \bar{X}_\lambda \rangle_g$, а с другой стороны, используя (3.19),

$$\langle A X_\lambda, \bar{X}_\lambda \rangle_g = \langle X_\lambda, A \bar{X}_\lambda \rangle_g = \bar{\lambda} \langle X_\lambda, \bar{X}_\lambda \rangle_g.$$

Вычитая, получаем

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle X_\lambda, \bar{X}_\lambda \rangle_g = 0.$$

Пусть U и V действительная и мнимая части (пока что комплексного) вектора X_λ , то есть $X_\lambda = U + iV$. Тогда, пользуясь линейностью скалярного умножения (относительно первой фундаментальной формы), получим

$$\begin{aligned} \langle X_\lambda, \bar{X}_\lambda \rangle_g &= \langle U + iV, U - iV \rangle_g = \\ &= \langle U, U \rangle_g + \langle V, V \rangle_g + i \langle V, U \rangle_g - i \langle U, V \rangle_g = |U|_g^2 + |V|_g^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Значит $\lambda = \bar{\lambda}$. То есть, все собственные значения, и как следствие, все собственные векторы поля операторов A вещественны.

Пусть теперь $\lambda_1 \neq \lambda_2$ различные собственные значения. Тогда

$$\langle A X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2} \rangle_g = \lambda_1 \langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2} \rangle_g, \quad \langle A X_{\lambda_2}, X_{\lambda_1} \rangle_g = \lambda_2 \langle X_{\lambda_2}, X_{\lambda_1} \rangle_g.$$

Вычитая, получаем $(\lambda_2 - \lambda_1) \langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2} \rangle_g = 0$ и, так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, заключаем, что $\langle X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2} \rangle_g = 0$.

²Поскольку речь идет о поле линейных операторов, то более правильно употреблять термины *собственные функции* и *собственные векторные поля*.

■

Характеристический многочлен для матрицы Вейнгартена имеет вид

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \text{trace}(A)\lambda + \det(A).$$

Так как главные кривизны есть собственные значения оператора Вейнгартена, то есть корни характеристического многочлена матрицы A , то $\det A = k_1 k_2$. Значит справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.12.1 *Гауссова кривизна двумерной поверхности равна произведению главных кривизн.*

Определение 3.12.3 *Величина $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\text{trace}(A)$ называется средней кривизной поверхности.*

Следствие 3.12.2 *Если в данной точке поверхности координатные векторы $\partial_1 \vec{r}$ и $\partial_2 \vec{r}$ направлены вдоль главных направлений, то матрицы первой и второй фундаментальных форм в данной точке одновременно диагональны, причем*

$$k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}$$

Доказательство. Пусть $X_i(q)$ ($i = 1, 2$) базис из собственных векторов матрицы Вейнгартена в точке q . Предположим, что $\partial_i \vec{r}(q) \parallel X_i(q)$. Тогда

$$g_{ij}(q) = \langle \partial_i \vec{r}, \partial_j \vec{r} \rangle(q) = 0, \quad i \neq j.$$

Не нарушая общности, можно считать, что в данной точке $X_i(q) = \partial_i \vec{r}(q)$, так что относительно базиса в касательной плоскости в точке q , координатное выражение для первого главного направления примет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда равенство $BX_1 = k_1 g X_1$ влечет $b_{i1} = k_1 g_{i1}$, $i = 1, 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} b_{11} &= k_1 g_{11}, \\ b_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично, $b_{22} = k_2 g_{22}$.

■

Замечание. Определение оператора Вейнгартена и его свойства дословно переносятся на случай гиперповерхности $F^n \subset E^{n+1}$. Заметим, так же, что по определению ортогональность векторов в смысле внутреннего скалярного умножения эквивалентна ортогональности этих векторов, как векторов в пространстве. Поэтому главные направления на поверхности ортогональны как векторы в пространстве. Прямым обобщением Гауссовой кривизны на многомерный случай является кривизна Гаусса-Кронеккера. Для поверхности $F^n \subset E^{n+1}$ для $n > 2$ матрица Вейнгартена имеет размер $n \times n$ и, как следствие, n главных кривизн. Величина $K = \det A = k_1 k_2 \dots k_n$ называется кривизной Гаусса – Кронеккера гиперповерхности F^n . Для поверхности $F^n \subset E^{n+1}$ при $n > 2$ средней кривизной гиперповерхности F^n называется величина $H = \frac{1}{n} \text{trace}(A) = \frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \dots + k_n)$. Результат, аналогичный Следствию 3.12.2 верен и для $F^n \subset E^{n+1}$.

3.12.3 Индикатриса Дюпена.

Индикатриса Дюпена дает наглядное представление о распределении нормальной кривизны поверхности в фиксированной (но произвольной) точке. Поскольку нормальная кривизна в точке не зависит от параметризации поверхности, то для фиксированного вектора $X \in T_q F^2$ длина отрезка

$$d(X) = \frac{1}{\sqrt{|k_n(q, X)|}}$$

не зависит от параметризации. Отложим в касательной плоскости отрезки длиной $d(X)$ от точки q . Геометрическое место концов построенных отрезков называется *индикатрисой Дюпена*.

Утверждение 3.12.5 В данной точке поверхности, не являющейся точкой уплощения, индикатриса Дюпена является кривой второго порядка относительно координат касательных векторов, уравнение которой определяется второй фундаментальной формой поверхности и имеет вид

$$|B_q(X, X)| = 1.$$

Индикатриса Дюпена, не зависимо от выбора параметризации, является

- *эллипсом* в эллиптической точке;
- *парой сопряженных гипербол* в гиперболической точке;
- *парой параллельных прямых* в параболической точке;

Доказательство. Очевидно, что нормальная кривизна поверхности не зависит от длины вектора, задающего касательное направление. Поэтому в качестве вектора, задающего направление в касательной плоскости, возьмем вектор, длина которого равна $d(X)$. Тогда по определению его конец опишет индикатрису Дюпена. Координаты такого вектора, следовательно, подчинены уравнению

$$g_q(X, X) = d^2(X) = \frac{g_q(X, X)}{|B_q(X, X)|}.$$

Откуда следует, что $|B_q(X, X)| = 1$.

В координатной форме это уравнение запишется как

$$|b_{11}(q)(X^1)^2 + 2b_{12}(q)X^1X^2 + b_{22}(X^2)^2| = 1.$$

Это уравнение кривой 2-го порядка, причем

- *эллипса*, если $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$;
- *пары сопряженных гипербол*, если $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$;
- *пары параллельных прямых*, если $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$.

■

Для выяснения геометрического строения индикатрисы Дюпена специализируем систему координат в окрестности точки так, что в самой точке векторы $\partial_1 \vec{r}$ и $\partial_2 \vec{r}$ будут иметь единичную длину направлены вдоль главных направлений. Тогда

$$|\partial_1 \vec{r}| = |\partial_2 \vec{r}| = 1, \quad \langle \partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r} \rangle = 0.$$

Это означает, что в рассматриваемой точке

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Но так как векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответствуют главным направлениям, то в рассматриваемой точке

$$A(q) = B(q) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, уравнение индикатрисы Дюпена запишется в виде

$$|k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2| = 1.$$

Если q эллиптическая точка, то $k_1 k_2 = K > 0$, а значит главные кривизны имеют одинаковые знаки (положительны) и уравнение индикатрисы можно записать как

$$k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2 = 1.$$

Это эллипс, оси симметрии которого совпадают с главными направлениями, а полуоси равны $1/\sqrt{k_1}$ и $1/\sqrt{k_2}$.

Если q гиперболическая точка, то $k_1 k_2 = K < 0$, а значит главные кривизны имеют разные знаки (положим $k_1 > 0$, $k_2 < 0$) и уравнение индикатрисы можно записать как

$$k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2 = \pm 1.$$

Это пара сопряженных гипербол, оси симметрии которых совпадают с главными направлениями, а полуоси равны $1/\sqrt{k_1}$ и $1/\sqrt{-k_2}$. Направления асимптот составляют угол φ с одним из главных направлений, такой, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{\frac{k_1}{-k_2}} = \pm \frac{\sqrt{-K}}{k_2}$$

Направления асимптот обнуляют вторую фундаментальную форму. Если X_{as} направление асимптоты, то $k_n(q, X_{as}) = B_q(X_{as}, X_{as}) = 0$. Поэтому, *направления на поверхности, в которых нормальная кривизна*

$$k_n(q, X) = 0 \quad \sim \quad B_q(X, X) = 0,$$

называются асимптотическими направлениями в точке q .

Если q параболическая точка, то $k_1 k_2 = K = 0$, а значит одна из главных кривизн, скажем $k_1 = 0$, а $k_2 > 0$ и уравнение индикатрисы можно записать как

$$k_2(X^2)^2 = 1.$$

Это пара параллельных прямых, ось симметрии которой совпадает с главным направлением, отвечающем асимптотическому направлению.

3.12.4 Формула Эйлера

Приведенные выше рассмотрения позволяют получить инвариантное выражение для нормальной кривизны поверхности в данной точке и в данном направлении. Это формула Эйлера.

Утверждение 3.12.6 *Обозначим через φ угол между произвольным направлением X в точке $q \in F^2$ и главным направлением, отвечающим главной кривизне k_1 . Тогда для нормальной кривизны в направлении X имеет место формула*

$$k_n(q, X) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

Доказательство. В силу инвариантности нормальной кривизны от выбора параметризации, введем в окрестности выбранной точки q такую, что в самой точке базисные векторы единичны, взаимно ортогональны и сонаправлены с главными направлениями. Тогда, по Следствию 3.12.2, в точке q

$$b_{11} = k_1, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = k_2, \quad g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = 0.$$

Значит,

$$k_n(q, X) = \frac{k_1(X^1)^2 + k_2(X^2)^2}{(X^1)^2 + (X^2)^2}.$$

Обозначим через φ угол между вектором X и вектором первого главного направления. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{X^1}{\sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{X^2}{\sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2}}.$$

Теперь очевидно, что

$$k_n(q, X) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

■

При помощи формулы Эйлера можно дать геометрическое обоснование термину *средняя кривизна* для полусуммы главных кривизн.

Утверждение 3.12.7 *Средняя кривизна поверхности равна среднему значению интеграла по всем направлениям от нормальной кривизны поверхности в данной точке.*

Доказательство. Напомним, что средним значением интеграла от функции $f(t)$ по промежутку $[a, b]$ называется величина

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Пользуясь формулой Эйлера, запишем нормальную кривизну как функцию угла

$$k_n(q, \varphi) = k_1(q) \cos^2 \varphi + k_2(q) \sin^2 \varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} k_n(q, \varphi) d\varphi &= k_1(q) \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + k_2(q) \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= 2\pi H(q) + \frac{k_1(q) - k_2(q)}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = 2\pi H(q). \end{aligned}$$

■

Тот факт, что средняя кривизна определяется как полусумма *главных* кривизн оказывается не существенным

Утверждение 3.12.8 *Средняя кривизна поверхности равна среднему арифметическому значений нормальной кривизны по любым двум взаимно ортогональным направлениям в данной точке.*

Доказательство. Действительно, из формулы Эйлера следует

$$\frac{k_n(q, \varphi) + k_n(q, \varphi + \pi/2)}{2} = \frac{k_1(q) + k_2(q)}{2} = H(q).$$

■

3.13 Омбилические точки. Вполне омбилические поверхности.

Точка на поверхности называется *омбилической* или *шаровой*, если в этой точке нормальные кривизны во всех направлениях одинаковы. Сам термин связан с тем, что именно таким образом устроено распределение нормальных кривизн на поверхности сферы.

Если точка q на поверхности омбилическая, то любое направление в этой точке является главным. Следовательно, система уравнений

$$(A_q - \lambda E)X = 0$$

удовлетворяется при любом X . Значит

$$A_q = \lambda E \quad \sim \quad B_q = \lambda g_q.$$

Следовательно, омбилические точки на поверхности могут быть найдены из пропорции³

$$\frac{b_{11}}{g_{11}}(q) = \frac{b_{12}}{g_{12}}(q) = \frac{b_{22}}{g_{22}}(q).$$

На некоторых поверхностях могут присутствовать омбилические точки. Например, на поверхности эллипсоида вращения их две (они расположены на оси вращения). На общем эллипсоиде их четыре (это предельные точки круговых сечений эллипсоида). Аналогично устроены омбилические точки на поверхности двуполостного гиперболоида.

³ т.е., системы из двух уравнений на два параметра – координаты точки q .

Упражнение 3.13.1 *Покажите, что на поверхности, образованной вращением кривой $\{x(t), z(t)\}$ вокруг оси Oz омбилические точки расположены на параллелях, описанных точками кривой, удовлетворяющими уравнению $z'_\alpha = x$, где α – угловой параметр на кривой или, эквивалентно, $z'_s = kx$, где k – кривизна кривой и s – натуральный параметр.*

Однако если предположить, что все точки поверхности являются омбилическими, то кажется очевидным, что кроме сферы таким свойством не обладает никакая другая гладкая поверхность.

Определение 3.13.1 *Поверхность $F^2 \subset E^3$ называется вполне омбилической, если каждая ее точка является омбилической.*

Теорема 3.13.1 *Вполне омбилическая поверхность класса C^3 локально является либо плоскостью либо сферой.*

Доказательство. Если поверхность вполне омбилична, то

$$k_1(q) = k_2(q) := k(q),$$

где q произвольная точка поверхности. Так как каждая точка поверхности омбилическая, то любое направление на поверхности является главным. Следовательно, матрица Вейнгартена в каждой точке пропорциональна единичной:

$$A = kE.$$

Из разложения Вейнгартена получаем

$$\partial \vec{n} = -\partial \vec{r} A = -k \partial \vec{r}.$$

В покоординатной записи последнее равенство перепишется в виде

$$\partial_i \vec{n} = -k \partial_i \vec{r}. \quad (3.20)$$

В силу требования на регулярность поверхности, вторые производные вектор-функции $\vec{n}$ не зависят от порядка дифференцирования. Поэтому

$$\partial_{12} \vec{n} = -\partial_2 k \partial_1 \vec{r} + k \partial_{12} \vec{r}, \quad \partial_{21} \vec{n} = -\partial_1 k \partial_2 \vec{r} + k \partial_{21} \vec{r}$$

для всех $i, j = 1, \dots, n$. Вычитая, получим

$$-\partial_2 k \partial_1 \vec{r} + \partial_1 k \partial_2 \vec{r} = 0.$$

В силу линейной независимости вектор-функций $\partial_1 \vec{r}$ и $\partial_2 \vec{r}$, получаем

$$\partial_1 k = 0, \quad \partial_2 k = 0.$$

Следовательно, $k = \text{const}$. Тогда равенства (3.20) можно переписать в виде

$$\partial_i (\vec{n} + k \vec{r}) = 0$$

для $i = 1, 2$. Это означает, что $\vec{n} + k\vec{r}$ есть постоянный вектор, то есть

$$\vec{n} + k\vec{r} = \vec{c}.$$

Если $k = 0$, то нормали к поверхности составляют постоянную вектор-функцию. Это означает, что $B \equiv 0$ и наша поверхность есть частью плоскости.

Если $k \neq 0$, то обозначим $\vec{c}_0 = \frac{1}{k}\vec{c}$. Тогда можем записать

$$\vec{r} - \vec{c}_0 = -\frac{1}{k}\vec{n}.$$

Следовательно,

$$|\vec{r} - \vec{c}_0| = \frac{1}{k},$$

что означает, что наша поверхность есть частью сферы радиуса $R = \frac{1}{k}$. Если же поверхность полная, то она совпадает со сферой указанного радиуса (с точностью до параллельного переноса, определяемого вектором $\vec{c}_0$).

■

3.14 Геометрическое кручение поверхности. Линии кривизны

В разделе 1.5 линии кривизны определялись как линии на поверхности с нулевым геодезическим кручением. Здесь мы дадим другое, эквивалентное определение.

Определение 3.14.1 *Линия на поверхности называется линией кривизны, если в каждой своей точке она касается главного направления.*

С аналитической точки зрения, линия кривизны $\vec{\gamma}$ характеризуется условием

$$A\gamma' = k_\gamma \gamma'$$

относительно внутренней параметризации $\vec{\gamma}$, где k_γ — соответствующая главная кривизна.

Так как главные направления не зависят от параметризации поверхности, то и *линии кривизны инвариантны относительно замены параметров на поверхности.*

эквивалентность этого определения определению из раздела 1.5 содержится в вычислительной формуле для геодезического кручения.

Утверждение 3.14.1 *Геодезическое кручение кривой $\vec{\gamma}$ на поверхности F^2 вычисляется по формуле*

- $\kappa_g(s) = -(\vec{\gamma}', \vec{n}', \vec{n}_\gamma) = (\vec{\gamma}', \overrightarrow{A\gamma'}, \vec{n}_\gamma)$ для натурального параметра;
- $\kappa_g(t) = -\frac{(\vec{\gamma}', \vec{n}', \vec{n}_\gamma)}{|\vec{\gamma}'|^2} = \frac{(\vec{\gamma}', \overrightarrow{A\gamma'}, \vec{n}_\gamma)}{|\vec{\gamma}'|^2}$ в общем случае.

Доказательство. Действительно, при натуральной параметризации, из разложения Дарбу (3.14) следует, что

$$\kappa_g = -\langle \vec{n}'_\gamma, \vec{v}_g \rangle = -\langle \vec{n}'_\gamma, \vec{n}_\gamma \times \vec{\gamma}' \rangle = -(\vec{\gamma}', \vec{n}', \vec{n}_\gamma).$$

Из разложения Вейнгартена

$$\vec{n}'_\gamma = \partial \vec{n} \cdot \gamma' = -(\partial \vec{r} A) \gamma' = -\partial \vec{r} (A \gamma') \stackrel{\text{def}}{=} -\overrightarrow{A \gamma'},$$

откуда и следует требуемая формула.

Если же параметр не натуральный, то $\vec{\gamma}'_s = \vec{\gamma}'_t \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{\gamma}'_t}{|\vec{\gamma}'_t|}$ и после очевидной подстановки, получим

$$\kappa_g(t) = -\frac{(\vec{\gamma}', \vec{n}', \vec{n}_\gamma)}{|\vec{\gamma}'|^2} = \frac{(\vec{\gamma}', \overrightarrow{A \gamma'}, \vec{n}_\gamma)}{|\vec{\gamma}'|^2}.$$

■

Следствие 3.14.1 *Линия на поверхности является линией кривизны тогда и только тогда, когда для этой линии $\kappa_g = 0$.*

Для доказательства достаточно заметить, что $\kappa_g = 0$ эквивалентно условию

$$A \gamma' = k_\gamma \gamma'.$$

Следствие 3.14.2 *Для всех кривых, проходящих через данную точку в данном направлении геодезическое кручение одинаково.*

Доказательство. Пусть $\vec{X} = \partial \vec{r} \cdot X$ выбранное направление на поверхности в точке $q \in F^2$. Для любой кривой, удовлетворяющей условию, $\gamma' = \lambda X$, $n_\gamma = n(q)$, а матрица Вейнгартена так же не зависит от выбора кривой⁴. Прямая подстановка дает требуемый результат.

■

Аналогично нормальной кривизне поверхности, доказанное следствие является основанием для следующего определения.

Определение 3.14.2 *Геодезическим кручением поверхности F^2 в точке $q \in F^2$ в направлении вектора $\vec{X} = \partial \vec{r} \cdot X$ называется число*

$$\kappa_g(q, X) = \frac{(\vec{X}, \overrightarrow{A \vec{X}}, \vec{n})}{|\vec{X}|^2}(q).$$

Упражнение 3.14.1 *Покажите, что в любой точке поверхности для геодезического кручения поверхности имеет место формула*

$$\kappa_g(q, X) = \pm \frac{k_2 - k_1}{2} \sin 2\varphi,$$

где k_1 и k_2 – главные кривизны, а φ – угол между направлением $\vec{X}$ и главным направлением, отвечающим главной кривизне k_1 .

⁴Для любой кривой, $A(\gamma(q)) = A(q)$

Упражнение 3.14.2 *Покажите, что в любой точке поверхности для Гауссовой кривизны поверхности имеет место формула*

$$K(q) = k_n(q, e_1)k_n(q, e_2) + \varkappa_g(q, e_1)\varkappa_g(q, e_2).$$

где e_1 и e_2 произвольные единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Обращаясь к третьей формуле разложения (3.14) заметим, что на линии кривизны $\varkappa_g = 0$, а k_n есть нормальная кривизна линии кривизны (то есть главная кривизна). Отсюда, в частности, следует, что приведенная в упражнении формула согласуется с определением Гауссовой кривизны через главные кривизны. Другим следствием является нижеследующее утверждение.

Теорема 3.14.1 (Теорема Родрига) *Пусть $\vec{\gamma}(s)$ — линия кривизны на поверхности F^2 , отвечающая главной кривизне k , $\vec{n}(s)$ поле единичных нормалей поверхности вдоль $\vec{\gamma}$. Тогда имеет место формула*

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -k \frac{d\vec{\gamma}}{ds} \quad \sim \quad d\vec{n} = -k d\vec{\gamma}.$$

Дифференциальное уравнение линий кривизны может быть получено непосредственно из определения.

Утверждение 3.14.2 *Дифференциальное уравнение линии кривизны, отвечающей главной кривизне k имеет вид*

$$(A - kE)dU = 0,$$

где $dU = (du^1, du^2)$ дифференциалы внутренних параметров поверхности.

Для записи уравнения линии кривизны не обязательно находить главные кривизны. Эти уравнения могут быть включены в одно уравнение второй степени относительно дифференциалов параметров.

Утверждение 3.14.3 *Дифференциальное уравнение линии кривизны на двумерной поверхности может быть записано в виде*

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1 du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

где g_{ik} и b_{ik} — элементы матриц первой и второй фундаментальных форм.

Доказательство. Пусть λ главная кривизна и пусть $dU = (du^1, du^2)$ направление линии кривизны. Тогда

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix}.$$

■

Расписывая по координатам, имеем

$$\begin{aligned} b_{11}du^1 + b_{12}du^2 &= \lambda(g_{11}du^1 + g_{12}du^2), \\ b_{12}du^1 + b_{22}du^2 &= \lambda(g_{12}du^1 + g_{22}du^2). \end{aligned}$$

Исключим λ из уравнений составляя пропорцию

$$\frac{b_{11}du^1 + b_{12}du^2}{b_{12}du^1 + b_{22}du^2} = \frac{g_{11}du^1 + g_{12}du^2}{g_{12}du^1 + g_{22}du^2}.$$

Раскрыв пропорцию и собрав коэффициенты при дифференциалах, получим

$$(g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11})(du^1)^2 + (g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11})du^1du^2 + (g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12})(du^2)^2 = 0. \quad (3.21)$$

Это уравнение можно свернуть в определитель

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3.14.3 *Поверхность $F^2 \subset E^3$ является вполне омбилической тогда и только тогда, когда любая гладкая кривая на ней является линией кривизны.*

Доказательство. Действительно, на вполне омбилической поверхности выполняется соотношение $B = \lambda g$, а значит вторые две строки определителя пропорциональны.

Обратно, выбирая последовательно в качестве линий кривизны линии $u^1 = \text{const}$, $u^2 = \text{const}$ и $u^1 = u^2$ получим пропорциональность вторых двух строк определителя, что и означает вполне омбиличность поверхности. ■

Утверждение 3.14.4 *В окрестности неомбилической точки поверхность можно параметризовать так, что координатные линии параметризации будут линиями кривизны поверхности.*⁵

Доказательство. Для упрощения выкладок, переобозначим $u^1 = u$, $u^2 = v$. Обозначим через P , Q и R коэффициенты уравнения (3.21) и перепишем его в виде

$$Pdu^2 + Qdudv + Rdv^2 = 0. \quad (3.22)$$

Пусть q не омбилическая точка поверхности, то есть $k_2(q) \neq k_1(q)$. Тогда по непрерывности, найдется окрестность U_q такая, что $k_2 \neq k_1$ во всех точках этой окрестности. Тогда через каждую точку U_q проходит ровно 2 линии кривизны, а значит уравнение (3.22) может быть переписано в виде двух уравнений первого порядка⁶

$$\frac{du}{dv} = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}, \quad \frac{du}{dv} = \frac{-Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P},$$

⁵ Другими словами, линии кривизны в окрестности неомбилической точки образуют на поверхности координатную сеть.

⁶ Если $P = 0$, а $Q \neq 0$, то уравнение можно переписать относительно $\frac{dv}{du}$. Если же $(P = Q = 0)|_{U_q}$ то координатные линии уже являются линиями кривизны

причем $Q^2 - 4PR > 0$, так как решения существуют и различны. Запишем решения этих уравнений в окрестности U_q в виде совокупности двух решений

$$u = \varphi(v) + \alpha, \quad u = \psi(v) + \beta,$$

где α и β – параметры интегрирования. Заметим, что фиксирование параметра, скажем, $\alpha = \text{const}$ соответствует некоторой линии кривизны на поверхности. То же самое верно и для параметра β .

Покажем теперь, что параметры α и β могут быть приняты в качестве новых параметров на поверхности в окрестности U_q . Для этого рассмотрим равенства

$$\begin{cases} \alpha = u - \varphi(v) \\ \beta = u - \psi(v) \end{cases} \quad (3.23)$$

как "преобразование координат" и найдем матрицу Якоби этого "преобразования". Получим

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi' \\ 1 & -\psi' \end{pmatrix}.$$

Ее определитель

$$\det \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)} = \varphi' - \psi' = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} - \frac{-Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} = \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{P} \neq 0.$$

Таким образом, функции (3.23) действительно определяют преобразование координат, причем в новых координатах уравнения линий кривизны будут иметь вид $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$. Что и требовалось доказать.

■

Упражнение 3.14.3 Координатная сеть на поверхности состоит из линий кривизны тогда и только тогда, когда во всех точках данной координатной окрестности матрицы первой и второй фундаментальных форм одновременно диагональны.

Выбрав на поверхности координатную сеть из линий кривизны, можем применить теорему Родрига для каждой из координатных линий, параметры на которых u^1 и u^2 являются параметрами на поверхности. Следующее утверждение становится очевидным.

Утверждение 3.14.5 (Формулы Родрига) Если координатная сеть на поверхности состоит из линий кривизны, то имеют место формулы

$$\begin{aligned} \partial_1 \vec{n} &= -k_1 \partial_1 \vec{r}, \\ \partial_2 \vec{n} &= -k_2 \partial_2 \vec{r}, \end{aligned}$$

где, как и ранее, k_1 и k_2 главные кривизны, $\vec{n}$ единичное нормальное векторное поле.

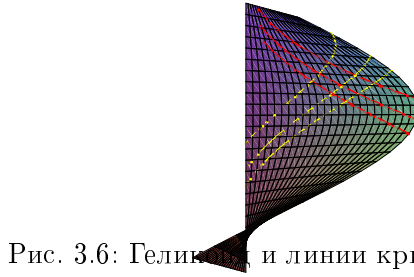


Рис. 3.6: Геликс и линии кривизны на нем

3.15 Асимптотические линии. Сопряженные сети.

Определение 3.15.1 *Линия на поверхности называется асимптотической, если в каждой своей точке она касается асимптотического направления.*

Дифференциальное уравнение асимптотических линий выводится непосредственно из определения.

Утверждение 3.15.1 *Дифференциальное уравнение асимптотических линий на поверхности имеет вид*

$$B(dU, dU) = b_{ik} du^i du^k = 0,$$

где $B = (b_{ik})$ – матрица второй фундаментальной формы, а $dU = (du^1, du^2)$ дифференциалы внутренних параметров поверхности

Ясно, что на двумерных поверхностях асимптотические линии могут существовать только на поверхностях неположительной кривизны $K \leq 0$. Если все точки поверхности гиперболические ($K < 0$), то поверхность несет два различных семейства асимптотических линий. Аналогично рассуждениям для случая линий кривизны, можно доказать

Утверждение 3.15.2 *В окрестности гиперболической точки поверхность можно параметризовать так, что координатные линии параметризации будут асимптотическими линиями на поверхности.*

Упражнение 3.15.1 *Покажите, что координатная сеть на поверхности состоит из асимптотических линий тогда и только тогда, когда матрица второй фундаментальной формы относительно данной параметризации имеет вид*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Два направления $\vec{X} = \partial \vec{r} \cdot X$ и $\vec{Y} = \partial \vec{r} \cdot Y$ называются *сопряженными*, если $B(X, Y) = 0$. Асимптотические направления соответствуют самосопряженным направлениям. Два семейства линий на поверхности образуют *сопряженную сеть*, если в каждой точке пересечения линий, их касательные векторы сопряжены.

Упражнение 3.15.2 Пусть $dr = (du, dv)$ и $\delta r = (\delta u, \delta v)$ два инфинитезимальных⁷ направления на поверхности. Эти направления сопряжены, если

$$b_{11}du\delta u + b_{12}(du\delta v + dv\delta u) + b_{22}dv\delta v = 0.$$

Пусть одно семейство линий задано в виде $\varphi(u, v) = 0$. Выведите дифференциальное уравнение сопряженного ему семейства.

Упражнение 3.15.3 Координатные линии на поверхности образуют сопряженную сеть тогда и только тогда, когда $b_{12} = 0$. Доказать.

3.16 Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии

Утверждение 3.16.1 Геодезическая кривизна кривой $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ на поверхности вычисляется по формуле

- $k_g(s) = (\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{n}_\gamma)$ для натуральной параметризации;
- $k_g(t) = \frac{(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{n}_\gamma)}{|\vec{\gamma}'|^3}$ для произвольной параметризации.

где $\vec{n}_\gamma = \vec{n}(s) = \vec{n} \circ \gamma$ — поле нормалей поверхности вдоль кривой.

Доказательство. Пусть γ — кривая с натуральной параметризацией, тогда из формулы Дарбу (3.14)₁, а именно, $\vec{\tau}' = k_g \vec{\nu}_g + k_n \vec{n}$, находим

$$\vec{\gamma}'' = k_g \vec{\nu}_g + k_n \vec{n}_\gamma.$$

Домножим это равенство скалярно на $\vec{\nu}_g$, тогда имеем

$$k_g = \langle \vec{\gamma}'', \vec{\nu}_g \rangle = \langle \vec{\gamma}'', [\vec{n}_\gamma, \vec{\gamma}'] \rangle = (\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{n}_\gamma).$$

Пусть γ имеет произвольную параметризацию, тогда

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}'_s &= \vec{\gamma}'_t \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{\gamma}'_t}{|\vec{\gamma}'_t|}, \\ \vec{\gamma}''_s &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\gamma}'_t}{|\vec{\gamma}'_t|} \right) \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\vec{\gamma}'_t|} \left(\frac{\vec{\gamma}''_t}{|\vec{\gamma}'_t|} + \vec{\gamma}'_t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\vec{\gamma}'_t|} \right) \right), \\ k_g(t) &= k_g(s(t)) = \left(\frac{\vec{\gamma}'_t}{|\vec{\gamma}'_t|}, \frac{1}{|\vec{\gamma}'_t|} \left(\frac{\vec{\gamma}''_t}{|\vec{\gamma}'_t|} + \vec{\gamma}'_t \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\vec{\gamma}'_t|} \right) \right), \vec{n} \right) = \frac{(\vec{\gamma}'_t, \vec{\gamma}''_t, \vec{n})}{|\vec{\gamma}'_t|^3}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Замечание. При изменении внутренней ориентации на кривой (направления обхода) знак геодезической кривизны меняется на противоположный. Это следует из полученных формул, при замене $\gamma' \rightarrow -\gamma'$.

⁷ т.е., бесконечно малых

В качестве примера, вычислим *геодезическую кривизну окружности* на поверхности сферы радиуса R . Параметризуем сферу вектор-функцией

$$\vec{r} = R\{\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u\}.$$

Здесь параметр u – угол, который составляет радиус-вектор точки на сфере с осью Oz . Окружность на сфере, лежащая в плоскости $z = \text{const}$ задается уравнением $u = u_0 = \text{const}$. Поэтому

$$\vec{\gamma}(v) = R\{\sin u_0 \cos v, \sin u_0 \sin v, \cos u_0\}$$

Отсюда

$$\vec{\gamma}' = R \sin u_0 \{-\sin v, \cos v, 0\}, \quad \vec{\gamma}'' = R \sin u_0 \{-\cos v, -\sin v, 0\}.$$

Так как $\vec{n} \parallel \vec{r}$, то

$$\vec{n}_\gamma = \{\sin u_0 \cos v, \sin u_0 \sin v, \cos u_0\}.$$

Значит

$$(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{n}_\gamma) =$$

$$R^2 \sin^2 u_0 \begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ -\cos v & -\sin v & 0 \\ \sin u_0 \cos v & \sin u_0 \sin v & \cos u_0 \end{vmatrix} = R^2 \sin^2 u_0 \cos u_0.$$

Очевидно,

$$|\vec{\gamma}'|^3 = R^3 \sin^3 u_0.$$

Поэтому

$$k_g = \frac{1}{R} \operatorname{ctg} u_0.$$

Заметим, что $R \sin u_0$ есть в точности радиус r рассматриваемой окружности. Поэтому $\sin u_0 = r/R$. Тогда

$$\operatorname{ctg} u_0 = \frac{\sqrt{1 - (r/R)^2}}{r/R} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r},$$

а значит

$$k_g = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}.$$

Таким образом, среди окружностей, только большие окружности (т.е., радиуса R) являются геодезическими на сфере.

Замечание. Впрочем, этот результат получается и из других, более элементарных рассуждений. А именно, окружность на сфере "внешнего" радиуса r имеет кривизну, как кривая в R^3 равную $k = \frac{1}{r}$. Нормальная кривизна любой кривой на сфере радиуса R равна $k_n = \frac{1}{R}$ (почему?). А значит

$$|k_g| = \sqrt{k^2 - k_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{R}\right)^2} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}$$

3.17 Третья фундаментальная форма поверхности

Третьей фундаментальной формой поверхности называется дифференциальная квадратичная форма $d\vec{n}^2 = \langle \partial_i \vec{n}, \partial_k \vec{n} \rangle du^i du^k$.

Используем формулы Родрига для доказательства формулы, связывающей первую, вторую и так называемую третью фундаментальную форму поверхности. Обозначим ее матрицу через $\tilde{g}$. Тогда

$$\tilde{g} = (\partial \vec{n})^t (\partial \vec{n}),$$

где, как и ранее, $\partial \vec{n}$ — матрица Якоби вектор-функции $\vec{n}$. Применяя разложение Вейнгартена (3.11),

$$\tilde{g} = A^t (\partial \vec{r})^t (\partial \vec{r}) A = A^t g A. \quad (3.24)$$

Утверждение 3.17.1 Матрицы первой, второй и третьей фундаментальных форм поверхности $F^2 \subset E^3$ связаны соотношением

$$\tilde{g} = 2H B - K g,$$

где H и K — средняя и гауссова кривизны поверхности.

Доказательство. Заметим, что доказываемое соотношение не зависит от параметризации. Поэтому, для доказательства достаточно установить справедливость этого соотношения в системе координат, удобной для вычислений. Ведem на поверхности систему координат из линий кривизны. Тогда

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}, \quad k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}.$$

Относительно выбранной параметризации выражение (3.24) примет вид

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^2 g_{11} & 0 \\ 0 & k_2^2 g_{22} \end{pmatrix}.$$

Проведем несложные преобразования

$$\begin{pmatrix} k_1(k_1 + k_2 - k_2)g_{11} & 0 \\ 0 & k_2(k_2 + k_1 - k_1)g_{22} \end{pmatrix} = 2H \begin{pmatrix} k_1 g_{11} & 0 \\ 0 & k_2 g_{22} \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $k_1 g_{11} = b_{11}$, $k_2 g_{22} = b_{22}$. Следовательно,

$$\tilde{g} = 2H \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} = 2H B - K g,$$

что и требовалось доказать. ■

Следствие 3.17.1 Для любых двух касательных векторных полей X, Y на поверхности,

$$\tilde{g}(X, Y) = 2HB(X, Y) - Kg(X, Y).$$

Заметим, что если сферическое отображение поверхности F^2 регулярно, то матрица $\tilde{g}$ является матрицей первой фундаментальной формы сферического образа поверхности.

Теорема 3.17.1 Нормальная кривизна, геодезическое кручение, Гауссова и средняя кривизна поверхности связаны соотношением:

$$k_n^2 + \varkappa_g^2 = 2Hk_n - K \quad (3.25)$$

Доказательство. Пусть $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ произвольная регулярная кривая на поверхности F^2 . Тогда ее нормальный сферический образ есть кривая на единичной сфере, параметризованная вектор-функцией $\vec{n}(s) = \vec{n} \circ \gamma$. Таким образом, кривая и ее сферический нормальный образ имеют одинаковую внутреннюю параметризацию. Тогда $|\vec{n}'|^2$ можно вычислить двумя способами, а именно, из формул Дарбу (3.14)₃ и как $\tilde{g}(\gamma', \gamma')$. Получим:

$$|\vec{n}'|^2 = k_n^2 + \varkappa_g^2 = \tilde{g}(\gamma', \gamma') = 2H_\gamma B(\gamma', \gamma') - K_\gamma g(\gamma', \gamma') = 2H_\gamma k_n - K_\gamma.$$

Так как величины, входящие в соотношение, не зависят от выбора кривой, то получим требуемый результат. ■

На поверхности с отрицательной кривизной асимптотическую линию, как кривую в E^3 , нельзя расположить ни в какой плоскости. Эти кривые существенно пространственные.

Теорема 3.17.2 (Бельтрами-Эннепер) Пусть γ — асимптотическая линия на поверхности F^2 . Тогда ее пространственное кручение $\varkappa$ удовлетворяет соотношению

$$\varkappa^2 = -K_\gamma$$

где $K_\gamma = K \circ \gamma$ — гауссова кривизна поверхности в точках кривой.

Доказательство. Пусть $\vec{\gamma}$ натурально параметризованная асимптотическая линия. Вектор главной нормали асимптотической линии расположен в касательной плоскости поверхности. Поэтому ее вектор главной нормали образует с полем нормалей поверхности постоянный угол $\theta = \pi/2$. Из соотношения $\varkappa_g = \varkappa + \theta'$ следует, что $\varkappa_g = \varkappa$. Тогда из (3.25) следует требуемое. ■

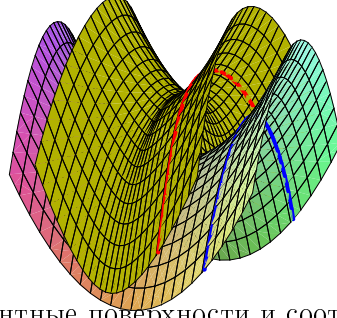


Рис. 3.7: Две эквидистантные поверхности и соответствующие линии на них

3.18 Эквидистантные поверхности

Пусть $F^2 \subset E^3$ – регулярная поверхность, параметризованная вектор-функцией $\vec{r}$ и $\vec{n}$ – поле единичных нормалей на ней. Поверхность $\tilde{F}^2$, параметризованная вектор-функцией

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda \vec{n}$$

называется *эквидистантной поверхностью по отношению к поверхности F^2* . Геометрически, поверхность $\tilde{F}^2$ получается сдвигом точек поверхности F^2 в направлении вектора нормали на расстояние, равное параметру λ .

Утверждение 3.18.1 Для поверхности и ее эквидистанты, матрицы первой, второй квадратичных форм и матрицы Вейнгартена связаны соотношениями:

$$g^* = (I - \lambda A)^t g (I - \lambda A), \quad B^* = (I - \lambda A)^t B, \quad A^* = (I - \lambda A)^{-1} A,$$

где I – единичная матрица.

Доказательство. Действительно, применяя разложение Вейнгартена, находим

$$\partial \vec{\rho} = \partial \vec{r} + \lambda \partial \vec{n} = \partial \vec{r} (I - \lambda A).$$

Отсюда следует, что

$$g^* = (\partial \vec{\rho})^t (\partial \vec{\rho}) = (I - \lambda A)^t (\partial \vec{r})^t (\partial \vec{r}) (I - \lambda A) = (I - \lambda A)^t g (I - \lambda A),$$

а значит эквидистанта регулярной поверхности регулярна до тех пор, пока $\det(I - \lambda A) > 0$.

Кроме того, касательные плоскости поверхности и ее эквидистанты параллельны. Следовательно, $n^* = n$. Учитывая это, находим

$$B^* = -(\partial \vec{\rho})^t \partial \vec{n} = (I - \lambda A)^t (\partial \vec{r})^t \partial \vec{n} = (I - \lambda A)^t B.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} A^* &= (g^*)^{-1} B^* = (I - \lambda A)^{-1} g^{-1} ((I - \lambda A)^t)^{-1} (I - \lambda A)^t B = \\ &= (I - \lambda A)^{-1} g^{-1} B = (I - \lambda A)^{-1} A. \end{aligned}$$

■

Следствие 3.18.1 *Гауссова и средняя кривизны поверхности и ее эквидистанты связаны соотношениями:*

$$K^* = \frac{K}{\det(I - \lambda A)} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K},$$

$$H^* = \frac{1}{2} \operatorname{trace}((I - \lambda A)^{-1} A) = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}.$$

Упражнение 3.18.1 *Покажите, что формулу для средней кривизны эквидистанты поверхности $F^n \subset E^{n+1}$ можно записать в виде:*

$$H^* = -\frac{1}{n} \frac{d}{d\lambda} \ln(\det(I - \lambda A)).$$

Утверждение 3.18.2 *Нормальная кривизна и геодезическое кручение поверхности и ее эквидистанты связаны соотношениями:*

$$k_n^* = \frac{k_n - \lambda(k_n^2 + \varkappa_g^2)}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2},$$

$$\varkappa_g^* = \frac{\varkappa_g}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2}.$$

Доказательство. Пусть $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ регулярная натурально параметризованная кривая на поверхности, $\vec{\gamma}^* = \vec{\rho} \circ \gamma$ — ее образ на эквидистанте. Тогда $\vec{\gamma}^* = \vec{\gamma} + \lambda \vec{n}$, а значит

$$(\vec{\gamma}^*)' = \vec{\gamma}' + \lambda \vec{n}'.$$

Тогда

$$|(\vec{\gamma}^*)'|^2 = 1 + 2\lambda \langle \vec{\gamma}', \vec{n}' \rangle + \lambda^2 \langle \vec{n}', \vec{n}' \rangle.$$

Из формул Дарбу (3.14)

$$\langle \vec{\gamma}', \vec{n}' \rangle = -k_n, \quad \langle \vec{n}', \vec{n}' \rangle = k_n^2 + \varkappa_g^2.$$

Тогда

$$|(\vec{\gamma}^*)'|^2 = (1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2,$$

а значит

$$\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2 = (1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2.$$

Теперь находим

$$\varkappa_g^* = \frac{((\vec{\gamma}^*)', \vec{n}', \vec{n})}{|(\vec{\gamma}^*)'|^2} = \frac{(\vec{\gamma}', \vec{n}', \vec{n})}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2} = \frac{\varkappa_g}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2}.$$

Для вычисления нормальной кривизны $\vec{\gamma}^*$ заметим, что из формул Дарбу в применении к F^* следует, что

$$k_n^* = -\left\langle \frac{dn^*}{ds^*}, \vec{\tau}^* \right\rangle = -\left\langle \frac{dn}{ds} \frac{ds}{ds^*}, \frac{d\vec{\gamma}^*}{ds^*} \right\rangle = -\frac{\langle \vec{n}', \vec{\gamma}' + \lambda \vec{n}' \rangle}{\left(\frac{ds^*}{ds} \right)^2}.$$

Из формул Дарбу для исходной поверхности, имеем

$$\langle \vec{n}', \vec{\gamma}' \rangle = -k_n, \quad \langle \vec{n}', \vec{n}' \rangle = k_n^2 + \varkappa_g^2.$$

Поэтому окончательно

$$k_n^* = \frac{k_n - \lambda(k_n^2 + \varkappa_g^2)}{(1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2}.$$

Поскольку полученные выражения не зависят от выбора кривой и точки на ней, то получим требуемое соотношение.

■

Замечание. Используя соотношение (3.25), можно переписать полученные результаты в виде:

$$k_n^* = \frac{(1 - 2\lambda H)k_n + \lambda K}{1 - 2\lambda(1 - \lambda H) - \lambda^2 K},$$

$$\varkappa_g^* = \frac{\varkappa_g}{1 - 2\lambda(1 - \lambda H) - \lambda^2 K}.$$

Отсюда следует еще одно полезное соотношение:

$$B^*(\gamma', \gamma') = (1 - 2\lambda H)k_n + \lambda K = k_n - \lambda(k_n^2 + \varkappa_g^2),$$

которое, впрочем, можно получить и непосредственно (как?).

Следствие 3.18.2

- Линия кривизны поверхности переходит в линию кривизны эквидистанты.
- Асимптотическая линия поверхности переходит в асимптотические линии эквидистанты тогда и только тогда, когда гауссова кривизна поверхности вдоль этой линии равна нулю.
- Главные кривизны поверхности и ее эквидистанты связаны соотношениями

$$k_i^* = \frac{k_i}{1 - \lambda k_i}.$$

Упражнение 3.18.2 Покажите, что геодезические кривизны кривой на поверхности и ее образа на эквидистанте связаны соотношением:

$$k_g^* = \frac{k_g - \lambda(\varkappa_g' + 2k_n k_g) + \lambda^2(k_n \varkappa_g' - \varkappa_g k_n' + k_g(k_n^2 + \varkappa_g^2))}{((1 - \lambda k_n)^2 + \lambda^2 \varkappa_g^2)^{3/2}}.$$

В частности, для линии кривизны

$$k_g^* = \frac{k_g}{1 - \lambda k_n}.$$

Более общим типом поверхности, нежели эквидистантная, является поверхность у которой параметр λ является функцией точки поверхности. Такие поверхности можно рассматривать как явно заданную поверхность над данной (по аналогии с явно заданной поверхностью над плоскостью). В частности, поверхности

$$D_1 : \vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{k_1} \vec{n} \quad \text{и} \quad D_2 : \vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{k_2} \vec{n},$$

где k_1 и k_2 – главные кривизны поверхности, называются *фокальными* (относительно данной поверхности).

Упражнение 3.18.3 *Покажите, что фокальные поверхности взаимно ортогональны.*

3.19 Поверхности нулевой Гауссовой кривизны

В этом разделе, в основном следуя изложению в [14], мы докажем следующую теорему.

Теорема 3.19.1 *Если $F^2 \subset E^3$ – регулярная аналитическая поверхность с гауссовой кривизной $K \equiv 0$, то F^2 локально является цилиндром, конусом или торсом.*

Три указанных типа поверхностей относятся к классу *развертывающихся* линейчатых поверхностей. Поверхность, уравнение которой имеет вид:

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v \vec{a}(u),$$

где $\vec{\rho} = \vec{\rho}(u)$ – уравнение некоторой пространственной кривой (с ненулевым кручением), называется *линейчатой*. При этом будем считать, что u – натуральный параметр на кривой, а $|\vec{a}(u)| = 1$.

Линейчатая поверхность называется *развертывающейся*, если вдоль образующей касательная плоскость одна и та же. В противном случае, такая поверхность называется *косой линейчатой*.

Лемма 3.19.1 *Линейчатая поверхность является развертывающейся тогда и только тогда, когда $(\vec{\rho}', \vec{a}', \vec{a}) = 0$.*

Доказательство. Имеем:

$$\begin{cases} \partial_u \vec{r} = \vec{\rho}' + v \vec{a}', \\ \partial_v \vec{r} = \vec{a}. \end{cases}$$

Найдем вектор нормали:

$$\vec{N} = [\partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r}] = [\vec{\rho}' + v \vec{a}', \vec{a}] = [\vec{\rho}', \vec{a}] + v [\vec{a}', \vec{a}].$$

Если $[\vec{a}', \vec{a}] = 0$, то $\vec{N}$ с очевидностью не зависит от v , но и условие теоремы выполнено тривиально. Если $[\vec{a}', \vec{a}] \neq 0$, то положим $\vec{b} = [\vec{a}', \vec{a}] = 0$. Тогда три вектора $\vec{a}', \vec{a}, \vec{b}$ взаимно ортогональны.

Стационарность вектора $\vec{N}$ вдоль образующей означает, что вектор-функция $\vec{N}$ не меняет направления вдоль образующей. Для этого необходимо и достаточно

$$[\partial_v \vec{N}, \vec{N}] = 0 \quad \sim \quad [[\vec{\rho}', \vec{a}] + v \vec{b}, \vec{b}] = 0 \quad \sim \quad [[\vec{\rho}', \vec{a}], \vec{b}] = 0.$$

Раскрывая последнее равенство по формуле двойного векторного произведения, имеем:

$$0 = \vec{a} \langle \vec{\rho}', b \rangle - \vec{\rho}' \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a}(\vec{\rho}', \vec{a}', \vec{a})$$

что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Лемма 3.19.2 *Линейчатая поверхность является развертывающейся тогда и только тогда, когда ее гауссова кривизна $K \equiv 0$.*

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \partial_u \vec{r} &= \vec{\rho}' + v \vec{a}' & \partial_v \vec{r} &= \vec{a} \\ \partial_{uu} \vec{r} &= \vec{\rho}'' + v \vec{a}'' & \partial_{uv} \vec{r} &= \vec{a}' & \partial_{vv} \vec{r} &= 0 \\ \vec{N} &= [\vec{\rho}', \vec{a}] + v[\vec{a}', \vec{a}]. \end{aligned}$$

Матрица первой квадратичной формы принимает вид

$$g = \begin{pmatrix} |\vec{\rho}' + v \vec{a}'|^2 & \langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle \\ \langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица второй

$$B = \frac{1}{|\vec{N}|} \begin{pmatrix} \langle \vec{\rho}'' + v \vec{a}'', \vec{N} \rangle & (\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a}) \\ (\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a}) & 0 \end{pmatrix}$$

Но так как $|\vec{N}| = \sqrt{\det g}$, то

$$\det B = -\frac{1}{\det g} (\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a})^2.$$

Значит, гауссова кривизна линейчатой поверхности вычисляется по формуле:

$$K = \frac{\det B}{\det g} = -\frac{(\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a})^2}{\left(|\vec{\rho}' + v \vec{a}'|^2 - \langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle^2\right)^2}$$

Очевидно, что

$$K = 0 \quad \sim \quad -(\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a})^2 = 0,$$

что и требовалось доказать. $\blacksquare$

Локальное строение развертывающейся поверхности описывается следующей теоремой.

Лемма 3.19.3 *Всякая развертывающаяся поверхность локально является цилиндром, конусом или торсом*

Условие развертывания тривиально выполнено в случаях

- $\vec{\rho}' = 0$ – поверхность является конусом;

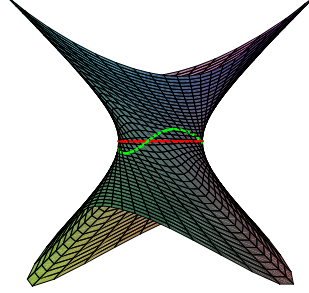


Рис. 3.8: Направляющий эллипс (красная линия) и стрикционная линия (зеленая) на поверхности однополостного гиперboloида $\frac{x^2}{9} + y^2 - z^2 = 1$.

- $\vec{a}' = 0$ – поверхность является цилиндром.

В случае $\vec{\rho}' \neq 0$ и $\vec{a}' \neq 0$ получим торс, что является следствием из следующих рассуждений.

Определение 3.19.1 Линия $\vec{\gamma}(u)$ на линейчатой поверхности $\vec{r} = \vec{\rho} + v\vec{a}(u)$ называется горловой (стрикционной) если в точках этой линии $\langle \vec{\gamma}', \vec{a}' \rangle = 0$.

Лемма 3.19.4 На нецилиндрической поверхности ($\vec{a}' \neq 0$) существует и единственна горловая линия (возможно, не регулярная)

Доказательство. Положим $v = v(u)$ в предположении гладкости этой функции. Тогда линия $\vec{\gamma}(u) = \vec{\rho}(u) + v(u)\vec{a}(u)$ лежит на данной линейчатой поверхности. Потребуем $\langle \vec{\rho}', \vec{a}' \rangle = 0$. Имеем

$$\langle \vec{\rho}' + v'\vec{a} + v\vec{a}', \vec{a}' \rangle = \langle \vec{\rho}', \vec{a}' \rangle + v\langle \vec{a}', \vec{a}' \rangle = 0$$

Отсюда

$$v(u) = -\frac{\langle \vec{\rho}', \vec{a}' \rangle}{|\vec{a}'|^2},$$

а значит

$$\vec{\gamma} = \vec{\rho} - \frac{\langle \vec{\rho}', \vec{a}' \rangle}{|\vec{a}'|^2} \vec{a}.$$

■

Замечание. Если $\vec{\gamma}' \equiv 0$, то $\vec{\gamma} = \vec{c} = (\text{const})$, а значит поверхность параметризуется в виде $\vec{\rho} = \vec{c} + \frac{\langle \vec{\rho}', \vec{a}' \rangle}{|\vec{a}'|^2} \vec{a}$ и, следовательно, является конической. В остальных случаях горловая линия регулярна.

Лемма 3.19.5 Нецилиндрическая и неконическая развертывающаяся поверхность является поверхностью, образованной касательными своей горловой линии.

Доказательство. Примем горловую линию в качестве направляющей для поверхности. Тогда имеем два условия:

$$\begin{cases} (\vec{\gamma}', \vec{a}', \vec{a}) = 0 \\ \langle \vec{\gamma}', \vec{a}' \rangle = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \langle \vec{\gamma}', \vec{b} \rangle = 0 \\ \langle \vec{\gamma}', \vec{a}' \rangle = 0 \end{cases}$$

Так как $\vec{a}, \vec{a}'$ и $\vec{b} = [\vec{a}', \vec{a}]$ взаимно ортогональны, то

$$\vec{\gamma}' = \lambda \vec{a} \quad \sim \quad \vec{a} = \frac{\vec{\gamma}'}{|\vec{\gamma}'|},$$

что и требовалось. ■

Завершает доказательство теоремы следующая Лемма.

Лемма 3.19.6 *Если F^2 – аналитическая поверхность с кривизной $K \equiv 0$, то локально F^2 является линейчатой развертывающейся поверхностью.*

Доказательство.

Пусть F^2 – аналитическая поверхность с кривизной $K \equiv 0$, тогда по крайней мере локально одна из главных кривизн, скажем, $k_2 \equiv 0^8$. Пусть (u, v) – координатная сеть из линий кривизны. Тогда из формул Родрига

$$n_v = 0.$$

Из формул Дарбу (3.14) следует, также, что линии v – асимптотические. В таком случае, угол между вектором главной нормали этих линий и нормалью к поверхности постоянен и равен $\pi/2$, а значит кручение v - линии равно ее геодезическому кручению (3.18), которое равно нулю, так как v - линии являются линиями кривизны. Следовательно, каждая из v - линий лежит в касательной плоскости к поверхности с нормалью $\vec{n}(u)$.

При любом значении параметра u , вектор

$$\vec{r}(u, v) - \vec{r}(u, v_0)$$

лежит в касательной плоскости к поверхности с нормалью $\vec{n}(u)$, так как он "соединяет" точку с $\vec{r}(u, v)$ с точкой $\vec{r}(u, v_0)$, т.е., две точки на v - линии, а она вся лежит в соответствующей касательной плоскости. Следовательно,

$$\langle \vec{r}(u, v) - \vec{r}(u, v_0), \vec{n}(u) \rangle \equiv 0.$$

Дифференцирование по u приводит к системе

$$\begin{cases} \langle \vec{r}(u, v) - \vec{r}(u, v_0), \vec{n}(u) \rangle \equiv 0, \\ \langle \vec{r}(u, v) - \vec{r}(u, v_0), \vec{n}'(u) \rangle \equiv 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

⁸Без требования аналитичности это утверждение не верно. См. Теорему 1.4.2

Если $\vec{n}'(u) = 0$, то и вторая главная кривизна равна нулю, а значит поверхность является вполне омбилической с нулевой кривизной, т.е., плоскостью (Теорема 3.13.1) и доказывать нечего. Пусть $\vec{n}'(u) \neq 0$. Тогда положим

$$\vec{a}(u) = \frac{[\vec{n}', \vec{n}]}{||[\vec{n}', \vec{n}]||}.$$

Заметим, что из формул Родрига следует, что $\vec{n}' = -k_1 \partial_u \vec{r}$. Но тогда

$$\vec{a} \parallel \partial_v \vec{r} \quad (3.27)$$

так как координатные на поверхности линии ортогональны.

Из (3.26) следует

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u, v_0) + t(u, v) \vec{a}(u),$$

где $t(u, v)$ – некоторая функция.

Покажем, что $t'_u = 0$, а $t'_v \neq 0$. Действительно,

$$\partial_v \vec{r} = t'_v \vec{a} \neq 0$$

так как поверхность регулярна, а значит

$$t'_v \neq 0. \quad (3.28)$$

Так как координатная сеть состоит из линий кривизны, то

$$\langle \partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r} \rangle \equiv 0,$$

а значит

$$\langle \partial_u \vec{r}(u, v_0) + t'_u \vec{a} + t \vec{a}', t'_v \vec{a} \rangle \equiv 0$$

Из единичности поля $\vec{a}$ и (3.27) следует

$$t'_v t'_u \equiv 0.$$

Принимая во внимание (3.28), заключаем $t'_u \equiv 0$.

В таком случае, (3.28) позволяет локально перейти от параметра v к параметру t . При этом v - линии переходят в t - линии, а параметрическое уравнение поверхности принимает вид:

$$\vec{r}(u, t) = \vec{r}(u, t_0) + t \vec{a}(u),$$

Заметим, что уравнение

$$\vec{\rho}(u) = \vec{r}(u, t_0).$$

выделяет на поверхности некоторую кривую, так что окончательно получим:

$$\vec{r}(u, t) = \vec{\rho}(u) + t \vec{a}(u).$$

Поэтому, наша поверхность является линейчатой, а по Лемме 3.19.2 она является развертывающейся. ■

Теорема 3.19.1 доказана.

Упражнение 3.19.1 Докажите, что горловая линия линейчатой поверхности есть геометрическое место точек где равна нулю геодезическая кривизна ортогональной траектории образующих.

Упражнение 3.19.2 Докажите, что горловая линия линейчатой поверхности есть геометрическое место точек образующих, в которых гауссова кривизна поверхности минимальна⁹ вдоль образующей.

Упражнение 3.19.3 Докажите, что в качестве направляющей линейчатой поверхности всегда можно взять одну из ортогональных траекторий образующих.

Из Теоремы 3.19.1 следует любопытное наблюдение, принадлежащее Бельтрами, связанное с разворачиванием на плоскость кривых на поверхности. А именно, рассмотрим вдоль данной кривой $\vec{\gamma}(s)$ на поверхности семейство касательных плоскостей:

$$\langle \vec{R} - \vec{\gamma}(s), \vec{n}(s) \rangle = 0.$$

Дифференцирование по параметру s приводит к системе:

$$\begin{cases} \langle \vec{R} - \vec{\gamma}(s), \vec{n}(s) \rangle = 0, \\ \langle \vec{R} - \vec{\gamma}(s), \vec{n}'(s) \rangle = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что каждая точка рассматриваемого семейства принадлежит поверхности (т.н., огибающей)

$$\vec{R}(s, t) = \vec{\gamma}(s) + t\vec{a}(s),$$

где $\vec{a} = \vec{n} \times \vec{n}'$. Покажем, что это поверхность является разворачивающейся. Для этого достаточно поверить (Лемма 3.19.1), что

$$(\vec{\gamma}', \vec{a}', \vec{a}) = 0.$$

Но это практически очевидно, так как

$$\vec{\gamma}' = \vec{\tau} \perp \vec{n}, \quad \vec{a} = \vec{n} \times \vec{n}' \perp \vec{n}, \quad \vec{a}' = \vec{n} \times \vec{n}'' \perp \vec{n},$$

а значит $\vec{\gamma}', \vec{a}'$ и $\vec{a}$ линейно зависимы.

Построенная разворачивающаяся поверхность называется *поверхностной полосой*. Ясно, что поверхностная полоса и поверхность касаются вдоль заданной линии (у них общая нормаль, а значит и касательная плоскость), поэтому геодезическая кривизна данной кривой на поверхности равна геодезической кривизне этой кривой, как кривой на полосе. Но полосу можно *развернуть на плоскость* (по изометрии). Значит, геодезическая кривизна кривой перейдет в обычную кривизну развернутой линии (!). Если так, то геодезическая линия развернется в прямую, кривая с постоянной геодезической кривизной – в дугу окружности и т.д.

Для примера, рассмотрим окружности на сфере. Если окружность большая, то поверхностной полосой является часть кругового цилиндра, а большая окружность будет окружностью на цилиндре, которая ортогональна образующим. При разворачивании на плоскость, эта окружность перейдет в отрезок прямой. Значит, большая

⁹но максимальна по абсолютной величине

окружность на сфере является геодезической. Если окружность малая, то полосой будет часть прямого кругового конуса ("шапочка" над сферой). При разворачивании на плоскость, окружность перейдет в часть окружности, радиус которой равен длине образующей конуса. Значит, малая окружность на сфере является кривой с постоянной геодезической кривизной. Из элементарно-геометрических вычислений легко следует, что $k_g = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}$, где R – радиус сферы, а r – внешний (пространственный) радиус окружности.

3.20 Основные уравнения теории поверхностей.

3.20.1 Деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена.

Пусть $F^2 \subset E^3$ поверхность, параметризованная вектор-функцией $\vec{r}: \mathcal{D}^2 \rightarrow E^3$. Пусть $\vec{n}$ – поле единичных нормалей на поверхности. Тогда набор вектор-функций

$$\{\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}, \vec{n}\}: \mathcal{D}^2 \rightarrow E^3 \quad (3.29)$$

составляет набор линейно независимых вектор-функций и поэтому все последующие их производные могут быть разложены по указанному базису.

Утверждение 3.20.1 Для поверхности $F^n \subset E^{n+1}$ класса C^2 имеют место разложения

$$\partial_{ik} \vec{r} = \Gamma_{ik}^s \partial_s \vec{r} + b_{ik} \vec{n}, \quad (\text{Гаусса})$$

$$\partial_i \vec{n} = -a_i^s \partial_s \vec{r}, \quad (\text{Вейнгартена})$$

где $B = (b_{ik})$ – матрица второй фундаментальной формы, $A = (a_k^s)$ – матрица Вейнгартена, Γ_{ik}^s – некоторый набор функций (символы Кристоффеля второго рода).

Доказательство. Разложение Вейнгартена было получено нами ранее, формула 3.11. Разложение Гаусса является формальным разложением $\partial_{ik} \vec{r}$ по базису (3.29) с тем замечанием, что проекция этого разложения на вектор $\vec{n}$ равна b_{ik} , так как, по определению матрицы второй фундаментальной формы, $b_{ik} = \langle \partial_{ik} \vec{r}, \vec{n} \rangle$.

■

Введем в рассмотрение символы Кристоффеля первого рода $\Gamma_{ik,m}$:

$$\Gamma_{ik,m} = \langle \partial_{ik} \vec{r}, \partial_m \vec{r} \rangle.$$

Утверждение 3.20.2 Символы Кристоффеля первого и второго рода определяются первой фундаментальной формой поверхности и вычисляются по формулам:

$$\Gamma_{ik,m} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{km} + \partial_k g_{im} - \partial_m g_{ik})$$

$$\Gamma_{ik}^s = \Gamma_{ik,m} g^{ms},$$

где g^{sm} – компоненты матрицы g^{-1} , обратной к матрице первой фундаментальной формы.

Доказательство. Действительно, по определению первой фундаментальной формы, $g_{ik} = \langle \partial_i \vec{r}, \partial_k \vec{r} \rangle$. Поэтому

$$\begin{aligned}\partial_i g_{km} &= \partial_i \langle \partial_k \vec{r}, \partial_m \vec{r} \rangle = \langle \partial_{ki} \vec{r}, \partial_m \vec{r} \rangle + \langle \partial_k \vec{r}, \partial_{mi} \vec{r} \rangle \\ \partial_k g_{im} &= \partial_k \langle \partial_i \vec{r}, \partial_m \vec{r} \rangle = \langle \partial_{ik} \vec{r}, \partial_m \vec{r} \rangle + \langle \partial_i \vec{r}, \partial_{mk} \vec{r} \rangle \\ \partial_m g_{ik} &= \partial_m \langle \partial_i \vec{r}, \partial_k \vec{r} \rangle = \langle \partial_{im} \vec{r}, \partial_k \vec{r} \rangle + \langle \partial_i \vec{r}, \partial_{km} \vec{r} \rangle\end{aligned}$$

Так как вектор-функция $\vec{r}$ регулярна класса C^2 , то смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования. Складывая первые два выражения и вычитая третье, получим требуемую формулу для символов Кристоффеля первого рода.

Символы Кристоффеля второго рода найдем умножая скалярно разложение Гаусса на вектор-функцию $\partial_j \vec{r}$. Получим равенство

$$\Gamma_{ik,j} = \Gamma_{ik}^s \langle \partial_s \vec{r}, \partial_j \vec{r} \rangle = \Gamma_{ik}^s g_{sj}.$$

Умножая равенство на g^{jm} и суммируя по j , получим

$$\Gamma_{ik,j} g^{jm} = \Gamma_{ik}^s g_{sj} g^{jm} = \Gamma_{ik}^s \delta_s^m = \Gamma_{ik}^m.$$

■

Теперь мы можем доказать теорему, открывшую путь к внутренней геометрии поверхностей.

Теорема 3.20.1 (Теорема Гаусса) Гауссова кривизна C^3 -регулярной поверхности выражается через компоненты первой фундаментальной формы в виде

$$K = \frac{\partial_1 \Gamma_{22,1} - \partial_2 \Gamma_{21,1} + \Gamma_{12}^s \Gamma_{12,s} - \Gamma_{22}^s \Gamma_{11,s}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Доказательство. Гауссова кривизна поверхности вычисляется, как мы знаем, по формуле

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Из разложения Гаусса

$$\begin{aligned}b_{11}\vec{n} &= \partial_{11}\vec{r} - \Gamma_{11}^s \partial_s \vec{r}, \\ b_{22}\vec{n} &= \partial_{22}\vec{r} - \Gamma_{22}^s \partial_s \vec{r}, \\ b_{12}\vec{n} &= \partial_{12}\vec{r} - \Gamma_{12}^s \partial_s \vec{r}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}b_{11}b_{22} - b_{12}^2 &= \langle \partial_{11}\vec{r} - \Gamma_{11}^k \partial_k \vec{r}, \partial_{22}\vec{r} - \Gamma_{22}^s \partial_s \vec{r} \rangle - \langle \partial_{12}\vec{r} - \Gamma_{12}^s \partial_s \vec{r}, \partial_{12}\vec{r} - \Gamma_{12}^k \partial_k \vec{r} \rangle = \\ &= \langle \partial_{11}\vec{r}, \partial_{22}\vec{r} \rangle - \langle \Gamma_{11}^k \partial_k \vec{r}, \partial_{22}\vec{r} \rangle - \langle \partial_{11}\vec{r}, \Gamma_{22}^s \partial_s \vec{r} \rangle + \langle \Gamma_{11}^k \partial_k \vec{r}, \Gamma_{22}^s \partial_s \vec{r} \rangle - \\ &= \langle \partial_{12}\vec{r}, \partial_{12}\vec{r} \rangle + \langle \Gamma_{12}^s \partial_s \vec{r}, \partial_{12}\vec{r} \rangle + \langle \partial_{12}\vec{r}, \Gamma_{12}^k \partial_k \vec{r} \rangle - \langle \Gamma_{12}^s \partial_s \vec{r}, \Gamma_{12}^k \partial_k \vec{r} \rangle = \\ &= \langle \partial_{11}\vec{r}, \partial_{22}\vec{r} \rangle - \Gamma_{11}^k \Gamma_{22,k} - \Gamma_{22}^s \Gamma_{11,s} + \Gamma_{11}^k \Gamma_{22}^s g_{ks} - \\ &= \langle \partial_{12}\vec{r}, \partial_{12}\vec{r} \rangle + \Gamma_{12}^s \Gamma_{12,s} + \Gamma_{12}^k \Gamma_{12,k} - \Gamma_{12}^k \Gamma_{12}^s g_{ks}.\end{aligned}$$

Подчеркнутые слагаемые равны между собой, а оставшиеся скалярные произведения легко преобразуются

$$\begin{aligned}\langle \partial_{11}\vec{r}, \partial_{22}\vec{r} \rangle &= \partial_1 \langle \partial_1\vec{r}, \partial_{22}\vec{r} \rangle - \langle \partial_1\vec{r}, \partial_{221}\vec{r} \rangle = \partial_1\Gamma_{22,1} - \langle \partial_1\vec{r}, \partial_{221}\vec{r} \rangle, \\ \langle \partial_{12}\vec{r}, \partial_{12}\vec{r} \rangle &= \partial_2 \langle \partial_1\vec{r}, \partial_{12}\vec{r} \rangle - \langle \partial_2\vec{r}, \partial_{121}\vec{r} \rangle = \partial_2\Gamma_{12,1} - \langle \partial_1\vec{r}, \partial_{122}\vec{r} \rangle,\end{aligned}$$

Поэтому

$$\langle \partial_{11}\vec{r}, \partial_{22}\vec{r} \rangle - \langle \partial_{12}\vec{r}, \partial_{12}\vec{r} \rangle = \partial_1\Gamma_{22,1} - \partial_2\Gamma_{12,1}.$$

Таким образом,

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \partial_1\Gamma_{22,1} - \partial_2\Gamma_{12,1} + \Gamma_{12}^s\Gamma_{12,s} - \Gamma_{22}^s\Gamma_{11,s}$$

что и завершает доказательство. $\blacksquare$

3.20.2 Уравнения Гаусса и Кодацци. Терема Бонне.

В этом разделе мы выведем уравнения, связывающие матрицы первой и второй фундаментальных форм.

Теорема 3.20.2 Пусть $F^n \subset E^{n+1}$ поверхность класса C^3 с первой фундаментальной формой $g = (g_{ik})$ и второй фундаментальной формой $B = (b_{ik})$. Обозначим через Γ_{ik}^m и $\Gamma_{ik,m}$ символы Кристоффеля формы g и положим по определению

$$\nabla_j b_{ik} = \partial_j b_{ik} - \Gamma_{ji}^s b_{sk} - \Gamma_{jk}^s b_{is}.$$

Тогда имеют место тождества

$$\begin{aligned}\partial_j \Gamma_{ik,m} - \partial_k \Gamma_{ij,m} + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{mk,s} - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{mj,s} &= b_{ik} b_{jm} - b_{ij} b_{km} && \text{Гаусса} \\ \nabla_j b_{ik} &= \nabla_k b_{ij} && \text{Кодацци}\end{aligned} \tag{3.30}$$

для всех комбинаций индексов i, j, k, m .

В частности, при $n = 2$ нетривиальные комбинации составляют

$$\begin{aligned}\partial_1 \Gamma_{22,1} - \partial_2 \Gamma_{21,1} + \Gamma_{12}^s \Gamma_{12,s} - \Gamma_{22}^s \Gamma_{11,s} &= b_{22} b_{11} - b_{12}^2 && \text{Гаусса} \\ \nabla_1 b_{22} = \nabla_2 b_{12}, \quad \nabla_2 b_{11} = \nabla_1 b_{12} &&& \text{Кодацци}\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\vec{r}: \mathcal{D}^n \rightarrow E^{n+1}$ параметризация класса C^3 рассматриваемой поверхности. Тогда

$$\partial_{ikj}\vec{r} = \partial_{ijk}\vec{r}$$

для всех комбинаций индексов. Используя разложения Гаусса и Вейнгартена, найдем

$$\partial_{ikj}\vec{r} = \partial_j(\partial_{ik}\vec{r}) = \partial_j(\Gamma_{ik}^s \partial_s \vec{r} + b_{ik} \vec{n}) = \partial_j \Gamma_{ik}^s \partial_s \vec{r} + \Gamma_{ik}^s \partial_{sj} \vec{r} + \partial_j b_{ik} \vec{n} + b_{ik} \partial_j \vec{n} =$$

$$\partial_j \Gamma_{ik}^s \partial_s \vec{r} + \Gamma_{ik}^s (\Gamma_{sj}^m \partial_m \vec{r} + b_{sj} \vec{n}) + \partial_j b_{ik} \vec{n} - b_{ik} a_j^s \partial_s \vec{r} =$$

$$(\partial_j \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^m - b_{ik} a_j^m) \partial_m \vec{r} + (\partial_j b_{ik} + \Gamma_{ik}^s b_{sj}) \vec{n}.$$

Выражение для $\partial_{ijk}\vec{r}$ получим заменой индексов $k \rightarrow j$, $j \rightarrow k$ в последнем выражении. Приравнявая соответствующие коэффициенты при $\partial_m\vec{r}$, получим

$$\partial_j\Gamma_{ik}^m - \partial_k\Gamma_{ij}^m + \Gamma_{ik}^s\Gamma_{sj}^m - \Gamma_{ij}^s\Gamma_{sk}^m = b_{ik}a_j^m - b_{ij}a_k^m. \quad (3.31)$$

Приравнявая соответствующие коэффициенты при $\vec{n}$, получим равенство

$$\partial_j b_{ik} + \Gamma_{ik}^s b_{sj} = \partial_k b_{ij} + \Gamma_{ij}^s b_{sk}. \quad (3.32)$$

Равенство (3.31) есть эквивалентно уравнению Гаусса. Чтобы в этом убедиться, сделаем замену $m \rightarrow \alpha$, умножим обе части равенства на $g_{\alpha m}$ и просуммируем по α . Получим

$$g_{\alpha m}\partial_j\Gamma_{ik}^\alpha - g_{\alpha m}\partial_k\Gamma_{ij}^\alpha + \Gamma_{ik}^s\Gamma_{sj,m} - \Gamma_{ij}^s\Gamma_{sk,m} = b_{ik}b_{jm} - b_{ij}b_{km}. \quad (3.33)$$

Внесем $g_{\alpha m}$ под дифференцирования, пользуясь тривиальным тождеством

$$\partial_j g_{\alpha m} = \partial_j \langle \partial_\alpha \vec{r}, \partial_m \vec{r} \rangle = \langle \partial_{\alpha j} \vec{r}, \partial_m \vec{r} \rangle + \langle \partial_\alpha \vec{r}, \partial_{mj} \vec{r} \rangle = \Gamma_{\alpha j, m} + \Gamma_{mj, \alpha}.$$

Получим:

$$\begin{aligned} \partial_j(g_{\alpha m}\Gamma_{ik}^\alpha) - \Gamma_{ik}^\alpha(\Gamma_{\alpha j, m} + \Gamma_{mj, \alpha}) - \partial_k(g_{\alpha m}\Gamma_{ij}^\alpha) + \Gamma_{ij}^\alpha(\Gamma_{\alpha k, m} + \Gamma_{mk, \alpha}) + \\ \Gamma_{ik}^s\Gamma_{sj, m} - \Gamma_{ij}^s\Gamma_{sk, m}. \end{aligned}$$

Подчеркнутые слагаемые после раскрытия скобок и замены индекса суммирования $\alpha \rightarrow s$ уходят и таким образом левая часть равенства (3.33) преобразуется к виду

$$\partial_j\Gamma_{ik, m} - \partial_k\Gamma_{ij, m} + \Gamma_{ij}^s\Gamma_{mk, s} - \Gamma_{ik}^s\Gamma_{mj, s},$$

что и требовалось проверить.

Равенство (3.32) эквивалентно уравнению Кодацци. Действительно, поменяем местами блоки, содержащие символы Кристоффеля (с заменой порядка индексов)

$$\partial_j b_{ik} - \Gamma_{ji}^s b_{sk} = \partial_k b_{ij} - \Gamma_{ki}^s b_{sj}$$

и вычтем в обеих частях равные блоки вида $\Gamma_{jk}^s b_{is}$. Получим

$$\partial_j b_{ik} - \Gamma_{ji}^s b_{sk} - \Gamma_{jk}^s b_{is} = \partial_k b_{ij} - \Gamma_{ki}^s b_{sj} - \Gamma_{kj}^s b_{is},$$

что и означает равенство

$$\nabla_j b_{ik} = \nabla_k b_{ij}$$

■

Левая часть уравнения Гаусса (3.30) образует так называемый тензор Римана типа (0,4). Его компоненты R_{mkji} определяются как

$$R_{mkji} = \partial_j\Gamma_{ik, m} - \partial_k\Gamma_{ij, m} + \Gamma_{ij}^s\Gamma_{mk, s} - \Gamma_{ik}^s\Gamma_{mj, s}$$

Формула (3.31) определяет тензор Римана типа (1,3). Его компоненты R_{kji}^m определяются как

$$R_{kji}^m = \partial_j\Gamma_{ki}^m - \partial_k\Gamma_{ji}^m + \Gamma_{ki}^s\Gamma_{js}^m - \Gamma_{ji}^s\Gamma_{ks}^m.$$

В процессе преобразования формулы (3.31) к формуле (3.30) мы фактически установили связь между компонентами этих тензоров

$$R_{mkji} = g_{ms}R_{kji}^s.$$

Уравнения Гаусса и Кодацци являются ключевыми в теореме Бонне об определении поверхности по заданными первой и второй фундаментальными формами.

Теорема 3.20.3 (Бонне) Пусть в некоторой области $\mathcal{D}^n$ заданы две квадратичные формы g и B , причем форма g положительно определена. Если коэффициенты этих форм удовлетворяют уравнениям Гаусса и Кодацци, то в пространстве E^{n+1} существует единственная с точностью до движения в пространстве поверхность, для которой заданные формы являются соответственно первой и второй фундаментальными формами.

Идея доказательства состоит в следующем. Пусть $\vec{r} : \mathcal{D}^2 \rightarrow E^3$ неизвестная вектор-функция. По заданной матрице g составим символы Кристоффеля, найдем матрицу Вейнгартена $A = g^{-1}B$ и формально запишем систему дифференциальных уравнений на вектор-функции $\vec{r}$ и $\vec{n}$, в предположении, что $\langle \vec{n}, \partial_i \vec{r} \rangle = 0$, вида разложения Гаусса-Вейнгартена

$$\begin{cases} \partial_{ik} \vec{r} = \Gamma_{ik}^s \partial_s \vec{r} + b_{ik} \vec{n}, \\ \partial_i \vec{n} = -a_i^s \partial_s \vec{r}. \end{cases}$$

Условия интегрируемости этой системы имеют вид

$$\begin{cases} \partial_{ikj} \vec{r} = \partial_{ijk} \vec{r} \\ \partial_{ik} \vec{n} = \partial_{ki} \vec{n} \end{cases}$$

Ясно, что первое из этих условий приводит к уравнениям Гаусса и Кодацци на коэффициенты заданных форм. Но по условию, эти уравнения удовлетворяются.

Второе условие интегрируемости приводит к двум равенствам

$$\begin{cases} \partial_j a_k^m + \Gamma_{js}^m a_k^s = \partial_k a_j^m + \Gamma_{ks}^m a_j^s, \\ a_k^s b_{js} = a_j^s b_{ks}, \end{cases}$$

первое из которых эквивалентно уравнению Кодацци, а второе удовлетворяется тождественно.

Таким образом, исследуемая система интегрируема. Единственность доказывается путем совмещения движением начальных данных для задачи Коши системы Гаусса-Вейнгартена.

3.21 Геометрические линии.

3.21.1 Внутреннее уравнение геодезической линии.

Ранее мы получили выражение для геодезической кривизны кривой исходя из внешней параметризации кривой. Оказывается, что геодезическая кривизна кривой полностью определяется ее внутренним заданием и первой квадратичной формой поверхности. То есть, геодезическая кривизна кривой принадлежит внутренней геометрии поверхности.

Утверждение 3.21.1 *Геодезическая кривизна кривой $\gamma \subset F^2$ определяется самой кривой и внутренней геометрией поверхности F^2 . А именно,*

$$k_g(s) = \sqrt{\det g} \left(\frac{du^1}{ds} \left(\frac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma_{ik}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) - \frac{du^2}{ds} \left(\frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma_{ik}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \right)$$

для натурально параметризованной кривой, и

$$k_g(t) = \frac{\sqrt{\det g}}{|\gamma'|^3} \left(\frac{du^1}{dt} \left(\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Gamma_{ik}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt} \right) - \frac{du^2}{dt} \left(\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Gamma_{ik}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt} \right) \right),$$

где $|\gamma'| = \sqrt{g_{ik} \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt}}$, для произвольной регулярной параметризации.

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &= \vec{r} \circ \gamma, \\ \vec{\gamma}' &= \partial_i \vec{r} \frac{du^i}{ds}, \\ \vec{\gamma}'' &= \partial_{ik} \vec{r} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} + \partial_i \vec{r} \frac{d^2u^i}{ds^2}. \end{aligned}$$

Воспользуемся разложением Гаусса, тогда имеем

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}'' &= (\Gamma_{ik}^m \partial_m \vec{r} + b_{ik} \vec{n}) \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} + \partial_m \vec{r} \frac{d^2u^m}{ds^2} = \\ &= \left(\frac{d^2u^m}{ds^2} + \Gamma_{ik}^m \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \partial_m \vec{r} + b_{ik} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \vec{n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} k_g(s) &= \left(\partial_i \vec{r} \frac{du^i}{ds}, \left(\frac{d^2u^m}{ds^2} + \Gamma_{ik}^m \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \partial_m \vec{r} + b_{ik} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \vec{n}, \vec{n} \right) = \\ &= \left(\frac{du^1}{ds} \left(\frac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma_{ik}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) - \frac{du^2}{ds} \left(\frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma_{ik}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \right) (\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}, \vec{n}). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}, \vec{n}) = \left\langle [\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}], \frac{[\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}]}{||[\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}]||} \right\rangle = ||[\partial_1 \vec{r}, \partial_2 \vec{r}]|| = \sqrt{\det g}$$

■

Упражнение 3.21.1 *Вывести формулу геодезической кривизны для произвольной регулярной параметризации кривой.*

Замечание. Выражение для геодезической кривизны можно переписать в виде, более удобном для вычислений. Для этого, производные обозначим точкой над параметром. Тогда

$$k_g(t) = \frac{\sqrt{\det g}}{|\gamma'|_g^3} \left(\dot{u}^1 \ddot{u}^2 - \ddot{u}^1 \dot{u}^2 + (\dot{u}^1 \Gamma_{ik}^2 - \dot{u}^2 \Gamma_{ik}^1) \dot{u}^i \dot{u}^k \right). \quad (3.34)$$

В некоторых случаях вычисление геодезической кривизны кривой можно упростить при помощи следующего утверждения.

Следствие 3.21.1 Если две поверхности локально-изометричны, то геодезические кривизны соответствующих кривых равны.

Доказательство. По определению геодезическая кривизна не зависит от параметризации. Тогда параметризуем поверхности F_1, F_2 одной и той же областью параметров. Тогда внутренние уравнения соответствующих кривых по изометрии совпадут. У кривых первые фундаментальные формы и символы Кристоффеля совпадают, следовательно геодезические кривизны равны. ■

Определение 3.21.1 Кривая на поверхности называется геодезической (линией) если в каждой ее точке геодезическая кривизна равна нулю.

Утверждение 3.21.2 Кривая $\gamma = \{u^1(s), u^2(s)\} \subset F^2$ является геодезической тогда и только тогда, когда функции $u^1(s), u^2(s)$ являются решением системы дифференциальных уравнения

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{ik}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0, \\ \frac{d^2 u^2}{ds^2} + \Gamma_{ik}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Доказательство. Поскольку γ — геодезическая, следовательно $\vec{\gamma}'' \parallel \vec{n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &= \vec{r} \circ \gamma, \\ \vec{\gamma}' &= \partial_i \vec{r} \frac{du^i}{ds}, \end{aligned}$$

Откуда,

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}'' &= \partial_{ik} \vec{r} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} + \partial_i \vec{r} \frac{d^2 u^i}{ds^2} = (\Gamma_{ik}^m \partial_m \vec{r} + b_{ik} \vec{\nu}) \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} + \partial_i \vec{r} \frac{d^2 u^i}{ds^2} = \\ &= \left(\frac{d^2 u^m}{ds^2} + \Gamma_{ik}^m \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \partial_m \vec{r} + b_{ik} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \vec{n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d^2 u^m}{ds^2} + \Gamma_{ik}^m \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0. \quad \blacksquare$$

Проекция вектора $\vec{\gamma}''$ на касательную плоскость называется ковариантной производной вдоль кривой ее вектора касательной и обозначается через $\frac{D}{ds}$. Так что по определению

$$\frac{D}{ds} \frac{du^m}{ds} = \frac{d^2 u^m}{ds^2} + \Gamma_{ik}^m \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds}.$$

Более общо, для векторного поля $\vec{X} = X^m(s) \partial_m \vec{r}|_{\gamma(s)}$

$$\frac{DX^m}{ds} = \frac{dX^m}{ds} + \Gamma_{ik}^m X^i(s) \frac{du^k}{ds}$$

Замечание. Если параметризация кривой не натуральна, то система уравнений для геодезических линий имеет вид:

$$\frac{d^2 u^m}{dt^2} + \Gamma_{ik}^m \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt} = \frac{du^m}{dt} \frac{s''}{s'},$$

где $(')$ означает производную по t . Докажите.

Следствие 3.21.2 *Через данную точку в данном направлении проходит единственная геодезическая.*

Доказательство. В самом деле, фиксация точки и направления в этой точке означает задачу Коши для системы (3.35). ■

Замечание. Уравнение геодезической можно записать в виде одного уравнения, не зависящего от натуральности параметризации кривой, используя формулу (3.34), а именно,

$$\dot{u}^1 \ddot{u}^2 - \ddot{u}^1 \dot{u}^2 + (\dot{u}^1 \Gamma_{ik}^2 - \dot{u}^2 \Gamma_{ik}^1) \dot{u}^i \dot{u}^k = 0.$$

Упражнение 3.21.2 *Если поверхности F_1, F_2 касаются вдоль кривой γ , то*

$$k_g^{(1)}(\gamma) = k_g^{(2)}(\gamma).$$

Используя этот факт, покажите, что геодезическая кривизна окружности внешнего радиуса r на сфере радиуса R равна $\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}$.

Рассмотрим верхнюю полуплоскость $y > 0$ декартовой системы координат (x, y) . Зададим на этой полуплоскости метрику

$$ds^2 = \frac{R^2(dx^2 + dy^2)}{y^2}.$$

Полученное двумерное многообразие называется моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского. Гауссова кривизна плоскости Лобачевского равна $-\frac{1}{R^2}$.

Утверждение 3.21.3 *Пусть $\gamma = \{x(t), y(t)\}$ кривая на полуплоскости $y > 0$ с метрикой*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Тогда ее геодезическая кривизна равна

$$k_g = yk_0 + \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},$$

где k_0 – кривизна этой кривой на евклидовой полуплоскости. В частности, для явно заданной кривой $y = y(x)$

$$k_g = yk_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Доказательство. Напомним формулу для вычисления геодезической кривизны

$$k_g(t) = \frac{\sqrt{\det g}}{|\gamma'|^3} \left(\frac{du^1}{dt} \left(\frac{d^2 u^2}{dt^2} + \Gamma_{ik}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt} \right) - \frac{du^2}{dt} \left(\frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{ik}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt} \right) \right).$$

Символы Кристоффеля данной метрики имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= -\frac{1}{y}, & \Gamma_{22}^1 &= 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{y}, & \Gamma_{12}^2 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\sqrt{\det g} = \frac{1}{y^2}, \quad |\gamma'|_g^2 = \frac{(x')^2 + (y')^2}{y^2}.$$

Поэтому формула геодезической кривизны примет вид

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{y}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} \left[x'y'' - x''y' + (x')^2 \left(\frac{x'}{y} \right) + 2x'y' \left(\frac{y'}{y} \right) + (y')^2 \left(-\frac{x'}{y} \right) \right] = \\ &= \frac{y}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} \left[x'y'' - x''y' + \frac{x'}{y} ((x')^2 + (y')^2) \right] = yk_0 + \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \end{aligned}$$

■

Упражнение 3.21.3 Покажите, что геодезическая кривизна евклидовой окружности радиуса r с центром в точке (a, b) на плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{R^2(dx^2 + dy^2)}{y^2}$$

постоянна и равна

$$k_g = \frac{b}{Rr}.$$

В частности, евклидовы окружности с центрами на оси Ox являются геодезическими плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре. Покажите, что прямые, перпендикулярные оси Ox , так же являются геодезическими в этой модели, а прямые, перпендикулярные оси Oy имеют постоянную геодезическую кривизну $k_g = 1/R$.

Упражнение 3.21.4 Покажите, что на поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2 = e^{2A}(dx^2 + dy^2)$$

геодезическая кривизна кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

выражается формулой

$$k_g = e^{-A}k_0 - dA(\nu_g)$$

где k_0 кривизна этой кривой на Евклидовой плоскости, ν_g – единичный положительно ориентированный вектор нормали кривой, $dA(\nu_g)$ – значение 1-формы градиента функции A на векторе ν_g .

Упражнение 3.21.5 Метрика сферы радиуса R в конформных координатах (при стереографической проекции на экваториальную плоскость) имеет вид

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2} (dx^2 + dy^2).$$

Вычислите геодезическую кривизну прообразов прямых линий и окружностей евклидовой плоскости на сфере.

Упражнение 3.21.6 Покажите, что окружности на сфере составляют единственное семейство кривых постоянной геодезической кривизны.

Упражнение 3.21.7 На поверхности касательных винтовой линии (гауссова кривизна 0), линия, описываемая отрезком постоянной длины, отложенных от точек кривой на ее касательных, имеет постоянную геодезическую кривизну. Докажите.

3.21.2 Полугеодезические системы координат.

Определение 3.21.2 Система координат на поверхности называется полугеодезической, если одно семейство координатных линий состоит из геодезических линий, а второе — из их ортогональных траекторий.

Полугеодезическая декартова система координат.

Утверждение 3.21.4 Если $\mathcal{L}(v)$ — гладкая натурально параметризованная кривая на F^2 , то в окрестности кривой $\mathcal{L}$ существует полугеодезическая система координат такая, что относительно этой координатной системы

- $$ds^2 = du^2 + f^2(u, v)dv^2; \quad (3.36)$$
- внутреннее уравнение кривой $\mathcal{L}(v)$ имеет вид $u = 0, v = s$;
- $f(0, v) \equiv 1$
- если $\mathcal{L}(v)$ — геодезическая линия, то $f_u(0, v) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}(\sigma)$ — натурально параметризованная гладкая кривая, а $\vec{a}(\sigma)$ — гладкое поле нормалей вдоль $\mathcal{L}$. Рассмотрим семейство геодезических $\gamma_\sigma(s)$, выходящих из точек кривой $\mathcal{L}$ в направлении векторов поля $\vec{a}(\sigma)$. Формально, это семейство можно задать так. Пусть

$$\begin{cases} u^1 = u^1(s, \sigma) \\ u^2 = u^2(s, \sigma) \end{cases}$$

уравнение $\gamma_\sigma(s)$. Запишем условие того, что кривая семейства $\gamma_\sigma(s)$ является натурально параметризованной геодезической:

$$\frac{d^2 u^m}{ds^2} + \Gamma_{ik}^m X^i \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0. \quad (3.37)$$

Зафиксируем необходимые начальные условия

$$u^m(0, \sigma) = \mathcal{L}^m(\sigma);$$

$$\frac{du^m}{ds}(0, \sigma) = a^m(\sigma).$$

Тем самым, мы получили задачу Коши с начальными данными, гладко зависящими от параметра. Решение этой системы

$$u^i = u^i(s, \sigma)$$

гладко зависят от s и σ .

Рассмотрим это решение как отображение $(s, \sigma) \rightarrow (u^1, u^2)$. Если это отображение — локальный диффеоморфизм гомеоморфизм, то, следовательно, поверхность допускает параметризацию параметрами (s, σ) .

Рассмотрим соответствующую матрицу Якоби в точках кривой $\mathcal{L}$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^1}{d\sigma} \\ \frac{du^2}{ds} & \frac{du^2}{d\sigma} \end{pmatrix}_{(0, \sigma)} = \begin{pmatrix} a^1(\sigma) & (\mathcal{L}^1)' \\ a^2(\sigma) & (\mathcal{L}^2)' \end{pmatrix}.$$

Так как $\vec{a}(\sigma) \perp \mathcal{L}'(\sigma)$, то $\det J(0, \sigma) \neq 0$. Значит существует окрестность (по s) кривой $\mathcal{L}$ такая, что $\det J \neq 0$ во всей этой окрестности. Следовательно, полученное отображение является локальным диффеоморфизмом.

Параметризуем поверхность параметрами $(s, \sigma) \equiv (u, v)$. Пусть первая фундаментальная форма поверхности относительно этих параметров имеет вид

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}du\,dv + g_{22}dv^2.$$

Рассмотрим кривую $u = s, v = \sigma_0$. Тогда $ds^2 = g_{11}(u, \sigma_0)ds^2$. Следовательно $g_{11}(u, \sigma_0) = 1$ для любого значения параметра σ_0 . Значит $g_{11}(u, v) \equiv 1$.

По построению, кривые заданные уравнением

$$\begin{cases} u = s; \\ v = \sigma_0. \end{cases}$$

являются геодезическими. Так как $\frac{d^2u}{ds^2} = 0$ и $\frac{d^2v}{ds^2} = 0$, то из общего уравнение геодезических найдем, что $\Gamma_{11}^m \equiv 0$, а значит

$$\Gamma_{11,m} = g_{mt}\Gamma_{11}^t \equiv 0.$$

Следовательно, учитывая, что $g_{11} \equiv 1$, получаем $\frac{\partial g_{12}}{\partial u} \equiv 0$, то есть g_{12} не зависит от s . Но так как в точках кривой $\mathcal{L}$, то есть при $s = 0$, $g_{12}(0, \sigma) = 0$, то $g_{12} \equiv 0$. Следовательно, $ds^2 = du^2 + g_{22}(u, v)dv^2$. Положим $f(u, v) = \sqrt{g_{22}}$. Тогда

$$ds^2 = du^2 + f^2(u, v)dv^2.$$

Кривая $\mathcal{L}$ в построенной системе координат задается уравнением

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = \sigma. \end{cases}$$

Вспоминая, что σ — натуральный параметр, то есть $ds = d\sigma = dv$, из (3.36), находим $ds^2 = f^2(0, v)ds^2$, а значит $f(0, v) \equiv 1$.

Если $\mathcal{L}(\sigma)$ — геодезическая, то она удовлетворяет уравнению (3.37), а следовательно $\Gamma_{22}^m(0, v) \equiv 0$ и $\Gamma_{22,m}(0, v) \equiv 0$. Тогда $\frac{\partial g_{22}}{\partial u}(0, v) \equiv 0$, что эквивалентно тождеству $\frac{\partial f}{\partial u}(0, v) \equiv 0$.

■

Лемма Гаусса. Полугеодезическая полярная система координат.

Основой для определения полугеодезической полярной системы координат служит так называемая Лемма Гаусса. *Окружностью Гаусса* с центром в точке $q \in F^2$ радиуса r называется геометрическое место точек, удаленных на расстояние по натурально параметризованным геодезическим, исходящим из точки q .

Лемма 3.21.1 *Окружности Гаусса ортогональны радиальным геодезическим.*

Доказательство. Обозначим в натуральный параметр на геодезической через s . Зафиксируем точку q на поверхности и рассмотрим семейство геодезических $\tilde{\gamma}_t(s)$, исходящих из точки q под углом t относительно некоторого фиксированного луча $t = 0$ в касательной плоскости. Тогда окружности Гаусса $(r = r_0, t)$ будет соответствовать окружность в касательной плоскости $T_q F^2$ того же радиуса. Таким образом, семейство радиальных лучей и их ортогональных траекторий (окружностей) на касательной плоскости $T_q F^2$ отображается на семейство радиальных геодезических и окружностей Гаусса. Это отображение называется *экспоненциальным* и обозначается $\exp_q : T_q F^2 \rightarrow U_q \subset F^2$. Его дифференциал $(\exp_q)_*$ является тождественным в точке q . Для доказательства, заметим, что дифференциал отображения переводит касательный вектор к кривой в области определения в касательный вектор к образу кривой в соответствующих по отображению точках. В применении к экспоненциальному отображению, рассмотрим прямую $\lambda a \in T_q F^2$ и ее образ $\exp_q(\lambda a) = \gamma_q(\lambda|a|)$, где $\gamma_q(\lambda|a|)$ — точка на натурально параметризованной геодезической, исходящей из точки q в направлении вектора a , при значении параметра $s = \lambda|a|$. Тогда с одной стороны при $\lambda = 0$ мы имеем $(\exp_q(\lambda a))_* = (\exp_q)_* a$. С другой стороны, $\frac{d}{d\lambda}(\gamma_q(\lambda|a|)) = \frac{d}{ds}(\gamma_q(s))|_{s=0}|a| = \gamma'_s(0)|a| = a$. Следовательно, экспоненциальное отображение является локальным диффеоморфизмом.

Пусть V — вектор длины r в $T_q F^2$ и пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow F^2$ — геодезическая с начальными данными $\gamma(0) = 0, \gamma'(0) = V$. Обозначим $p = \gamma(1)$. Тогда $p \in S^1(q, r)$ — окружности Гаусса радиуса r . Пусть W касательный вектор к геодезической окружности $S^1(q, r)$ в точке p . Тогда $W = (\exp_q \circ \sigma)'(0)$, где $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_q F^2$ параметризация окружности в касательной плоскости такая, что $\sigma(0) = V$ и $|\sigma(t)| = r$ для всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Определим на поверхности новую локальную параметризацию $\alpha : [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow F^2$ формулой $\alpha(s, t) = \exp_q(\sigma(t))$ для всех $s \in [0, 1]$ и $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Тогда $\alpha(s, 0) = \gamma(s)$, где $\gamma(s)$ — геодезическая, соединяющая q и p . При этом для

каждого $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ кривая $s \rightarrow \alpha(s, t)$ является геодезической, соединяющей q и $\exp_q(\sigma(t))$ у которой вектор скорости при $s = 0$ равен $\sigma(t)$. Это означает, что

$$\frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial s} = 0$$

и

$$\left\langle \frac{\partial \alpha(s, t)}{\partial s}, \frac{\partial \alpha(s, t)}{\partial s} \right\rangle_g = \langle \sigma(t), \sigma(t) \rangle_g = r^2$$

для всех $s \in [0, 1]$ и $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Если $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$ – соответствующая "внешняя" параметризация, то из разложения Гаусса следует, что

$$\partial_{st} \vec{r} = \overrightarrow{\frac{D}{\partial s} \frac{d\alpha}{dt}} + b(\alpha'_t, \alpha'_s) \vec{n}$$

и

$$\partial_{ts} \vec{r} = \overrightarrow{\frac{D}{\partial t} \frac{d\alpha}{ds}} + b(\alpha'_s, \alpha'_t) \vec{n},$$

а значит имеет место равенство

$$\frac{D}{\partial s} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{D}{\partial t} \frac{d\alpha}{ds}.$$

Как следствие, имеем

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right\rangle}_{=1} = 0.$$

Следовательно, $\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle$ не зависит от s . Теперь заметим, что $\alpha(0, t) = q$ не зависит от t , то есть $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{s=0} = 0$. Следовательно, $\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = 0$ для всех s и t . В частности, полагая $s = 1, t = 0$ мы получим, что $W \perp \gamma'(1)$, что и требовалось доказать. ■

Рассмотрим поверхность и точку q на поверхности. Из точки q в каждом касательном направлении выпустим геодезическую, параметризованную натурально (для каждого направления она единственна). По Лемме Гаусса 3.21.1, семейство эквидистант точки q совпадает с семейством ортогональных траекторий постороннего семейства. Таким образом, семейство геодезических лучей и его ортогональных траекторий образует на поверхности полугеодезическую систему координат. Такую полугеодезическую систему координат называют *полярной системой координат* с полюсом в точке q .

Зафиксируем в касательной плоскости некоторый луч, называемый нулевым. Обозначим через φ угол, образованный произвольным лучом с нулевым. Обозначим через r натуральный параметр на геодезических лучах. Тогда относительно такой координатной системы

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r, \varphi) d\varphi^2.$$

Координатная линия $r = r_0 = \text{const}$ ортогональна геодезическим лучам, выходящим из точки P и является окружностью Гаусса, называемую еще *геодезической окружностью*.

Эта координатная система является образом полярной системы координат касательной плоскости в точке q при экспоненциальном отображении. В отличие от полярной системы координат на плоскости, которая определена для всех $r > 0$, полу-геодезическая полярная система координат имеет ограничение по значениям r , так как может случиться, что геодезические, выходящие из данной точки в различных направлениях могут пересекаться, что нарушает инъективность экспоненциального отображения. В качестве примера достаточно рассмотреть сферу. Точная верхняя грань $\sup\{r \mid \exp_q \text{ есть диффеоморфизм}\}$ называется радиусом инъективности поверхности/многообразия в точке q и обозначается $\text{inj}(q)$. Радиусом инъективности поверхности/многообразия называется величина $\inf_q(\text{inj}(q))$ и является глобальной характеристикой поверхности/многообразия. Например, для евклидовой плоскости E^2 и плоскости Лобачевского L^2 радиус инъективности равен ∞ , а для сферы $S^2(R)$ он равен πR .

3.21.3 Метрики постоянной кривизны

Используем полугеодезическую декартову систему координат для доказательства следующего утверждения

Утверждение 3.21.5 Пусть F^2 — поверхность постоянной гауссовой кривизны K . Тогда F^2 локально-изометрична:

- плоскости с метрической формой

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

если $K = 0$;

- сфере радиуса $R = 1/\sqrt{K}$ с метрической формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2(\sqrt{K}u)dv^2,$$

если $K > 0$;

- гиперболической плоскости "радиуса" $R = 1/\sqrt{-K}$ с метрической формой

$$ds^2 = du^2 + \text{ch}^2(\sqrt{-K}u)dv^2,$$

если $K < 0$;

Доказательство. Выберем на поверхности F^2 произвольную геодезическую $\mathcal{L}$ и построим на ней (как на базе) декартову полугеодезическую систему координат. Как было нами показано, в этом случае первая фундаментальная форма поверхности приводится к виду:

$$ds^2 = du^2 + f^2(u, v)dv^2$$

и функция f обладает свойствами

$$\begin{cases} f(0, v) \equiv 1; \\ \frac{\partial f}{\partial u}(0, v) \equiv 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Относительно выбранной параметризации, $K = -\frac{f_{uu}}{f}$, а так как $K = \text{const}$, то относительно функции f имеем следующее дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$f_{uu} + Kf = 0 \quad (3.39)$$

Если $K = 0$, то (3.39) перепишется в виде:

$$f_{uu}(u, v) = 0.$$

Общее решение такого уравнения имеет вид

$$f = A(v)u + B(v).$$

А поскольку функция f обладает свойствами (3.38), то воспользовавшись первым условием имеем $B(v) = 1$. А воспользовавшись вторым условием имеем $A(v) \equiv 0$. Тогда $f(u, v) = 1$. Таким образом, первая фундаментальная форма поверхности приобретает вид:

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

что соответствует первой фундаментальной форме плоскости в декартовых прямоугольных координатах.

Если $K > 0$, то решением дифференциального уравнения (3.39) является тригонометрическая функция вида

$$f(u, v) = A(v) \sin(\sqrt{K}u) + B(v) \cos(\sqrt{K}u).$$

Тогда, как и в предыдущем случае, воспользовавшись условием (3.38) получим, что $B(v) = 1$, $A(v) = 0$. И решение принимает вид

$$f(u, v) = \cos(\sqrt{K}u).$$

Значит, первая фундаментальная форма приводится к виду:

$$ds^2 = du^2 + \cos^2(\sqrt{K}u)dv^2.$$

В случае $K < 0$, соответствующее решение выписывается через гиперболические функции, а именно

$$f(u, v) = A(v) \operatorname{sh}(\sqrt{-K}u) + B(v) \operatorname{ch}(\sqrt{-K}u).$$

А из условия (3.38) $B(v) = 1$, $A(v) = 0$. Следовательно,

$$f(u, v) = \operatorname{ch}(\sqrt{-K}u).$$

И фундаментальная форма принимает вид

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K}u)dv^2.$$

■

3.21.4 Поверхности вращения постоянной Гауссовой кривизны.

В этом параграфе, следуя изложению в [14], мы покажем, что все метрики постоянной Гауссовой кривизны локально реализуются в виде поверхности в E^3 . Поверхности нулевой кривизны – это развешивающиеся. Они описаны в разделе 3.19. Здесь мы дадим описание поверхностей постоянной Гауссовой кривизны $K \neq 0$ в классе поверхностей вращения.

Будем искать в плоскости xz кривые γ , вращением которых около оси Oz образуется поверхность данной постоянной кривизны K . Зададим уравнение кривой γ в виде

$$x = x(u) > 0, \quad z = z(u),$$

где u – натуральный параметр на γ . Заметим, что в этом случае

$$(x')^2 + (z')^2 = 1 \quad (3.40)$$

Тогда, для метрики поверхности вращения имеем

$$ds^2 = du^2 + x(u)^2 dv^2,$$

где v – угол поворота кривой γ вокруг оси Oz . Гауссова кривизна в таком случае равна

$$K = -\frac{x''(u)}{x(u)}.$$

Тогда для $x(u)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x'' + Kx = 0.$$

Общее решение этого уравнения зависит от знака K , а именно,

$$\begin{cases} x(u) = a \cos(\sqrt{K}u) + b \sin(\sqrt{K}u), & \text{если } K > 0, \\ x(u) = a \operatorname{ch}(\sqrt{-K}u) + b \operatorname{sh}(-\sqrt{-K}u), & \text{если } K < 0, \end{cases} \quad (3.41)$$

где a и b – константы интегрирования. Зная функцию $x(u)$, из (3.40) формально можем найти и функцию $z(u)$:

$$z = \int_0^u \sqrt{1 - [x'(u)]^2} du. \quad (3.42)$$

Для определенности мы взяли радикал со знаком $+$. Геометрически, это означает, что дуга u отсчитывается в сторону возрастания z . Выбор нижнего предела интегрирования $u = 0$ обеспечивает начальное расположение точки на нашей кривой на оси Ox .

Случай $K > 0$. Преобразуем решение к виду

$$x(u) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\sqrt{K}u) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\sqrt{K}u) \right)$$

и введем дополнительный аргумент u_0 из условий

$$\cos u_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin u_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Тогда решение можно записать в виде

$$x(u) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\sqrt{K}u - u_0) = c \cos(\sqrt{K}(u - u_1)),$$

где мы положили $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $u_1 = \frac{u_0}{\sqrt{K}}$.

Выполняя замену параметра $u = u_1 + \tilde{u}$, не заменяющего вид метрики, приводим решение к виду

$$x = c \cos \sqrt{K} \tilde{u},$$

Опуская тильду в обозначении переменной, получаем параметрические уравнения нашей кривой в виде

$$x = c \cos \sqrt{K} u, \quad (3.43)$$

$$z = \int_0^u \sqrt{1 - c^2 K \sin^2 \sqrt{K} u} du. \quad (3.44)$$

Проанализируем решение. Из условия $x(u) > 0$ следует

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{K}} < u < +\frac{\pi}{2\sqrt{K}}.$$

Если $c \leq \frac{1}{\sqrt{K}}$, то для всех значений u в этих пределах, причем подкоренное выражение в (3.44) остается положительным, что обеспечивает существование кривой при всех значениях параметра в указанном интервале. В частности, при $c = \frac{1}{\sqrt{K}}$ мы получаем

$$z = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} u, \quad x = \frac{1}{\sqrt{K}} \cos \sqrt{K} u,$$

т.е. γ становится полуокружностью радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$, упирающейся концами в ось вращения. Соответствующая поверхность является *сферой* (Рис. 3.9)

Для меньших значений c , функция $x(u)$ будет меньше, чем для окружности, а функция $z(u)$ напротив, будет больше на том же интервале изменения u . Геометрически это значит, что дуга γ , упираясь концами в ось вращения, все более приближается к ней, вытягиваясь в то же время вдоль нее (и сохраняя неизменную длину $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, равную интервалу изменения дуги u). В крайних точках, где $u = \pm \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$,

$$dx = \pm c \sqrt{K} du,$$

$$dz = \sqrt{1 - c^2 K} du,$$

так что

$$\frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\frac{1}{c^2 K} - 1}.$$

Это в точности котангенс угла, под которым кривая γ в крайних точках упирается в ось вращения.

Таким образом, случай $c = \frac{1}{\sqrt{K}}$ дает *сферу* радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$, а случай $c < \frac{1}{\sqrt{K}}$ — *веретенообразную* фигуру, более вытянутую вдоль оси Z и более узкую, чем сфера, с коническими особыми точками на оси вращения (Рис. 3.10).

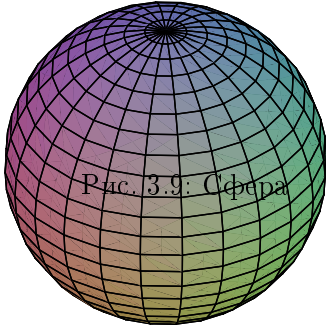


Рис. 3.9: Сфера

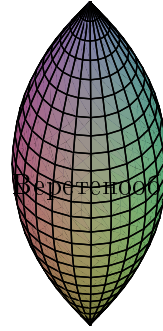


Рис. 3.10: Веретенная поверхность

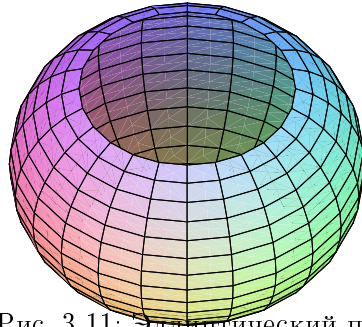


Рис. 3.11: Эллиптический пояс

Теперь рассмотрим случай $c > \frac{1}{\sqrt{K}}$. В этом случае, для существования кривой, нужно потребовать

$$c^2 K \sin^2 \sqrt{K} u \leq 1, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{c\sqrt{K}} \leq \sin \sqrt{K} u \leq +\frac{1}{c\sqrt{K}}.$$

При крайних значениях u , когда $\sin \sqrt{K} u$ максимален по модулю и равен $\pm \frac{1}{c\sqrt{K}}$, мы получаем из (3.43) два одинаковых наименьших значения для $x(u)$:

$$x_{\min} = c\sqrt{1 - \sin^2 \sqrt{K} u} = \sqrt{c^2 - \frac{1}{K}}.$$

Это значение положительно, т.е. теперь дуга γ кончается, не доходя до оси вращения на это расстояние. Наибольшее значение $x(u)$ достигается при $u = 0$:

$$x_{\max} = c.$$

В конечных точках $\frac{dz}{du} = 0$. Следовательно, касательные к дуге γ перпендикулярны к оси Oz . Вращением дуги γ получается некоторый "пояс", окружающий ось Oz (Рис. 3.11).

Теперь рассмотрим случай $K < 0$. Здесь во второй формуле (3.41) имеется три варианта.

Если $|a| > |b|$ то, применяя преобразование аналогично предыдущему пункту (но только для гиперболических функций), приведем решение к виду

$$x(u) = c \operatorname{ch} \sqrt{-K} u, \quad (3.45)$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Тогда, согласно (3.42),

$$z = \int_0^u \sqrt{1 + c^2 K \operatorname{sh}^2 \sqrt{-K} u} du. \quad (3.46)$$

Для существования профильной кривой необходимо выполнение неравенства

$$1 + c^2 K \operatorname{sh}^2 \sqrt{-K} u \geq 0,$$

или

$$-\frac{1}{c\sqrt{-K}} \leq \operatorname{sh} \sqrt{-K} u \leq +\frac{1}{c\sqrt{-K}}.$$

Очевидно, что при крайних значениях

$$\operatorname{sh} \sqrt{-K} u = \pm \frac{1}{c\sqrt{-K}}$$

будут достигаться, согласно (3.45), наибольшие значения x , наименьшее же будет равно c и достигается при $u = 0$. Дуга γ обращена выпуклостью к оси вращения; в конечных точках, как легко проверить, $\frac{dz}{du} = 0$ и, следовательно, касательные перпендикулярны к оси вращения. При увеличении c дуга γ удаляется от оси Oz , а интервал изменения u , т.е. длина дуги γ , уменьшается.

Наоборот, при уменьшении c длина дуги γ неограниченно увеличивается, причем γ асимптотически приближается к оси Oz . Полученная поверхность вращения естественно называть *гиперболическим поясом* (Рис. 3.12).

Если $|a| < |b|$, то аналогичным способом получим

$$x(u) = c \operatorname{sh}(\sqrt{-K} u) \quad (c = \sqrt{b^2 - a^2}), \quad (3.47)$$

а значит $u \geq 0$. Из (3.42) находим

$$z(u) = \int_0^u \sqrt{1 + c^2 K \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K} u)} du. \quad (3.48)$$

Для существования профильной кривой необходимо выполнение неравенства

$$1 + c^2 K \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K} u) \geq 0,$$

или

$$\operatorname{ch}(\sqrt{-K} u) \leq \frac{1}{c\sqrt{-K}},$$

причем $u \geq 0$. Так как $\operatorname{ch}(\sqrt{-K} u) \geq 1$, то на величину c возникает ограничение $c < \frac{1}{\sqrt{-K}}$.

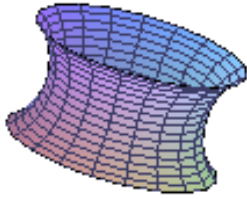


Рис. 3.12: Гиперболический пояс

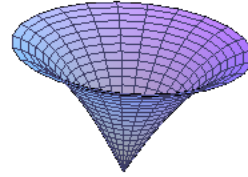


Рис. 3.13: Гиперболический конус

Когда u меняется от 0 до своего максимального значения, т.е. при котором

$$\operatorname{ch}(\sqrt{-K}u) = \frac{1}{c\sqrt{-K}},$$

то x растет от 0 до $c\sqrt{\frac{-1}{Kc^2} - 1} = \sqrt{-\frac{1}{K} - c^2}$, причем дуга γ наклонена к оси Ox в точке O под углом

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz}{dx} = \frac{dz/du}{dx/du} = \frac{1 + c^2 K}{c\sqrt{-K}}.$$

Угол наклона кривой к оси Ox уменьшается по мере приближения параметра u к своему максимальному значению, при котором $\operatorname{ch}(\sqrt{-K}u) = \frac{1}{c\sqrt{-K}}$, а значит в крайней точке $\operatorname{tg} \varphi = 0$.

Полученную поверхность вращения естественно называть *гиперболическим конусом* (Рис. 3.13).

Пусть $|a| = |b|$. Не уменьшая общности, будем считать, что $a > 0$ и $b = -a$. Тогда

$$x = ae^{-\sqrt{-K}u}.$$

Выполняя замену параметра $u \rightarrow u + u_0$, константу интегрирования можно привести к виду $a = \frac{1}{\sqrt{-K}}$ (достаточно найти u_0 так, что $ae^{-\sqrt{-K}u_0} = \frac{1}{\sqrt{-K}}$).

Тогда профильная кривая приведет к виду

$$x(u) = \frac{1}{\sqrt{-K}} e^{-\sqrt{-K}u},$$

$$z(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2\sqrt{-K}u}} du.$$

Подкоренное выражение положительно при любых $u \geq 0$, так что $u \in [0, \infty]$. При этом $x(u)$ убывает от $\frac{1}{\sqrt{-K}}$ до предельного значения 0 при $u \rightarrow \infty$. В то же время $z(u) \rightarrow +\infty$.

В начальной точке $u = 0$

$$\frac{dz}{dx} = 0,$$

а значит наша кривая касается оси Ox .

При $u \rightarrow \infty$, кривая асимптотически приближается к оси Oz , так как при этом

$$\frac{dz}{du} \rightarrow 1, \quad \frac{dx}{du} \rightarrow -0, \quad \frac{dz}{dx} \rightarrow -\infty.$$

Интеграл, через который выражается $z(u)$ берется в элементарных функциях. А именно,

$$z(u) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left\{ \ln \left(e^{\sqrt{-K}u} + \sqrt{e^{2\sqrt{-K}u} - 1} \right) - \sqrt{1 - e^{-2\sqrt{-K}u}} \right\},$$

Полученная кривая называется *трактрисой*. Она является эвольвентой цепной линии

$$x = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{ch} z \sqrt{-K}$$

Название трактриса (линия влечения) происходит от латинского trahere – *тащить*. Это кривая, для которой длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой является постоянной величиной. Такую линию описывает предмет, волочащийся на веревке постоянной длины за точкой, движущейся по этой прямой. Трактриса также является частью кривой погони при равной скорости догоняющего и убегающего.

Построенная поверхность вращения называется *псевдосферой* (Рис. 3.14). Итальянский математик Бельтрами именно на этой поверхности впервые реализовал аксиоматику плоскости Лобачевского. Сам Лобачевский называл свою геометрию "воображаемой". После результата Бельтрами эта "воображаемая" геометрия перешла в "реальную" геометрию искривленной поверхности (с отрицательной кривизной). В честь этого, псевдосферу часто называют *поверхностью Бельтрами*.

3.21.5 Окружности Гаусса. Теорема Бертрانا-Пьюизе.

Напомним, что *геодезической окружностью* (или окружностью по Гауссу) на поверхности с центром в точке q называется геометрическое место точек, равноудаленных от точки q по геодезическим лучам, выходящим из этой точки.

Теорема Бертрана-Пьюизе [7] является одной из простейших теорем сравнения в геометрии. Мы сравним длину окружности радиуса r с длиной окружности того же радиуса на плоскости. Гауссова кривизна проявляет себя как мера разности этих величин.

Теорема 3.21.1 Пусть F^2 поверхность с аналитической метрикой. Обозначим через L длину геодезической окружности с центром в точке q радиуса r . Тогда

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L}{r^3} = K_q.$$

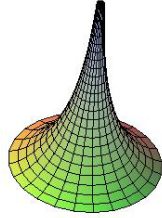


Рис. 3.14: Псевдосфера.

Доказательство. В нашем доказательстве мы следуем Бляшке [7]. Рассмотрим полугеодезическую полярную систему координат в окрестности точки q . Тогда

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r, \varphi) d\varphi^2.$$

Внутреннее уравнение окружности радиуса r_0 имеет вид $r = r_0, \varphi = t$.

Так как по предположению метрика аналитическая, то функция f допускает разложение в ряд Тейлора в окрестности точки q . Этой точке соответствует значение параметра $r = 0$, при котором нарушается регулярность нашей координатной системы. Поэтому, для нахождения главной части разложения перейдем к аналогу Декартовых координат, т.н. римановым нормальным координатам (x, y) :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Эти координаты не имеют особенности в нуле. При этом

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Отсюда

$$dr = \frac{xdx + ydy}{r}, \quad d\varphi = \frac{xdy - ydx}{r^2},$$

а значит

$$ds^2 = \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^4} f^2 \right) dx^2 + \left(\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^4} f^2 \right) dy^2 + 2xy \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4} f^2 \right) dx dy.$$

Для обеспечения аналитичности метрики в начале координат, функция f^2 должна иметь вид:

$$f^2(r, \varphi) = r^2 + r^4 Q(x, y),$$

где $Q(x, y)$ некоторая аналитическая функция от (x, y) . По формуле Тейлора

$$Q(x, y) = Q_0 + o(r).$$

Окончательно,

$$f^2(r, \varphi) = r^2 + r^4 Q_0 + o(r^5).$$

Покажем, что

$$Q_0 = -\frac{K_q}{3}.$$

Действительно,

$$K_q = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial_{rr} f}{f}$$

С другой стороны,

$$f = \sqrt{r^2 + r^4 Q_0 + o(r^5)} = r \sqrt{1 + r^2 Q_0 + o(r^3)} \sim r(1 + \frac{1}{2} r^2 Q_0).$$

Отсюда

$$K_q = \lim_{r \rightarrow 0} K(r, \varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3r Q_0}{r(1 + \frac{1}{2} r^2 Q_0)} = 3Q_0.$$

Итак,

$$f = r - \frac{K_q}{6} r^3 + o(r^3).$$

Теперь очевидно,

$$L = \int_0^{2\pi} \left(r - \frac{K_q}{6} r^3 + o(r^3) \right) d\varphi = 2\pi r - \frac{\pi}{3} K_q r^3 + o(r^3),$$

а значит

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L}{r^3} = K_q,$$

что и требовалось. ■

Упражнение 3.21.8 Обозначим через F площадь геодезического круга радиуса r с центром в точке q радиуса r . Покажите, что

$$K_q = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - F}{r^4}.$$

3.21.6 Окружности Дарбу

Окружностью в смысле Дарбу на поверхности называется кривая постоянной геодезической кривизны. Очевидно, что на плоскости окружности по Гауссу и Дарбу не различаются. Однако на искривленной поверхности окружности по Дарбу могут быть даже не замкнуты (например, на плоскости Лобачевского), в отличие от окружностей по Гауссу.

Утверждение 3.21.6 Относительно полугеодезической полярной системы координат (r, φ) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r, \varphi) d\varphi^2$$

геодезическая кривизна координатной окружности равна

$$k_g = -\frac{\partial_r f}{f}.$$

Доказательство. Символы Кристоффеля в такой системе координат равны:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -f\partial_r f, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial_r f}{f}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial_\varphi f}{f}.\end{aligned}$$

Геометрическая окружность задается уравнением:

$$\gamma : \begin{cases} r = r_0; \\ \varphi = t. \end{cases}$$

Соответственно,

$$\gamma'_t = \{0, 1\}, \quad \gamma''_t = \{0, 0\}, \quad |\gamma'_t|_g = f(r_0, \varphi), \quad \sqrt{\det g} = f(r_0, \varphi).$$

Отсюда, применяя формулу (3.34), находим

$$k_g = \frac{1}{f^2} \left(-\Gamma_{22}^1 \right) = \frac{\partial_r f}{f}.$$

Заметим, что полученное выражение отличается от доказываемого знаком. Это объясняется тем, что геометрическая кривизна меняет знак при изменении внутренней ориентации (направления обхода) кривой или при изменении ориентации координатного репера на поверхности. В данном случае координатный репер устроен так, что ∂_r , направленный в сторону увеличения параметра r , направлен "наружу" по отношению к геометрической окружности, в то время как вектор кривизны кривой ν_g направлен "внутри". С учетом этого замечания,

$$k_g = -\frac{\partial_r f}{f}.$$

■

Теорема 3.21.2 [7] *Если на поверхности каждая окружность по Гауссу является окружностью по Дарбу, то Гауссова кривизна поверхности постоянна.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что, при условиях теоремы, в каждой точке поверхности производные от Гауссовой кривизны равны 0.

Пусть q – произвольная точка на поверхности. Рассмотрим в окрестности этой точки полугеометрическую полярную систему координат. Тогда

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r, \varphi) d\varphi^2$$

и уравнение произвольной окружности с центром в этой точке будет иметь вид

$$\begin{aligned}r &= r_0 \quad (= \text{const}) \\ \varphi &= t.\end{aligned}$$

Геометрическая кривизна этой окружности равна

$$k_g = -\frac{\partial_r f}{f}.$$

В силу постоянства этой величины для любого фиксированного значения $r = r_0$, имеем

$$\partial_\varphi k_g(r_0, \varphi) = -\frac{\partial_{r\varphi} f}{f} + \frac{\partial_r f \partial_\varphi f}{f^2} = 0,$$

то есть, тождественно по r и φ

$$f \partial_{r\varphi} f - \partial_r f \partial_\varphi f = 0.$$

Дифференцируя теперь по r , находим:

$$\partial_r f \partial_{r\varphi} f + f \partial_{rr\varphi} f - \partial_{rr} f \partial_\varphi f - \partial_r f \partial_{r\varphi} f = f \partial_{rr\varphi} f - \partial_{rr} f \partial_\varphi f = 0$$

Для гауссовой кривизны K на окружности имеем:

$$K(r_0, \varphi) = -\frac{\partial_{rr} f}{f}.$$

Поэтому

$$\partial_\varphi K(r_0, \varphi) = -\frac{\partial_{rr\varphi} f - \partial_{rr} f \partial_\varphi f}{f^2} = 0$$

для любого фиксированного значения r_0 .

Рассмотрим гауссову окружность S_q радиуса r_0 с центром в точке $q \in F^2$. Для каждого направления X_q на поверхности в точке q , найдется окружность с центром на окружности S_q , касающаяся направления X_q . Ее центр находится на пересечении радиуса окружности S_q , ортогонального X_q , с окружностью S_q . Все такие окружности имеют радиус, равный r_0 . На каждой такой окружности гауссова кривизна постоянна и одинакова для всех окружностей, так как $K(r_0, \varphi)$ зависит только от r_0 . Следовательно, производная $K(q)$ по любому направлению X_q равна 0, а значит гауссова кривизна поверхности не изменяется при смещении из точки q по любому направлению. В силу произвола выбора точки, $K = \text{const}$ для всех точек поверхности. ■

Замечание. Теорема действует "в одну сторону". Окружность по Дарбу может быть не замкнутой даже на поверхности постоянной кривизны. Например, орицикл на полуплоскости Пуанкаре.

Теорема 3.21.3 [7] *Если каждая окружность по Дарбу замкнута, то поверхность имеет постоянную Гауссову кривизну.*

3.21.7 Геодезические как локально кратчайшие

Воспользуемся полугеодезической полярной системой координат для доказательства свойства локальной кратчайшести геодезических.

Утверждение 3.21.7 *Пусть γ — геодезическая на F^2 , точки $A, B \in \gamma$. Если A и B достаточно близки, то γ — кратчайшая, соединяющая точки A и B .*

Доказательство. Пусть γ — геодезическая, точки $A, B \in \gamma$. Построим полугеодезическую систему координат с полюсом в точке A и будем считать, что точка B лежит в области определения этой системы координат, а сама геодезическая γ отвечает нулевому лучу выбранной системы. Относительно такой системы координат первая фундаментальная форма имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r, \varphi) d\varphi^2,$$

где r — длина геодезического луча. Тогда точка $A = (0, 0)$, $B = (r_0, 0)$. А сама геодезическая в этих условиях задается так

$$\gamma : \begin{cases} r = s; \\ \varphi = 0. \end{cases}$$

Пусть $\tilde{\gamma}$ — другая кривая, соединяющая точки A и B . Предположим, вначале, что $\tilde{\gamma}$ лежит в круге радиуса r_0 (в котором определена наша система координат) задана параметрически в виде

$$\tilde{\gamma} : \begin{cases} r = r(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{\gamma}(t_A) = A, \\ \tilde{\gamma}(t_B) = B. \end{cases}$$

Тогда

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + f^2(r(t), \varphi(t)) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt.$$

Очевидно, что если $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$, то

$$l(\tilde{\gamma}) \geq \int_{t_A}^{t_B} \frac{dr}{dt} dt = \int_0^{r_0} dr = r_0 = l(\gamma_{AB}).$$

При этом равенство достигается, если $\varphi \equiv 0$, то есть, когда кривая совпадает с геодезической γ .

Предположим, что кривая выходит за пределы геодезического круга радиуса r_0 . Тогда пусть B' — точка пересечения $\tilde{\gamma}$ с этим кругом. Тогда

$$l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma)|_{AB'} + l(\tilde{\gamma})|_{B'B'} \geq r_0 + l(\tilde{\gamma})|_{B'B'} > r_0,$$

что и завершает доказательство. ■

3.21.8 Геодезические как экстремали функционала длины

Пусть F^2 — поверхность, точки $A, B \in F^2$. Обозначим через Ω_{AB} множество регулярных кривых вида

$$\Omega_{AB} = \{\tilde{\gamma} : [t_A, t_B] \rightarrow F^2 \mid \tilde{\gamma}(t_A) = A, \tilde{\gamma}(t_B) = B\}.$$

Тогда

$$l(\vec{\gamma}) = \int_{t_A}^{t_B} |\vec{\gamma}'(t)| dt \in \mathbb{R},$$

То есть $l: \Omega_{AB} \rightarrow \mathbb{R}$ можно рассматривать как функционал на множестве Ω_{AB} . Критические точки этого функционала называются *экстремальными функциями* длины.

Постановка вариационной задачи. Пусть

$$\gamma : \begin{cases} u^1 = u^1(s) \\ u^2 = u^2(s) \end{cases}$$

внутреннее уравнение кривой на поверхности с началом в точке A и концом в точке B , то есть $\vec{\gamma}(0) = \vec{r} \circ \gamma(0) = A$, $\vec{\gamma}(0) = \vec{r} \circ \gamma(s_0) = B$.

Определение 3.21.3 *Вариацией кривой $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ с закрепленными концами называется кривая вида*

$$\vec{\gamma}(s, \varepsilon) = \vec{r} \circ (\gamma(s) + \varepsilon \eta(s)),$$

где $\eta(s)$ — гладкая варьирующая вектор-функция (в области параметров), удовлетворяющая условию $\eta(0) = \eta(s_0) = 0$ и ε — малый параметр.

Введем в рассмотрение функцию параметра ε вида $l(\varepsilon) = \int_0^{s_0} |\gamma'(s, \varepsilon)|_g ds$, которая называется вариацией функционала длины. Будем говорить, что $\gamma(s)$ является *экстремалью* функционала длины, если $\frac{d}{d\varepsilon} l(\gamma(s, \varepsilon))|_{\varepsilon=0} = 0$ для любой варьирующей вектор-вариации.

Утверждение 3.21.8 *Кривая на поверхности является экстремалью функционала длины для вариации с закрепленными концами тогда и только тогда, когда кривая является геодезической линией.*

Доказательство. Пусть $\vec{r}: D^2 \rightarrow E^3$ — параметризация F^2 . Рассмотрим "внешние" параметризации кривых $\gamma(s)$ и $\gamma(s, \varepsilon)$, а именно

$$\vec{\gamma}(s) = (\vec{r} \circ \gamma)(s), \quad \vec{\gamma}(s, \varepsilon) = (\vec{r} \circ \gamma)(s, \varepsilon).$$

Выполним некоторые необходимые вычисления. Но прежде введем в рассмотрение векторное поле вариации кривой

$$\vec{\eta} = \eta^i(s) \partial_i \vec{r}|_{\gamma(s, \varepsilon)},$$

то есть, $\vec{\eta}$ есть векторное поле вдоль кривой, координатные функции которого являются компонентами функции вариации. Тогда

$$\vec{\gamma}'(s, \varepsilon) := \frac{d\vec{\gamma}(s, \varepsilon)}{ds} = \partial \vec{r}|_{\gamma(s, \varepsilon)} \left(\frac{d\gamma}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta}{ds} \right).$$

Используя разложение Гаусса и подставляя в конечном итоге $\varepsilon = 0$, находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}(\vec{\gamma}'(s, \varepsilon)) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\left(\frac{d\gamma}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta}{ds} \right)^i \partial_i \vec{r}|_{\gamma(s, \varepsilon)} \right] = \\ &= \left(\frac{d\eta}{ds} \right)^i \partial_i \vec{r}|_{\gamma(s, \varepsilon)} + \left(\frac{d\gamma}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta}{ds} \right)^i \partial_{ik} \vec{r}|_{\gamma(s, \varepsilon)} \eta^k = \\ &= \left(\frac{d\eta}{ds} \right)^i \partial_i \vec{r}|_{\gamma(s, \varepsilon)} + \left(\frac{d\gamma}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta}{ds} \right)^i \left(\Gamma_{ik}^m(s) \partial_m \vec{r} + b_{ik} \vec{n} \right)|_{\gamma(s, \varepsilon)} \eta^k = \\ &= (\nabla_{\gamma'} \eta)^m \partial_m \vec{r}|_{\gamma(s)} + B(\gamma', \eta) \vec{n}|_{\gamma(s)} = \overrightarrow{\nabla_{\gamma'} \eta}|_{\gamma(s)} + B(\gamma', \eta) \vec{n}|_{\gamma(s)}, \end{aligned}$$

где мы ввели обозначение $\Gamma_{ik}^m(s) := \Gamma_{ik}^m \circ \gamma$ и

$$\overrightarrow{\nabla_{\gamma'} \eta} = \left(\frac{d\eta^m}{ds} + \Gamma_{ik}^m(s) \eta^k \frac{d\gamma^i}{ds} \right) \partial_m \vec{r} \quad (3.49)$$

Несложно проверить, что для любых векторных полей $\vec{X}(s) = \partial \vec{r}|_{\gamma(s)} \cdot X(s)$ и $\vec{Y}(s) = \partial \vec{r}|_{\gamma(s)} \cdot Y(s)$, касательных к поверхности вдоль кривой $\vec{\gamma}$ верно равенство

$$\frac{d}{ds} \langle X, Y \rangle_g = \langle \nabla_{\gamma'} X, Y \rangle_g + \langle X, \nabla_{\gamma'} Y \rangle_g. \quad (3.50)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \vec{X}(s) &= \frac{d}{ds} \left(\partial_i \vec{r}|_{\gamma(s)} X^i(s) \right) = \partial_{ik} \vec{r} \frac{du^k}{ds} X^i(s) + \partial_i \vec{r}|_{\gamma(s)} \frac{dX^i}{ds} = \\ &= \left(\Gamma_{ik}^m(s) \partial_m \vec{r}|_{\gamma(s)} + b_{ik}(s) \vec{n}(s) \right) \frac{du^k}{ds} X^i(s) + \frac{dX^m}{ds} \partial_m \vec{r}|_{\gamma(s)} = \\ &= \left(\frac{dX^m}{ds} + \Gamma_{ik}^m(s) \frac{du^k}{ds} X^i(s) \right) \partial_m \vec{r}|_{\gamma(s)} + B(\gamma', X)|_{\gamma(s)} \vec{n}(s) = \overrightarrow{\nabla_{\gamma'} X} + B(\gamma', X)|_{\gamma(s)} \vec{n}(s). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ являются касательными векторными полями вдоль нашей кривой, находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle X, Y \rangle_g &= \frac{d}{ds} \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle + \left\langle \vec{X}, \frac{d}{ds} \vec{Y} \right\rangle = \\ &= \left\langle \overrightarrow{\nabla_{\gamma'} X}, \vec{Y} \right\rangle + \left\langle \vec{X}, \overrightarrow{\nabla_{\gamma'} Y} \right\rangle = \langle \nabla_{\gamma'} X, Y \rangle_g + \langle X, \nabla_{\gamma'} Y \rangle_g. \end{aligned}$$

Теперь запишем функционал длины на вариации

$$l(\gamma(s, \varepsilon)) = \int_0^{s_0} |\gamma'(s, \varepsilon)|_g ds = \int_0^{s_0} |\vec{\gamma}'(s, \varepsilon)| ds$$

и найдем, используя соотношение (3.50),

$$\begin{aligned} \left. \frac{dl(\vec{\gamma}(s, \varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_0^{s_0} \left\langle \frac{d}{d\varepsilon} \vec{\gamma}'(s, \varepsilon), \vec{\gamma}'(s, \varepsilon) \right\rangle \bigg|_{\varepsilon=0} ds = \int_0^{s_0} \frac{\langle \overrightarrow{\nabla_{\gamma'} \eta}, \vec{\gamma}' \rangle}{1} ds = \\ &= \int_0^{s_0} \langle \nabla_{\gamma'} \eta, \gamma' \rangle_g ds = \langle \eta, \gamma' \rangle_g \bigg|_0^{s_0} - \int_0^{s_0} \langle \eta, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle_g ds = \\ &= - \int_0^{s_0} \langle \eta, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle_g ds = 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Если $\nabla_{\gamma'} \gamma' \neq 0$ на некотором интервале (α, β) изменения параметра, то выберем вариацию так, что η сонаправлена с $\nabla_{\gamma'} \gamma'$ на этом интервале и мала (близка к нулю) вне этого промежутка. Для такой вариации

$$\int_0^{s_0} \langle \eta, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle_g ds > 0.$$

Следовательно γ — экстремаль тогда и только тогда, когда $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$. Подставляя в (3.49) вместо η^m координаты касательного вектора du^m/ds находим, что γ — геодезическая линия на F^2 .

■

Вторая вариация функционала длины кривой.

Геодезические, как экстремали функционала длины, могут быть как кратчайшими линиями, соединяющими две данные точки, так и длиннейшими (рассмотрите пример геодезических на сфере). Достаточное условие их кратчайшести можно получить, исследуя вторую вариацию функционала длины, являющуюся аналогом второй производной функции одного переменного. Вывод формулы второй вариации можно существенно упростить, учитывая тот факт, что варьируемая кривая является геодезической линией и что существенной является только нормальная составляющая векторного поля вариации. Последнее следует из формулы (3.51).

Пусть $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ — исследуемая геодезическая, соединяющая точки A и B на поверхности. И пусть $A = \vec{\gamma}(0)$ и $B = \vec{\gamma}(l)$. Введем на поверхности полу геодезическую систему координат с базовой кривой $\vec{\gamma}(v)$. Тогда первая фундаментальная форма поверхности примет вид

$$ds^2 = du^2 + f^2(u, v)dv^2,$$

а функция $f(u, v)$ будет удовлетворять условиям

$$f(0, v) = 1, \quad f_u(0, v) = 0.$$

Относительно такой параметризации уравнение геодезической $\vec{\gamma}(v)$ имеет вид ($u = 0, v = v$), нормальное векторное поле вариации соответствует варьирующей вектор-функции $\{h(v), v\}$ и вариация геодезической $\vec{\gamma}(v)$ примет вид

$$\begin{cases} u = \varepsilon h(v), & h(0) = h(l) = 0 \\ v = v. \end{cases}$$

Следовательно,

$$l(\varepsilon) = \int_0^l \sqrt{\varepsilon^2 (h'(v))^2 + (f(\varepsilon h(v), v))^2} dv.$$

Тогда

$$\frac{dl}{d\varepsilon} = \int_0^l \frac{\varepsilon (h'(v))^2 + f(\varepsilon h(v), v) f_u(\varepsilon h(v), v) h(v)}{\sqrt{\varepsilon^2 (h'(v))^2 + (f(\varepsilon h(v), v))^2}} dv.$$

Заметим, что свойства системы координат обеспечивают равенство $\frac{dl}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0$. По той же причине

$$\frac{d^2 l}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^l \left((h'(v))^2 + f_{uu}(0, v) h^2(v) \right) dv = \int_0^l \left((h'(v))^2 - K(0, v) h^2(v) \right) dv,$$

где $K(0, v)$ – гауссова кривизна поверхности вдоль геодезической. Следовательно, на поверхностях с гауссовой кривизной $K \leq 0$ любая геодезическая является кратчайшей по сравнению с кривыми, соединяющими точки A и B , которые получаются локальными (малыми) вариациями геодезической. Требование малой вариации существенно. На поверхности кругового цилиндра две точки на образующей можно счетным числом различных винтовых линий. Каждая из винтовых линий является кратчайшей в классе малых вариаций. Очевидно, однако, что отрезок образующей короче любой из них.

Формуле второй вариации можно придать другой вид. Для этого заметим, что с учетом граничных условий формула интегрирования по частям приводит к равенству

$$\int_0^l (h'(v))^2 dv = - \int_0^l h''(v) h(v) dv,$$

а следовательно

$$\frac{d^2 l}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} = - \int_0^l h(v) \left(h''(v) + K(0, v) h(v) \right) dv.$$

Уравнение

$$h''_s + K|_{\gamma(s)} h(s) = 0$$

называется уравнение Якоби для натурально параметризованной геодезической $\gamma(s)$. Точки A и B на геодезической называются сопряженными, если существует ненулевое поле Якоби вдоль этой геодезической, обращающееся в нуль в точках A и B . Сопряженные точки на геодезической могут появляться только если $K|_{\gamma(s)} > 0$. Так, на единичной сфере с первой квадратичной формой $ds^2 = du^2 + \sin^2(u) dv^2$ уравнение Якоби имеет очевидное решение $h = C \sin u$, удовлетворяющее краевым условиям $h(0) = h(\pi) = 0$. Векторное поле Якоби в этом случае имеет вид $\vec{h} = C \sin u \partial_v \vec{r}$, то есть имеет внутренние координаты $\{0, C \sin(u)\}$.

3.22 Первая вариация функционала площади. Минимальные поверхности

Пусть F^2 — поверхность, параметризованная вектор-функцией $\vec{r}: \mathcal{D}^2 \rightarrow E^3$ в области $\mathcal{D}^2$. *Вариацией* поверхности F^2 называется поверхность, параметризованная над этой же областью параметров вектор-функцией $\vec{\rho}: \mathcal{D}^2 \rightarrow E^3$ вида

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \varepsilon w \vec{n},$$

где $w: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественная функция такая, что $w|_{\partial \mathcal{D}^2} = 0$, ε — малый параметр, $\vec{n}$ — единичное нормальное векторное поле.

Определение 3.22.1 Поверхность F^2 называется локально-минимальной, если для любой вариации эта поверхность является критической точкой функционала площади, то есть

$$\left. \frac{dS(u, \varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\mathcal{D}} \sqrt{\det \tilde{g}} du^1 du^2 \right|_{\varepsilon=0} = 0,$$

где $\tilde{g}$ — первая фундаментальная форма вариации.

Утверждение 3.22.1 Поверхность F^2 является локально-минимальной тогда и только тогда, когда $H(\mathcal{D}^2) \equiv 0$.

Доказательство. Найдем первую фундаментальную форму вариации $\tilde{g}$. Имеем,

$$d\vec{\rho} = d\vec{r} + \varepsilon w d\vec{n} + \varepsilon dw \vec{n},$$

а значит

$$d\tilde{s}^2 = |d\vec{\rho}|^2 = |d\vec{r}|^2 + 2\varepsilon w \langle d\vec{r}, d\vec{n} \rangle + \varepsilon^2(*),$$

где символом $(*)$ отмечены несущественные выражения.

Отсюда следует, что матрицы первых фундаментальных форм варьированной и исходной поверхностей связаны соотношением

$$\tilde{g} = g - 2w\varepsilon B + \varepsilon^2(*) = g(E - 2w\varepsilon A) + \varepsilon^2(*)$$

Таким образом,

$$\det \tilde{g} = \det g(1 - 2\varepsilon w \operatorname{trace}(A)) + \varepsilon^2(*) = \det g(1 - 4\varepsilon w H) + \varepsilon^2(*)$$

Воспользуемся эквивалентностью $\sqrt{1 \pm x} \sim 1 \pm \frac{1}{2}x$. Тогда, с точностью до малых более высокого порядка, имеем

$$\sqrt{\det \tilde{g}} \sim \sqrt{\det g}(1 - 2\varepsilon w H).$$

Следовательно

$$S(\varepsilon) \sim \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\det g}(1 - 2\varepsilon w H) du^1 du^2 = \iint_{\mathcal{D}} (1 - 2\varepsilon w H) dS.$$

Тогда

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -2 \iint_{\mathcal{D}} w H dS.$$

Так как w произвольная функция, то следовательно $H \equiv 0$. ■

3.22.1 Специальные минимальные поверхности в E^3 .

Рассмотрим класс поверхностей вращения.

Лемма 3.22.1 *Для средней кривизны поверхности, образованной вращением C^2 -регулярной плоской профильной кривой, имеет место формула*

$$H = \frac{1}{2} \left(k - \frac{\cos \theta}{r} \right),$$

где k – ориентированная кривизна профильной кривой, θ – ориентированный угол между осью вращения и касательной к профильной кривой, r – расстояние до оси вращения.

Доказательство. Направим ось Oz декартовой прямоугольной системы координат вдоль оси вращения, а оси Ox и Oy расположим в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Пусть u – натуральный параметр на профильной кривой. Тогда уравнение поверхности вращения имеет вид:

$$\vec{r} = \{x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u)\}.$$

Заметим, что функция $x(u)$ в точности выражает расстояние от точки на профильной кривой до оси вращения, то есть $r = x(u)$.

Учитывая, что $(x')^2 + (z')^2 = 1$, находим

$$\begin{aligned} \partial_1 \vec{r} &= \{x' \cos v, x' \sin v, z'\}, & \partial_2 \vec{r} &= \{-x \sin v, x \cos v, z'\}, & \vec{n} &= \{-z' \cos v, -z' \sin v, x'\} \\ \partial_{11} \vec{r} &= \{x'' \cos v, x'' \sin v, z''\}, & \partial_{12} \vec{r} &= \{-x' \sin v, x' \cos v, 0\}, & \partial_{22} \vec{r} &= \{-x \cos v, -x \sin v, 0\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} z''x' - x''z' & 0 \\ 0 & xz' \end{pmatrix}, \quad A = g^{-1}B = \begin{pmatrix} z''x' - x''z' & 0 \\ 0 & \frac{z'}{x} \end{pmatrix}.$$

Поскольку для натурально параметризованной кривой ее кривизна $k(u) = z''x' - x''z'$, то матрица Вейнгартена принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{z'}{x} \end{pmatrix},$$

а следовательно, для средней кривизны поверхности вращения имеем формулу

$$H = \frac{1}{2} \left(k + \frac{z'}{x} \right).$$

Остается заметить, что вектор $\{x', z'\}$ является единичным вектором касательной профильной кривой. Если обозначить через α ориентированный угол от оси Ox , а через θ ориентированный угол от оси Oz (оси вращения) до касательной, то $\alpha - \theta = \pi/2$, а значит $z' = -\cos \theta$, то есть $H = \frac{1}{2}(k - \cos \theta/r)$, что и требовалось доказать. ■

Замечание. На поверхности вращения меридианы и параллели составляют семейство линий кривизны. Поэтому главные кривизны поверхности равны с точностью до знака кривизне меридиана и кривизне параллели, то есть k и $-\cos \theta/r$.

Гомотетией называется преобразование $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ вида $h(x, y, z) = (\tilde{x} = ax, \tilde{y} = ay, \tilde{z} = az)$, где a – постоянная, называемая *коэффициентом гомотетии*. Две поверхности F и $\tilde{F}$ называются *гомотетичными*, если существует гомотетия h такая, что $h(F) = \tilde{F}$. Гомотетия является конформным преобразованием, так как с очевидностью

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 = a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2ds^2.$$

Утверждение 3.22.2 Пусть F и $\tilde{F} = h(F)$ две гомотетичные поверхности с коэффициентом гомотетии a . Пусть H и $\tilde{H}$ – средние кривизны F и $\tilde{F}$ соответственно. Тогда

$$\tilde{H} = \frac{1}{a}H.$$

Доказательство. Действительно, для произвольной регулярной параметризации $\vec{r}$ поверхности F , вектор-функция $\vec{\rho} = a\vec{r}$ параметризует поверхность $\tilde{F}$, а значит с очевидностью $\tilde{g} = a^2g$, $\tilde{B} = aB$, $\tilde{A} = \frac{1}{a}A$. Отсюда заключаем требуемое. ■

Утверждение 3.22.3 Катеноид

$$\operatorname{ch}(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

является единственной с точностью до гомотетии минимальной поверхностью в классе поверхностей вращения.

Доказательство. Для доказательства достаточно установить, что график гиперболического косинуса $x = \operatorname{ch} z$ является единственной с точностью до гомотетии профильной кривой, обеспечивающей минимальность соответствующей поверхности вращения.

Условие минимальности поверхности вращения приводит к уравнению на профильную кривую, а именно,

$$k + \frac{z'_s}{x} = 0.$$

Перепишем это уравнение для функции $x = x(z)$. Тогда

$$k = \frac{-x''_z}{(1 + (x'_z)^2)^{3/2}}.$$

Принимая во внимание, что s – натуральный параметр, имеем

$$ds^2 = (1 + (x'_z)^2)dz^2,$$

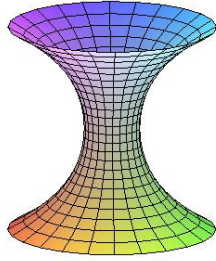


Рис. 3.15: Катеноид.

а значит

$$z'_s = \frac{1}{\sqrt{1 + (x'_z)^2}}.$$

Подстановка в уравнение дает

$$\frac{-x''_z}{(1 + (x'_z)^2)^{3/2}} + \frac{1}{x\sqrt{1 + (x'_z)^2}} = 0,$$

то есть,

$$\frac{x''_z}{1 + (x'_z)^2} = \frac{1}{x}.$$

Заметим, что решение уравнения инвариантно относительно замены $z \rightarrow -z$. Домножая на x'_z , легко находим

$$\frac{1}{2} \ln(1 + (x'_z)^2) = \ln(cx),$$

где $c > 0$ — константа интегрирования. Отсюда

$$x_z = \pm \sqrt{c^2 x^2 - 1}.$$

В силу замечания, возьмем $x_z = \sqrt{c^2 x^2 - 1}$. Полученное уравнение сводится к табличному интегралу

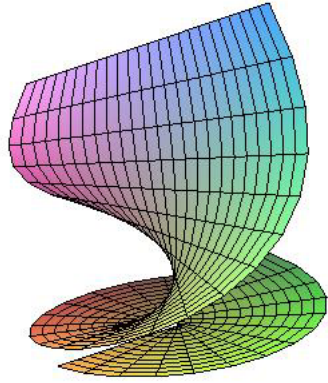
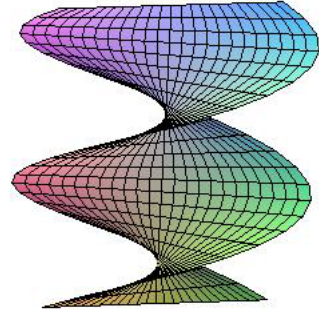
$$z = \frac{1}{c} \ln |cx + \sqrt{c^2 x^2 - 1}| + z_0 \quad (x \geq \frac{1}{c} > 0)$$

где z_0 постоянная, отвечающая начальному значению параметра. Положим $z_0 = 0$ и выразим x через z . Имеем

$$\begin{aligned} e^{cz} &= cx + \sqrt{c^2 x^2 - 1}, \\ e^{-cz} &= \frac{1}{cx + \sqrt{c^2 x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Складывая, получим

$$e^{cz} + e^{-cz} = \frac{c^2 x^2 + 2cx\sqrt{c^2 x^2 - 1} + c^2 x^2 - 1 + 1}{cx + \sqrt{c^2 x^2 - 1}} = 2cx,$$

Рис. 3.16: Геликоидальная поверхность с $z = v^4$.Рис. 3.17: Стандартный геликоид $z = v$.

то есть

$$cx = \operatorname{ch}(cz).$$

Таким образом профильная кривая гомотетична графику гиперболического косинуса $x = \operatorname{ch} z$.

■

Прямой геликоидальной поверхностью называется поверхность, задаваемая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат уравнением

$$\vec{r} = \{u \cos v, u \sin v, z(v)\}.$$

Утверждение 3.22.4 *Стандартный геликоид*

$$\vec{r} = \{u \cos v, u \sin v, v\}$$

является единственной, с точностью до сомножителя гомотетии, минимальной поверхностью в классе прямых геликоидальных поверхностей.

Доказательство.

Для данной геликоидальной поверхности $\vec{r} = \{u \cos v, u \sin v, z(v)\}$ вычислим

$$\begin{aligned} \partial_1 \vec{r} &= \{\cos v, \sin v, 0\}, & \partial_2 \vec{r} &= \{-u \sin v, u \cos v, z'\}, \\ \partial_{11} \vec{r} &= \{0, 0, 0\}, & \partial_{12} \vec{r} &= \{-\sin v, \cos v, z'\}, \\ \partial_{22} \vec{r} &= \{-u \cos v, -u \sin v, z''\}, & \vec{n} &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + (z')^2}} \{z' \sin v, -z' \cos v, u\}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + (z')^2 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{\sqrt{u^2 + (z')^2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uz'' \end{pmatrix}, A = g^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{uz''}{(u^2 + (z')^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

Значит, $H \equiv 0$ только в случае $z'' = 0$, то есть для $z = cv + z_0$. Пренебрегая аддитивной константой, получаем $z = cv$ или $z = c \operatorname{arctg}(y/x)$. С точностью до гомотетии,

$$z = \operatorname{arctg}(y/x),$$

что и требовалось доказать. ■

Утверждение 3.22.5 *Прямой геликоид является единственной минимальной поверхностью в классе C^2 -регулярных линейчатых поверхностей.*

Доказательство. Параметрическое уравнение линейчатой поверхности может быть записано в виде

$$\vec{r} = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u),$$

где $\vec{\rho}(u)$ – регулярная параметризованная кривая и $\vec{a}(u)$ – единичное векторное поле на этой кривой. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_u \vec{r} &= \vec{\rho}' + v\vec{a}' & \partial_v \vec{r} &= \vec{a} \\ \partial_{uu} \vec{r} &= \vec{\rho}'' + v\vec{a}'' & \partial_{uv} \vec{r} &= \vec{a}' & \partial_{vv} \vec{r} &= 0 \\ \vec{N} &= [\vec{\rho}', \vec{a}] + v[\vec{a}', \vec{a}]. \end{aligned}$$

Матрица первой квадратичной формы принимает вид

$$g = \begin{pmatrix} |\vec{\rho}' + v\vec{a}'|^2 & \langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle \\ \langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \frac{1}{\det g} \begin{pmatrix} 1 & -\langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle \\ -\langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle & |\vec{\rho}' + v\vec{a}'|^2 \end{pmatrix},$$

а матрица второй

$$B = \frac{1}{|\vec{N}|} \begin{pmatrix} \langle \vec{\rho}'' + v\vec{a}'', \vec{N} \rangle & (\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a}) \\ (\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы Вейнгартена имеем

$$A = \frac{1}{|N| \det g} \begin{pmatrix} \langle \vec{\rho}'' + v\vec{a}'', \vec{N} \rangle - \langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle (\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a}) & * \\ * & -\langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle (\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a}) \end{pmatrix},$$

где символом (*) помечены несущественные элементы матрицы. Следовательно, поверхность минимальна, если

$$\langle \vec{\rho}'' + v\vec{a}'', \vec{N} \rangle - 2\langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle (\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a}) = 0.$$

Подставляя выражение для вектора $\vec{N}$, получаем

$$v^2(\vec{a}'', \vec{a}', \vec{a}) + v((\vec{a}'', \vec{\rho}', \vec{a}) + (\vec{\rho}'', \vec{a}', \vec{a})) + (\vec{\rho}'', \vec{\rho}', \vec{a}) - 2\langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle (\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a}) = 0. \quad (3.52)$$

Следовательно,

$$(\vec{a}'', \vec{a}', \vec{a}) = 0,$$

что является необходимым и достаточным условием параллельности вектор-функции $\vec{a}$ некоторой плоскости.

Примем эту плоскость в качестве координатной плоскости (x, y) , а ось Oz направим перпендикулярно этой плоскости. В качестве новой направляющей нашей линейчатой поверхности примем сечение поверхности плоскостью (x, z) ¹⁰. В таком случае, параметризация линейчатой поверхности примет вид

$$\vec{r} = \{x(\alpha), 0, z(\alpha)\} + v\{\cos \alpha, \sin \alpha, 0\},$$

где α – угол между образующей и осью Ox . Тогда $\vec{a}'' = -\vec{a}$ и коэффициент при v в уравнении (3.52) будет равен $(\vec{\rho}'', \vec{a}', \vec{a}) = -z''$. Следовательно, $z = h\alpha + b$. Если $h = 0$, то направляющая вырождается в прямую, а поверхность – в плоскость. Пусть $h \neq 0$, тогда не нарушая общности можно считать, что

$$z = h\alpha.$$

Так как при этих условиях

$$(\vec{\rho}'', \vec{\rho}', \vec{a}) = -x''h \sin \alpha, \quad \langle \vec{\rho}', \vec{a} \rangle (\vec{a}', \vec{\rho}', \vec{a}) = x'h \cos \alpha,$$

то условие минимальности (3.52) упростится до

$$x'' \sin \alpha + 2x' \cos \alpha = 0.$$

Последнее уравнение легко интегрируется

$$x(\alpha) = C_1 + C_2 \operatorname{ctg} \alpha$$

Теперь покажем, что существует такая прямая $x = x_0, y = y_0, z = t$, которая пересекает все прямые найденной линейчатой поверхности. Для этого рассмотрим смешанное произведение

$$0 = (\vec{\rho} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{e}_z) = \begin{vmatrix} C_1 + C_2 \operatorname{ctg} \alpha - x_0 & -y_0 & h\alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\sin \alpha (C_1 + C_2 \operatorname{ctg} \alpha - x_0) + \cos \alpha y_0 = \sin \alpha (C_1 - x_0) + \cos \alpha (C_2 + y_0).$$

Отсюда находим $x_0 = C_1, y_0 = -C_2$. Примем эту прямую за новую направляющую и заодно а ось Oz новой системы координат. Тогда уравнение нашей поверхности примет вид

$$\vec{r} = \{0, 0, h\alpha\} + v\{\cos \alpha, \sin \alpha, 0\} = \{v \cos \alpha, v \sin \alpha, h\alpha\},$$

что есть уравнением прямого геликоида. ■

Поверхностью переноса называется поверхность, уравнение которой в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\vec{r} = \{x(u), y(v), z_1(u) + z_2(v)\}.$$

Поверхность переноса образована переносом кривой $\vec{\gamma}_1 = \{x(u), 0, z_1(u)\}$ вдоль кривой $\vec{\gamma}_2 = \{0, y(v), z_2(v)\}$, расположенными во взаимно перпендикулярных плоскостях.

¹⁰Образующие пересекают плоскость (x, z) , так как в противном случае все образующие параллельны оси Ox , а значит наша поверхность является цилиндром с гауссовой кривизной $K = 0$. Из условия минимальности следует, что наша поверхность локально является плоскостью

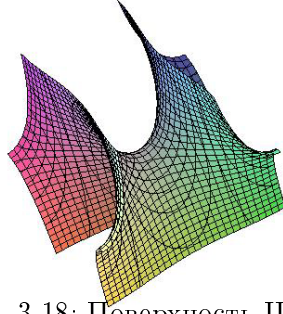


Рис. 3.18: Поверхность Шерка.

Утверждение 3.22.6 *Поверхность Шерка*

$$z = \ln \left(\frac{\cos x}{\cos y} \right)$$

является единственной с точностью до гомотетии минимальной поверхностью в классе поверхностей переноса.

Доказательство. Для нашей поверхности

$$\begin{aligned} \partial_1 \vec{r} &= \{1, 0, z'_1\}, & \partial_2 \vec{r} &= \{0, 1, z'_2\}, \\ \partial_{11} \vec{r} &= \{0, 0, z''_1\}, & \partial_{22} \vec{r} &= \{0, 0, z''_2\}, \\ \partial_{12} \vec{r} &= \{0, 0, 0\}, & \vec{n} &= \frac{1}{\sqrt{1+(z'_1)^2+(z'_2)^2}} \{-z'_1, -z'_2, 1\}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$g = \begin{pmatrix} 1 + (z'_1)^2 & z'_1 z'_2 \\ z'_1 z'_2 & 1 + (z'_2)^2 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \frac{1}{1 + (z'_1)^2 + (z'_2)^2} \begin{pmatrix} 1 + (z'_2)^2 & -z'_1 z'_2 \\ -z'_1 z'_2 & 1 + (z'_1)^2 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_1)^2 + (z'_2)^2}} \begin{pmatrix} z''_1 & 0 \\ 0 & z''_2 \end{pmatrix},$$

$$A = g^{-1}B = \frac{1}{(1 + (z'_1)^2 + (z'_2)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} (1 + (z'_2)^2)z''_1 & -z'_1 z'_2 z''_2 \\ -z'_1 z'_2 z''_1 & (1 + (z'_1)^2)z''_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$K = \frac{z''_1 z''_2}{(1 + (z'_1)^2 + (z'_2)^2)^2}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{(1 + (z'_2))z''_1 + (1 + (z'_1))z''_2}{(1 + (z'_1)^2 + (z'_2)^2)^{3/2}}$$

Условие минимальности поверхности переноса принимает вид

$$\frac{z''_1}{1 + (z'_1)^2}(x) = -\frac{z''_2}{1 + (z'_2)^2}(y) = c$$

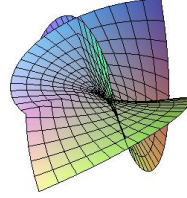


Рис. 3.19: Поверхность Эннепера.

Значит, относительно функции $z_1(x)$ получаем уравнение

$$\frac{z_1''}{1 + (z_1')^2} = c$$

решением которого является функция $z_1(x) = \frac{1}{c} \ln \cos cx$.

Что касается функции $z_2(y)$, то аналогично, имеем

$$\frac{z_2''}{(1 + (z_2')^2)}(y) = -c,$$

то есть

$$z_2(y) = -\frac{1}{c} \ln \cos cy.$$

Поэтому окончательно, явные уравнения нашей поверхности переноса приобретают вид

$$z = \frac{1}{c} \ln \left(\frac{\cos cx}{\cos cy} \right),$$

что с точностью до гомотетии дает стандартную поверхность Шерка.

■

Упражнение 3.22.1 Проверьте, что поверхность Эннепера

$$\vec{r} = \{1/4(u^3 - 3u - 3uv^2), 1/4(3v + 3u^2v - v^3), 3/4(v^2 - u^2)\}$$

минимальна.

Рассмотрим явно заданные минимальные поверхности вида $z = z(x, y)$. Для таких поверхностей условие $H = 0$ дается уравнением:

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0, \quad (3.53)$$

которое называется уравнением Лагранжа. Это нелинейное эллиптическое уравнение. Построенные выше примеры дают решение уравнения Лагранжа, однако эти решения определены не над всей плоскостью (x, y) . Это обстоятельство является существенным.

Теорема 3.22.1 (Теорема Бернштейна) Плоскость $z = ax + by + c$ является единственной минимальной C^2 -регулярной явно заданной над всей плоскостью (x, y) поверхностью в E^3 .

3.23 Ковариантный дифференциал векторного поля

Определение 3.23.1 Касательным векторным полем X на поверхности F , параметризованной вектор-функцией $\vec{r} : \mathcal{D}^2 \rightarrow E^3$, называется отображение $X : \mathcal{D}^2 \rightarrow TF$, ставящее в соответствие каждой точке $u \in \mathcal{D}$ касательный вектор $X(u) \in T_{\vec{r}(u)}F$.

Касательное векторное поле X может быть представлено в пространстве E^3 , как поле векторов, заданных в точках поверхности F^n , в виде

$$\vec{X}(u) = X^1(u)\partial_1\vec{r} + X^2(u)\partial_2\vec{r} = X^i(u)\partial_i\vec{r}, \quad (3.54)$$

где $u = (u^1, u^2) \in \mathcal{D}^2$ параметры на поверхности. Векторное поле X называется гладким класса C^k , если функции вектор-функция $\vec{X} : \mathcal{D}^2 \rightarrow E^3$, заданная формулой (3.54), являются гладкой класса C^k . Для C^k -регулярности векторного поля необходима C^k -регулярность параметризации поверхности и C^k -регулярность координатных функций $X^i(u)$.

Условимся, что в дальнейших рассматриваниях все векторные поля имеют достаточный порядок гладкости.

Между векторными полями на поверхности и векторными полями на области параметров имеется естественная связь, определяемая матрицей Якоби вектор-функции параметризации поверхности.

Пусть $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$ точка в области $\mathcal{D}^2$. Рассмотрим кривую $\gamma = u_0 + tX$, проходящую через точку u_0 в направлении вектора $X = X^1\vec{e}_1 + X^2\vec{e}_2$, где $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – базисные касательные векторные поля на области параметров $\mathcal{D}^2$. Тогда $\tilde{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ есть кривая, проходящая через точку $q = \vec{r}(u_0)$ и ее касательный вектор

$$\tilde{\gamma}' = \partial\vec{r} \cdot X$$

имеет те же координаты, что и направляющий вектор X кривой γ , но относительно базиса $(\partial_1\vec{r}, \partial_2\vec{r})$ касательного пространства T_qF .

Отображение $\partial\vec{r} : T_u\mathcal{D}^2 \rightarrow T_{\vec{r}(u)}F$ определяемое формулой

$$\partial\vec{r}(X^1\vec{e}_1 + X^2\vec{e}_2) = X^1\partial_1\vec{r} + X^2\partial_2\vec{r} \quad (3.55)$$

называется *касательным отображением*. Координаты $\{X^1, X^2\}$ называются *внутренними координатами* вектора $\vec{X} = X^1\partial_1\vec{r} + X^2\partial_2\vec{r}$. Аналогично определяются *внутренние координаты векторного поля* $\vec{X}(u)$.

Является ли дифференциал касательного векторного поля на поверхности касательным векторным полем? Вычислим

$$d\vec{X} = dX^i\partial_i\vec{r} + X^i d\partial_i\vec{r} = \partial_k X^i du^k \partial_i\vec{r} + X^i \partial_{ik}\vec{r} du^k$$

и воспользуемся разложением Гаусса для $\partial_{ik}\vec{r}$. Тогда

$$d\vec{X} = \partial_k X^i du^k \partial_i\vec{r} + X^i (\Gamma_{ik}^s \partial_s\vec{r} + b_{ik}\vec{n}) du^k = (\partial_k X^s + \Gamma_{ik}^s X^i) du^k \partial_s\vec{r} + b_{ik} X^i du^k \vec{n}.$$

Очевидно, что дифференциал касательного векторного поля не является касательным векторным полем поверхности. Однако, если взять только касательную составляющую полученного дифференциала, то она является снова касательным векторным полем на поверхности. Тогда следующее определение является естественным.

Определение 3.23.2 Абсолютным или ковариантным дифференциалом векторного поля $\vec{X}$ на поверхности F называется проекция на касательное пространство поверхности дифференциала вектор-функции (3.54)

Ковариантный дифференциал векторного поля X обозначается через DX . Очевидно, что

$$\overrightarrow{DX} := DX^i \partial_i \vec{r} = (\partial_k X^s + \Gamma_{ik}^s X^i) du^k \partial_s \vec{r}.$$

Значит внутренние координатные функции ковариантного дифференциала поля $\vec{X}$ имеют вид

$$DX^s = (\partial_k X^s + \Gamma_{ik}^s X^i) du^k.$$

Коэффициенты при дифференциалах параметров называются *ковариантными частными производными* внутренних координат векторного поля X и обозначаются через $\nabla_k X$. Таким образом,

$$\nabla_k X^s = \partial_k X^s + \Gamma_{ik}^s X^i.$$

Заметим, что для вычисления ковариантного дифференциала и ковариантных частных производных знание параметризации поверхности не требуется; достаточно задания внутренних координатных функций поля и первой фундаментальной формы поверхности (для вычисления символов Кристоффеля).

Учитывая связь (3.55) внутренних и внешних координат касательного векторного поля мы можем их не различать, но учитывать их смысл в контексте вычислений и рассуждений.

Определение 3.23.3 Векторное поле $\vec{X}$ на поверхности называется *постоянным* (или *параллельным*), если $DX = 0$.

Заметим, что если $\vec{X}$ — параллельное векторное поле на поверхности, то $d\vec{X} \parallel \vec{n}$.

Лемма 3.23.1 Если $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ — параллельные векторные поля на F , то

$$d\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0.$$

Доказательство. Действительно,

$$d\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \langle d\vec{X}, \vec{Y} \rangle + \langle \vec{X}, d\vec{Y} \rangle = 0,$$

так как $d\vec{X} \parallel \vec{n}$ и $d\vec{Y} \parallel \vec{n}$. ■

Прямым следствием доказанной Леммы является тот факт, что *что длина параллельного векторного поля есть константа и угол между параллельными векторными полями постоянен*.

Существование параллельного векторного поля на поверхности накладывает существенное ограничение на ее внутреннюю геометрию.

Утверждение 3.23.1 Если на поверхности F^2 существует параллельное векторное поле, то эта поверхность локально-изометрична плоскости.

Доказательство. Пусть $\vec{X}$ параллельное векторное поле на F^2 , т.е. $DX = 0$. Так как длина параллельного векторного поля постоянна, то не нарушая общности можно считать, что $|\vec{X}| = 1$. Примем семейство интегральных траекторий поля $\vec{X}$ и семейство его ортогональных траекторий в качестве координатных линий локальной системы координат на поверхности. Относительно выбранной системы координат,

$$ds^2 = du^2 + g_{22}(u, v)dv^2,$$

а само поле получит внутренние координаты вида

$$X = \{1, 0\}.$$

Условие $DX = 0$ влечет

$$DX^1 = d(X^1) + \Gamma_{ik}^1 X^i du^k = \Gamma_{1k}^1 du^k = 0,$$

$$DX^2 = d(X^2) + \Gamma_{ik}^2 X^i du^k = \Gamma_{1k}^2 du^k = 0.$$

Первое из уравнений выполняется тождественно, а из второго заключаем, что $\Gamma_{12}^2 = 0$. Тогда и $\Gamma_{12,2} = 0$, а значит

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u} = 0.$$

Последнее равенство означает, функция g_{22} не зависит от u , то есть первая фундаментальная форма нашей поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + g_{22}(v)dv^2.$$

Введем новые параметры (u^*, v^*) из условий

$$\begin{cases} du^* = du, \\ dv^* = \sqrt{g_{22}(v)} dv. \end{cases}$$

Относительно новых параметров,

$$ds^2 = (du^*)^2 + (dv^*)^2.$$

Таким образом, данная поверхность действительно локально-изометрична плоскости.

■

3.24 Параллельные векторные поля вдоль кривой на поверхности. Формула Гаусса-Бонне

Определение 3.24.1 Пусть $\vec{X}$ — векторное поле на поверхности и $\gamma(s)$ — кривая в области параметров. Тогда векторное поле

$$\vec{X}(s) = (\vec{X} \circ \gamma)(s) = \vec{X}(u^1(s), u^2(s))$$

называется ограничением векторного поля $\vec{X}$ на кривую $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$.

В точках кривой γ ,

$$DX^m(s) = \left(\frac{\partial X^m}{\partial u^k} \frac{du^k}{ds} + \Gamma_{ik}^m(\gamma) X^i \frac{du^k}{ds} \right) ds = \frac{du^k}{ds} \left(\frac{\partial X^m}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^m(\gamma) X^i \right) ds.$$

Выражение

$$DX^m = \frac{du^k}{ds} \frac{DX^m}{\partial u^k} ds$$

называется *ковариантным дифференциалом* (координат) поля X вдоль кривой γ , а выражение

$$\frac{DX^m}{ds} = \frac{du^k}{ds} \frac{DX^m}{\partial u^k}$$

называется *ковариантной производной* поля X вдоль γ . В координатном выражении $\gamma' = \left\{ \frac{du^1}{ds}, \frac{du^2}{ds} \right\}$. Обозначим, по аналогии с частной производной, ковариантную

частную производную как $\nabla_k = \frac{D}{\partial u^k}$. Тогда

$$\frac{DX^m}{ds} = \frac{du^k}{ds} \nabla_k X^m.$$

Ковариантная производная поля X по направлению поля Y определяется формулой

$$\nabla_Y X^m = Y^k \nabla_k X^m.$$

Тогда, очевидно, можно записать

$$\frac{DX}{ds} = \nabla_{\gamma'} X$$

Для вычисления ковариантной производной поля X вдоль кривой γ достаточно знать поле только в точках γ . Действительно,

$$DX^m = dX^m + \Gamma_{ik}^m X^i du^k.$$

Если заданы функции $X^k = X^k(s)$, задающие векторное поле в точках кривой γ , то очевидным образом находим:

$$\frac{DX^m}{ds} = \frac{dX^m}{ds} + \Gamma_{ik}^m X^i \frac{du^k}{ds}.$$

Для кривой на поверхности имеют место **аналоги формул Френе**, если вместо обычного дифференцирования использовать ковариантное. А именно:

Упражнение 3.24.1 Пусть $\vec{\gamma}$ — натурально параметризованная кривая на поверхности F^2 . Доказать, что $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}_g$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \vec{\tau}' &= k_g \vec{\nu}_g, \\ \vec{\nu}_g' &= -k_g \vec{\tau}, \end{aligned}$$

где $(')$ означает ковариантную производную по натуральному параметру.

Упражнение 3.24.2 Покажите, что геодезическая кривизна кривой $\vec{\gamma}$ на поверхности может быть записана в виде

$$|k_g| = \frac{|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''|}{|\vec{\gamma}'|^3}$$

где $(\cdot)$ означает ковариантную производную по параметру кривой.

Определение 3.24.2 Векторное поле $\vec{X} = \partial \vec{r} \cdot X$, заданное в точках кривой $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ называется параллельным вдоль $\vec{\gamma}$, если

$$\nabla_{\gamma'} X = 0.$$

Утверждение 3.24.1 Если $\vec{\gamma}$ – (кусочно) гладкая кривая на поверхности, то вдоль $\vec{\gamma}$ всегда существует параллельное векторное поле.

Доказательство. Действительно, система

$$\frac{dX^m}{ds} = -\Gamma_{ik}^m X^i \frac{du^k}{ds}$$

является автономной системой дифференциальных уравнений, у которой решение существует и единственно при заданных начальных условиях.

■

С точки зрения параллельности векторного поля вдоль кривой, геодезические линии характеризуются следующим замечательным свойством.

Утверждение 3.24.2 Кривая $\vec{\gamma}$ на поверхности является геодезической тогда и только тогда, когда поле $\vec{\gamma}'$ параллельно вдоль $\vec{\gamma}$, то есть $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$.

Доказательство. Имеем: $\frac{dX^m}{ds} + \Gamma_{ik}^m X^i \frac{du^k}{ds} = 0$. Положим $X = \gamma' = \left\{ \frac{du^1}{ds}, \frac{du^2}{ds} \right\}$.

Тогда условие параллельности поля X вдоль γ запишется как

$$\frac{d^2 u^m}{ds^2} + \Gamma_{ik}^m \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0.$$

■

Понятие параллельного векторного поля вдоль кривой позволяет определить одно из важнейших понятий в дифференциальной геометрии — понятие параллельного перенесения заданного вектора вдоль заданной кривой.

Определение 3.24.3 Пусть $\vec{\gamma}: [a, b] \rightarrow F$ – кривая и

$$\vec{\gamma}(a) = A, \quad \vec{\gamma}(b) = B.$$

Пусть $\vec{X}_A = \partial \vec{r} \cdot X_a$ – произвольный касательный вектор поверхности в точке A . Обозначим через $X(s)$ единственное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dX^m}{ds} = -\Gamma_{ik}^m X^i \frac{du^k}{ds} \\ X(0) = X_a, \end{cases}$$

Вектор $\vec{X}_B = \partial \vec{r} \cdot X(b)$ называется результатом параллельного перенесения вектора $\vec{X}_A$ из точки A в точку B вдоль $\vec{\gamma}$.

В качестве примера, рассмотрим плоскость Лобачевского с кривизной $K = -1$ в интерпретации Пуанкаре. Для этой плоскости

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

а символы Кристоффеля имеют вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= -\frac{1}{y}, & \Gamma_{22}^1 &= 0 \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{y}, & \Gamma_{12}^2 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{1}{y}.\end{aligned}$$

Рассмотрим кривую

$$x = t, \quad y = y_0$$

и найдем множество параллельных векторных полей вдоль нее. Для этого обозначим

$$\partial_1 = \{1, 0\}, \quad \partial_2 = \{0, 1\}$$

базисные векторные поля и запишем уравнение для параллельного векторного поля X в виде

$$DX = \left(\frac{dX^m}{dt} + \Gamma_{ik}^m X^i \frac{du^k}{dt} \right) \partial_m = \left(\frac{dX^1}{dt} + \Gamma_{i1}^1 X^i \right) \partial_1 + \left(\frac{dX^2}{dt} + \Gamma_{i1}^2 X^i \right) \partial_2 = 0$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} \frac{dX^1}{dt} - \frac{1}{y_0} X^2 = 0, \\ \frac{dX^2}{dt} + \frac{1}{y_0} X^1 = 0. \end{cases}$$

Это система уравнений с постоянными коэффициентами, общее решение которой имеет вид

$$\begin{cases} X^1 = a^1 \cos(t/y_0) + a^2 \sin(t/y_0), \\ X^2 = a^2 \cos(t/y_0) - a^1 \sin(t/y_0). \end{cases}$$

то есть

$$X = \cos(t/y_0) A_1 - \sin(t/y_0) A_2,$$

где $A_1 = a^1 \partial_1 + a^2 \partial_2$, $A_2 = -a^2 \partial_1 + a^1 \partial_2$ — пара произвольно выбранных взаимно ортогональных равных по длине векторных полей, определенных в точках нашей кривой и ориентированных положительно по отношению к выбранному базису полей на плоскости. Параллельное векторное поле испытывает поворот относительно этой пары с угловой скоростью $1/y_0$ в отрицательном направлении (т.е., по часовой стрелке).

Например, для начальных данных $X(0) = \partial_1$ имеем $A_1 = \partial_1$, $A_2 = \partial_2$ поле X испытывает на отрезке $[0, \frac{\pi}{2} y_0]$ поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ в отрицательном направлении и занимает положение вектора $-\partial_2$ в точке $(\frac{\pi}{2} y_0, y_0)$.

В общем случае, суммарный ориентированный поворот параллельного векторного поля на заданном участке кривой описывается следующей Леммой.

Лемма 3.24.1 Пусть кривая на поверхности задана своим внутренним параметрическим уравнением $\gamma : u^i = u^i(t)$, $\gamma(t_1) = A, \gamma(t_2) = B$. Тогда суммарный ориентированный поворот параллельного векторного поля p на участке кривой от A до B вычисляется криволинейным интегралом от дифференциальной формы $\langle \nabla a, b \rangle_g$ по формуле

$$\Delta\varphi = - \int_{\gamma} \langle Da, b \rangle_g = - \int_{\gamma} \langle \nabla_1 a, b \rangle_g du^1 + \langle \nabla_2 a, b \rangle_g du^2 = - \int_{t_1}^{t_2} \langle \nabla_{\gamma'} a, b \rangle_g dt, \quad (3.56)$$

где a и b произвольная пара единичных взаимно ортогональных положительно ориентированных векторных полей на поверхности, взятых в точках кривой вдоль γ .

Доказательство. Пусть $\vec{r}$ – локальная параметризация поверхности. Пусть $\vec{\gamma} = \vec{r} \circ \gamma$ – кривая на поверхности. Зафиксируем произвольное единичное векторное поле $\vec{a} = \partial \vec{r} \cdot a$ на поверхности и положим $\vec{b} = \vec{n} \times \vec{a}$. Тогда $(\vec{a}, \vec{b})$ образуют положительно ориентированный ортонормированный репер на поверхности, а векторы $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})$ – положительно ориентированный ортонормированный (подвижный) репер в пространстве в точках нашей поверхности.

Пусть $\vec{p} = \partial \vec{r} \cdot p$ – единичное параллельное векторное поле вдоль $\vec{\gamma}$. Положим, $\vec{q} = \vec{n} \times \vec{p}$, которое с очевидностью так же параллельно вдоль кривой. Не нарушая общности, будем полагать, что в $\vec{p}(A) = \vec{a}(A)$. Обозначим через φ – ориентированный угол между векторами поля $\vec{a}$ и $\vec{p}$. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \cos \varphi \vec{a} + \sin \varphi \vec{b} \\ \vec{q} &= -\sin \varphi \vec{a} + \cos \varphi \vec{b} \end{aligned}$$

а значит

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \cos \varphi \vec{p} - \sin \varphi \vec{q} \\ \vec{b} &= \sin \varphi \vec{p} + \cos \varphi \vec{q}. \end{aligned}$$

Беря дифференциал, находим

$$d\vec{a} = -d\varphi \vec{b} + \cos \varphi d\vec{p} - \sin \varphi d\vec{q}.$$

Так как $d\vec{p} \parallel d\vec{q} \parallel \vec{n}$, то домножая это равенство скалярно на $\vec{b}$, получим

$$-d\varphi = \langle d\vec{a}, \vec{b} \rangle.$$

Таким образом,

$$\Delta\varphi = - \int_{\gamma} \langle d\vec{a}, \vec{b} \rangle = - \int_{\gamma} \langle Da, b \rangle_g,$$

то есть

$$\Delta\varphi = - \int_{\gamma} \langle \nabla_1 a, b \rangle_g du^1 + \langle \nabla_2 a, b \rangle_g du^2.$$

Переходя к параметру на кривой, получим

$$\Delta\varphi = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\langle \nabla_1 a, b \rangle_g \frac{du^1}{dt} + \langle \nabla_2 a, b \rangle_g \frac{du^2}{dt} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \langle \nabla_{\gamma'} a, b \rangle_g dt.$$

■

Пример 3.24.1 На двумерной поверхности всегда можно ввести ортогональную координатную сеть. Это означает, что первую фундаментальную форму поверхности всегда можно привести к виду

$$ds^2 = g^2 du^2 + f^2 dv^2,$$

где f и g – гладкие функции параметров, не обращающиеся в нуль на области определения локальной системы координат. Набор символов Кристоффеля легко вычисляется ($u := u^1, v := u^2$)

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{\partial_1 g}{g}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{\partial_2 g}{g}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{f \partial_1 f}{g^2} \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{g \partial_2 g}{f^2}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\partial_1 f}{f}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\partial_2 f}{f}\end{aligned}$$

Положим

$$a = \frac{1}{g} \{1, 0\} := \frac{1}{g} \partial_1, \quad b = \frac{1}{f} \{0, 1\} := \frac{1}{f} \partial_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\nabla_1 a := \nabla_{\partial_1} a &= \nabla_{\partial_1} \left(\frac{1}{g} \partial_1 \right) = -\frac{\partial_1 g}{g^2} \partial_1 + \frac{1}{g} \Gamma_{11}^s \partial_s = -\frac{\partial_1 g}{g^2} \partial_1 + \frac{1}{g} \left(\Gamma_{11}^1 \partial_1 + \Gamma_{11}^2 \partial_2 \right) = \\ &= -\frac{\partial_1 g}{g^2} \partial_1 + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial_1 g}{g} \partial_1 - \frac{g \partial_2 g}{f^2} \partial_2 \right) = -\frac{\partial_2 g}{f^2} \partial_2 = -\frac{\partial_2 g}{f} b.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\nabla_2 a := \nabla_{\partial_2} a &= \nabla_{\partial_2} \left(\frac{1}{g} \partial_1 \right) = -\frac{\partial_2 g}{g^2} \partial_1 + \frac{1}{g} \Gamma_{12}^s \partial_s = -\frac{\partial_2 g}{g^2} \partial_1 + \frac{1}{g} \left(\Gamma_{12}^1 \partial_1 + \Gamma_{12}^2 \partial_2 \right) = \\ &= -\frac{\partial_2 g}{g^2} \partial_1 + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial_2 g}{g} \partial_1 + \frac{\partial_1 f}{f} \partial_2 \right) = \frac{\partial_1 f}{g f} \partial_2 = \frac{\partial_1 f}{g} b.\end{aligned}$$

Пусть $u := u^1(t), v := u^2(t)$ кривая, лежащая в рассматриваемой локальной карте. Тогда угол поворота параллельного векторного поля вдоль этой кривой выразится формулой

$$\Delta \varphi = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial_2 g}{f} \frac{du^1}{dt} - \frac{\partial_1 f}{g} \frac{du^2}{dt} \right) dt.$$

В частности, при переносе вдоль координатных линий $u^1 = \text{const}, u^2 = t$ и $u^1 = t, u^2 = \text{const}$ имеем, соответственно,

$$\Delta \varphi_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial_1 f}{g} dt, \quad \Delta \varphi_2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial_2 g}{f} dt.$$

При полугеодезической параметризации $ds^2 = du^2 + f^2 dv^2$ получаем

$$\Delta \varphi_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \partial_1 f dt, \quad \Delta \varphi_2 = 0.$$

Если мы имеем дело с метрикой вращения, то $f = f(u)$ и $\Delta\varphi_1 = -\partial_1 f \Delta v$. В частности, для сферы радиуса R мы имеем полугеодезическую декартову параметризацию в виде $ds^2 = du^2 + R^2 \cos^2(u/R) dv^2$ и, следовательно, при обходе всей параллели $u = u_0 = \text{const}$

$$\Delta\varphi_1 = 2\pi \sin(u_0/R) = 2\pi \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} = 2\pi \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2},$$

где r – внешний радиус рассматриваемой параллели.

Применим доказанную лемму к случаю замкнутого контура на поверхности.

Лемма 3.24.2 Пусть $\vec{\gamma}$ – замкнутый контур на F^2 , ограничивающий односвязную область $\mathcal{D}$. Обозначим через $\Delta\varphi$ угол между вектором $\vec{r}$ и результатом его параллельного перенесения вдоль $\vec{\gamma}$. Тогда

$$\Delta\varphi = \iint_{\mathcal{D}} K dS.$$

Доказательство. Так как все наши рассмотрения носят локальный характер, будем считать, что контур лежит в области определения некоторой полугеодезической системы координат. В этом случае

$$ds^2 = du^2 + f^2(u, v) dv^2,$$

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -f f_u,$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{f_u}{f}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{f_v}{f}.$$

Положим

$$a = \partial_1, \quad b = \frac{1}{f} \partial_2.$$

Тогда

$$\nabla_1 a = 0, \quad \nabla_2 a = \Gamma_{21}^2 \partial_2 = \frac{f_u}{f} \partial_2 = f_u b$$

и применение формулы Стокса к формуле (3.56) запишется в виде

$$\Delta\varphi = - \int_{\gamma} 0 du + f_u dv = - \iint_{\mathcal{D}^2} f_{uu} du dv = \iint_{\mathcal{D}^2} K f du dv = \iint_{\mathcal{D}^2} K \sqrt{\det g} du dv = \iint_{\mathcal{D}^2} K dS.$$

■

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.24.2 На плоскости Лобачевского

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

рассмотрим отрезок прямой

$$\{x = (\cos \alpha)t + x_0, y = (\sin \alpha)t + y_0\}$$

на участке $t = t_1 \dots t_2$. Возьмем в качестве полей a и b поля

$$a = \{y, 0\} = y\partial_1, \quad b = \{0, y\} = y\partial_2.$$

Вдоль нашей кривой $a(t) = (t \sin \alpha + y_0)\partial_1, b(t) = (t \sin \alpha + y_0)\partial_2$. Поскольку $\gamma' = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, то

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} a &= \left(\frac{da^m}{dt} + \Gamma_{ik}^m a^i \frac{du^k}{dt} \right) \partial_m = \\ &= (\sin \alpha + \Gamma_{11}^1 y \sin \alpha) \partial_1 + \Gamma_{11}^2 y \cos \alpha \partial_2 = \cos \alpha \partial_2 = \frac{\cos \alpha}{t \sin \alpha + y_0} b. \end{aligned}$$

Значит, при $\alpha \neq 0, \pi$ имеем

$$\Delta \varphi = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos \alpha}{t \sin \alpha + y_0} dt = - \operatorname{ctg} \alpha \ln \left| \frac{t_2 \sin \alpha + y_0}{t_1 \sin \alpha + y_0} \right|.$$

Если же $\alpha = 0, \pi$, то

$$\Delta \varphi = - \frac{|t_2 - t_1|}{y_0}.$$

Заметим в частности, что при смещении вдоль вертикальной геодезической (т.е. при $\alpha = \pi/2$) вращение $\Delta \varphi = 0$.

Пример 3.24.3 На плоскости Лобачевского

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

рассмотрим окружность

$$x = x_0 + r \cos t, \quad y = y_0 + r \sin t \quad (y_0 > r)$$

и вычислим поворот параллельного векторного поля при обходе этой окружности, то есть при $t = 0 \dots 2\pi$. Для такой кривой

$$\gamma' = \{-r \sin t, r \cos t\}$$

Выбрав снова $a = y\partial_1, b = y\partial_2$, получаем

$$\nabla_{\gamma'} a = \left(\frac{da^m}{dt} + \Gamma_{ik}^m a^i \frac{du^k}{dt} \right) \partial_m = \Gamma_{11}^2 y (-r \sin t) \partial_2 = -r \sin t \partial_2 = -\frac{r \sin t}{y_0 + r \sin t} b.$$

Поэтому, при $y_0 > r$

$$\Delta \varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r \sin t}{y_0 + r \sin t} dt = 2\pi - \int_0^{2\pi} \frac{y_0}{y_0 + r \sin t} dt.$$

Заметим, что мы нашли поворот поля не находя самого параллельного векторного поля вдоль кривой. Для его нахождения, нужно было бы решать систему

$$\begin{cases} \frac{dX^1}{dt} - \frac{r \cos t}{y_0 + r \sin t} X^2 = 0, \\ \frac{dX^2}{dt} + \frac{-r \sin t}{y_0 + r \sin t} X^1 - \frac{r \cos t}{y_0 + r \sin t} X^2 = 0. \end{cases},$$

решение которой сопряжено с очевидными трудностями.

В некоторых случаях можно найти результат параллельного перенесения вообще не решая системы уравнений на параллельное векторное поле. Следующие два очевидных утверждения являются ключевыми в таком методе.

Утверждение 3.24.3 *Если две поверхности касаются вдоль $\vec{\gamma}$, то результат параллельного перенесения векторного поля $\vec{X}$ вдоль $\vec{\gamma}$ не зависит от того, по какой поверхности осуществляется перенос.*

Утверждение 3.24.4 *Если две поверхности локально-изометричны, то результаты параллельного перенесения вектора вдоль кривых, соответствующих по изометрии, совпадают¹¹.*

Для примера, рассмотрим малую окружность радиуса r на сфере радиуса R . "Накроем" ее конусом, касающимся сферы вдоль этой окружности. Пусть l – длина образующей этого конуса. Разрежем конус вдоль образующей и развернем на плоскость. Тогда параллельное вдоль окружности векторное поле перейдет в параллельное векторное поле вдоль окружности радиуса l на плоскости. Следовательно, поворот параллельного поля при обходе окружности на сфере равен центральному углу α , стянутому этой дугой. Из элементарных соображений,

$$\Delta\varphi = 2\pi\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

Проследим теперь за поведением касательного векторного поля кривой по отношению к параллельному векторному полю. Напомним, что на ориентированной плоскости суммарный поворот касательного векторного поля относительно фиксированного (т.е., параллельного) векторного поля выражался формулой

$$\Delta\alpha = \int_{\gamma} k ds,$$

где k – кривизна плоской кривой. Оказывается, что подобная формула, с заменой $k \rightarrow k_g$ справедлива и для кривой на двумерной поверхности.

Лемма 3.24.3 *Пусть $\vec{\gamma}(t) = \vec{r} \circ \gamma(t)$ – регулярная кривая на F^2 . Обозначим через $\Delta\alpha$ суммарный угол поворота касательного векторного поля кривой $\vec{\gamma}$ относительно параллельного векторного поля на участке кривой от точки $A(t_1)$ до точки $B(t_2)$. Тогда*

$$\Delta\alpha = \int_A^B k_g ds = \int_{t_1}^{t_2} k_g(t) \frac{ds}{dt} dt,$$

где k_g – ориентированная геодезическая кривизна кривой.

¹¹В том смысле, что имеют одинаковые внутренние координаты.

Доказательство. Пусть $\vec{p}$ – параллельное векторное поле вдоль $\vec{\gamma}$, а $\vec{\tau} = \vec{\gamma}'$ – касательное векторное поле на контуре. Положим $\vec{q} = \vec{n} \times \vec{p}$. Тогда поле $\vec{q}$ так же единично и параллельно вдоль контура.

Пусть α – ориентированный угол между $\vec{p}$ и $\vec{\tau}$. Введем векторное поле $\vec{\nu}_g = \vec{n} \times \vec{\tau}$ – поле геодезических нормалей контура. Тогда

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \cos \alpha \vec{p} + \sin \alpha \vec{q} \\ \vec{\nu}_g &= -\sin \alpha \vec{p} + \cos \alpha \vec{q}.\end{aligned}$$

А значит

$$d\vec{\tau} = d\alpha \vec{\nu}_g + \cos \alpha d\vec{p} + \sin \alpha d\vec{q}$$

Так как $d\vec{p} \parallel d\vec{q} \parallel \vec{n}$, то домножая это равенство скалярно на $\vec{\nu}_g$, получим

$$d\alpha = \langle d\vec{\tau}, \vec{\nu}_g \rangle = k_g ds$$

Следовательно,

$$\Delta\alpha = \int_{\gamma} k_g ds,$$

что и завершает доказательство. ■

Например, на плоскости Лобачевского

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

рассмотрим окружность

$$x = x_0 + r \cos t, \quad y = y_0 + r \sin t$$

и вычислим поворот касательного векторного поля при обходе этой окружности относительно параллельного векторного поля. Для такой окружности $k_g = \frac{y_0}{r}$ и поэтому

$$\Delta\alpha = \int_{\gamma} k_g ds = \int_0^{2\pi} \frac{y_0}{r} \frac{r}{y_0 + r \sin t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{y_0}{y_0 + r \sin t} dt$$

Упражнение 3.24.3 *Покажите, что на полуплоскости Пуанкаре суммарный угол поворота касательной кривой γ относительно параллельного векторного поля равен*

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_0 + \int_{\gamma} \frac{dx}{y},$$

где $\Delta\theta_0$ – суммарный угол поворота касательной кривой γ как кривой на евклидовой полуплоскости.

Теперь мы можем легко доказать основную теорему раздела.

Теорема 3.24.1 (Формула Гаусса-Бонне) Пусть $\Gamma = \cup \gamma_i$ — кусочно-гладкий замкнутый контур на ориентируемой поверхности F^2 , ограничивающий односвязную область $\mathcal{D}$. Обозначим через $k_g(\gamma_i)$ — ориентированную геодезическую кривизну дуги γ_i , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — внутренние углы контура Γ , а через K — гауссову кривизну F^2 . Тогда имеет место формула:

$$\iint_{\mathcal{D}} K dS + \sum_{\gamma_i} \int k_g(\gamma_i) ds + \sum_i (\pi - \alpha_i) = 2\pi.$$

Доказательство. Действительно, зафиксировав произвольное единичное векторное поле $\vec{a}$ на поверхности, легко заметить, что суммарный поворот касательного векторного поля контура относительно поля $\vec{a}$ кратен 2π .

Пусть $\vec{p}$ — параллельное векторное поле на Γ . Обозначим через $\Delta\varphi$ — угол между начальным положением и конечным положением поля $\vec{p}$ при обходе контура Γ . Тогда по Лемме 3.19.2,

$$\Delta\varphi = \iint_{\mathcal{D}} K dS.$$

Обозначим через $\vec{\tau}$ — единичное касательное векторное поле вдоль Γ . Пусть $\Delta\alpha$ — суммарный поворот $\vec{\tau}$ относительно параллельного векторного поля $\vec{p}$ при обходе контура. Тогда, используя Лемму 3.24.3 на каждом гладком участке контура, найдем, что

$$\Delta\alpha = \sum_{\gamma_i} \int k_g(\gamma_i) ds + \sum_i (\pi - \alpha_i).$$

Таким образом, используя правило сложения ориентированных углов, можем записать

$$\Delta\varphi + \Delta\alpha = 2\pi k.$$

Покажем, что $k = 1$. Предположим, что контур находится в некоторой карте на поверхности и эта карта проектируется в некоторую область на плоскости. Тогда при диффеоморфизме замкнутый контур переходит в замкнутый контур, касательное векторное поле в касательное векторное поле. "Продеформируем" контур Γ в окружность на плоскости, а образ поля $\vec{p}$ в параллельное векторное поле на плоскости. Тогда $\Delta\alpha = 2\pi$. Так как все деформации были непрерывными, то значит и исходно $\Delta\alpha = 2\pi$, то есть $k = 1$. ■

В качестве простейшего следствия доказанной формулы, рассмотрим на поверхности геодезический треугольник. Обозначим углы треугольника через α, β, γ . Так как $k_g(\gamma_i) = 0$, то

$$\iint_{\Delta} K dS + (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) = 2\pi,$$

то есть

$$\alpha + \beta + \gamma = \iint_{\Delta} K dS.$$

Тогда, если внутри треугольника

- i) $K = 0$, то $\alpha + \beta + \gamma = \pi$,
- ii) $K > 0$, то $\alpha + \beta + \gamma > \pi$,
- iii) $K < 0$, то $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Таким образом, известная проблема в геометрии о сумме внутренних углов треугольника получает замечательное решение в контексте формулы Гаусса-Бонне.

3.24.1 Интегральная формула Гаусса. Теорема Якоби.

Еще одним следствием формулы Гаусса-Бонне является следующая теорема, связывающая кривизну и топологию замкнутого двумерного многообразия.

Теорема 3.24.2 (Теорема Гаусса-Бонне) Пусть F^2 — замкнутая (ориентируемая) поверхность. Тогда

$$\iint_{F^2} K dS = 2\pi\chi(F^2),$$

где $\chi(F^2) = \Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2$ — эйлерова характеристика поверхности.

Доказательство. Триангулируем нашу поверхность $F^2 = \bigcup T_i$ так, что каждый треугольник лежит в некоторой локальной карте многообразия, и для каждого треугольника запишем формулу Гаусса-Бонне:

$$\iint_{T_i} K dS + \sum_{k=1}^3 \int_{\gamma_i^{(k)}} k_g(\gamma_i^{(k)}) ds + (\pi - \alpha_i^{(1)}) + (\pi - \alpha_i^{(2)}) + (\pi - \alpha_i^{(3)}) = 2\pi.$$

Так как поверхность ориентируема, то ориентацию всех треугольников можно выбрать когерентно, то есть так, что направление обхода сторон смежных треугольников противоположно. Просуммируем по i все выражения. Тогда, очевидно,

$$\sum_i \iint_{T_i} K dS = \iint_F K dS,$$

Сумма интегралов от геодезических кривизн будет равна 0, так как на каждом ребре триангуляции интегрируется одна и та же функция дважды, но в противоположных направлениях. Сумма углов при всех вершинах составит величину, равную $2\pi\Gamma_0$. Так как количество треугольников равно Γ_2 , то с учетом сказанного суммирование дает

$$\iint_{F^2} K dS + 3\pi\Gamma_2 - 2\pi\Gamma_0 = 2\pi\Gamma_2.$$

Теперь заметим, что $3\Gamma_2$ — это общее число ребер триангуляции, сосчитанных дважды (одно и то же ребро принадлежит двум смежным треугольникам). Значит $3\Gamma_2 = 2\Gamma_1$. И тогда окончательно имеем,

$$\iint_{F^2} K dS = 2\pi(\Gamma_2 - \Gamma_1 + \Gamma_0) = \chi(F^2).$$

■

В качестве приложения интегральной формулы Гаусса, докажем следующее любопытное утверждение.

Теорема 3.24.3 (Теорема Якоби) Пусть γ — регулярная замкнутая кривая в E^3 , γ^* — ее нормальный сферический образ. Если γ^* не имеет самопересечений, то γ^* делит сферу на две равновеликие части.

Доказательство. Пусть $\vec{\beta}, \vec{\nu}, \vec{\tau}$ — репер Френе кривой γ . Тогда параметризация γ^* имеет вид

$$\vec{\rho} = \vec{\nu}(s).$$

Так как

$$\vec{\rho}'_s = \vec{\nu}'_s = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta},$$

то $|\vec{\rho}'_s| = \sqrt{k^2 + \kappa^2} > 0$. Обозначим через s^* натуральный параметр на γ^* . Тогда

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{k^2 + \kappa^2}.$$

Обозначим через k_g^* — геодезическую кривизну γ^* . Покажем, что

$$\int_{\gamma^*} k_g^* ds^* = 0.$$

Так как s не натуральный параметр на γ^* , то k_g^* как функцию параметра s найдем по формуле

$$k_g^* = \frac{(\vec{\rho}', \vec{\rho}'', \vec{n})}{|\vec{\rho}'|^3},$$

где $\vec{n}$ — вектор нормали поверхности, на которой лежит кривая. Так как γ^* лежит на единичной сфере, то в нашей задаче $\vec{n} = \vec{\nu}$. Для производных вектор-функции $\vec{\rho}$ имеем

$$\vec{\rho}' = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta},$$

$$\vec{\rho}'' = -k'\vec{\tau} + \kappa'\vec{\beta} - k(+k\vec{\nu}) + \kappa(-\kappa\vec{\nu}) = -k'\vec{\tau} + \kappa'\vec{\beta} - (k^2 + \kappa^2)\vec{\nu}.$$

Вычислим:

$$\begin{aligned} (\vec{\rho}', \vec{\rho}'', \vec{n}) &= (-k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}, -k'\vec{\tau} + \kappa'\vec{\beta} - (k^2 + \kappa^2)\vec{\nu}, \vec{\nu}) = \\ &= -k\kappa'(\vec{\tau}, \vec{\beta}, \vec{\nu}) - \kappa k'(\vec{\beta}, \vec{\tau}, \vec{\nu}) = k\kappa' - \kappa k'. \end{aligned}$$

Значит,

$$k_g^*(s) = \frac{k\kappa' - \kappa k'}{(k^2 + \kappa^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^*} k_g^*(s^*) ds^* &= \int_{\gamma} k_g^*(s) \frac{ds^*}{ds} ds = \int_{\gamma} \frac{k\kappa' - \kappa k'}{(k^2 + \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{k^2 + \kappa^2} ds = \\ &= \int_{\gamma} \frac{k\kappa' - \kappa k'}{k^2 + \kappa^2} ds = \int_{\gamma} d\left(\arctg \frac{\kappa}{k}\right) = \arctg \frac{\kappa}{k} \Big|_0^L = \pi m, \end{aligned}$$

где L — длина кривой γ , m — некоторое целое число. Для плоской кривой $\varkappa \equiv 0$, поэтому $m = 0$. Если непрерывно деформировать кривую, то величина πm с одной стороны изменяется непрерывно, а с другой стороны — скачком. Следовательно, эта величина является константой. То есть $m = 0$.

Пусть $\mathcal{D}_1^*, \mathcal{D}_2^*$ — области на сфере, такие что $\partial \mathcal{D}_1^* = \partial \mathcal{D}_2^* = \gamma^*$. По формуле Гаусса-Бонне,

$$\iint_{\mathcal{D}_1^*} K dS + \iint_{\gamma^*} k_g^* ds^* = 2\pi.$$

Но сфера единичная, следовательно $K \equiv 1$. Тогда

$$\iint_{\mathcal{D}_1^*} K dS = S(\mathcal{D}_1^*),$$

а значит $S(\mathcal{D}_1^*) = 2\pi$.

■

Упражнение 3.24.4 Пусть γ — замкнутая геодезическая на выпуклой поверхности в E^3 класса C^2 . Тогда нормальный сферический образ γ^* делит сферу на две равновеликие части.

Глава 4

Тензоры в дифференциальной геометрии

До этого момента геометрия на поверхности рассматривалась в пределах одной локальной карты. На пересечении двух локальных карт геометрические объекты (такие, как векторы, дифференциальные формы, линейные операторы и пр.) имеют различное координатное представление в зависимости от выбора локальной карты. К счастью, геометрические объекты преобразуются при замене параметров неким специальным образом, позволяющим "склеить" геометрических объектов на пересечении карт. Такой характер преобразования называется *тензорным*, а сам объект, подчиняющийся тензорному закону преобразования называется *тензором*. Таким образом понятие тензора позволяет глобализовать объекты, изначально заданные локально.

4.1 Определение и примеры тензорных полей

Пусть F^n – гладкое многообразие. Не нарушая общности, можно считать, что F^n является вложенным подмногообразием в евклидовом пространстве E^N достаточно большого числа измерений.

Пусть $(U, \varphi(u))$ и $(V, \varphi(v))$ две локальные карты с непустым пересечением. На $U \cap V$ возникает диффеоморфизм преобразования координат $\varphi(u) \circ \varphi(v)^{-1} = u(v)$, имеющий координатное выражение в виде $u^i = u^i(v^1, \dots, v^n)$ с невырожденной матрицей Якоби

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \right) \quad (i, \alpha = 1, \dots, n).$$

Матрица Якоби локально обратного отображения $v^\alpha = v^\alpha(u^1, \dots, u^n)$, а именно,

$$\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} \right) \quad (i, \alpha = 1, \dots, n)$$

является обратной матрицей по отношению к исходному отображению. Следовательно, имеет место соотношение (напомним, что мы принимаем правило Эйнштейна суммирования по одинаковым нижним и верхним индексам)

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^k} \right) = \delta_k^i.$$

Рассмотрим базовые примеры преобразований геометрических объектов.

- *Преобразование координатных базисов касательных плоскостей.*

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(u)$ локальная параметризация подмногообразия F^n и $\vec{\rho} = (\vec{r} \circ u)(v)$ – локальная перепараметризация F^n . Тогда базисные векторы касательной плоскости относительно этих двух параметризаций связываются соотношением

$$\partial_\alpha \vec{\rho}(v) = \partial_i \vec{r}(u) \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}. \quad (4.1)$$

- *Преобразование коэффициентов дифференциальных форм.*

Пусть

$$\omega = \omega_i(u) du^i$$

дифференциальная 1-форма, заданная в локальной координатной системе (u) . Тогда после перехода к координатам (v) эта форма примет выражение

$$\omega = \omega_i(u) \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} dv^\alpha = \omega_\alpha(v) dv^\alpha.$$

Таким образом,

$$\omega_\alpha(v) = \omega_i(u) \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}. \quad (4.2)$$

Сравнивая (4.2) и (4.1) можно заметить, что координаты 1- формы преобразуются по тому же правилу, что и базисные векторы. В этом случае принято говорить, что коэффициенты 1-формы преобразуются *ковариантно* по отношению к преобразованию базисов.

- *Преобразование координат векторных полей.*

Пусть

$$\xi(u) = \xi^i(u) \partial_i \vec{r}, \quad \xi(v) = \xi^\alpha(v) \partial_\alpha \vec{\rho}$$

координатное выражение вектора ξ относительно базисов соответствующих координатных систем. Согласно (4.1), имеем

$$\xi^\alpha(v) \partial_\alpha \vec{\rho} = \xi^\alpha(v) \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \partial_i \vec{r}.$$

Значит

$$\xi^i(u) = \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \xi^\alpha(v).$$

Таким образом,

$$\xi^\alpha(v) = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} \xi^i(u). \quad (4.3)$$

Сравнивая (4.3) и (4.1) можно заметить, что последнее преобразование осуществляется при помощи матрицы, обратной к матрице Якоби преобразования координат. В этом случае принято говорить, что координаты векторного поля преобразуются *контравариантно* по отношению к преобразованию базисов.

- Преобразование матрицы линейного оператора.

Пусть $A: T_q F^n \rightarrow T_q F^n$ линейный оператор, действующий в касательном пространстве поверхности, то есть

$$\eta = A\xi.$$

Относительно параметризации u

$$\eta^i(u) = a_k^i(u) \xi^k(u).$$

После замены параметров вида $u = u(v)$, имеем

$$\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \eta^\alpha(v) = a_k^i(u) \frac{\partial u^k}{\partial v^\beta} \xi^\beta(v),$$

следовательно

$$\eta^\alpha(v) = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} a_k^i(u) \frac{\partial u^k}{\partial v^\beta} \xi^\beta(v).$$

Таким образом, относительно новых параметров, матрица линейного оператора приобретает вид

$$a_{\beta}^{\alpha}(v) = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial u^i} a_k^i(u) \frac{\partial u^k}{\partial v^{\beta}}. \quad (4.4)$$

Сравнивая (4.4) с (4.3) и (4.2) можно заметить, что строки матрицы (верхний индекс фиксирован) преобразуются как 1-формы, а столбцы (нижний индекс фиксирован) преобразуются по векторному закону. Таким образом, матрица линейного оператора подчиняется смешанному закону преобразования.

Определение 4.1.1 Тензорным полем на многообразии F^n называется набор функций

$$T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} : F^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n \end{array} \right),$$

который при замене координат вида

$$u = u(v) \sim \left\{ \begin{array}{l} u^1 = u^1(v^1, \dots, v^n) \\ \dots\dots\dots \\ u^n = u^n(v^1, \dots, v^n) \end{array} \right.$$

изменяется по закону:

$$T_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}(v) = \frac{\partial v^{\alpha_1}}{\partial u^{i_1}} \dots \frac{\partial v^{\alpha_p}}{\partial u^{i_p}} T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(u) \frac{\partial u^{j_1}}{\partial v^{\beta_1}} \dots \frac{\partial u^{j_q}}{\partial v^{\beta_q}},$$

где $\left(\frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha}\right)$ — матрица Якоби отображения $u = u(v)$, а $\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}\right)$ — матрица, обратная к матрице Якоби. Величина $p+q$ называется рангом тензора, а пара (p, q) — типом тензора. Тензоры типа $(0, 0)$ отождествляются с функциями на многообразии.

Закон тензорного преобразования легко запоминается с использованием мультииндексов. Положим

$$(i) = (i_1, \dots, i_p), \quad (j) = (j_1, \dots, j_q) \quad (\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p), \quad (\beta) = (\beta_1, \dots, \beta_q).$$

Тогда закон преобразования тензоров запишется короткой формулой

$$T_{(\beta)}^{(\alpha)}(v) = \frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial u^{(i)}} T_{(j)}^{(i)}(u) \frac{\partial u^{(j)}}{\partial v^{(\beta)}}, \quad (4.5)$$

схожей на закон преобразования матрицы поля линейного оператора.

Таким образом, векторное поле образует тензорное поле типа $(1, 0)$, дифференциальные 1-формы образуют тензорное поле типа $(0, 1)$, а поле линейного оператора образует тензорное поле типа $(1, 1)$. Ввиду очевидной двойственности, 1-формы часто называют *ковекторами*.

Первая фундаментальная форма преобразуется как

$$g_{ik}(u) du^i du^k = g_{ik}(u) \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial v^\beta} dv^\alpha dv^\beta,$$

то есть,

$$g_{\alpha\beta}(v) = g_{ik}(u) \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial v^\beta},$$

а значит матрица первой квадратичной формы $g = (g_{ij})$ образует тензор типа $(0, 2)$.

Ясно, что матрица второй квадратичной формы $B = (b_{ij})$ образует тензорное поле типа $(0, 2)$, а поле операторов Вейнгартена $A = (a_{ij}^i)$ — поле тензора типа $(1, 1)$.

Упражнение 4.1.1 Проверьте, что матрица $g^{-1} = (g^{ik})$, обратная к матрице первой квадратичной формы, образует тензорное поле типа $(2, 0)$.

4.2 Алгебраические операции над тензорами

1. Сложение тензоров. Пусть $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}, S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ — два тензорных поля одинакового типа. Определим

$$(T + S)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Тогда $T + S$ есть тензорное поле того же типа, что и тензоры T и S .

2. Умножение на функцию. Пусть $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ — тензорное поле, $\lambda : F^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция на F^n . Определим

$$(\lambda T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \lambda T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Тогда λT есть тензорное поле того же типа, что и T .

Эти две операции с очевидностью являются *тензорными*, то есть не выводят из множества тензоров. Таким образом, в каждой точке многообразия, множество тензоров типа (p, q) образует вещественное линейное пространство, размерности n^{p+q} .

Следующие две операции так же являются тензорными¹.

3. Тензорное произведение. Пусть есть два тензорных поля

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \quad \text{и} \quad S_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$$

¹Доказательство не сложно провести самостоятельно или подсмотреть в учебнике О. Борисенко "Дифференціальна геометрія і топологія". Основа, 1998 р.

типа (p, q) и (m, r) соответственно. Тогда их тензорным произведением $T \otimes S$ называется тензорное поле типа $(p + m, q + r)$ с компонентами

$$(T \otimes S)_{j_1 \dots j_q \beta_1 \dots \beta_r}^{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_m} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot S_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}.$$

Если, например, ξ и η — векторные поля, то есть тензорные поля типа $(1, 0)$, то

$$(\xi \otimes \eta)^{ik} = \xi^i \eta^k$$

есть тензорное поле типа $(2, 0)$. В частности, если $n = 2$, то матрица этого тензора имеет вид

$$(\xi \otimes \eta)^{ik} = \begin{pmatrix} \xi^1 \eta^1 & \xi^1 \eta^2 \\ \xi^2 \eta^1 & \xi^2 \eta^2 \end{pmatrix}.$$

Если же ξ — векторное поле, а ω — дифференциальная 1-форма, то $\xi \otimes \omega$ есть поле линейных операторов с матрицей

$$(\xi \otimes \omega)_k^i = \xi^i \omega_k.$$

Тензорное умножение не коммутативно, $T \otimes S \neq S \otimes T$, что легко проверить на примере тензорного произведения двух векторных полей:

$$\xi \otimes \eta = \begin{pmatrix} \xi^1 \eta^1 & \xi^1 \eta^2 \\ \xi^2 \eta^1 & \xi^2 \eta^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \eta^1 \xi^1 & \eta^1 \xi^2 \\ \eta^2 \xi^1 & \eta^2 \xi^2 \end{pmatrix} = \eta \otimes \xi.$$

Тензорное умножение ассоциативно и дистрибутивно:

$$(\lambda S + \mu T) \otimes R = \lambda(S \otimes R) + \mu(T \otimes R).$$

Это можно легко проверить с помощью формулы (4.5).

4. Перестановка индексов.

Пусть $T_{(j)}^{(i)}$ — тензор, $\sigma(\alpha)$ — некоторая перестановка соответствующего набора индексов $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Тогда набор функций

$$T_{\sigma(j)}^{\sigma(i)}$$

образует тензор, который называется тензором, образованный *перестановкой индексов*. Тензор $T_{(j)}^{(i)}$ называется *симметричным* по нижним/верхним индексам, если

$$T_{(j)}^{(i)} = T_{\sigma(j)}^{(i)}, \quad \text{соответственно} \quad T_{(j)}^{(i)} = T_{(j)}^{\sigma(i)}$$

и *кососимметричным* по нижним/верхним индексам, если

$$T_{(j)}^{(i)} = \varepsilon(\sigma) T_{\sigma(j)}^{(i)}, \quad \text{соответственно} \quad T_{(j)}^{(i)} = \varepsilon(\sigma) T_{(j)}^{\sigma(i)},$$

где $\varepsilon(\sigma)$ — четность перестановки, для любой перестановки σ . Кососимметричные тензоры типа $(0, q)$ называются *внешними формами* степени q .

5. Свертка тензора. Пусть $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ — тензорное поле типа (p, q) . Свертка по индексам i_α, j_β есть тензорное поле типа $(p-1, q-1)$, компоненты которого образуются так:

$$\sum_s T_{j_1 \dots j_{\beta-1} \ s \ j_{\beta+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} \ s \ i_{\alpha+1} \dots i_p}.$$

Например, если T_j^i — поле линейного оператора, то его свертка

$$\sum_s T_s^s$$

есть след этого оператора. Это тензор типа $(0, 0)$, то есть функция.

Скалярное произведение векторных полей может быть записано как композиция тензорного произведения и свертки. А именно, как мы знаем

$$\langle X, Y \rangle_g = g_{ik} X^i Y^k.$$

Рассмотрим тензор $T_{jl}^{ik} = (g \otimes X \otimes Y)_{jl}^{ik} = g_{jl} X^i Y^k$. Свернем его по всем индексам (полная свертка тензора)

$$\sum_{i,k=1}^n T_{ik}^{ik} = g_{ik} X^i Y^k = \langle X, Y \rangle_g.$$

Следующая операция является композицией тензорного умножения и свертки, а потому является тензорной.

6. Операция поднимания(опускания) индекса. Пусть g_{ik} — невырожденный тензор типа $(0, 2)$. Рассмотрим g^{ik} — обратный к нему тензор типа $(2, 0)$, то есть такой, что $g_{is} g^{sk} = \delta_i^k$.

Пусть $T_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_p}$ — тензор типа (p, q) , тогда тензор вида $T_{i_1 j_1 \dots j_q}^{i_2, \dots, i_p} = g_{i_1 s} T_{j_1 \dots j_q}^{s i_2, \dots, i_p}$ — есть тензор типа $(p-1, q+1)$. В этом случае говорят, что тензор $T_{i_1 j_1 \dots j_q}^{i_2, \dots, i_p}$ получен из тензора $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, опусканием индекса i_1 .

Пусть есть тензор $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, тогда операция поднятия индекса осуществляется по следующему правилу

$$T_{j_2, \dots, j_q}^{j_1 i_1 \dots i_p} = g^{j_1 s} T_{s j_2, \dots, j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Итерацией опускания (поднимания) индекса можно перейти к тензорам со всеми нижними (верхними) индексами.

4.3 Инвариантное выражение тензора. Тензоры в некоординатном базисе

Сворачивание тензора T типа (p, q) с набором из q векторных полей $(X_1, \dots, X_q)$ и набором из p 1-форм $(\omega^1, \dots, \omega^p)$ приводит к *полилинейному* отображению $T(X_1, \dots, X_q; \omega^1, \dots, \omega^p)$, задаваемому формулой

$$T(X_1, \dots, X_q; \omega^1, \dots, \omega^p) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} X_1^{j_1} \dots X_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p.$$

В силу линейности тензорного умножения, последнюю формулу можно переписать в виде

$$T(X_1, \dots, X_q; \omega^1, \dots, \omega^p) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(X_1 \otimes \dots \otimes X_q)^{j_1 \dots j_q}(\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^p)_{i_1 \dots i_p}.$$

Раскладывая векторные поля по базису $e_1, \dots, e_n$, а дифференциальные формы по двойственному² базису $e^1, \dots, e^n$, можем записать

$$X_1 = X_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, X_q = X_q^{j_q} e_{j_q}; \quad \omega^1 = \omega_{i_1}^1 e^{i_1}, \dots, \omega^p = \omega_{i_p}^p e^{i_p}.$$

Тогда, например,

$$X_1 \otimes X_2 = e_{j_1} \otimes e_{j_2} X_1^{j_1} X_2^{j_2}, \quad \omega^1 \otimes \omega^2 = e^{i_1} \otimes e^{i_2} \omega_{i_1}^1 \omega_{i_2}^2,$$

а значит

$$T(X_1, \dots, X_q; \omega^1, \dots, \omega^p) = T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} \otimes e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} X_1^{j_1} \dots X_q^{j_q} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p.$$

Следовательно, для тензора T имеем следующее координатное выражение

$$T = T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} \otimes e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$$

в разложении по базису

$$e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}.$$

Для *внешних форм* степени q можно ввести в рассмотрение некоторый специальный базис. Например при $q = 2$ можно записать

$$T = T_{ij} e^i \otimes e^j = \sum_{i < j} T_{ij} e^i \otimes e^j + \sum_{i > j} T_{ij} e^i \otimes e^j = \sum_{i < j} T_{ij} (e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i)$$

Обозначим

$$e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i := e^i \wedge e^j.$$

Тогда для кососимметричного тензора T получим выражение

$$\sum_{i < j} T_{ij} e^i \wedge e^j.$$

В частности, для стандартного координатного базиса $(du^1, \dots, du^n)$

$$T = \sum_{i < j} T_{ij} du^i \wedge du^j.$$

В общем случае, внешняя форма степени q представляется в виде (подробнее см. [9])

$$T = \sum_{i_1 < \dots < i_q} T_{i_1 \dots i_q} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_q}.$$

²Базис форм e^i называется двойственным по отношению к векторному базису e_j , если $e^i(e_j) = \delta_j^i$. Такой базис всегда существует, см. [9].

4.4 Дифференцирование тензора

Пусть $T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ — тензорное поле. Формально можно образовать новый набор функций вида

$$\frac{\partial T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}}{\partial u^k}.$$

Однако, такой набор в общем случае образует тензорного поля. В качестве примера, рассмотрим векторное поле ξ с компонентами $\xi^i(u)$. Образует набор функций $\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k}$. Сделаем замену $u = u(v)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \xi^\mu(v) &= \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{\partial v^\mu}{\partial u^i} \xi^i(u) \right) = \frac{\partial u^k}{\partial v^\alpha} \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{\partial v^\mu}{\partial u^i} \xi^i(u) \right) = \\ &= \frac{\partial u^k}{\partial v^\alpha} \left(\frac{\partial^2 v^\mu}{\partial u^k \partial u^i} \xi^i(u) + \frac{\partial v^\mu}{\partial u^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial u^k} \right) = \frac{\partial v^\mu}{\partial u^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial v^\alpha} + \frac{\partial u^k}{\partial v^\alpha} \frac{\partial^2 v^\mu}{\partial u^k \partial u^i} \xi^i(u). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Заметим, что полученная формула справедлива и "в обратном направлении", а именно,

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k}(u) = \frac{\partial u^i}{\partial v^\sigma} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial v^\beta} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^k} + \frac{\partial v^\beta}{\partial u^k} \frac{\partial^2 u^i}{\partial v^\beta \partial v^\alpha} \xi^\alpha(v). \quad (4.7)$$

Из полученной формулы следует, что набор функций $\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k}$ не образует тензора, так как преобразуется по тензорному закону только при линейной замене параметров. Поэтому определение производной тензора требует некоторой коррекции, чтобы операция дифференцирования не выводила из класса тензоров. Оказывается, что такая коррекция может быть осуществлена при помощи некоторого набора функций, являющихся аналогом символов Кристоффеля. Заметим, что символы Кристоффеля могут быть вычислены по коэффициентам первой квадратичной формы, то есть положительно определенной квадратичной формы g , заданной на многообразии F^n . Если такая форма задана, то пара (F^n, g) называется *римановым многообразием*. Покажем, что набор символов Кристоффеля не образуют тензора.

Лемма 4.4.1 Пусть (F^n, g) — риманово многообразие. Тогда при замене параметров $u = u(v)$ символы Кристоффеля преобразуются по формуле

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(v) = \frac{\partial v^\mu}{\partial u^s} \left(\frac{\partial^2 u^s}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} + \Gamma_{ik}^s(u) \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial v^\beta} \right). \quad (4.8)$$

Доказательство. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(u)$ некоторая регулярная параметризация F^n как подмногообразия в евклидовом пространстве и $\vec{\rho} = \vec{r}(u(v))$ ее локальная перепараметризация. Тогда имеют место два разложения Гаусса:

$$\partial_{\alpha\beta} \vec{\rho} = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(v) \partial_\sigma \vec{\rho} + b_{\alpha\beta}(v) \vec{n}(v), \quad \partial_{ik} \vec{r} = \Gamma_{ik}^s(u) \partial_s \vec{r} + b_{ik}(u) \vec{n}(u)$$

Используя закон преобразования (4.1), имеем:

$$\begin{aligned}\partial_{\alpha\beta}\vec{\rho} &= \partial_{\alpha}\left(\frac{\partial u^k}{\partial v^{\beta}}\partial_k\vec{r}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^{\alpha}\partial v^{\beta}}\partial_k\vec{r} + \frac{\partial u^k}{\partial v^{\beta}}\partial_{\alpha}(\partial_k\vec{r}) = \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^{\alpha}\partial v^{\beta}}\partial_k\vec{r} + \frac{\partial u^k}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial u^i}(\partial_k\vec{r}) = \\ &= \frac{\partial^2 u^m}{\partial v^{\alpha}\partial v^{\beta}}\partial_m\vec{r} + \frac{\partial u^k}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}}\left(\Gamma_{ik}^m(u)\partial_m\vec{r}(u) + b_{ik}(u)\vec{n}(u)\right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^{\alpha}\partial v^{\beta}} + \Gamma_{ik}^m(u)\frac{\partial u^k}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}}\right)\partial_m\vec{r}(u) + b_{ik}(u)\frac{\partial u^k}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}}\vec{n}(u).\end{aligned}$$

С другой стороны, снова используя (4.1) это же разложение можно записать в виде

$$\partial_{\alpha\beta}\vec{\rho} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}(v)\frac{\partial u^m}{\partial v^{\sigma}}\partial_m\vec{r} + b_{\alpha\beta}\vec{n}(v).$$

Отсюда следует равенство

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}(v)\frac{\partial u^m}{\partial v^{\sigma}} = \frac{\partial^2 u^m}{\partial v^{\alpha}\partial v^{\beta}} + \Gamma_{ik}^m(u)\frac{\partial u^k}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}},$$

что и требовалось доказать. ■

Напомним, что частная *ковариантную* производная векторного поля ξ^i определялась как проекция на касательную плоскость производной касательного векторного поля поверхности формулой, включающей символы Кристоффеля, а именно,

$$\nabla_k \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial u^k} + \Gamma_{kj}^i \xi^j.$$

Оказывается, что такая, исправленная производная, уже образует тензор.

Утверждение 4.4.1 Пусть ξ – векторное поле на римановом многообразии (F^n, g) . Тогда набор функций

$$\nabla_k \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial u^k} + \Gamma_{kj}^i \xi^j,$$

где Γ_{kj}^i – символы Кристоффеля, составляет тензор типа $(1,1)$

Доказательство. Применив формулу (4.7) и используя (4.8), находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k}(u) &= \frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}}\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k} + \frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k}\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^{\beta}\partial v^{\alpha}}\xi^{\alpha}(v) = \frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}}\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k} + \\ &+ \frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k}\left(\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}(v)\frac{\partial u^i}{\partial v^{\sigma}} - \Gamma_{jm}^i(u)\frac{\partial u^m}{\partial v^{\alpha}}\frac{\partial u^j}{\partial v^{\beta}}\right)\xi^{\alpha}(v) = \\ &= \frac{\partial u^i}{\partial v^{\alpha}}\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial v^{\beta}}\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k} + \frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k}\Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}(v)\xi^{\alpha}(v)\frac{\partial u^i}{\partial v^{\sigma}} - \Gamma_{jm}^i(u)\frac{\partial u^m}{\partial v^{\alpha}}\xi^{\alpha}(v)\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial v^{\beta}} = \\ &= \frac{\partial u^i}{\partial v^{\sigma}}\left(\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial v^{\beta}} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma}(v)\xi^{\alpha}(v)\right)\frac{\partial v^{\beta}}{\partial u^k} - \Gamma_{jm}^i(u)\xi^m(u)\delta_j^k.\end{aligned}$$

Окончательно, находим

$$\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u^k} + \Gamma_{km}^i \xi^m \right)(u) = \frac{\partial u^i}{\partial v^\sigma} \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial v^\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma \xi^\alpha \right)(v) \frac{\partial v^\beta}{\partial u^k}$$

что и завершает доказательство. ■

Утверждение 4.4.2 Пусть (F^n, g) риманово многообразие. Тогда

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki}^s g_{js} + \Gamma_{kj}^s g_{is}. \quad (4.9)$$

Доказательство. Используя локальную параметризацию $\vec{r} = \vec{r}(u)$, запишем

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \langle \partial_i \vec{r}, \partial_j \vec{r} \rangle = \langle \partial_{ki} \vec{r}, \partial_j \vec{r} \rangle + \langle \partial_i \vec{r}, \partial_{kj} \vec{r} \rangle = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i} = \Gamma_{ki}^s g_{js} + \Gamma_{kj}^s g_{is}.$$

■

Упражнение 4.4.1 Проверьте, что

$$\partial_k g^{ij} = -\Gamma_{ks}^i g^{sj} - \Gamma_{ks}^j g^{is}. \quad (4.10)$$

Формула для ковариантного дифференцирования векторных полей, то есть тензоров типа $(1, 0)$, была нам известна. Для поля 1-форм, рассмотрим следующую конструкцию.

Пусть $\omega = \omega_m du^m$ — дифференциальная форма. Тогда $\xi^i = g^{im} \omega_m$ есть координаты векторного поля. Используя (4.10), находим

$$\begin{aligned} \nabla_k \xi^i &= \partial_k \xi^i + \Gamma_{ks}^i \xi^s = \partial_k (g^{im} \omega_m) + \Gamma_{ks}^i g^{sm} \omega_m = \\ &= \partial_k g^{im} \omega_m + g^{im} \partial_k \omega_m + \Gamma_{ks}^i g^{sm} \omega_m = (-\Gamma_{ks}^i g^{sm} - \Gamma_{ks}^m g^{is}) \omega_m + g^{im} \partial_k \omega_m + \Gamma_{ks}^i g^{sm} \omega_m = \\ &= g^{im} \partial_k \omega_m - \Gamma_{ks}^m g^{is} \omega_m = g^{is} (\partial_k \omega_s - \Gamma_{ks}^m \omega_m). \end{aligned}$$

Так как все использованные нами операции были тензорными, то набор функций $\partial_k \omega_s - \Gamma_{ks}^m \omega_m$ образует тензорное поле типа $(0, 2)$. Положим по определению

$$\nabla_k \omega_s = \partial_k \omega_s - \Gamma_{ks}^m \omega_m. \quad (4.11)$$

Для поля линейного оператора (a_j^i) естественно определить ковариантную производную формулой

$$\nabla_k a_j^i = \partial_k a_j^i + \Gamma_{ks}^i a_j^s - \Gamma_{kj}^s a_s^i. \quad (4.12)$$

Для тензоров типа (p, q) определим ковариантную производную формулой

$$\begin{aligned} \nabla_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} &= \frac{\partial T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial u^k} + \Gamma_{k\alpha}^{i_2} T_{j_1 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p} + \Gamma_{k\alpha}^{i_1} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \alpha \dots i_p} + \dots + \\ &+ \Gamma_{k\alpha}^{i_p} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{p-1} \alpha} - \Gamma_{kj_1}^\alpha T_{\alpha j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \Gamma_{kj_q}^\alpha T_{j_1 \dots j_{q-1} \alpha}^{i_1 \dots i_p}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Полученный тензор имеет тип $(p, q + 1)$.

Композиция тензорного умножения и свертки позволяет естественным образом определить ковариантную производную одного векторного поля по направлению другого. А именно, если X и Y – два векторных поля, то

$$\nabla_X Y := X^k \nabla_k Y.$$

Отметим, что $\nabla_X Y$ есть тензорное поле типа $(1, 0)$. То есть, дифференцирование векторного поля по направлению другого векторного поля не выводит из класса векторных полей.

Упражнение 4.4.2 *Покажите, что любых гладких векторных полей X, Y, Z и гладких функций λ, μ производная векторного поля по направлению обладает следующими свойствами³*

- $\nabla_{\lambda X + \mu Y} Z = \lambda \nabla_X Z + \mu \nabla_Y Z,$
- $\nabla_X (\lambda Y) = \partial_X \lambda \cdot Y + \lambda \nabla_X Y.$

В частности, фиксированное векторное поле ξ задает поле линейного оператора A_ξ , определяемого формулой

$$A_\xi X = -\nabla_X \xi. \quad (4.14)$$

Этот линейный оператор называется *оператором Номидзу*.

Заметим, что в доказательстве тензорного характера ковариантной производной мы использовали только характер преобразования символов Кристоффеля, но не использовали способ вычисления самих символов. Это дает возможность дать следующее определение.

Определение 4.4.1 *Набор функций Γ_{ik}^j на гладком многообразии F^n , меняющихся при замене параметров по закону*

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(v) = \frac{\partial v^\mu}{\partial u^s} \left(\frac{\partial^2 u^s}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} + \Gamma_{ik}^s(u) \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial v^\beta} \right) \quad (4.15)$$

называется дифференциально-геометрической или аффинной связностью.

Как отмечалось, набор функций связности не подчиняется тензорному закону преобразования. Однако легко заметить, что набор функций $\Gamma_{ik}^j - \Gamma_{ki}^j$ преобразуется по тензорному закону. Тензор

$$T_{ik}^j = \Gamma_{ik}^j - \Gamma_{ki}^j$$

называется *тензором кручения* аффинной связности.

Упражнение 4.4.3 Для векторных полей X и Y , набор функций $T_{ik}^j X^i Y^k$ образует векторное поле, обозначаемое как $T(X, Y)$. Покажите, что

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

³Эти свойства могут быть положены в основу определения связности на многообразии (См. Кобаяси К., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии).

где $[X, Y]$ – векторное поле с координатами

$$[X, Y]^j = X^s \frac{\partial Y^j}{\partial u^s} - Y^s \frac{\partial X^j}{\partial u^s}.$$

Векторное поле $[X, Y]$ называется *коммутатором*, или *скобкой Ли* векторных полей X и Y .

Упражнение 4.4.4 Покажите, что для любых векторных полей X, Y и Z справедливо тождество Якоби

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Это означает, что линейное пространство векторных полей образует алгебру Ли.

В общем случае $\Gamma_{ki}^j \neq \Gamma_{ik}^j$. Если же тензор кручения связности тождественно нулевой, то есть $\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j$, то связность называется *связностью без кручения* или *симметричной* связностью.

Наличие связности на многообразии означает возможность определить ковариантные производные тензорных полей формулой (4.13). Как следствие, если a_{ij} – тензор типа $(0, 2)$, то

$$\nabla_k a_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma_{ki}^s a_{sj} - \Gamma_{kj}^s a_{is}.$$

Связность на римановом многообразии (F^n, g) называется *согласованной с метрикой* или *метрической связностью*, если первая квадратичная форма g параллельна относительно этой связности, то есть $\nabla_k g_{ij} = 0$. Это означает, что

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}.$$

Симметричная связность, согласованная с метрикой называется *римановой связностью*.

Утверждение 4.4.3 Если Γ_{ik}^j – симметричная связность, согласованная с метрикой на римановом многообразии (F^n, g) , то

$$\Gamma_{ik,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \right), \quad \Gamma_{ik}^j = g^{jm} \Gamma_{ik,m}.$$

Доказательство. Рассмотрим ковариантную производную

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma_{ki}^s g_{sj} - \Gamma_{kj}^s g_{is} = 0.$$

Обозначим, $\Gamma_{ki,m} = \Gamma_{ki}^s g_{sm}$, тогда

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}, \quad \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{ij,k} \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{jk,i}.$$

Взяв сумму первых двух выражений и вычитая третье, находим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \right) = \Gamma_{ik,j}$$

■

Это означает, что символы Кристоффеля образуют единственную риманову связность на римановом многообразии (F^n, g) .

Выражению для ковариантной производной римановой связности можно придать элегантное выражение в виде так называемой формулы Кошуля.

Утверждение 4.4.4 *Для ковариантной производной векторных полей относительно римановой связности справедлива следующая формула*

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle_g = \partial_X \langle Y, Z \rangle_g + \partial_Y \langle X, Z \rangle_g - \partial_Z \langle X, Y \rangle_g - \langle X, [Y, Z] \rangle_g - \langle Y, [X, Z] \rangle_g + \langle Z, [X, Y] \rangle_g \quad (4.16)$$

Доказательство. Выражение для координатных функций ковариантной производной $\nabla_X Y$ запишем в виде

$$(\nabla_X Y)^s = X^i (\partial_i Y^s + \Gamma_{ij}^s Y^j) := \partial_X Y^s + \Gamma^s(X, Y)$$

или, в векторной форме,

$$\nabla_X Y = \partial_X Y + \Gamma(X, Y).$$

Выражение для символов Кристоффеля первого рода свернем с векторными полями

$$2\Gamma_{ij,k} X^i Y^j Z^k = (X^i \partial_i g_{jk}) Y^j Z^k + (Y^j \partial_j g_{ik}) X^i Z^k - (Z^k \partial_k g_{ij}) X^i Y^j.$$

Теперь заметим, что

$$(X^i \partial_i g_{jk}) Y^j Z^k = X^i \partial_i (g_{jk} Y^j Z^k) - g_{jk} X^i \partial_i Y^j Z^k - g_{jk} Y^j X^i \partial_i Z^k = \partial_X \langle Y, Z \rangle_g - \langle \partial_X Y, Z \rangle_g - \langle Y, \partial_X Z \rangle_g.$$

Выражение в левой части равенства в наших обозначениях можно преобразовать так

$$2\Gamma_{ij,k} X^i Y^j Z^k = 2\langle \Gamma(X, Y), Z \rangle_g = 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle_g - 2\langle \partial_X Y, Z \rangle_g.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle_g &= 2\langle \partial_X Y, Z \rangle_g + \partial_X \langle Y, Z \rangle_g - \langle \partial_X Y, Z \rangle_g - \langle Y, \partial_X Z \rangle_g + \\ &\quad \partial_Y \langle X, Z \rangle_g - \langle \partial_Y X, Z \rangle_g - \langle X, \partial_Y Z \rangle_g - \partial_Z \langle X, Y \rangle_g + \langle \partial_Z X, Y \rangle_g + \langle X, \partial_Z Y \rangle_g = \\ &= \partial_X \langle Y, Z \rangle_g + \partial_Y \langle X, Z \rangle_g - \partial_Z \langle X, Y \rangle_g + \langle [X, Y], Z \rangle_g + \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle_g = \\ &= \partial_X \langle Y, Z \rangle_g + \partial_Y \langle X, Z \rangle_g - \partial_Z \langle X, Y \rangle_g - \langle X, [Y, Z] \rangle_g - \langle Y, [X, Z] \rangle_g + \langle Z, [X, Y] \rangle_g. \end{aligned}$$

■

Верно и обратное, если связность удовлетворяет свойству (4.16), то она является римановой.

4.5 Тензор кривизны риманова многообразия.

Если ξ это C^2 -гладкое векторное поле на плоскости или в евклидовом пространстве, заданное в декартовых координатах, то

$$\partial_i \partial_k \xi = \partial_k \partial_i \xi.$$

В общем случае следует вычислять ковариантные производные векторного поля. Будут ли они коммутировать?

Пусть ξ — векторное поле. Рассмотрим разность $\nabla_k \nabla_i \xi - \nabla_i \nabla_k \xi$. Имеем,

$$\nabla_i \xi^m = \frac{\partial \xi^m}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^m \xi^j.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \nabla_k (\nabla_i \xi^m) = & \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^m \xi^j \right) + \Gamma_{ks}^m \left(\frac{\partial \xi^s}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^s \xi^j \right) - \Gamma_{ki}^t \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial u^t} + \Gamma_{tj}^m \xi^j \right) = \\ & \frac{\partial^2 \xi^m}{\partial u^k \partial u^i} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^k} \xi^j + \Gamma_{ij}^m \frac{\partial \xi^j}{\partial u^k} + \Gamma_{ks}^m \frac{\partial \xi^s}{\partial u^i} + \Gamma_{ks}^m \Gamma_{ij}^s \xi^j - \Gamma_{ki}^t \frac{\partial \xi^m}{\partial u^t} - \Gamma_{ki}^t \Gamma_{tj}^m \xi^j. \end{aligned}$$

Поменяв индексы $i \rightarrow k$ и $k \rightarrow i$, находим

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_k \xi^m = & \frac{\partial^2 \xi^m}{\partial u^i \partial u^k} + \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial u^i} \xi^j + \Gamma_{kj}^m \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} + \Gamma_{is}^m \frac{\partial \xi^s}{\partial u^k} + \Gamma_{is}^m \Gamma_{kj}^s \xi^j - \Gamma_{ik}^t \frac{\partial \xi^m}{\partial u^t} - \Gamma_{ik}^t \Gamma_{tj}^m \xi^j. \end{aligned}$$

Вычитая, находим

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_i \xi - \nabla_i \nabla_k \xi = & \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^k} \xi^j - \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial u^i} \xi^j + \Gamma_{ks}^m \Gamma_{ij}^s \xi^j - \Gamma_{is}^m \Gamma_{kj}^s \xi^j = \\ & \xi^j \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial u^i} + \Gamma_{ks}^m \Gamma_{ij}^s - \Gamma_{is}^m \Gamma_{kj}^s \right). \quad (4.17) \end{aligned}$$

Левая часть полученного равенства имеет тензорный характер. Следовательно, правая часть определяет некоторый тензор, который называется тензором Римана.

Определение 4.5.1 Тензором кривизны или тензором Римана типа $(1, 3)$ называется тензор с компонентами

$$R_{jki}^m = \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^m}{\partial u^i} + \Gamma_{ks}^m \Gamma_{ij}^s - \Gamma_{is}^m \Gamma_{kj}^s,$$

где Γ_{ij}^m — компоненты римановой связности (символы Кристоффеля).

Опустив верхний индекс при помощи метрического тензора, получим тензор кривизны типа $(0, 4)$:

$$R_{mjki} = \frac{\partial \Gamma_{ij,m}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj,m}}{\partial u^i} + \Gamma_{kj}^s \Gamma_{mi,s} - \Gamma_{ij}^s \Gamma_{mk,s}.$$

Тензор Римана обладает легко проверяемыми симметриями относительно индексов вида

$$R_{mjki} = -R_{mjik}, \quad R_{mjki} = -R_{jmki}, \quad R_{mjki} = R_{kimj}$$

и

$$R_{mjki} + R_{mkij} + R_{mijk} = 0 \quad (\text{алгебраическое тождество Бьянки}),$$

поэтому не все его компоненты являются существенными.

Упражнение 4.5.1 *Покажите, что тензор Римана удовлетворяет дифференциальному тождеству Бьянки*

$$\nabla_s R_{jki}^m + \nabla_k R_{jis}^m + \nabla_i R_{jsk}^m.$$

Утверждение 4.5.1 *Тензор Римана тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда существует локальная система координат относительно которой все символы Кристоффеля тождественно нулевые.*

Доказательство. Рассмотрим преобразование символов Кристоффеля (4.15) и потребуем выполнения тождества $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(v) = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы имела решение система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} + \Gamma_{ik}^m(u) \frac{\partial u^k}{\partial v^\beta} \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} = 0.$$

Условием интегрируемости этой системы является тождество

$$\frac{\partial}{\partial v^\lambda} \left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^\alpha \partial v^\lambda} \right).$$

Для упрощения выкладок, введем следующие обозначения

$$(u^1, \dots, u^n) := u, \quad \frac{\partial u^k}{\partial v^\alpha} := \partial_\alpha u^k, \quad \frac{\partial^2 u^m}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} := \partial_{\alpha\beta} u^m, \quad \dots, \\ \left(\Gamma(\partial_\beta u, \partial_\alpha u) \right)^m = \Gamma_{ik}^m \partial_\beta u^k \partial_\alpha u^i.$$

В этих обозначениях система уравнений приведет к "векторной" форме

$$\partial_{\alpha\beta} u = -\Gamma(\partial_\beta u, \partial_\alpha u).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \partial_\lambda(\partial_{\alpha\beta} u) &= -(\partial_\lambda \Gamma)(\partial_\beta u, \partial_\alpha u) - \Gamma(\partial_{\lambda\beta} u, \partial_\alpha u) - \Gamma(\partial_\beta u, \partial_{\lambda\alpha} u) = \\ &= -(\partial_\lambda \Gamma)(\partial_\beta u, \partial_\alpha u) + \Gamma(\Gamma(\partial_\lambda u, \partial_\beta u), \partial_\alpha u) + \Gamma(\partial_\beta u, \Gamma(\partial_\lambda u, \partial_\alpha u)). \end{aligned}$$

Соответственно,

$$\partial_\beta(\partial_{\alpha\lambda} u) = -(\partial_\beta \Gamma)(\partial_\lambda u, \partial_\alpha u) + \Gamma(\Gamma(\partial_\beta u, \partial_\lambda u), \partial_\alpha u) + \Gamma(\partial_\lambda u, \Gamma(\partial_\beta u, \partial_\alpha u)).$$

Вычитая, находим

$$\begin{aligned} \partial_\lambda(\partial_{\alpha\beta} u) - \partial_\beta(\partial_{\alpha\lambda} u) &= \\ &= (\partial_\beta \Gamma)(\partial_\lambda u, \partial_\alpha u) - (\partial_\lambda \Gamma)(\partial_\beta u, \partial_\alpha u) + \Gamma(\partial_\beta u, \Gamma(\partial_\lambda u, \partial_\alpha u)) - \Gamma(\partial_\lambda u, \Gamma(\partial_\beta u, \partial_\alpha u)). \end{aligned}$$

Наконец, заметим, что $\partial_\beta \Gamma_{ik}^m(u) = \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{ik}^m\right) \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta}$. Поэтому, возвращаясь к индексным обозначениям, получаем

$$\partial_\lambda(\partial_{\alpha\beta}u) - \partial_\beta(\partial_{\alpha\lambda}u) =$$

$$\left(\partial_j \Gamma_{ik}^m - \partial_k \Gamma_{ij}^m + \Gamma_{js}^m \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{ks}^m \Gamma_{ij}^s\right) \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} \frac{\partial u^k}{\partial v^\lambda} \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} = R_{ijk}^m \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} \frac{\partial u^k}{\partial v^\lambda} \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} = 0.$$

В силу невырожденности матриц Якоби, последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда $R_{ijk}^m = 0$.

■

Упражнение 4.5.2 *Покажите, что риманово многообразие F^n допускает локальную параметризацию, относительно которой коэффициенты первой фундаментальной формы постоянны тогда и только тогда, когда существует параметризация относительно которой все символы Кристоффеля тождественно нулевые.*

Тензор Римана может быть выражен в инвариантных, бескоординатных терминах. Для начала немного аналогии. Для C^2 гладкой функции $f : F^n \rightarrow R$ свертка формы первого дифференциала $df = \frac{\partial f}{\partial u^i}$ с векторным полем X имеет вид $X^i \frac{\partial f}{\partial u^i} = \partial_X f := df(X)$. Второй дифференциал функции f определяет симметричную 2-форму $\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k} du^i du^k$, свертка которой с двумя векторными полями X и Y задает симметричную билинейную форму $(d^2 f)(X, Y) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k} X^i Y^k$. Аналогом формы первого дифференциала для векторного поля ξ является форма ковариантного дифференциала $D\xi = \nabla_i \xi du^i$ свертка которого с векторным полем X имеет вид $X^i \nabla_i \xi = \nabla_X \xi := (D\xi)(X)$. Аналогом формы второго дифференциала функции является (векторнозначная) форма второго ковариантного дифференциала векторного поля ξ , а именно

$$(D^2 \xi)(X, Y) = X^i Y^k \nabla_i \nabla_k \xi.$$

Пользуясь правилом Лейбница для ковариантной производной, получаем

$$\nabla_X(\nabla_Y \xi) = X^i \nabla_i (Y^k \nabla_k \xi) = X^i \nabla_i Y^k \xi + X^i Y^k \nabla_i \nabla_k \xi = \nabla_{\nabla_X Y} \xi + (D^2 \xi)(X, Y).$$

Отсюда следует, что

$$(D^2 \xi)(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y} \xi.$$

Полученная форма может быть разложена на симметричную и кососимметричную компоненты в виде

$$(D^2 \xi)(X, Y) = \frac{1}{2} \left((D^2 \xi)(X, Y) + (D^2 \xi)(Y, X) \right) + \frac{1}{2} \left((D^2 \xi)(X, Y) - (D^2 \xi)(Y, X) \right).$$

Кососимметричная часть полученного выражения совпадает с выражением (4.17), если последнее свернуть с X и Y . С другой стороны,

$$(D^2 \xi)(X, Y) - (D^2 \xi)(Y, X) = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[XY]} \xi$$

и следовательно, инвариантное выражение для (свернутого с векторными полями) тензора кривизны имеет вид

$$R(X, Y)\xi = (D^2 \xi)(X, Y) - (D^2 \xi)(Y, X) = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[XY]} \xi.$$

и является мерой несимметричности формы второго ковариантного дифференциала векторного поля.

Упражнение 4.5.3 *Покажите, что выражение для тензора кривизны в терминах оператора Номидзу (4.14) имеет вид*

$$R(X, Y)\xi = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y.$$

Если ξ – поле единичных нормалей семейства гиперповерхностей (заданных, например, уравнением $f(u^1, \dots, u^n) = \text{const}$), то A_ξ является полем операторов Вейнгартена для каждой из поверхностей и полученное выражение совпадает с уравнением Кодацци.

Упражнение 4.5.4 *Докажите инвариантное выражение для алгебраического тождества Бьянки*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Указание: алгебраическое тождество Бьянки сводится к тождеству Якоби для векторных полей.

Упражнение 4.5.5 *Покажите, что инвариантное выражения для ковариантной производной тензора Римана имеет вид*

$$(\nabla_W R)(X, Y)Z = \nabla_W(R(X, Y)Z) - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X, \nabla_W Y)Z - R(X, Y)\nabla_W Z.$$

Покажите, что инвариантное дифференциальное тождество Бьянки имеет вид

$$(\nabla_W R)(X, Y)Z + (\nabla_X R)(Y, W)Z + (\nabla_Y R)(W, X)Z = 0.$$

Тензор Римана называется тензором кривизны ввиду следующей конструкции. Пусть (F^n, g) – риманово многообразие. Зафиксируем точку $q \in F^n$ и выберем два ортонормированных касательных вектора $X, Y \in T_q F^n$. Обозначим через $F^2 \subset F^n$ двумерную поверхность, образованную всевозможными геодезическими, выходящими из точки q в направлении всевозможных единичных касательных векторов, лежащих в плоскости векторов X и Y . Выберем единичный вектор $\xi \in T_q F^2$ и рассмотрим параллельный перенос вектора ξ по малому замкнутому контуру $\partial\sigma$, ограничивающему односвязную область σ на поверхности F^2 . По Лемме 3.24.2, результат параллельного перенесения образует с исходным вектором ξ угол $\Delta\varphi$ равный

$$\Delta\varphi = \iint_{\sigma} K dS,$$

где K – гауссова кривизна F^2 в области, ограниченной этим контуром. Тогда предел

$$\lim_{\sigma \rightarrow q} \frac{\Delta\varphi}{S(\sigma)} = K(q)$$

называется кривизной риманова многообразия F^n в точке q в двумерном направлении (X, Y) или, коротко, *секционной кривизной* $K_{XY}(q)$. Можно показать [15], что секционная кривизна риманова многообразия выражается через тензор Римана формулой

$$K(X, Y) = \frac{R_{ijkl}X^iY^jX^kY^l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})X^iY^jX^kY^l}.$$

Этому выражению можно придать более ясный вид.

Пусть X, Y, Z и U касательные векторы в точке $q \in F^n$. Рассмотрим свертку

$$R^m(X, Y)Z = R_{ijk}^m Z^i X^j Y^k.$$

Это тензор типа $(1,0)$, то есть вектор в точке q . Тогда

$$\langle R(X, Y)Z, U \rangle_g = g_{ml} R_{ijk}^m Z^i X^j Y^k U^l = R_{lijk} Z^i X^j Y^k U^l.$$

Выражение в знаменателе есть преобразуется к виду

$$(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})X^i Y^j X^k Y^l = \\ g_{ik}X^i X^k \cdot g_{jl}Y^j Y^l - g_{il}X^i Y^k \cdot g_{jk}X^k Y^j = |X|_g^2 |Y|_g^2 - \langle X, Y \rangle_g^2.$$

и выражает квадрат площади параллелограмма, натянутого на векторы X и Y . Таким образом,

$$K_q(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle_g}{|X|_g^2 |Y|_g^2 - \langle X, Y \rangle_g^2}$$

Секционная кривизна определяет тензор кривизны в том смысле, что если известна секционная кривизна по всем двумерным направлениям, то известен и тензор кривизны [17].

Упражнение 4.5.6 *Покажите, что для тензора кривизны справедливо представление*

$$6\langle R(X, Y)Z, U \rangle = K(X + U, Y + Z) - K(X + U, Y) - K(X + U, Z) - K(X, Y + Z) - \\ K(U, Y + Z) + K(X, Z) + K(U, Z) - K(Y + U, X + Z) + \\ K(Y + U, X) + K(Y + U, Z) + K(Y, X + Z) + K(U, X + Z) - \\ K(Y, Z) - K(U, Z).$$

Поверхности, секционная кривизна которых не зависит от точки и двумерного направления называются поверхностями (пространствами) постоянной кривизны. На самом деле, требование независимости от точки излишне, так как справедлива [16]

Теорема 4.5.1 (*Shur*) *Если секционная кривизна пространства в каждой точке не зависит от выбора двумерного направления, то она не зависит и от выбора точки.*

Для пространств постоянной кривизны с тензором Римана устроен очень просто, а именно

$$R(X, Y)Z = c(\langle Y, Z \rangle_g X - \langle X, Z \rangle_g Y).$$

4.5.1 Тензор Риччи и скалярная кривизна

Тензор Римана в больших размерностях содержит значительное число существенных компонент, а именно $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$. Для упрощения ситуации, можно рассматривать свертку тензора Римана по некоторой паре индексов. В геометрии используется свертка тензора Римана вида

$$R_{ik} = R_{isk}^s.$$

Полученный тензор симметричен по индексам (i, k) и называется *тензором Риччи*. Этот тензор имеет $\frac{n(n+1)}{2}$ существенных компонент и значительно проще тензора Римана. С другой стороны, он содержит меньше информации о геометрии пространства. Тензор Риччи имеет тип $(0,2)$. Поднятием индекса, определяется тензор Риччи типа $(1,1)$, а именно

$$R_k^i = g^{is} R_{sk}.$$

Кривизной Риччи в направлении *единичного* вектора X называется величина

$$Ric(X) = R_{ik} X^i X^k.$$

Пространства с постоянной кривизной Риччи называются *Эйнштейновыми*. Тензор Риччи таких пространств пропорционален метрическому тензору

$$R_{ik} = \lambda g_{ik}.$$

Последнее уравнение (как уравнение относительно метрического тензора) было найдено А. Эйнштейном как *уравнение гравитационного поля в вакууме*.

Геометрический смысл кривизны Риччи можно описать через секционные кривизны следующим образом. Пусть X — данный единичный вектор. Дополним его до ортонормированного репера $(e_1, \dots, e_{n-1}, X)$. Тогда

$$Ric(X) = \sum_{\alpha=1}^{n-1} K(e_\alpha, X).$$

Еще меньше информации содержит *скалярная кривизна* пространства, определяемая как свертка тензора Риччи типа $(1,1)$, а именно

$$r = R_s^s$$

Скалярная кривизна есть функция точки поверхности. Нетрудно видеть, что в уравнении Эйнштейна $\lambda = r/n$.

4.6 Дифференциальные операторы Бельтрами: градиент и лапласиан

Напомним, что если $\omega = \omega_i du^i$ — дифференциальная 1-форма, а $X = X^i \partial_i$ — векторное поле, то значением формы ω на векторном поле X называется функция

$$\omega(X) = \sum_i \omega_i X^i.$$

Ясно, что эта функция может рассматриваться как свертка тензорного произведения $\omega \otimes X$. Так, например, если $\omega = df = \partial_i f du^i$ есть форма первого дифференциала гладкой функции на многообразии, то

$$df(X) = \partial_i f X^i = \partial_X f$$

есть производная функции f по направлению векторного поля X .

Определение 4.6.1 *Векторное поле*

$$(\text{grad } f)^i = g^{is} \partial_s f,$$

двойственное 1-форме первого дифференциала гладкой функции $f : F^n \rightarrow \mathbb{R}$, называется полем градиента функции f .

Геометрический смысл векторного поля градиента проясняет следующее утверждение.

Утверждение 4.6.1 *Пусть $f : F^n \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция. Тогда векторное поле градиента является полем нормалей поверхности уровня $f(u^1, \dots, u^n) = \text{const}$ и определяет направление наибольшего роста/снижения функции f .*

Доказательство. Пусть $p \in F^n$ – произвольная точка и $\gamma : I \rightarrow F^n$ – гладкая кривая на поверхности уровня, проходящая через точку p . Будем считать, что $\gamma(0) = p$. Тогда

$$f(u^1(t), \dots, u^n(t)) \equiv 0.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} f = \partial_i f \frac{du^i}{dt} \equiv 0.$$

Следовательно, в точке p

$$df(\gamma'(0)) = 0$$

для любой кривой, проходящей через точку p . То есть, для любого касательного вектора $X \in T_p F^n$,

$$df(X) = \partial_i f X^i = g_{ik} g^{kj} \partial_j f X^i = \langle \text{grad } f, X \rangle_g = 0,$$

что доказывает первое свойство.

Рассмотрим всевозможные натурально параметризованные кривые $\gamma(s)$, проходящие через точку $p(s=0)$ и будем искать направление в точке p , дающее экстремума функции

$$f'(s) = (f \circ \gamma)' = \partial f \cdot \gamma'$$

в точке p . Поскольку для непостоянной функции f критические точки функций f' и $(f')^2$ совпадают, то будем решать задачу на условный экстремум именно для $(f')^2$.

Положим $\gamma'(0) = X$ с условием $g_{ik} X^i X^k = 1$. Тогда наша задача сводится к задаче на условный экстремум функции

$$(\partial_i f X^i)^2 = \partial_i f \partial_k f X^i X^k = \Phi_{ik} X^i X^k = X^t \Phi X,$$

где мы обозначили $\Phi = (\Phi_{ik}) = (\partial_i f \partial_k f)$. Соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$L = X^t \Phi X - \lambda X^t g X = (\Phi_{ik} - \lambda g_{ik}) X^i X^k.$$

Дифференцирование L по X^i дает систему линейных уравнений

$$(\Phi_{ik} - \lambda g_{ik}) X^k = 0 \quad \sim \quad (\Phi - \lambda g) X = 0$$

Умножение последней системы на X^t , с учетом уравнения связи, дает:

$$X^t \Phi X = \lambda.$$

Значит, множители Лагранжа и есть искомые экстремумы. Так ранг матрицы Φ равен 1, то характеристическое уравнение $\det(\Phi - \lambda g) = 0$ имеет вид

$$\lambda^n - \text{trace}(g^{-1} \Phi) \lambda^{n-1} = 0,$$

то есть, единственное ненулевое собственное значение равно

$$\lambda = \text{trace}(g^{-1} \Phi) = g^{ik} \partial_i f \partial_k f = |\text{grad } f|_g^2.$$

что и требовалось доказать. ■

Определение 4.6.2 *Первым дифференциальным оператором Бельтрами $\nabla(\cdot, \cdot)$ называется дифференциальный оператор на гладких функциях $f : F^n \rightarrow \mathbb{R}$, действующий по правилу*

$$\nabla(f, f) = |\text{grad } f|_g^2.$$

Соответствующий билинейный оператор имеет вид $\nabla(\varphi, f) = \langle \text{grad } \varphi, \text{grad } f \rangle_g$.

Определение 4.6.3 *Дивергенцией векторного поля X на римановом многообразии (F^n, g) называется функция*

$$\text{div}(X) = \sum_i \nabla_i X^i$$

Другими словами, дивергенция векторного есть след матрицы его ковариантных производных.

Пусть $F^{n-1} \subset F^n$ – семейство гиперповерхностей уровня некоторой гладкой функции f :

$$f(u^1, \dots, u^n) = \text{const}.$$

Тогда

$$\xi := \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$$

является полем единичных нормалей на каждой из таких гиперповерхностей. Оператор Вейнгартена для гиперповерхности определяется так же как и для поверхности в E^3 , а именно,

$$AX = -\nabla_X \xi,$$

где X – касательное векторное поле на гиперповерхности. Функция

$$H = \frac{1}{n-1} \text{trace}(A)$$

называется средней кривизной гиперповерхности.

Утверждение 4.6.2 *Средняя кривизна гиперповерхности*

$$f(u^1, \dots, u^n) = c$$

в римановом пространстве (F^n, g) может быть вычислена по формуле

$$H \Big|_{f=c} = -\frac{1}{n-1} \operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \right) \Big|_{f=c}.$$

Доказательство. Действительно, обозначим через ∂_i – координатный базис на гиперповерхности $f = c$. Если $\xi(c)$ – единичное нормальное векторное поле этой гиперповерхности, то

$$\nabla_{\partial_i} \xi(c) = -a_i^k(c) \partial_k.$$

Тогда

$$a_k^i(c) = -g^{is} \langle \nabla_{\partial_k} \xi, \partial_s \rangle_g = -g^{is} g_{sm} \nabla_{\partial_k} \xi^m(c) = \nabla_{\partial_k} \xi^i(c)$$

а значит

$$\operatorname{trace}(A(c)) = -\nabla_{\partial_i} \xi^i \Big|_{f=c} = -\operatorname{div}(\xi) \Big|_{f=c}.$$

Полагая $\xi = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$, получим требуемое. ■

Упражнение 4.6.1 *Проверьте справедливость формулы*

$$\operatorname{div}(f \cdot X) = \langle \operatorname{grad} f, X \rangle_g + f \cdot \operatorname{div}(X).$$

для любой гладкой функции f .

В качестве следствия, выпишем формулу для геодезической кривизны кривой, заданной неявно, на двумерной поверхности.

Упражнение 4.6.2 *Покажите, что*

- геодезическая кривизна кривой $f(u^1, u^2) = c$ на двумерной поверхности выражается формулой

$$k_g = -\operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \right) \Big|_{f=c} = - \left(\frac{\Delta f}{|\operatorname{grad} f|_g} \Big|_{f=c} + \nabla \left(\varphi, \frac{1}{|\operatorname{grad} f|_g} \right) \Big|_{f=c} \right);$$

- выражение для средней кривизны гиперповерхности $f(u^1, \dots, u^n) = c$ в римановом пространстве (F^n, g) может быть приведено к виду

$$H \Big|_{f=c} = -\frac{1}{n-1} \left(\frac{\Delta f}{|\operatorname{grad} f|_g} \Big|_{f=c} + \nabla \left(f, \frac{1}{|\operatorname{grad} f|_g} \right) \Big|_{f=c} \right).$$

- средняя кривизна координатной гиперповерхности $u^k = c = \operatorname{const}$ может быть сведена к формуле

$$H \Big|_{u^k=c} = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{\sqrt{g^{kk}}} \left(-g^{ij} \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{g^{kk}} g^{ik} g^{jk} \Gamma_{ij}^k \right) \Big|_{u^k=c} =$$

$$\frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{(g^{kk})^{3/2}} \left| \begin{matrix} g^{kk} & g^{ki} \\ g^{kj} & g^{ij} \end{matrix} \right| \Gamma_{ij}^k \right) \Big|_{u^k=c}.$$

Если на данной гиперповерхности $f(u^1, \dots, u^n) = \text{const}$ вектор градиента не обращается в нуль, то вдоль этой гиперповерхности определено поле единичных нормалей $\xi = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$. Обозначим через x^1 натуральный параметр на каждой из геодезических, проведенных в направлении вектора ξ . В силу невырожденности градиента, сама гиперповерхность $f = \text{const}$ допускает локальную параметризацию некоторыми параметрами $(x^2, \dots, x^n)$. Приняв $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в качестве новых параметров на F^n , мы получим локальное задание гиперповерхности $f = \text{const}$ уравнением $x^1 = 0$ и, очевидно, $g_{11} = 1$, $g_{1\alpha}(0, x^2, \dots, x^n) = 0$ ($\alpha = 2, \dots, n$). Записав уравнения геодезических в новых координатах, легко видеть, что $\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial x^1} = 0$. Следовательно, $g_{1\alpha} \equiv 0$ и первая фундаментальная форма для F^n сведется к виду [16]

$$ds^2 = (dx^1)^2 + g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^\alpha dx^\beta.$$

Отсюда видно, что семейство эквидистантных поверхностей ($x^1 = \text{const}$) образует семейство гиперповерхностей, ортогональных построенному семейству геодезических. Построенная параметризация является *аналогом полугеодезической системы координат* на двумерной поверхности.

В курсе анализа оператор Лапласа определялся на C^2 -гладких функциях формулой

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f).$$

Оператор Лапласа-Бельтрами определяется такой же самой формулой, но в предположении, что дивергенция и градиент вычисляются в произвольной криволинейной системе координат.

Утверждение 4.6.3 Пусть $f : F^n \rightarrow \mathbb{R}$ — C^2 -гладкая функция на римановом многообразии (F^n, g) . Тогда

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = g^{mk}(\partial_{mk} f - \Gamma_{mk}^i \partial_i f).$$

Доказательство. Учитывая, что $\nabla_k(g^{mk}) = 0$, находим

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } f) &= \\ \nabla_k(\text{grad } f)^k &= \nabla_k(g^{mk} \partial_m f) = g^{mk} \nabla_k(\partial_m f) = g^{mk}(\partial_{mk} f - \Gamma_{mk}^i \partial_i f), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство. ■

Напомним, что в декартовых координатах лапласиан функции может быть выражен еще и как след матрицы вторых производных, т.е. *гессиана* функции. Аналогом гессиана в криволинейных координатах является следующая конструкция.

Пусть $\omega = df$ — форма первого дифференциала гладкой функции. Ковариантная производная формы ω имеет вид

$$\nabla_k \omega_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial u^k} - \Gamma_{ik}^m \omega_m = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k} - \Gamma_{ik}^m \frac{\partial f}{\partial u^m} \right),$$

является симметричной билинейной матрицей и называется *Гессианом* функции на многообразии. Таким образом,

$$(Hess f)_{ik} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k} - \Gamma_{ik}^m \frac{\partial f}{\partial u^m} \right).$$

Формой Гессе функции f называется симметричная билинейная форма

$$\text{Hess}_f(X, Y) = (\text{Hess}_f)_{ik} X^i Y^k.$$

В этих терминах лапласиан является полной сверткой тензора $g^{-1} \otimes \text{Hess}_f$, то есть

$$\Delta f = g^{ik} (\text{Hess}_f)_{ik}.$$

Функция на поверхности называется *гармонической*, если оператор Лапласа-Бельтрами от нее равен нулю:

$$\Delta f = g^{ik} \nabla_{ik} f = g^{ik} (\partial_{ik} - \Gamma_{ik}^m \partial_m f) = 0,$$

Ненулевая функция f называется собственной функцией оператора Лапласа - Бельтрами, если существует такое число λ , что

$$\Delta f = \lambda f.$$

Набор чисел $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ называется *спектром* оператора Лапласа - Бельтрами. Собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами на единичной сфере называются *сферическими гармониками* и относятся к классу специальных функций.⁴

Утверждение 4.6.4 *Поверхность $F^2 \subset E^3$ минимальна тогда и только тогда, когда координатные функции ее конформной параметризации являются гармоническими функциями.*

Доказательство. Относительно конформной параметризации, первая фундаментальная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = e^{2\sigma} ((du^1)^2 + (du^2)^2).$$

Тогда

$$g = \begin{pmatrix} e^{2\sigma} & 0 \\ 0 & e^{2\sigma} \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2\sigma} & 0 \\ 0 & e^{-2\sigma} \end{pmatrix}$$

Сосчитаем символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \partial_1 \sigma, & \Gamma_{12}^1 &= \partial_2 \sigma, & \Gamma_{22}^1 &= -\partial_1 \sigma; \\ \Gamma_{11}^2 &= -\partial_2 \sigma, & \Gamma_{12}^2 &= \partial_1 \sigma, & \Gamma_{22}^2 &= \partial_2 \sigma. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta f &= g^{ik} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k} - \Gamma_{ik}^m \frac{\partial f}{\partial u^m} \right) = \\ &= e^{-2\sigma} \left(\frac{\partial^2 f}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial u^2)^2} - (\Gamma_{11}^m + \Gamma_{22}^m) \frac{\partial f}{\partial u^m} \right) = e^{-2\sigma} \Delta_0 f. \end{aligned}$$

⁴Подробнее см. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для инженеров и научных работников.

где через Δ_0 обозначен Евклидов Лапласиан функции, то есть Лапласиан функции в Декартовых координатах. Отсюда

$$\Delta f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_0 f = 0.$$

Рассмотрим конформную параметризацию поверхности

$$\vec{r} = \{\varphi^1(u^1, u^2), \varphi^2(u^1, u^2), \varphi^3(u^1, u^2)\}, \quad (u^1, u^2) \in \mathcal{D}, \varphi^i: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Используя разложение Вейнгартена

$$\partial_{ik}\vec{r} = \Gamma_{ik}^m \partial_m \vec{r} + b_{ik} \vec{n},$$

найдем

$$\Delta_0 \vec{r} = \sum_i \partial_{ii} \vec{r} = (\Gamma_{11}^m + \Gamma_{22}^m) \partial_m \vec{r} + (b_{11} + b_{22}) \vec{n} = (b_{11} + b_{22}) \vec{n}.$$

Заметим, что

$$H = \frac{1}{2} \text{trace } A = \frac{1}{2} \text{trace } (g^{-1} B) = \frac{1}{2} \text{trace} \left[\begin{pmatrix} e^{-2\sigma} & 0 \\ 0 & e^{-2\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} e^{-2\sigma} (b_{11} + b_{22}).$$

Значит, $H = 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta_0 \vec{r} = 0$.

■

Упражнение 4.6.3 Доказать, что в E^3 не существует замкнутой минимальной поверхности.

Как известно, действительная и мнимая части голоморфной функции комплексного переменного являются гармоническими функциями. Это обстоятельство позволяет строить большое число примеров минимальных поверхностей и называется *представлением Вейерштрасса-Эннепера для минимальной поверхности*⁵. Введем на минимальной поверхности с радиусом-вектором $x = (x^1, x^2, x^3)$ конформные (изотермические) координаты (u_1, u_2) и обозначим $z = u_1 + iu_2$. В этих координатах линейный элемент имеет вид $ds^2 = \Lambda(du_1^2 + du_2^2)$. Пусть

$$\varphi_k(z) = \frac{\partial x^k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x^k}{\partial u_2} \quad (4.18)$$

Так как $\frac{\partial x^k}{\partial u_j}$ при $j = 1, 2$ — сопряженные гармонические функции, то $\varphi_k(z)$ аналитические функции. Тогда получим уравнение

$$\sum_{k=1}^3 \varphi_k^2(z) = \sum_{k=1}^3 \left\{ \left(\frac{\partial x^k}{\partial u_1} \right)^2 - 2i \frac{\partial x^k}{\partial u_1} \frac{\partial x^k}{\partial u_2} - \left(\frac{\partial x^k}{\partial u_2} \right)^2 \right\} = 0 \quad (4.19)$$

⁵Здесь мы используем выкладки из [2]

где мы использовали то обстоятельство, что координаты изотермические:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2, \quad \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} = 0.$$

Кроме того, имеем

$$\sum_k |\varphi_k(z)|^2 = \sum_k \left\{ \left(\frac{\partial x^k}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^k}{\partial u_2}\right)^2 \right\} = 2\Lambda \quad (4.20)$$

Рассмотрим уравнение (4.19). Это уравнение можно разрешить с помощью двух комплексных аналитических функций f и g . Покажем, что для функций φ_k , удовлетворяющих уравнению (4.19), существует представление

$$\varphi_1 = \frac{f}{2}(1 - g^2), \quad \varphi_2 = \frac{if}{2}(1 + g^2), \quad \varphi_3 = fg \quad (4.21)$$

Прежде всего заметим, что так заданные функции φ_k действительно удовлетворяют уравнению (4.19). Подстановка в уравнение дает тождество

$$\frac{1}{4}f^2(1 - 2g^2 + g^4) - \frac{1}{4}f^2(1 + 2g^2 + g^4) + f^2g^2 \equiv 0$$

Обратно, если известны функции φ_k , удовлетворяющие уравнению (4.19), то функции f и g определим следующим образом

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2, \quad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} \quad (4.22)$$

Покажем, что с помощью так определенных функций f и g , функций φ_k представляются в виде (4.21). Действительно, имеем из (4.22) очевидное равенство

$$\varphi_3 = fg$$

Далее, уравнение (4.19) можно записать так

$$(\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2) = -\varphi_3^2$$

Отсюда находим

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = -\frac{\varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} = -\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}\right)^2 (\varphi_1 - i\varphi_2) = -fg^2$$

С помощью этого равенства и выражения для f в (4.22) находим

$$2\varphi_1 = f - fg^2, \quad -2i\varphi_2 = f + fg^2$$

т.е. имеем выражения (4.21). Для регулярной поверхности функции $\varphi_k(z)$ должны быть регулярны. Это накладывает определенные условия на поведение функций f и g . В области изменения комплексной переменной z функция $g(z)$ может быть произвольной мероморфной функцией, в то время как $f(z)$ — аналитическая функция. При этом, если в некоторой точке z функция $g(z)$ имеет полюс порядка m , то f должна

иметь в этой точке ноль порядка не менее $2m$. В противном случае в этой точке φ_1 было бы неограничено. Но и больший порядок нуля, чем $2m$ функция f не может иметь, так как в противном случае $\varphi_k = 0$, $k = 1, 2, 3$ т.е. базисные касательные векторы x_{u_1} и x_{u_2} равны нулю, что невозможно.

Имеет место представление

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \operatorname{Re} \int f(1 - g^2) dz & + c_1 \\ 2x_2 &= \operatorname{Re} \int i f(1 + g^2) dz & + c_2 \\ x_3 &= \operatorname{Re} \int f g dz & + c_3 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Действительно, имеем пример для первой компоненты радиус-вектора

$$2x_1 = 2\operatorname{Re} \int \varphi_1 dz + c_1 = \operatorname{Re} \int f(1 - g^2) dz + c_1$$

В качестве независимой комплексной переменной можно взять и g . Тогда получим классическое представление Вейерштрасса-Эннепера

$$\begin{aligned} x_1 &= \Re \int F(g)(1 - g^2) dg & + a_1 \\ x_2 &= \Re i \int F(g)(1 + g^2) dg & + a_2 \\ x_3 &= \Re \int 2F(g)g dg & + a_3 \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $F(g) = \frac{1}{2}f\frac{dz}{dg}$ — называется функцией Вейерштрасса. Если в этих формулах положить $F(g) = 1$, то получим поверхность Эннепера, при $F = -\frac{1}{2g^2}$ получим катеноид. Функция $F = 1/\sqrt{1 - 14g^4 + g^8}$ соответствует поверхности Г.А. Шварца. Поверхность Хеннеберга получается при $F = 1 - \frac{1}{g^4}$.

Ротор векторного поля. Поле Киллинга.

Пусть ξ — векторное поле на поверхности. Обозначим через ω — форму, двойственную векторному полю ξ . Тогда

$$\omega_i = g_{ik}\xi^k.$$

Ротором векторного поля ξ называется кососимметричная 2-форма $\operatorname{rot} \xi$, определяемая формулой

$$(\operatorname{rot} \xi)_{ik} = \nabla_i \omega_k - \nabla_k \omega_i.$$

Векторное поле называется замкнутым, если его ротор равен нулю.

Упражнение 4.6.4 Покажите, что если данное определение согласуется с определением ротора из векторного анализа в R^3 .

Векторное поле ξ называется полем Киллинга (или Киллинговым), если оно удовлетворяет уравнению

$$\nabla_i \omega_k + \nabla_k \omega_i = 0,$$

где ω — двойственная 1- форма.

Упражнение 4.6.5 *Покажите, что единичное векторное поле ξ является полем Киллинга тогда и только тогда, когда*

$$\langle \nabla_X \xi, Y \rangle_g = -\langle \nabla_Y \xi, X \rangle_g.$$

Последнее равенство означает, что оператор Номидзу $A_\xi : X \rightarrow -\nabla_X \xi$ является косо-симметричным линейным оператором.

Упражнение 4.6.6 *Покажите, что если оператор A_ξ симметричен, то интегральные траектории поля ξ являются геодезическими линиями, а само поле является полем единичных нормалей некоторого семейства гиперповерхностей.*

Рекомендованная литература

- [1] Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий. Киев, Наукова думка, 2002
- [2] Аминов Ю.А. Минимальные поверхности. Харьков, 1973
- [3] Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. М., Наука, 1987
- [4] Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е.. Введение в дифференциальную геометрию "в целом". М., Наука, 1973.
- [5] Борисенко А. А. Дифференциальная геометрия и топология. Х., Основа, 1995.(Укр.)
- [6] Борисенко А. А. Внутренняя и внешняя геометрия подмногообразий. М., Экзамен, 2003.
- [7] Бляшке В. Дифференциальная геометрия, ОНТИ, 1935
- [8] Брус, Джиблин, Кривые и особенности, М., Мир, 1987
- [9] Ефимов Н.В. Введение в теорию внешних форм. М., Наука, 1977.
- [10] Погорелов А.А. Дифференциальная геометрия. М., Наука, 1986
- [11] Позняк Э.Г., Шикин В.Б. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. М., Наука, 1986
- [12] Постников М.М. Лекции по геометрии. Гладкие многообразия. М., Наука, 1987
- [13] Постников М.М. Лекции по геометрии. Дифференциальная геометрия. М., Наука, 1988
- [14] Рашевский П. К. Дифференциальная геометрия, М., Наук, 1948
- [15] Рашевский П. К. Введение в риманову геометрию и тензорный анализ, ОНТИ, 1936
- [16] Эйзенхарт Л. Риманова геометрия. ИЛ, М., 1948
- [17] J. Lie Riemannian geometry. An imntroduction to curvature. Springer, 1950
- [18] David R. Wilkins. A course in Riemannian Geometry. 2005.

Предметный указатель

- Бельтрами
 - оператор, 225
- Вейнгартена
 - матрица, 111
 - оператор, 123
 - разложение, 111
- Дарбу
 - разложение, 115
 - репер, 115
- Дифференциал ковариантный, 189
- Дюпена
 - индикатриса, 125
- Киллинга
 - векторное поле, 231
- Кристоффеля символы
 - второго рода, 149
 - первого рода, 149
 - преобразование, 212
- Уитни
 - теорема, 13
- Уравнение
 - Гаусса, 151
 - Кодацци, 151
- Фенхеля
 - неравенство, 37
- Френе
 - репер, 38
 - трехгранник, 38
 - формулы, 45
- Эйлера
 - формула, 127
- Якоби
 - тождество, 216
- вектор
 - бинормали, 37
 - геодезической кривизны, 115
 - главной нормали, 37
 - касательной, 28
 - нормали поверхности, 101
 - нормальной кривизны, 115
- векторное поле, 188
 - параллельное, 189
 - вдоль кривой, 192
- вторая фундаментальная форма, 102
- гессиан, 227
- годограф, 18, 24
- градиент, 224
- дивергенция, 34, 225
- изометрия, 95
- индикатриса
 - сфеническая, 36
- интегральная траектория, 34
- касательная, 27
- каустика, 65
- координатная сеть
 - из асимптотических линий, 135
 - из линий кривизны, 134
 - полугеодезическая, 158
 - сопряженная, 135
- кривая
 - на поверхности, 19
 - неявно заданная, 26
 - регулярная, 9
 - регулярная параметризованная, 23
 - сферическая, 71
 - явно заданная, 24, 25
- кривизна
 - Риччи, 223

- кривой, 31, 34
- секционная, 221
- скалярная, 223
- кривизна кривой
 - геодезическая, 115, 136, 154
 - интегральная, 51
 - нормальная, 115
 - ориентированная, 49
- кривизна поверхности
 - Гауссова, 112, 124
 - главная, 121
 - нормальная, 120
 - средняя, 124
- кручение кривой
 - геодезическое, 115
 - пространственное, 42
- линия
 - асимптотическая, 116, 135
 - уравнение, 135
 - геодезическая, 115, 192
 - уравнение, 155
 - горловая, 145
 - кривизны, 116, 130
 - уравнение, 132
- многообразие, 7
 - гладкое, 8
 - риманова, 212
- множество
 - дискриминантное, 58
- овал, 53
 - ширина, 55
- огibaющая, 58
- окружность соприкасающаяся, 68
- оператор
 - Бельтрами, 225
 - Вейнгартена, 123
 - Лапласа-Бельтрами, 227
 - Номидзу, 215
- оператор Лапласа-Бельтрами
 - спектр, 228
- отображение
 - изометричное, 95
 - конформное, 99
 - регулярное, 9
- экспоненциальное, 160
- параметризация
 - локальная, 8
 - натуральная, 31
 - явная, 10
- параметризация внешняя
 - внешняя, 20
- параметризация кривой
 - внутренняя, 19
- первая фундаментальная форма, 74
- плоскость
 - нормальная, 38
 - соприкасающаяся, 38
 - спрямляющая, 38
- поверхность
 - вполне омбилическая, 129
 - вращения, 81
 - касательных, 83
 - линейчатая, 82, 143
 - минимальная, 179
 - неявно заданная, 19
 - переноса, 81
 - развертывающаяся, 143
 - регулярная параметризованная, 18
 - цилиндрическая, 83
 - эквилистантная, 140
 - элементарная, 16
 - явно заданная, 83
- подмногообразие, 8
 - неявно заданное, 13
 - регулярное параметризованное, 9
- разложение Гаусса-Вейнгартена, 149
- ротатор векторного поля, 231
- связность
 - аффинная, 215
 - без кручения, 216
 - метрическая, 216
 - риманова, 216
 - симметричная, 216
- скобка Ли, 216
- соприкасающаяся
 - окружность, 68
 - сфера, 69
- соприкасающийся параболоид, 106

сферический образ, 108

тензор, 207

Римана, 218

Риччи, 223

ковариантная производная, 214

кососимметричный, 209

кручения, 215

опускание/понятие индекса, 210

свертка, 210

симметричный, 209

теорема

Бельтрами-Эннепера, 139

Бернштейна, 187

Бонне, 153

Гаусса, 150

Гаусса-Бонне, 201

Иоахимсталя, 117

Менье, 119

Родрига, 132

Уитни, 13

Якоби, 202

о четырех вершинах, 54

об обратном отображении, 8

торс, 83

точка

эллиптическая

гиперболическая

параболическая

уплощения, 108

изолированная, 30

омбилическая, 128

особая

неявно заданной кривой, 30

параметризованной кривой, 29

самокасания, 30

узловая, 30

третья фундаментальная форма, 138

уравнение поверхности

параметрическое, 16

форма

Гессе, 228

внешняя, 209

формула

Гаусса-Бонне, 200

формула Кошуля, 217

формулы

Родрига, 134

Френе, 45, 71

функция

опорная, 55

эвольвента, 64

эволюта, 62

пространственная, 71